

Teil II: Statik starrer Körper

Mitschrift von Maximilian Seebeck
mit Grafiken von Betül Celebi

7. August 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Voraussetzungen	5
2	Grundbegriffe	5
2.1	Materieller Punkt, System von materiellen Punkten	5
2.2	Materieller Körper	7
2.3	Die Kraft	9
2.4	Kraftübertragung, Stützung, Schnittprinzip	13
3	Kräftesysteme	17
3.1	Das zentrale Kräftesystem	17
3.2	Allgemeines Kräftesystem (Einführung)	21
3.3	Äquivalenz allgemeiner Kräftesysteme	26
3.4	Allgemeine, räumliche Kräftesysteme	28
3.5	Das allgemeine, ebene Kräftesystem	35
4	Schwerpunkt	41
4.1	Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte	41
4.2	Schwerpunkt eines materiellen Körpers	46
4.3	Volumen-, Flächen- und Linienschwerpunkte	47
4.4	Bemerkungen zur Bestimmung des Flächenschwerpunktes	49
5	Verschieblichkeitsuntersuchungen	52
5.1	Begriffe und Symbole	52
5.2	Statische und kinematische Bestimmtheit	55
6	Auflagerreaktionen und Schnittgrößen	58
6.1	Belastung von Stützen und Balken	58
6.2	Auflagerreaktionen an zusammengesetzten ebenen Tragwerken	61
6.3	Schnittgrößen am geraden Balken unter ebener Belastung	65
6.4	Schnittgrößen an Rahmenecken und an Knoten mit mehr als 2 Staban- schlüssen	73
6.5	Schnittgrößen an einem in der Ebene gekrümmten Balken unter ebener Belastung	75
6.6	Schnittgrößen am geraden Balken unter räumlicher Belastung	77
7	Ebene Fachwerke	79
7.1	Definition und Begriffe	79
7.2	Verschieblichkeitsuntersuchungen und Bildungsgesetze	80
7.3	Berechnung von Fachwerken und Knotenschnittverfahren	83
7.4	Berechnung von Stabkräften mit dem Ritterschen Schnittverfahren	85
7.5	Ergänzende Bemerkungen	86

8	Reibung	89
8.1	Haftreibung und Gleitreibung	89
8.2	Seilhaft- und Seilgleitreibung	93
8.3	Rollreibung bzw. Rollwiderstand	95
9	Seilstatik	96
9.1	Vorraussetzungen	96
9.2	Seile unter kontinuierlicher Vertikalbelastung	98
9.3	Seil unter konstanter Vertikalbelastung	100
10	Prinzip der virtuellen Arbeit	105
10.1	Arbeitsbegriff in der Mechanik starrer Körper	105
10.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	108
10.3	Stabilität des Gleichgewichts	111

1 Mathematische Voraussetzungen

siehe „Ergänzungen zur Vorlesung, Vektorrechnung eine Einführung“

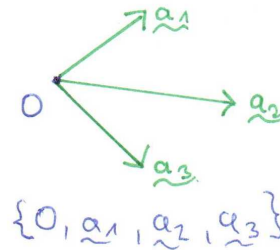
2 Grundbegriffe

2.1 Materieller Punkt, System von materiellen Punkten

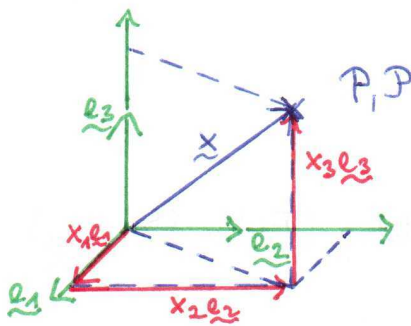
Def.: Ein materieller Punkt (Massepunkt) P ist ein Objekt mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Lage von P ist durch einen Ortsvektor $\mathbf{x}(P) \in V^3$ eindeutig festgelegt.
2. jedem P ist eindeutig eine Masse $m(P) > 0$ zugeordnet.

Def.: Ein Bezugssystem im Anschauungsraum besteht aus einem Bezugspunkt 0 und 3 nicht-koplanaren Vektoren $\mathbf{a}_i \in V^3$ ($i=1,2,3$).



Bem.: ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\mathbf{a}_i$ mit einem orthonormierten System $\mathbf{e}_i$ identifiziert werden.



P : Raumpunkt
 P : Massepunkt
 V^3 : eukl. Vektorraum
 $\mathbf{e}_i$: orthonormiertes Bezugssystem

Merke: Die Parameterlinien in einem Bezugssystem mit orthonormierter Basis heißen „kartesische Parameterlinien“ bzw. „kartesische Koordinaten“

Komponentendarstellung des Ortsvektors $\mathbf{x}(P)$:

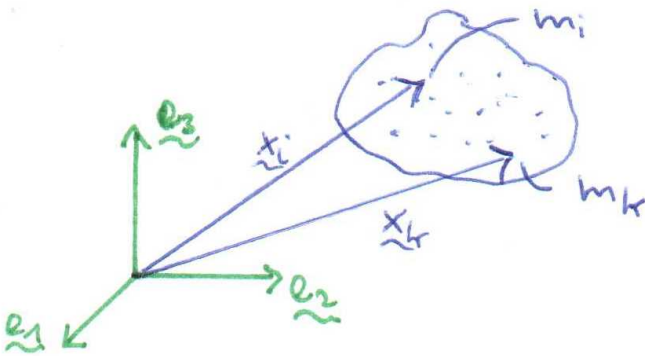
$$\mathbf{x}: \quad x_i \mathbf{e}_i = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

mit: $\begin{cases} x_i \mathbf{e}_i & (i=1,2,3) : \text{Komponenten von } \mathbf{x} \\ x_i & : \text{Koeffizienten der Vektorkomponenten} \end{cases}$

Def.: Ein System γ von materiellen Punkten P_i , $\gamma(P_i)$ mit $i = 1, 2, 3, \dots, n$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. Die Lage jedes P_i ist durch seinen Ortsvektor $x_i(P_i) \in V^3$ eindeutig festgelegt:
 $\mathbf{x}_i := \mathbf{x}(P_i)$ mit $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_k$
2. jedem P_i ist eindeutig eine Menge zugeordnet:
 $n_i = m(P_i)$
3. Die Masse von γ ergibt sich aus
 $M = m(\gamma) = \sum_{i=1}^n m_i$

Veranschaulichung

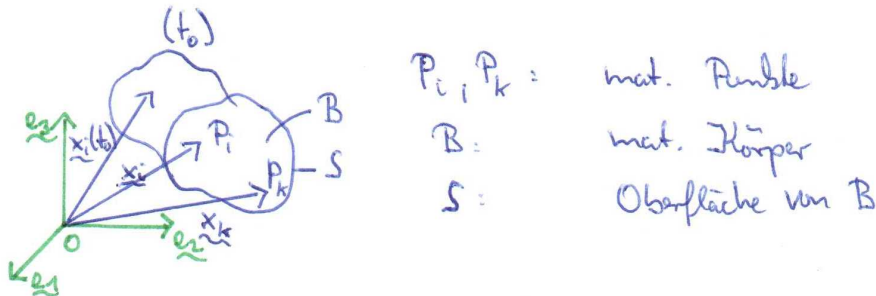


Es folgt $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_k \iff \mathbf{P}_i \neq \mathbf{P}_k$

2.2 Materieller Körper

Def.: Ein materieller Körper ist eine kontinuierlich verteilte Menge seiner materiellen Punkte P_i , die sich eindeutig im Anschauungsraum V^3 darstellen lässt. Eine solche Darstellung heißt „Konfiguration“.

Veranschaulichung:



Einführung der Konfiguration (Platzierung)

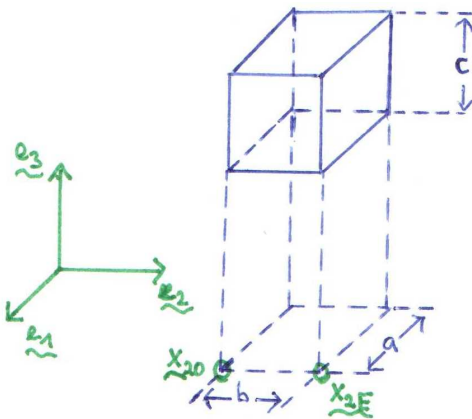
$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{P}, t)$$

d.h. die Konfiguration $\chi(\mathbf{P}, t)$ weist jedem materiellen Punkt zu jeder Zeit t eine eindeutige Lage im V^3 zu.

Volumen und Masse des materiellen Körpers

$$\begin{aligned}
 &\text{- Volumen } V = \int_B dv \\
 &\text{- Masse } M = \int_B dm \quad \text{mit} \quad \begin{cases} dm = \rho dv \\ \rho(\mathbf{x}, t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Beispiel:



$$V = \int_B dv = \int_{x_{10}}^{x_{1E}} \int_{x_{20}}^{x_{2E}} \int_{x_{30}}^{x_{3E}} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dv} = abc$$

$\rho = \text{konst.}$ (homogener Körper)

$$\Rightarrow M = \int_B dm = \int_B \rho dv = \rho \int_B dv = \rho V$$

Mechanik kontinuierlich verteilter materieller Körper
→ Kontinuumsmechanik

Reformierbarer und starrer Körper

Def.: Ein materieller Körper bei dem in jeder Konfiguration $\mathbf{x}(P, t)$ die Abstände jeweils zweier materieller Punkte P_i und P_k zueinander konstant bleiben heißt starrer Körper. Jeder andere Körper ist deformierbar.

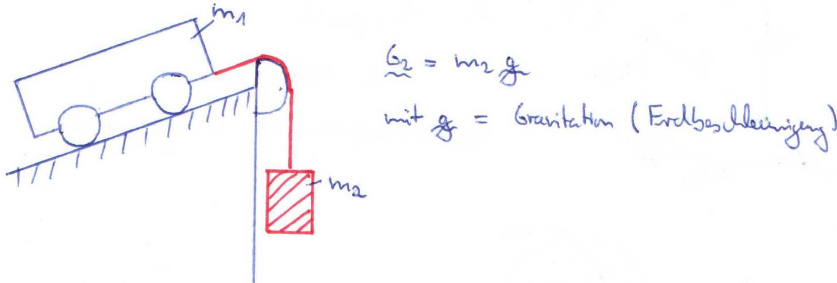
Bem: In der TM 1 befassen wir uns nur mit starren Körpern (Ausnahme: Seilstatik)

2.3 Die Kraft

Einführung des Begriffes „Kraft“ aus unserer physikalischen Erfahrung.

Merke: Eine Kraft ist eine physikalische Größe, die in ihrer Wirkung mit einer Gewichtskraft äquivalent ist.

