



Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
Abgabe: 10. Dezember		Anerkannt: ☒ ☒ ^B
Grundvoraussetzungen für die Anerkennung der Hausübung sind eine ordentliche äußere Form (z. B. keine lose Blatt-Sammlung, lesbare Schrift) und die vollständige, nachvollziehbare und größtenteils korrekte Bearbeitung aller Aufgabenteile.		

Aufgabe 1.1:

Gegeben sind ein Skalarfeld α und ein Vektorfeld $\mathbf{v}$:

$$\alpha(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_3^2,$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = x_1 x_3^2 \mathbf{e}_1 + x_2 x_1^2 \mathbf{e}_2 + x_3 x_2^2 \mathbf{e}_3.$$

Bestimmen Sie

- (a) den Gradienten $\text{grad } \alpha$ des Skalarfelds α sowie
- (b) den Gradienten $\text{grad } \mathbf{v}$ und die Divergenz $\text{div } \mathbf{v}$ des Vektorfelds $\mathbf{v}$.

Aufgabe 1.2:

Die Bewegungsfunktion einer Scherung ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = (X_1 + \gamma(t) X_2) \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3.$$

Bestimmen Sie

- (a) den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$,
- (b) den Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{d\mathbf{X}}$,
- (c) den rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ sowie
- (d) den GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$.

Aufgabe 1.3:

Gegeben ist eine Temperaturverteilung in materieller Darstellung:

$$T(\mathbf{X}, t) = aX_1 + bX_2.$$

Die zugehörige Bewegung ist durch

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = cX_1(1 + t)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$$

gegeben, wobei a , b und c Konstanten sind.

- (a) Berechnen Sie die räumliche (EULERSche) Darstellung der Temperatur.
- (b) Bestimmen Sie die Zeitableitung $\frac{d}{dt} T(\mathbf{x}, t) = \dot{T}(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 1.4:

Gegeben ist das zweidimensionale Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -A(x_1^3 + x_1 x_2^2)e^{-kt} \mathbf{e}_1 + A(x_1^2 x_2 + x_2^3)e^{-kt} \mathbf{e}_2,$$

in räumlicher Darstellung, mit $A, k = \text{konstant}$.

Bestimmen Sie zur Zeit $t^* = 0$ an der Stelle $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

- (a) die räumliche Beschleunigung $\mathbf{a}(\mathbf{x}^*, t^*)$ sowie
- (b) den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, t^*)$.

Aufgabe 1.1:

$$\alpha(x) = x_1^2 x_2 + 3 x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 + 2 x_3^2$$

$$\underline{v}(x) = x_1 x_3^2 \underline{e}_1 + x_2 x_1^2 \underline{e}_2 + x_3 x_2^2 \underline{e}_3$$

$$a) \quad \text{grad } \alpha(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx} \underline{e}_i = \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_1} = 2 x_1 x_2 + 3 x_2 + 2 x_3$$

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_2} = x_1^2 + 3 x_1$$

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_3} = 2 x_1 + 4 x_3$$

$$\text{grad } \alpha(x) = \begin{pmatrix} 2 x_1 x_2 + 3 x_2 + 2 x_3 \\ x_1^2 + 3 x_1 \\ 2 x_1 + 4 x_3 \end{pmatrix} \underline{e}_i \quad \checkmark$$

$$b) \quad \text{grad } \underline{v}(x) = \frac{d\underline{v}(x)}{dx} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$v_1 = x_1 x_3^2$$

$$v_2 = x_2 x_1^2$$

$$v_3 = x_3 x_2^2$$

$$\text{grad } \underline{v}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$= \begin{pmatrix} x_3^2 \checkmark & 2 x_1 x_2^f & 0^f \\ 0^f & x_1^2 \checkmark & 2 x_3 x_2^f \\ 2 x_3^f & 0^f & x_2^2 \checkmark \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad f$$

$$\text{div } \underline{v}(x) = \text{grad } \underline{v}(x) \cdot \underline{I} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \checkmark$$

Aufgabe 1.2

$$x(\underline{X}, t) = \underline{X}_1 + \gamma(t) \underline{X}_2 \underline{e}_1 + \underline{X}_2 \underline{e}_2 + \underline{X}_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \gamma(t) \underline{X}_2 + \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \underline{X}_3 \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

a) Verschiebungsvektor $\underline{u} = \underline{x} - \underline{X}$

$$\underline{u} = \begin{cases} u_1 = x_1 - \underline{X}_1 = \gamma(t) \cdot \underline{X}_2 \\ u_2 = x_2 - \underline{X}_2 = 0 \\ u_3 = x_3 - \underline{X}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \gamma(t) \underline{X}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i \quad \checkmark$$

b) Deformationsgradient $\underline{F} = \text{Grad } \underline{x} = \frac{d\underline{x}(\underline{X}, t)}{d\underline{X}}$

$$\underline{F} = \text{Grad } \underline{x} = \frac{d\underline{x}(\underline{X}, t)}{d\underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

~~$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$~~

$$F_{11} = 1 \quad F_{12} = \gamma(t) \quad F_{13} = 0$$

$$F_{21} = 0 \quad F_{22} = 1 \quad F_{23} = 0$$

$$F_{31} = 0 \quad F_{32} = 0 \quad F_{33} = 1$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \checkmark$$

c) CAUCHY - GREEN - Deformationstensor $\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F}$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ \gamma(t) & \gamma(t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \checkmark$$

d) GREEN - LAGRANGE - Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & r(t) & 0 \\ r(t) & r(t)^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & r(t) & 0 \\ r(t) & r(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} r(t) & 0 \\ \frac{1}{2} r(t) & \frac{1}{2} r(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \checkmark$$