Veranschaulichung:

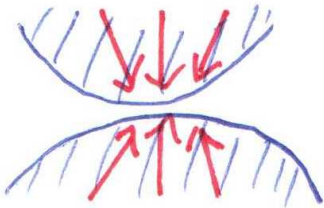


Nah- und Fernwirkungskräfte

a) Nahwirkung:

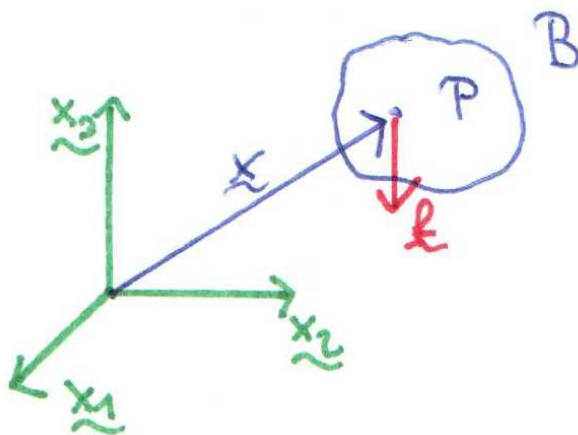
über eine Fläche verteilte oder (idealisierte) in einem Punkt konzentrierte Wirkung von Kräften

Übertragungsmechanismus: Kontakt



b) Fernwirkung:

über ein Volumen verteilt angreifende Kraftwirkung, z.B.: $\mathbf{f}$, Gravitation



Begriffe:

- t: Oberflächenspannung (Kraft pro Fläche)
- f: Volumenkraft (Kraft pro Volumen)

Die Einzelkraft

Die Einzelkraft entsteht aus der Zusammenfassung verteilt angreifender Kräfte, zu einer physikalische äquivalenten Größe.

Dimension einer Kraft

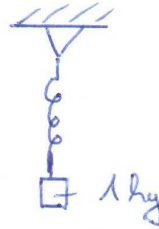
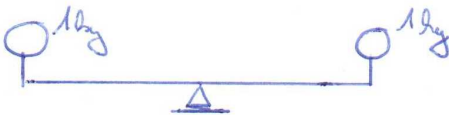
Es gilt das Newtonsche Grundgesetz:

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}}$$

$$[1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m/s}^2]$$

Bem.: Masse messen, d.h.

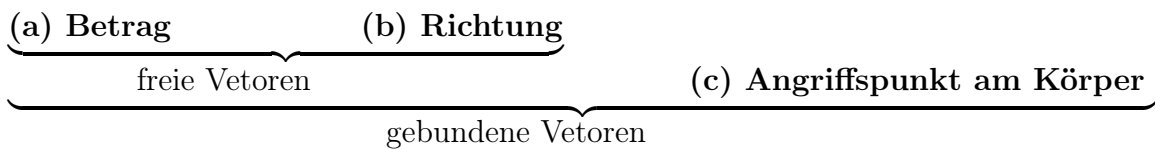
Kräfte messen d.h.



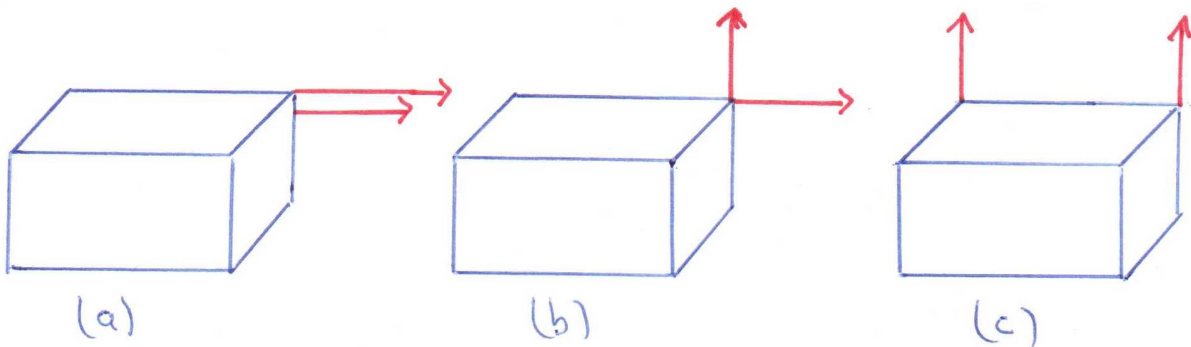
$$\Rightarrow \text{Kraft: } 1\text{kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$$

Eigenschaften von Kräften

Eine Einzelkraft ist ein Kraftvektor mit folgenden Eigenschaften:

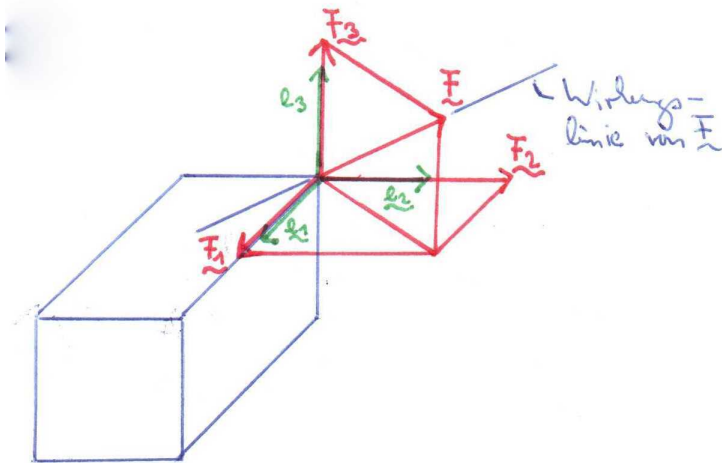


Veranschaulichung



Merke: Die Kraft ist ein gebundener Vektor

Beispiel



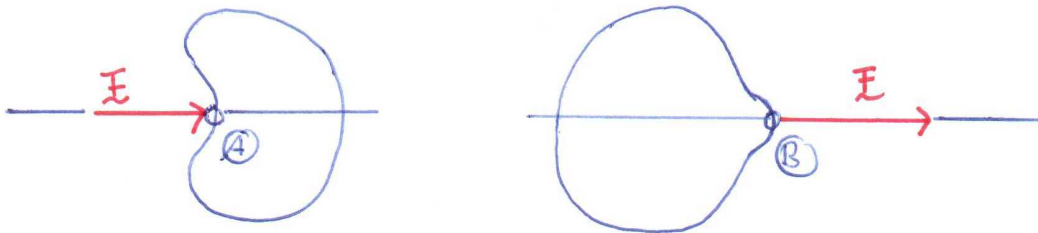
Komponentendarstellung von $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = F_i \mathbf{e}_i$$

mit $\begin{cases} \mathbf{F}_i : & \text{Kraftkomponenten} \\ F_i : & \text{Koeffizienten der Kraftkomponenten} \end{cases}$

Die Kraft am deformierten und am starren Körper

(a) deformierbarer Körper



(b) starrer Körper



Konsequenz: Am starren Körper kann $\mathbf{F}$ beliebig auf der Wirkungslinie verschoben werden.

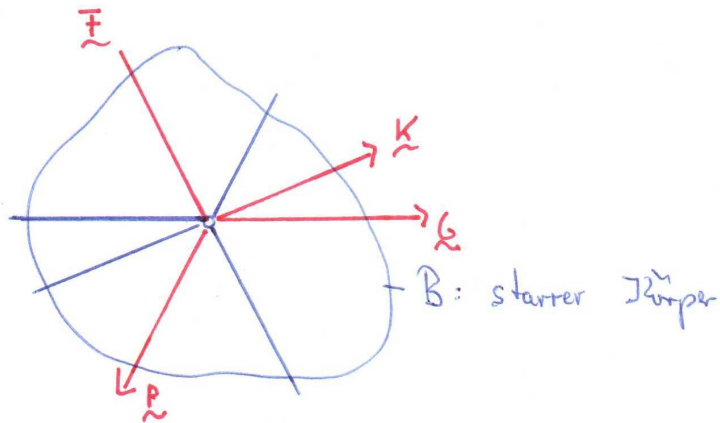
Merke: Am starren Körper ist die Kraft ein linienflüchtiger Vektor

Zentrale und Allgemein Kräftesysteme

(a) Zentrales Kräftesystem

Def.: Im Zentralen Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien der Einzelkräfte in einem Punkt.

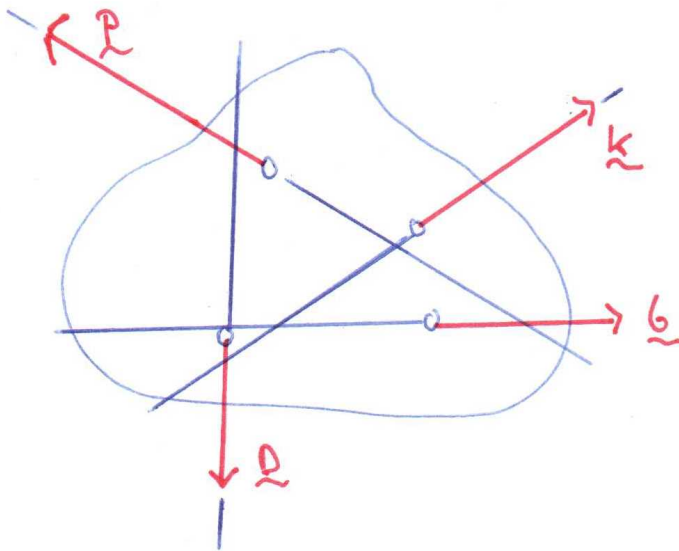
Veranschaulichung



(b) Allgemeines Kräftesystem

Def.: In einem allgemeinem Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien der Einzelkräfte nicht in einem Punkt.

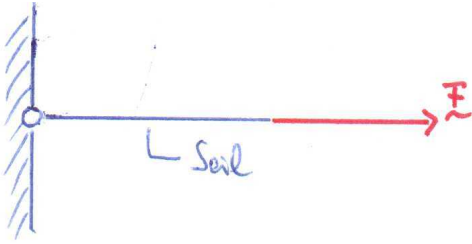
Veranschaulichung



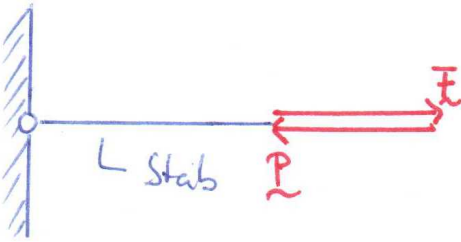
2.4 Kraftübertragung, Stützung, Schnittprinzip

(a) Kraftübertragung

- Seile (Fäden, Ketten): nur Zugkräfte

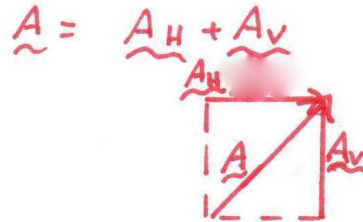
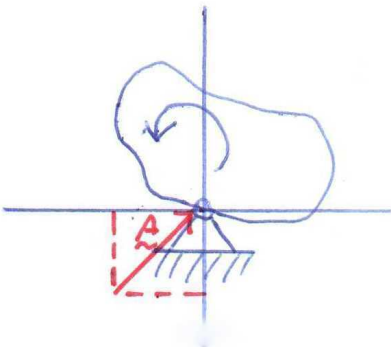


- gelenkig gelagerte Stäbe:

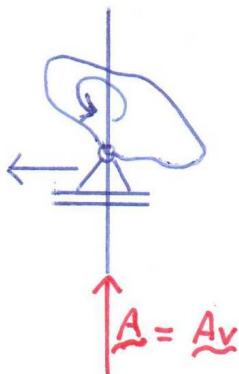


(b) Stützung (ebene Stützung; 2-dim.)

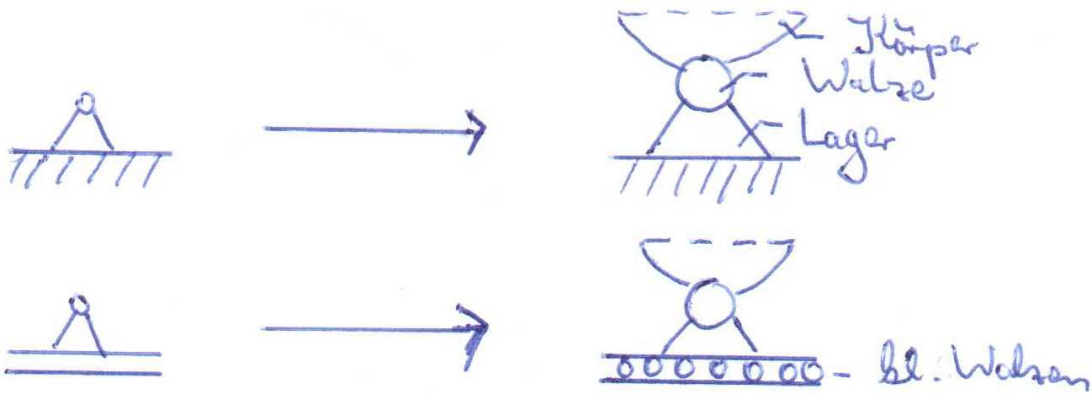
- festes Auflager: 2 Kraftkomponenten



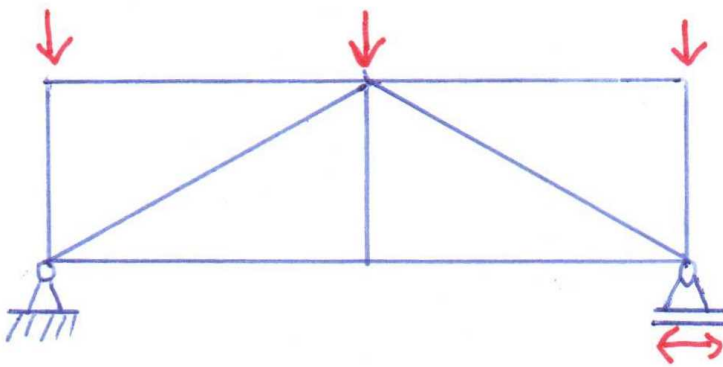
- bewegliches Auflager:



Bem.:



Beispiel:

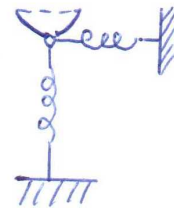
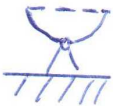


Merke: Eine Lagerung/Stützung ermöglicht eine Auflagerkraft (starre Stützung) bzw. behindert die Bewegung und damit die Verschiebung in vertikaler Richtung (elastische Stützung).

starre Stützung

vs.

elastische Stützung



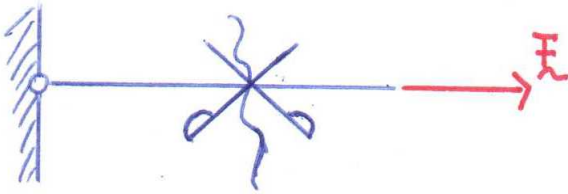
Konsequenz:

- Im Anschauungsraum (3-dim.) existieren 3 linear unabhängige Verschiebungsrichtungen.
Daraus ergeben sich auch 3 unterschiedliche Kraftrichtungen
- In der Ebene (2-dim.) existieren 2 Richtungen

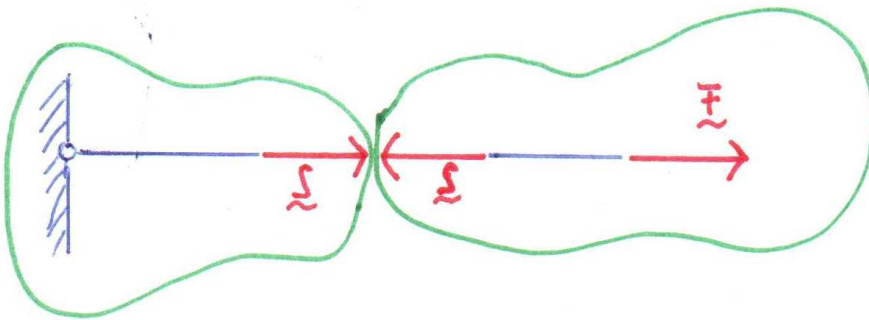
(c) Schnittprinzip

Bem.: Um Kräfte sichtbar zu machen, bedient man sich des Schnittprinzips

Veranschaulichung



Schnittführung durch Geschlossene Schnitte



Konsequenz: Es gilt das

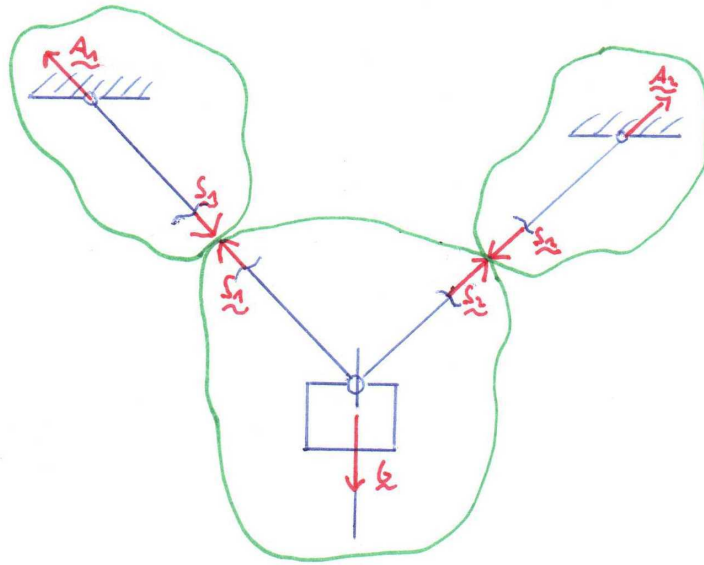
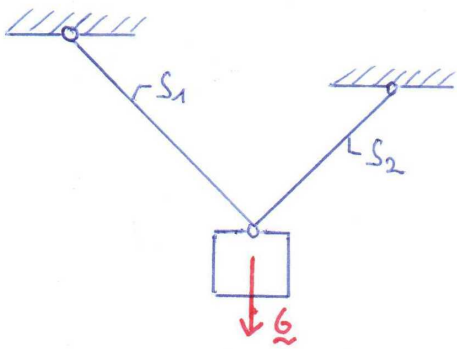
Wechselwirkungsgesetz:

Die Kräfte, die 2 Körper (bzw. Teilkörper) aufeinander ausüben sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf einer Wirkungslinie.

bzw. in Kurzform

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

Beispiel:

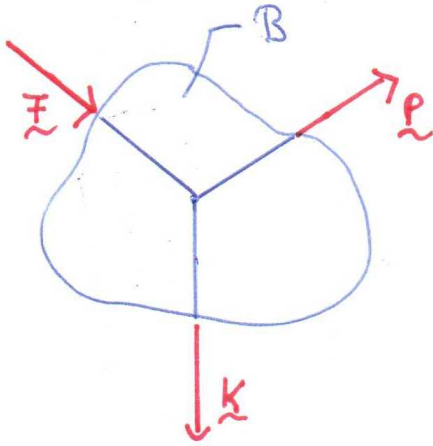


3 Kräftesysteme

3.1 Das zentrale Kräftesystem

Bem.: Am starren Körper schneiden sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt.

Veranschaulichung



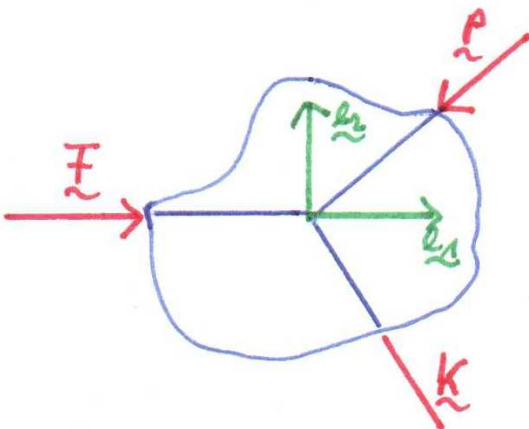
Es existieren 3 Grundaufgaben:

- (a) Reduktion des Kräftesystems auf eine Einzelkraft
- (b) Zerlegung einer Kraft
- (a) Bedingungen für das Gleichgewicht

(1) Das Zentrale, ebene Kräftesystem (2-dim.)

Bem.: In der Ebene existieren 2 voneinander unabhängige Verschiebungs- und Kraftrichtungen

Beispiel:



Geg.:

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1;$$

$$\mathbf{P} = P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2;$$

$$\Rightarrow P = |\mathbf{P}| = 5 \text{ kN}$$

$$\mathbf{K} = K_1 \mathbf{e}_1 + K_2 \mathbf{e}_2;$$

$$\Rightarrow K = |\mathbf{K}| = 5 \text{ kN}$$

$$F_1 = 3 \text{ kN}$$

$$P_1 = -4 \text{ kN}, P_2 = -3 \text{ kN}$$

$$K_1 = -3 \text{ kN}, K_2 = 4 \text{ kN}$$

Ges.:

(a) Reduktion auf eine Einzelkraft (Resultierende)

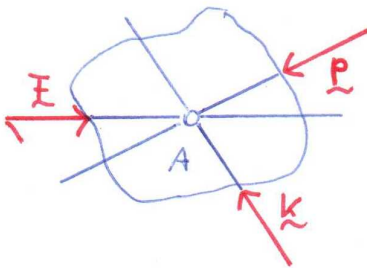
(b) Zerlegung der Resultierende in 2 Richtungen

Lösung.:

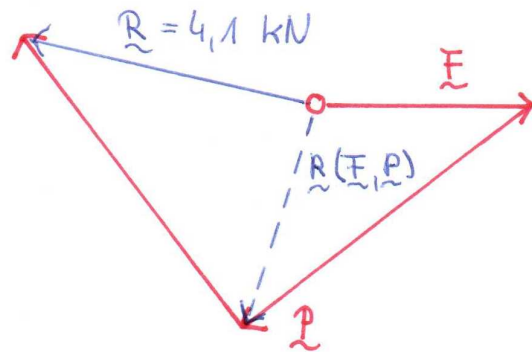
(a) Ermittlung der Resultierenden

- *graphische Lösung:*

Lageplan ($1\text{cm} \triangleq 1\text{m}$);



Kräfteplan ($1\text{cm} \triangleq 1\text{kN}$)



- *analytische Lösung:*

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{K} = R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2$$

Koeffizientengleichung:

$$\mathbf{e}_1 : R_1 = F_1 + P_1 + K_1 = 3 - 4 - 3 = -4 \text{ kN}$$

$$\mathbf{e}_2 : R_2 = F_2 + P_2 + K_2 = 0 - 3 + 4 = 1 \text{ kN}$$

Ergebnis:

$$\mathbf{R} = -4\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \quad [\text{kN}]$$

$$\Rightarrow R = |\mathbf{R}| = \sqrt{4^2 + 1} \approx 4,12 \text{ kN}$$

(b) Zerlegung von R in 2 Richtungen

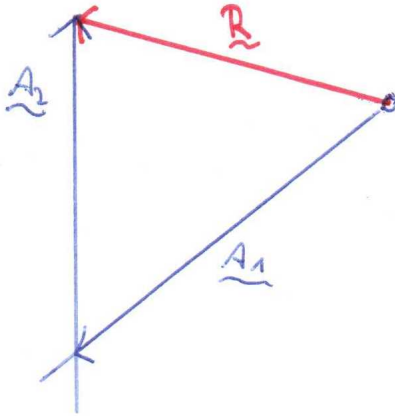
hier:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{e}_2$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}_1| = 1$$

(außerdem natürlich:) $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$

- *graphische Lösung:*



Ergebnis (abgemessen):

$$A_1 = -5,65 \text{ kN}$$

$$A_2 = 5 \text{ kN}$$

- *analytische Lösung:*

$$\mathbf{R} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \quad \text{mit:} \quad \begin{cases} \mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} A_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{a}_2 = A_2 \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Koeffizientengleichungen:

$$\mathbf{e}_1 : \quad R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} A_1 \quad \Rightarrow A_1 = -5,66 \text{ kN}$$

$$\mathbf{e}_2 : \quad R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} A_1 + A_2 \quad \Rightarrow A_2 = 5 \text{ kN}$$

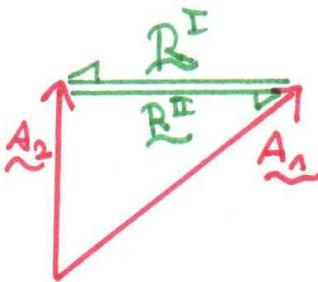
(c) Gleichgewicht

Bem.: In einem Gleichgewichtssystem (statisch) existiert keine resultierende Kraft, die am starren Körper eine Bewegung verursachen könnte.