Aufgabe 1.3

$$T(\underline{X}, t) = a \underline{X}_1 + b \underline{X}_2$$

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = c \underline{X}_1 (1+t) \underline{e}_1 + \underline{X}_2 \underline{e}_2 + \underline{X}_3 \underline{e}_3$$

a, b, c sind Konstanten

$$a) \quad \underline{x}(\underline{X}, t) = \begin{pmatrix} c \underline{X}_1 (1+t) \\ \underline{X}_2 \\ \underline{X}_3 \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

eulersche Darstellung von $\underline{T}$

$$\underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t) \Rightarrow \underline{X}_1 = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{1}{1+t}$$

$$\underline{X}_2 = x_2$$

$$\underline{X}_3 = x_3$$

$$\underline{\underline{X}}(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} x_1/c \cdot \frac{1}{1+t} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

→ in Temperaturverteilung einsetzen

~~$$T(\underline{x}, t) = \frac{a \cdot x_1}{c} \cdot \frac{1}{1+t}$$~~

$$T(\underline{x}, t) = \frac{a}{c(1+t)} x_1 + b x_2 = a[c(1+t)]^{-1} x_1 + b x_2 \quad \checkmark$$

$$b) \quad \dot{T}(\underline{x}, t) = \frac{d}{dt} T(\underline{x}, t) = \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}}_{\text{grad } T(\underline{x}, t)} \cdot \underbrace{\frac{d \underline{x}}{dt}}_{\underline{v}(\underline{x}, t)}$$

$$\frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} = -a x_1 [c(1+t)]^{-2} = - \frac{a x_1}{c(1+t)^2}$$

$$\text{grad } T(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \underline{e}_i = \begin{pmatrix} a[c(1+t)]^{-1} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{d \underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} c \bar{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$\bar{x}_1 = \underline{x}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{1}{1+t} = x_1 [c(1+t)]^{-1}$$

$\bar{x}_1$ in $\underline{v}(\underline{x}, t)$ einsetzen

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot (1+t)^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i \quad \checkmark$$

Zusammenfügen:

$$\begin{aligned} \dot{T}(\underline{x}, t) &= - \frac{a x_1}{c(1+t)^2} + \begin{pmatrix} \frac{a}{c(1+t)} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_i \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{(1+t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{e}_j \\ &= - \frac{a x_1}{c(1+t)^2} + \frac{a x_1}{c(1+t)^2} = \underline{0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

$$v(x, t) = -A(x_1^3 + x_1 x_2^2) e^{-kt} e_1 + A(x_1^2 x_2 + x_2^3) e^{-kt} e_2$$

$A, k = \text{konstant}$

$$t^* = 0 \quad x^* = e_1 + e_2$$

a) zeitliche Ableitung in räumlicher Darstellung

$$\underline{v}(x, t) = \begin{pmatrix} -A(x_1^3 + x_1 x_2^2) e^{-kt} \\ A(x_1^2 x_2 + x_2^3) e^{-kt} \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(x, t) &= \frac{d\underline{v}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} + \frac{d\underline{x}}{dx} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} + \text{grad } \underline{v} \cdot \underline{v}(x, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} A k e^{-kt} (x_1^3 + x_1 x_2^2) \\ -A k e^{-kt} (x_1^2 x_2 + x_2^3) \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$\text{grad } \underline{v} = \frac{d\underline{v}_i}{d\underline{x}_j} = \begin{pmatrix} -A e^{-kt} (3x_1^2 + x_2^2) & -A e^{-kt} (2x_1 x_2) \\ +A e^{-kt} (2x_1 x_2) & +A e^{-kt} (x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Alles einsetzen

$$\underline{a}(x, t) = A k e^{-kt} \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} \underline{e}_i + A e^{-kt} \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 & 2x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\bullet A e^{-kt} \begin{pmatrix} -x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 + x_2^3 \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$\underline{a}(x^*, t^*) = \begin{pmatrix} 2Ak \\ -2Ak \end{pmatrix} \underline{e}_i + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \bullet \begin{pmatrix} -2A \\ 2A \end{pmatrix} \underline{e}_i$$

$$= \begin{pmatrix} 2Ak \\ -2Ak \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4A^2 \\ 4A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Ak + 4A^2 \\ -2Ak + 4A^2 \end{pmatrix} \underline{e}_i \quad \checkmark$$

b) räumlicher Geschwindigkeitsgradient $\underline{L}(x^*, t^*)$

$$\underline{L} = \frac{d \underline{\dot{x}}}{d \underline{x}_i} = \frac{d \underline{v}(x, t)}{d \underline{x}_i} = \frac{\underline{J} \underline{v}}{\underline{J} \underline{x}} = \text{grad } \underline{v}$$

$$\text{grad } \underline{v} = \frac{d \underline{v}_i}{d \underline{x}_j} = \begin{pmatrix} -Ae^{-kt} (3x_1^2 + x_2^2) & -Ae^{-kt} (2x_1 x_2) \\ Ae^{-kt} (2x_1 x_2) & Ae^{-kt} (x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{L} = (\underline{x}^*, t^*) = \begin{pmatrix} -4A & -2A \\ 2A & 4A \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \checkmark$$