Axiom:

In einem Gleichgewichtssystem verschwindet die Summe der angreifenden Kräfte.

Beispiel (siehe oben)



$$\mathbf{R}^I = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

$$\text{Gleichgewicht für } \mathbf{R} = \mathbf{R}^I + \mathbf{R}^{II} = 0$$

Koeffizientendarstellung des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 : \quad R_1 = 0 &= \sum_{i=1}^n (F_1)_i & \text{mit } (F_1)_i &= \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 : \quad R_2 = 0 &= \sum_{i=1}^n (F_2)_i & \text{mit } (F_2)_i &= \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

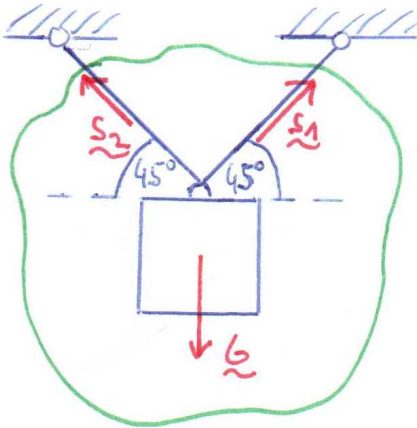
Übliche Kurzdarstellung:

mit $\mathbf{e}_1 =: \mathbf{e}_H$ und $\mathbf{e}_2 =: \mathbf{e}_V$ folgt

$\rightarrow \sum H = 0$: Summe aller „Horizontalkräfte“

$\uparrow \sum V = 0$: Summe aller „Vertikalkräfte“

Beispiel für Gleichgewicht



analytische Lösung:

- Geschlossener Schnitt, Antragen der Schnittkräfte
- Bedingungen für Gleichgewicht am Teilsystem I

Geg.: $\mathbf{G}$ mit $G = 10 \text{ kN}$

Ges.: Seilkräfte $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ für Gleichgewicht

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum H = 0 &= S_{1H} - S_{2H} = S_1 \cos(45^\circ) - S_2 \cos(45^\circ) \\ &\Rightarrow S_1 = S_2 \end{aligned}$$

$$\uparrow \sum V = 0 = S_{1V} + S_{2V} - G = 2 S_1 \sin(45^\circ) - G$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{G}{2 \sin(45^\circ)} = 7,07 \text{ kN}$$

(2) Das Zentrale, räumliche Kräftesystem

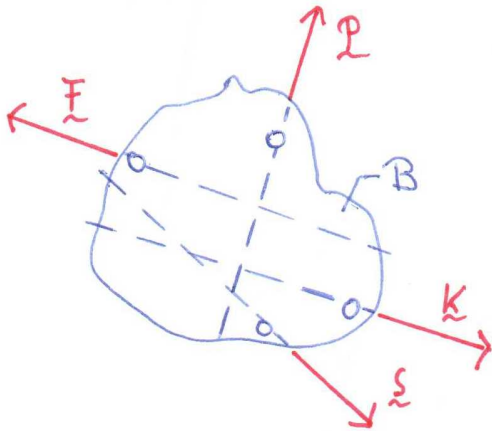
Bem.: Alle Ausführungen für das ebene, zentrale Kräftesystem gelten uneingeschränkt weiter, allerdings:

Es existieren im 3-dim. Anschauungsraum 3 unabhängige Richtungen und Krafrichtungen!

3.2 Allgemeines Kräftesystem (Einführung)

Bem.: Die Kräfte schneiden sich nicht alle in einem Punkt.

Veranschaulichung:

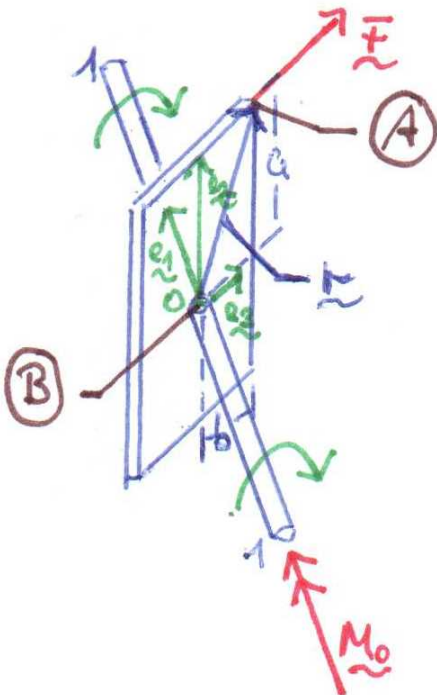


Es existieren 3 Grundaufgaben:

- (a) Reduktion des Kräftesystem auf ein „äquivalentes“ System
- (b) Zerlegung der Kraft
- (c) Bedingungen für das Gleichgewicht

Voraussetzungen für Lösung der Grundaufgaben

Einführung des Begriffs „Moment einer Kraft“ (um eine Achse, d.h. axiales Moment)



Allgemeiner Momentbegriff:

Def: Das Moment einer Kraft $\mathbf{F}$ in Bezug auf einen beliebigen Bezugspunkt $\mathbb{B}$ lautet:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{r}$ ist der Differenzvektor zwischen $\mathbb{B}$ und dem Angriffspunkt $\mathbb{A}$ von $\mathbf{F}$ (von $\mathbb{B}$ auf $\mathbb{A}$ gerichtet)

Maßeinheit (Dimension) des Moments: $1 \text{ Nm} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (r_2 F_3 - r_3 F_2) \mathbf{e}_1 - (r_1 F_3 - r_3 F_1) \mathbf{e}_2 + (r_1 F_2 - r_2 F_1) \mathbf{e}_3$$

Hinweis zur Berechnung einer Matrix mit Unterdeterminante $\Rightarrow$ „Schachbrettmuster der Vorzeichen“:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ \ominus & \oplus & \ominus \\ \oplus & \ominus & \oplus \end{vmatrix}$$

Bem.: $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}$ steht $\perp$ (Rechtsschraubenregel) auf der durch $\mathbf{r}$ und $\mathbf{F}$ aufgespannten Ebene.

Beispiel wie oben:

hier: $\mathbf{r}$ und $\mathbf{F}$ liegen in der $\mathbf{e}_2$ - $\mathbf{e}_3$ - Ebene

$$\mathbf{F} = F \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{r} = a \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3$$

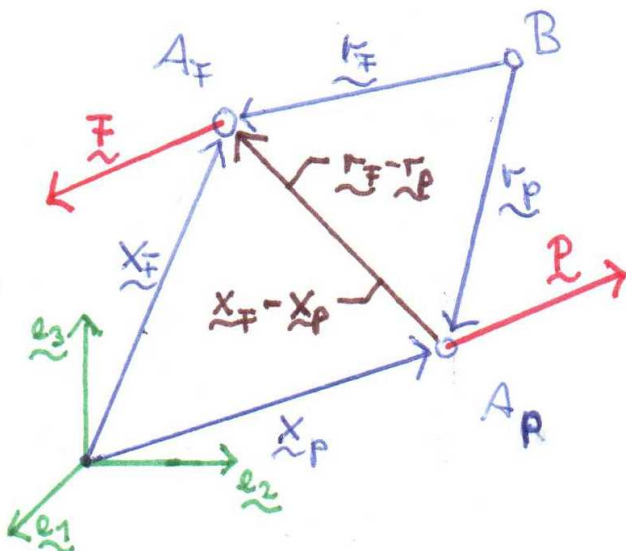
Man erhält:

$$\mathbf{M}_0 = r_2 F_3 \mathbf{e}_1 = a F \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow M_0 = a F$$

Das Kräftepaar und das Moment des Kräftepaar

Def.: Ein Kräftepaar besteht aus 2 gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Kräften mit parallelen Wirkungslinien.

Veranschaulichung:



Kräftepaar: $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$

Moment des Kräftepaars:

* Es gilt für M_0

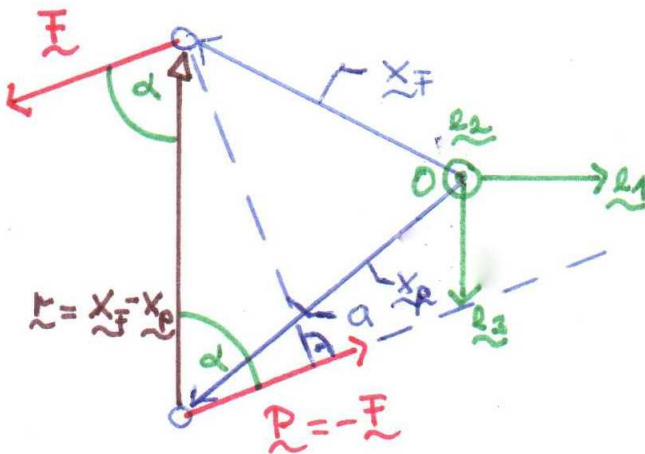
$$M_0 = \mathbf{x}_F \times \mathbf{F} + \mathbf{x}_P \times \mathbf{P} = (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{F}$$

* Es folgt für M_B

$$M_0 = \mathbf{x}_F \times \mathbf{F} + \mathbf{x}_P \times \mathbf{P} = (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{F}$$

Konsequenz: Das Moment eines Kräftepaars ist unabhängig vom Bezugspunkt, d.h.:
 $M_B = M_0$ ist ein freier Vektor

Beispiel für ein ebenes Problem:



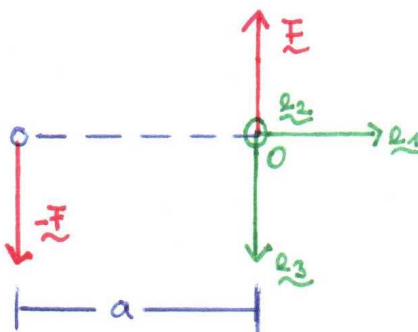
$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_3 \mathbf{e}_3 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} F_1 = -F \sin \alpha \\ F_3 = F \cos \alpha \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = r_3 \mathbf{e}_3, \quad r_3 = -r$$

Es folgt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r_3 F_1 \mathbf{e}_2 = M_2 \mathbf{e}_2$$

$$\text{mit } M_2 = r_3 F_1 = r f \sin \alpha$$



Es folgt der Zusammenhang:

$$M = M \mathbf{e}_2$$

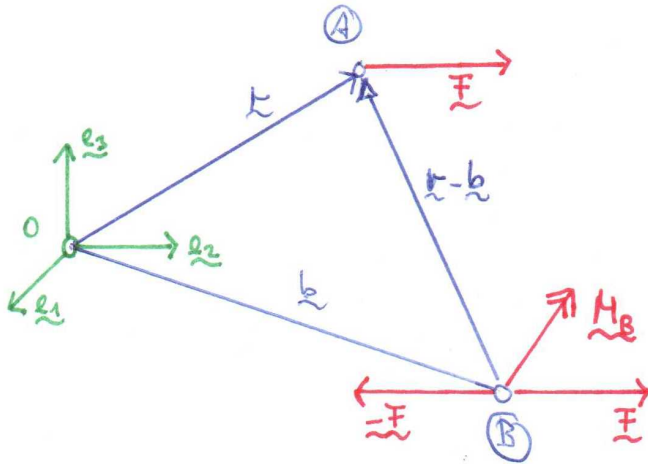
Hinweis:

- ⊙ Vektor zeigt aus der Ebene hinaus
- ⊗ Vektor zeigt in die Ebene hinein

Bem.: Das Moment (Betrag des Moments) eines Kräftepaars entspricht dem Betrag der Einzelkraft multipliziert mit dem senkrechten Abstand zwischen den Kräften.

Versatzmoment des Kräftepaars:

Veranschaulichung:



Bem.: Man ergänzt eine Einzelkraft $\mathbf{F}$ in $\textcircled{A}$ um $\mathbf{F}$ und $-\mathbf{F}$ in $\textcircled{B}$ sowie um das Versatzmoment M_B :

$$M_B = (\mathbf{r} - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}$$

Konsequenz: bzgl. $\textcircled{B}$ entstehen äquivalente Wirkungen durch:

- $\mathbf{F}$ in $\textcircled{A}$
- $\mathbf{F}$ in $\textcircled{B}$ und $\mathbf{M}_B$

Bemerkungen:

- Am starren Körper ist das Moment eines Kräftepaars $\{\mathbf{F}_i; -\mathbf{F}\}$ nicht vom Bezugspunkt abhängig
aber:
- Das Moment einer Einzelkraft hängt immer vom Bezugspunkt ab

Konsequenz:

Am starren Körper gilt:

- * zentrales Kräftesystem:
3 Freiheitsgrade und Krafrichtungen: - 3 Translationen
- * im allgemeinen Kräftesystem:
6 Freiheitsgrade:
 - 3 Translationen bzw. Krafrichtungen
 - 3 Rotationen bzw. Momentrichtungen

Bei Reduktion auf ein ebenes System verbleiben:

- im zentralen Kräftesystem:
2 Translationen und Krafrichtungen
- im allgemeinen Kräftesystem
2 Translationen und Krafrichtungen sowie 1 Rotation und Momentrichtung $\perp$ zur Translationsebene

3.3 Äquivalenz allgemeiner Kräftesysteme

Einführung des Äquivalenzbegriffs:

Definition: Sind $\mathbf{F}$ ein Kraftvektor und $\mathbf{a}$ der zugehörige Ortsvektor zum Kraftangriffspunkt $\textcircled{A}$ von $\mathbf{F}$, so ist dieses System zu $\mathbf{F}$ in $\textcircled{B}$ und dem Versatzmoment $\mathbf{M}_B$ äquivalent:

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{a}\} \iff \begin{cases} \mathbf{F}, \mathbf{b} \\ \mathbf{M}_B : (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{F} \end{cases}$$

Veranschaulichung:



Kräftesysteme und Äquivalenzbegriff:

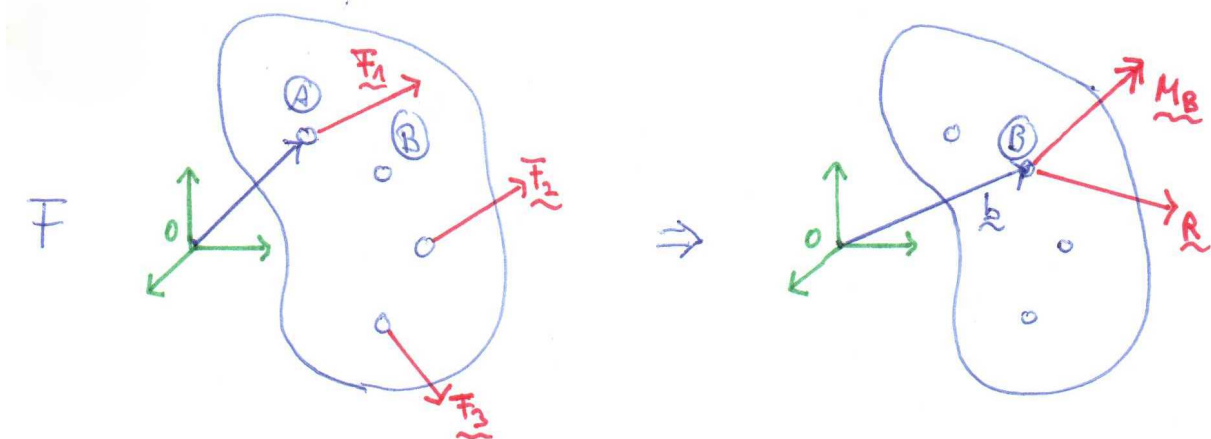
Def.: Sind $F = \{\mathbf{F}_i; \mathbf{a}_i\}$ mit $i = 1, 2, \dots, n$ ein Kräftesystem und $\mathbf{b}$ ein beliebiger Ortsvektor, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i && : \text{resultierende Kraft} \\ \mathbf{M}_B &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}_i && : \text{resultierendes Moment} \end{aligned}$$

von F in $\textcircled{B}$.

Man bezeichnet die Dyname $\{\mathbf{R}; \mathbf{M}_B\}$ als Reduktion von F in $\textcircled{B}$.

Veranschaulichung:



Äquivalente Kräftesysteme:

Def.: Zwei Kräftesysteme

$$\begin{array}{ll} F = \{ \mathbf{F}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{F}_n, \mathbf{a}_n \} & \text{und} \\ F^* = \{ \mathbf{F}_1^*, \mathbf{a}_1^*, \mathbf{F}_2^*, \mathbf{a}_2^*, \dots, \mathbf{F}_n^*, \mathbf{a}_n^* \} & \text{mit:} \end{array}$$

- $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^* \quad \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}^*$
- $\sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i^* - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}_i^* \quad \Rightarrow \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_B^*$

sind äquivalent, wenn die Dynamen $\{\mathbf{R}; \mathbf{M}_B\}$ von F und $\{\mathbf{R}^*; \mathbf{M}_B^*\}$ von F^* identisch sind.

Damit führen F und F^* auf dieselbe Reduktion in $\mathcal{B}$ mit Ortsvektor $\mathbf{b}$.

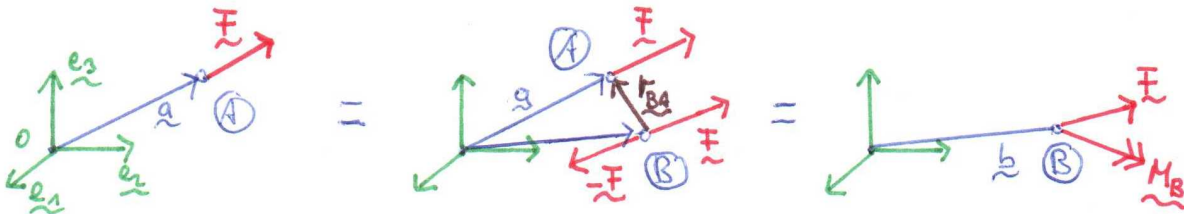
3.4 Allgemeine, räumliche Kräftesysteme

Bem.: Lösung der 3 Grundaufgaben im 3-dim. Raum mit:

- 3 Translationen und Kraftrichtungen
- 3 Rotationen und Momentenrichtungen

(a) **Reduktion des Kräftesystems auf ein äquivalentes System**
(1. Grundaufgabe)

Reduktion einer Einzelkraft auf eine Dyname

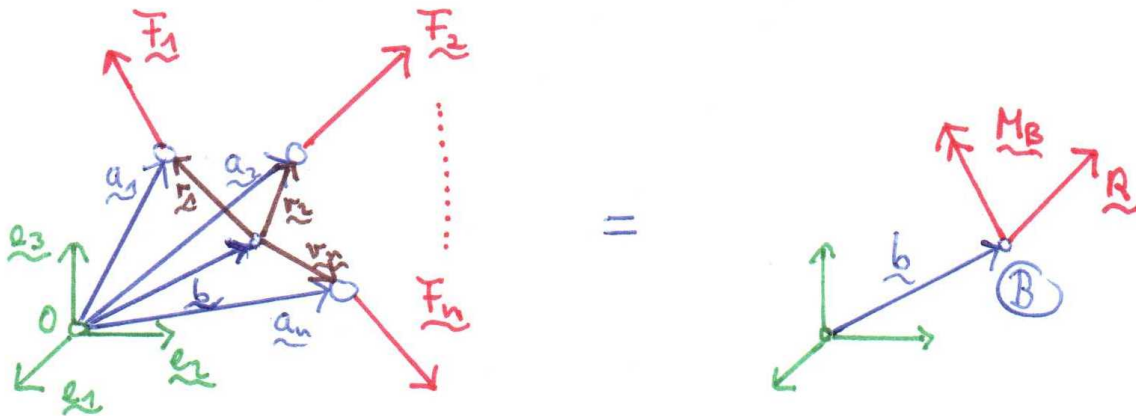


Für eine Einzelkraft gilt:

$\mathbf{F}$ in $\textcircled{A}$ ist äquivalent zu $\{\mathbf{F}, \mathbf{M}_B\}$ in $\textcircled{B}$, d.h. die Dyname $\{\mathbf{F}, \mathbf{0}\}$ in $\textcircled{A}$ und $\{\mathbf{F}, \mathbf{M}_B\}$ in $\textcircled{B}$ sind äquivalent. Es gilt:

$$\mathbf{M}_B = \underbrace{(\mathbf{a} - \mathbf{b})}_{\mathbf{r}_{BA}} \times \mathbf{F}$$

Reduktion eines Kräftesystems $\mathbf{F}$ auf eine Dyname



Für das Kräftesystem $\mathbf{F}$ gilt:

Reduktion von $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_i; \mathbf{a}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) in $\textcircled{B}$ liefert die Dyname $\{\mathbf{R}; \mathbf{M}_B\}$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & R_1 = \sum_i F_{i1} \\ \mathbf{e}_2 : & R_2 = \sum_i F_{i2} \\ \mathbf{e}_3 : & R_3 = \sum_i F_{i3} \end{cases}$$

Es folgt $\mathbf{R} = R_i \mathbf{e}_i$

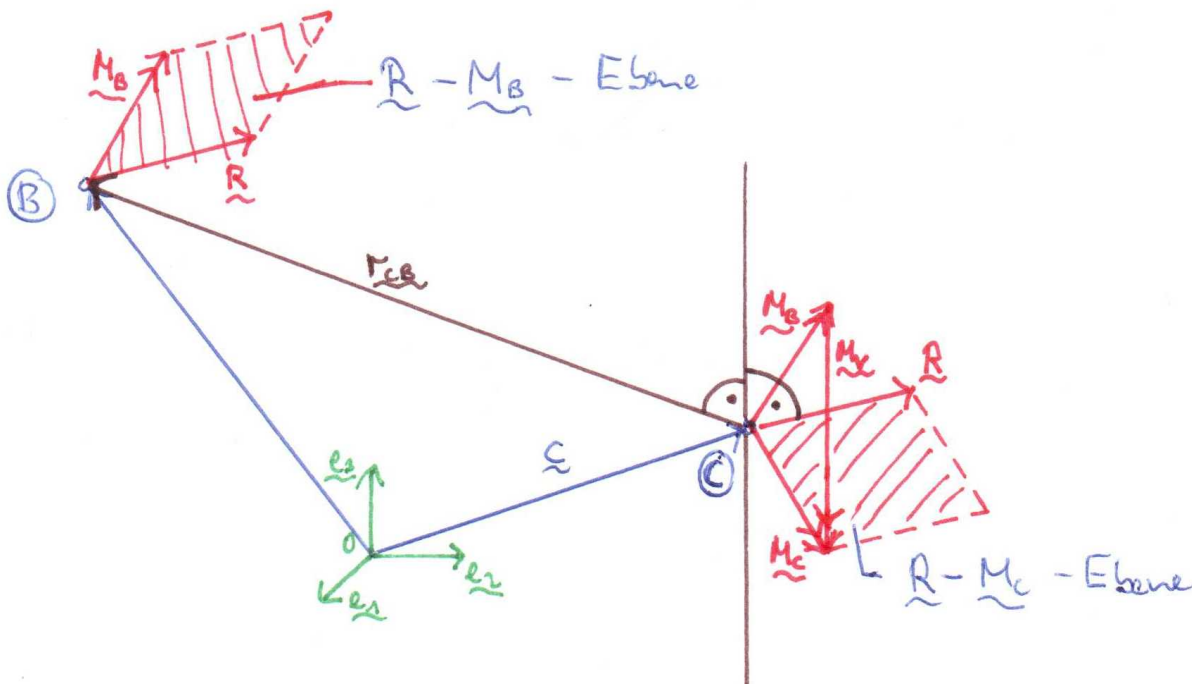
$$M_B = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\mathbf{a}_i - \mathbf{b})}_{\mathbf{r}_{Bi}} \times \mathbf{F}_i \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & M_{B1} = \sum_i (r_{i2} F_{i3} - r_{i3} F_{i2}) \\ \mathbf{e}_2 : & M_{B2} = \sum_i (r_{i3} F_{i1} - r_{i1} F_{i3}) \\ \mathbf{e}_3 : & M_{B3} = \sum_i (r_{i1} F_{i2} - r_{i2} F_{i1}) \end{cases}$$

Es folgt $\mathbf{M}_B = M_{Bi} \mathbf{e}_i$

Untersuchung spezieller Reduktionsfälle:

Bem.: Betrachtung äquivalenter Dynamen $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$ in $\mathbb{B}$ und $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\}$ in $\mathbb{C}$.

(1) Basis: der allgemeine Fall



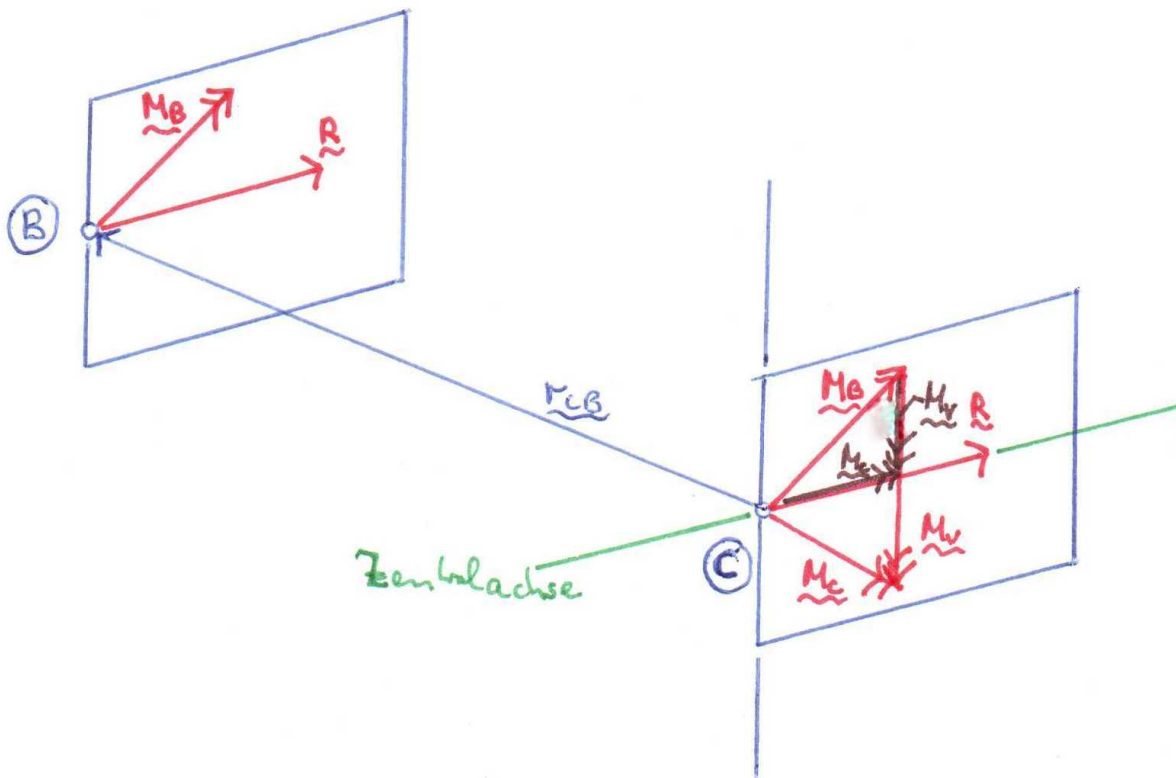
Es gilt:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_B + \underbrace{\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{R}}_{\mathbf{M}_V}$$

mit $\mathbf{M}_V = \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{R} \perp \{\mathbf{r}_{CB}, \mathbf{R}\}$

Sonderfälle der Reduktion

Sonderfall 1: $\mathbf{r}_{CB} \perp \{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$



Konsequenz:

- $\mathbf{M}_V = \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{R}$
 $\Rightarrow \mathbf{r}_{CB}, \mathbf{R}, \mathbf{M}_V$: orthogonales System
- Geg.: $\mathbf{r}_{CB} \perp \{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$
 $\Rightarrow \mathbf{M}_V$ liegt in $\mathbf{R} - \mathbf{M}_B$ -Ebene in $\mathbb{C}$
- $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_B + \mathbf{M}_V$
 $\Rightarrow \{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$ und $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\}$ bilden parallele Ebenen.

Sonderfall 2: Reduktion auf eine Kraftschraube

Bem.: Ausgangsposition ist Sonderfall 1, d.h. $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$ und $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\}$ bilden parallele Ebenen.

Ziel: Ermittlung der Kraftschraube $\mathbf{R} \parallel \mathbf{M}_C$ mit gemeinsamer Wirkungslinie (Zentralachse).

$$\mathbf{R} \parallel \mathbf{M}_C \Rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{M}_C = \mathbf{0}$$

- Einsetzen und Anwendung des Entwicklungssatzes, vgl. 1.2 D, liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \mathbf{R} \times \mathbf{M}_B + \underbrace{\mathbf{R} \times (\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{R})}_{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_V = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\mathbf{r}_{CB} - \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_{CB})\mathbf{R}}_{= 0, \text{ da } \mathbf{r}_{CB} \perp \mathbf{R}}} \\
 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathbf{r}_{CB} = -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_B}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \frac{\mathbf{M}_B \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2}$$

- Einsetzen in $\mathbf{M}_C$ und Anwendung des Entwicklungssatzes liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_C &= \mathbf{M}_B + \left(\frac{\mathbf{M}_B \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} \right) \times \mathbf{R} = \\
 &= \mathbf{M}_B - \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} \underbrace{\mathbf{R} \times (\mathbf{M}_B \times \mathbf{R})}_{= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\mathbf{M}_B - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_B)\mathbf{R}} \\
 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_C &= \mathbf{M}_B - \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} [|\mathbf{R}|^2 \mathbf{M}_B - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_B)\mathbf{R}] \\
 \Rightarrow \mathbf{M}_C &= \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_B}{|\mathbf{R}|^2} \cdot \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- $\mathbf{M}_C$ liegt auf der Wirkungslinie von $\mathbf{R}$.
- Betrag von $\mathbf{M}_C$:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{M}_C| &= (\mathbf{M}_C \cdot \mathbf{M}_C)^{1/2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \cdot \mathbf{M}_B = \\
 &= |\mathbf{M}_B| \cos \angle(\mathbf{R}, \mathbf{M}_B)
 \end{aligned}$$

Sonderfall 3: Reduktion auf eine Einzelkraft

Bem.: Ausgangssituation ist Sonderfall 2

Ziel: Voraussetzung für $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\}$ mit $\mathbf{M}_C \equiv \mathbf{0}$

Reduktion auf eine Einzelkraft $\{\mathbf{R}, \mathbf{0}\}$ nur möglich wenn für alle $\mathbf{M}_B$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_C \equiv \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_B = 0 \\
 \Rightarrow \mathbf{R} \perp \mathbf{M}_B, &\quad \text{d.h. Kraftebene} \perp \mathbf{M}_B
 \end{aligned}$$

Bem. Der oben genannte Sonderfall ist in der Regel nur für ebene Probleme möglich, d.h. alle Kräfte liegen in einer Kraftebene. Dann ist das Moment der Kräfte immer senkrecht zu dieser Ebene.

Äquivalenzsatz für allgemeine räumliche Kräftesysteme

Es gilt für $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}^*$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* \text{ und } \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_B^* \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & R_1 = R_1^*, & M_{B1} = M_{B1}^* \\ \mathbf{e}_2 : & R_2 = R_2^*, & M_{B2} = M_{B2}^* \\ \mathbf{e}_3 : & R_3 = R_3^*, & M_{B3} = M_{B3}^* \end{cases}$$

Das oben genannte System bildet ein System mit 6 Gleichungen für 6 unabhängige Größen, die daraus zu bestimmen sind.

Satz: Die in den Äquivalenzbedingungen enthaltenen Kräfteäquivalenzen können durch weitere Moment-Äquivalenzbedingungen ersetzt werden bzgl. weiterer Punkte $\textcircled{C}$ und $\textcircled{D}$

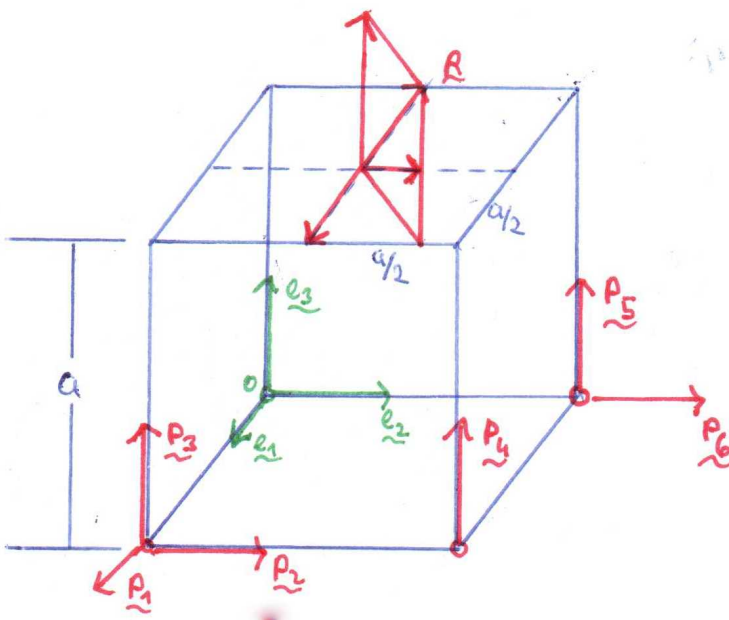
Bem.: Man beachte, dass dabei linear abhängige Gleichungen auftreten können, vgl. 3.5: Ebene Systeme

(b) Zerlegung einer Kraft im Raum (2. Grundaufgabe)

Bem.: Zerlegung ist eindeutig möglich in:

- 3 Richtungen (Zentrales Kräftesystem)
- 6 Richtungen (Allg. Kräftesystem)

Veranschaulichung:



Eine eindeutige Zerlegung von $\mathbf{R}$ in 6 vorgegebene Richtungen ist möglich, wenn:

- höchstens 3 Wirkungslinien in einer Ebene liegen
- höchstens 3 Wirkungslinien, die nicht alle in einer Ebene liegen, in einem Punkt schneiden

Bestimmungsgleichung für die Zerlegung

Äquivalenz beider Systeme bei Reduktion auf 0.

- Kräfteäquivalenz

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_6$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5$$

- Momenteäquivalenz von 0

$$M_{01} = a\left(\frac{1}{2}R_3 - R_2\right) = a(P_4 + P_5)$$

$$M_{02} = -a\left(\frac{1}{2}R_3 - R_1\right) = -a(P_3 + P_4)$$

$$M_{03} = a\left(\frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2}R_1\right) = aP_3$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \frac{1}{2}R_3 - R_2 \\ R_1 - \frac{1}{2}R_3 \\ \frac{1}{2}(R_2 - R_1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}$$

(c) Gleichgewicht (3. Grundaufgabe)

Axiom: In einem Gleichgewichtssystem verschwindet die Dynamik $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\}$ eines gegebenen Kräftesystems F bzgl. eines beliebigen Punktes B , d.h.

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$$

Bem.: Im Allgemeinen muss gelten:

- Impulssatz $\rightarrow \mathbf{l}' = \mathbf{R}$, mit $\mathbf{l}' = (m\mathbf{x}')'$
- Drallsatz $\rightarrow \mathbf{h}'_B = \mathbf{M}_B$, mit $\mathbf{h}'_B = \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{l}\}'$

hier: Im Fall der Statik folgt:

- Impulssatz $\rightarrow$ Kräftesatz (Kräftegleichgewicht)
- Drallsatz $\rightarrow$ Momentensatz (Momentengleichgewicht)

hier: nur Statik in TM 1, Dynamik mit $\mathbf{l}$ und $\mathbf{h}_B$ zugehörig zu TM 3

Es gelten die Gleichgewichtsbedingungen der Statik:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} = \mathbf{0} & \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & \sum_{i=1}^n F_{i1} = 0 \\ \mathbf{e}_2 : & \sum_{i=1}^n F_{i2} = 0 \\ \mathbf{e}_3 : & \sum_{i=1}^n F_{i3} = 0 \end{cases} \\ \mathbf{M}_B = \mathbf{0} & \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & \sum_{i=1}^n M_{B1}(F_i) = 0 \\ \mathbf{e}_2 : & \sum_{i=1}^n M_{B2}(F_i) = 0 \\ \mathbf{e}_3 : & \sum_{i=1}^n M_{B3}(F_i) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Bem.: Entsprechend dem Allgemeinen Äquivalenzsatz können die Kräftegleichgewichtsbedingungen ersetzt werden. (man beachte mögliche lineare Abhängigkeiten)

3.5 Das allgemeine, ebene Kräftesystem

Bem.: Die Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_B = \mathbf{0}$ reduzieren sich von 6 Gleichungen auf 3 Gleichungen (2 x Kräftegleichgewicht, 1 x Momentengleichgewicht). Dies gilt auch für die Ermittlung äquivalenter Systeme.

Grundaufgaben

(a) Reduktion des Kräftesystems auf ein äquivalentes System (1. Grundaufgabe)

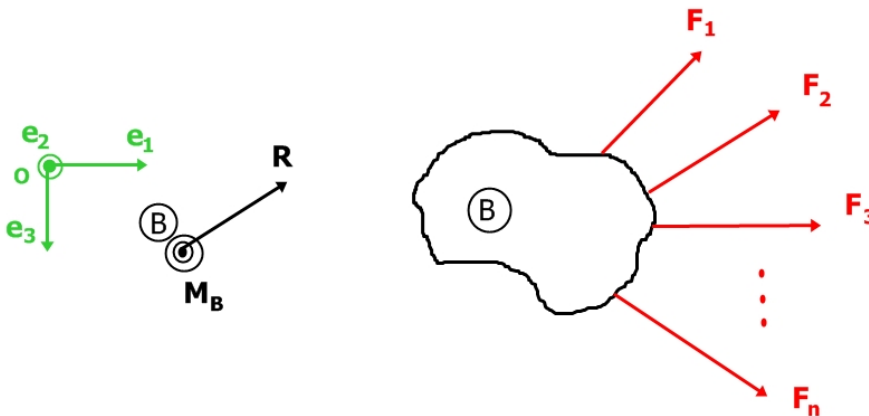
Bem.: Reduktion auf eine Einzelkraft möglich, da das Moment $\mathbf{M}_B \perp \mathbf{R}$, vgl. 3.4(a) Sonderfall 3.

Es folgt $F = \{F_i, a_i\}$ mit $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ist äquivalent zu $R = \{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$.

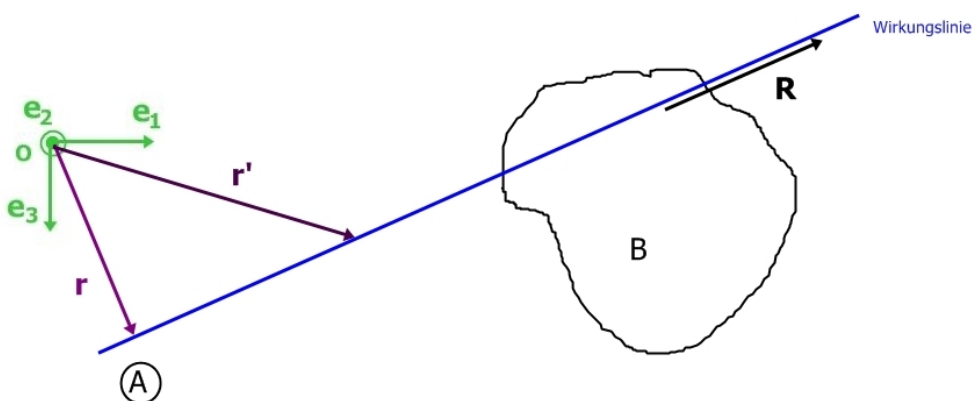
Analytische Lösung:

Bem.: Lösung in 2 Schritten

(1) Reduktion auf die Dynamie $\textcircled{B}$



(2) Suche nach einem äquivalenten System mit Reduktion auf eine Einzelkraft



- bei ebenen Systemen Reduktion von
 $F = \{F_i, a_i\}$ äquivalent $R = \{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$, d.h.

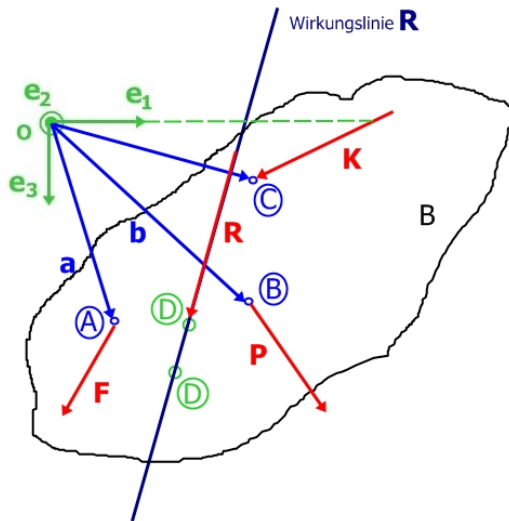
$$\left. \begin{matrix} F \\ R \end{matrix} \right\} \longrightarrow \{\mathbf{R}, \mathbf{M}_B\} \text{ in } \mathcal{D}$$

Beispiel:

Geg.:

$$\left. \begin{matrix} F = -2 \mathbf{e}_1 + 3 \mathbf{e}_3 \\ F = 3 \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_3 \\ F = -2 \mathbf{e}_1 + 0,5 \mathbf{e}_3 \end{matrix} \right\} [kN]$$

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{a} = 2 \mathbf{e}_1 + 4 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = 4,5 \mathbf{e}_1 + 3,5 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} = 5,5 \mathbf{e}_1 + 3 \mathbf{e}_3 \end{matrix} \right\} [m]$$



Ges.: $\mathbf{R}$, Wirkungslinie $\mathbf{r}$ bei Reduktion auf eine Einzelkraft

Lösung in 2 Schritten

- Reduktion von F z.B. in O

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{K} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & R_1 = F_1 + P_1 + K_1 = -1 \text{ kN} \\ \mathbf{e}_3 : & R_3 = F_3 + P_3 + K_3 = 5,5 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\implies R = 5,59 \text{ kN}$$

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{K}) = -(a_1 F_3 - a_3 F_1) \mathbf{e}_2 - (b_1 P_3 - b_3 P_1) \mathbf{e}_2 - (c_1 K_3 - c_3 K_1)$$

$$\implies \mathbf{e}_2 : \quad M_{02} = -21,29 \text{ kNm}$$

- Äquivalentes Kräftesystem $R = \{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$ in $\mathcal{D}$, so dass $\underbrace{\{\mathbf{R}, \mathbf{0}\}}$
Dynamie in $\mathcal{D}$

Bem.: Die Äquivalenzbeziehung $\mathbf{M}_0\{\mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{K}\} \stackrel{!}{=} \mathbf{M}_0\{\mathbf{R}\}$ liefert eine Gleichung für $\mathbf{r}$, d.h. für einen Kraftangriffspunkt $\textcircled{D}$ auf die Wirkungslinie von $\mathbf{R}$. Reduktion auf eine Einzelkraft.

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}) = -(r_1 R_3 - r_3 R_1) \mathbf{e}_2 = \mathbf{M}_{02} \mathbf{e}_2$$

Es folgt:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{K}) \stackrel{!}{=} \mathbf{M}_0(\mathbf{R})$$

$$\Rightarrow r_3(r_1) = \frac{M_{02} + r_1 R_3}{R_1} = \frac{-21,25 + r_1 \cdot 5,5}{-1} = 21,25 - 5,5r_1$$

Schnittpunkt mit der e_1 -Richtung

$$r_3(r_{10}) = 0 \quad \longrightarrow \quad r_{10} = 3,86 \text{ kN}$$

Äquivalenzsatz für allgemeine, ebene Systeme:

2 Kräftesysteme $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}^*$ sind äquivalent, wenn

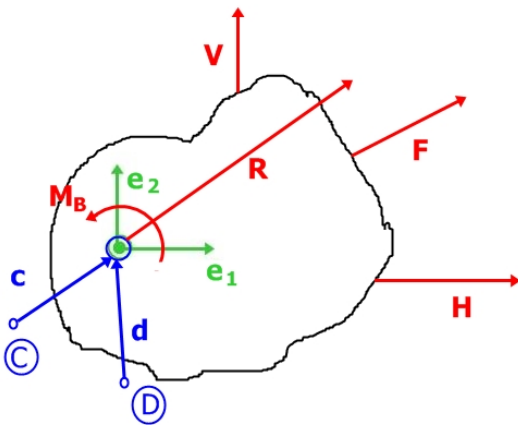
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* = \begin{cases} \mathbf{e}_1 : & R_1 = R_1^* & \text{bzw.} & \mathbf{e}_H : & R_H = R_H^* \\ \mathbf{e}_3 : & R_3 = R_3^* & \text{bzw.} & \mathbf{e}_V : & R_V = R_V^* \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_B^* : \quad \mathbf{e}_2 : \quad M_{B2} = M_{B2}^* \quad \text{bzw.} \quad \odot : \quad M_B = M_B^*$$

Oben genannte Gleichungen stellen ein System von 3 linear unabhängigen Gleichungen dar.

Satz: Die in der Äquivalenzbedingungen enthaltenen Kräfteäquivalenzen können durch weitere Momentenäquivalenzen bzgl. $\odot$ und $\odot$ ersetzt werden, sofern $\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$, $\textcircled{D}$ nicht auf einer Geraden liegen.

Untersuchung des Äquivalenzsatzes:



Geg.: Kräftesystem $\mathbf{F}$ mit $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$. Reduktion von $\mathbf{F}$ in $\textcircled{B}$ auf $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_B$.

Ges.: Reduktion von $\mathbf{F}$ in $\textcircled{C}$ und $\textcircled{D}$

Reduktion in $\textcircled{C}$

$$M_C = M_B + (c_1 R_2 - c_2 R_1)$$

$$(i) \Rightarrow R_1 = \frac{1}{c_2} [(M_B - M_C) + c_1 R_2]$$

Reduktion in $\mathbb{D}$

$$M_D = M_B + (d_1 R_2 - d_2 R_1)$$

$$(ii) \Rightarrow R_2 = \frac{1}{d_1} [(M_D - M_B) + d_2 R_1]$$

Bem.: (i) und (ii) sind 2 lin. unabhängige Gleichungen zur Darstellung von R_1, R_2 in Abhängigkeit von M_B, M_C, M_D .

Es folgt aus (i) und (ii):

$$(iii) \begin{cases} R_1 = \frac{c_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \left[\frac{d_2 + c_2}{c_1} M_B - \frac{d_1}{c_1} M_C - M_D \right] \\ R_2 = \frac{c_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \left[\frac{d_2 - c_2}{c_2} M_B - \frac{d_2}{c_2} M_C + M_D \right] \end{cases}$$

Konsequenz:

R_1 und R_2 sind darstellbar durch:

- M_B, M_C bzw. M_D , sowie R_1 bzw. R_2 , vgl. (i) und (ii)
- M_B und M_C und M_D , vgl. (iii)

Ergebnis des Äquivalenzsatzes

Äquivalenzbedingungen für allgemeine, ebene Kräftesysteme lauten:

- $R_H = R_H^*, R_V = R_V^*, M_B = M_B^*$

alternativ gilt:

- $R_V = R_V^*, M_B = M_B^*, M_C = M_C^*$

oder:

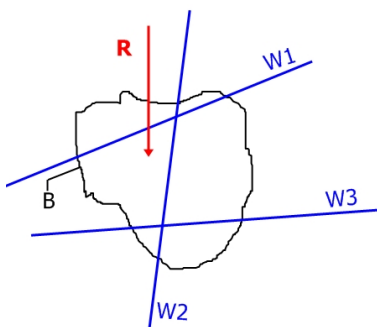
- $M_B = M_B^*, M_C = M_C^*, M_D = M_D^*$

Bem.: B, C und D dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

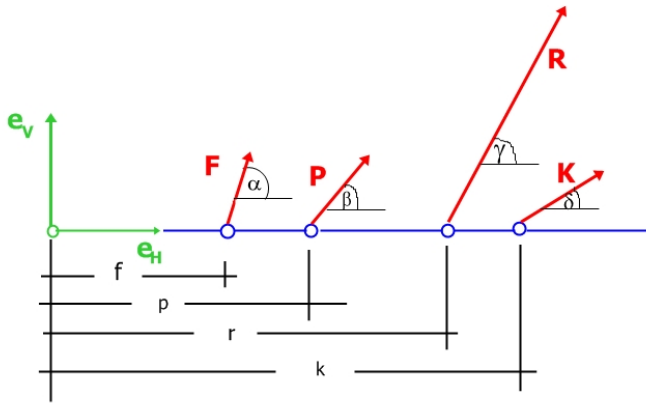
(b) Zerlegung einer Kraft in der Ebene (2. Grundaufgabe)

Bem.: Beim allgemeinen, ebenen Kräftesystem ist eine Zerlegung in 3 Kräfte, 3 Wirkungslinien möglich.

Veranschaulichung:



Beispiel mit analytischer Lösung:

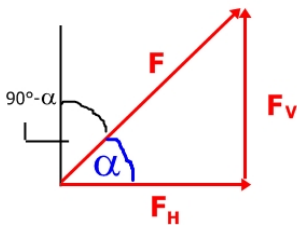


Geg.: R , Wirkungslinie von F , P , K

Ges.: F , P , K

Erinnerung: Zerlegung einer Kraft in Richtung e_H , e_V

$$\left. \begin{aligned} F_H &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_H = F \cdot \cos\alpha \\ F_V &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_V = F \cdot \sin\alpha \end{aligned} \right\} \text{ mit } F = |\mathbf{F}|$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{F_H}{F} \\ \sin\alpha = \frac{F_V}{F} \end{cases}$$

Lösung:

(1) Reduktion von $\{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$ und $\{\mathbf{F}, \mathbf{f}, \mathbf{P}, \mathbf{p}, \mathbf{K}, \mathbf{k}\}$ in 0.

$$(2) \quad R: \begin{cases} \uparrow R_V = R \sin\gamma \\ \rightarrow R_H = R \cos\gamma \\ M_0 = rR \sin\gamma \end{cases}$$

$$F, P, K \begin{cases} \uparrow R_V = F \sin\alpha + P \sin\beta + K \sin\delta \\ \rightarrow R_H = F \cos\alpha + P \cos\beta + K \cos\delta \\ \odot M_0 = f \cdot F \sin\alpha + p \cdot P \sin\beta + k \cdot K \sin\delta \end{cases}$$

(c) Gleichgewicht (3. Grundaufgabe)

Axiom: In einem Gleichgewichtssystem verschwindet die Resultierende Kraft und das Resultierende Moment bzgl. eines beliebigen Punktes $\mathbb{B}$.

Bem.: Allgemein gilt:

- Impulssatz $\longrightarrow$ Kräftesatz
- Drallsatz $\longrightarrow$ Momentensatz

Gleichgewichtsaxiom liefert bei Reduktion von F in $\mathbb{B}$:

$$\mathbf{R} = 0, \mathbf{M}_{\mathbf{B}} = 0$$

Es folgt speziell für ebene Systeme:

$$\mathbf{e}_1 : \quad R_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_H = 0$$

$$\mathbf{e}_2 : \quad R_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_V = 0$$

$$\mathbf{e}_3 : \quad M_{B3} = 0 \quad \longrightarrow \quad M_B = 0$$

bzw.:

$$\rightarrow \sum H = 0, \quad \uparrow \sum V = 0, \quad \circlearrowleft \sum M_B = 0$$

Ausnutzung des Äquivalenzsatzes für ebene Systeme

Bem.: Aus den Äquivalenzbeziehungen für allgemeine, ebene Kräftesysteme lässt sich unmittelbar schließen, dass die Kräftegleichgewichtsbedingungen durch weitere Momentengleichgewichtsbedingungen bzgl. beliebiger Punkte $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ ersetzt werden können, sofern $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ nicht auf einer Geraden liegen.

Mögliche Varianten für Gleichgewichtsbedingungen

$$(I) \quad \rightarrow \sum H = 0, \uparrow \sum V = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$(II) \quad \begin{cases} \uparrow \sum V = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0 \\ \rightarrow \sum H = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0 \end{cases}$$

$$(III) \quad \circlearrowleft \sum M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0, \circlearrowleft \sum M_D = 0$$

4 Schwerpunkt

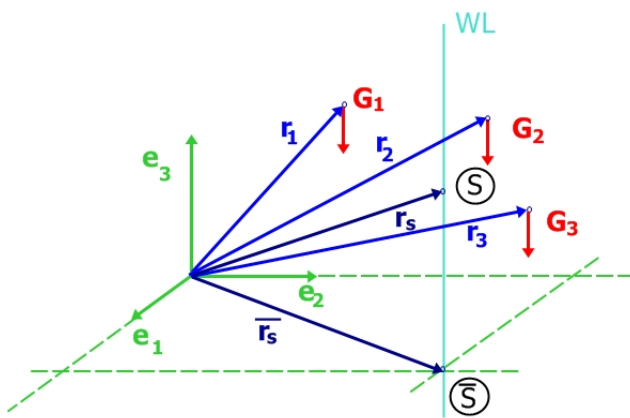
Einführung des Begriffs „Schwerpunkt“:

Voraussetzung: Existenz eines Systems von Massepunkten bzw. eines materiellen Körpers im Gravitationsfeld. Die resultierende Gewichtskraft sei durch das Kräftesystem $\{\mathbf{G}, \mathbf{r}_S\}$ repräsentiert.

Def.: Der Angriffspunkt S (Ortsvektor $\mathbf{r}_S$) der resultierenden Gravitations- bzw. Gewichtskraft $\mathbf{G}$ heißt Schwerpunkt.

4.1 Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte

Problemstellung: Gegeben sei ein System von n materiellen Punkten P_i mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ und Gewichtskräften $\mathbf{G}_i$



Eingangsgrößen:

$$\gamma = \{P_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$F = \{\mathbf{G}_i, \mathbf{r}_i\}$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_i = m_i \mathbf{g} = -m_i g \mathbf{e}_3$$

Bem.: Man setzt voraus, dass in der Nähe der Erdoberfläche

- die Wirkungslinien aller $\mathbf{G}_i$ parallel verlaufen,
- für die Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ gilt: $g = \text{konst.}$

Anmerkung: Die Erdbeschleunigung $\mathbf{S}$ ist eine durch äußere Fernwirkung (Gravitation) erzeugte Volumenkraft pro Volumeneinheit

Reduktion von $\mathbf{F}$ bzgl. $\mathbf{0}$:

Man bildet dazu die Dyade $\{\mathbf{G}, \mathbf{M}_0\}$

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i : \quad \text{resultierende Gewichtskraft}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i$$

Reduktion von F bzgl. $\mathbb{S}$:

Man bildet die Dynamik $\{\mathbf{G}, \mathbf{M}_S\}$ mit:

$$\mathbf{M}_S = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{G}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i - \mathbf{r}_S \times \mathbf{G} = \mathbf{M}_0 - \mathbf{r}_S \times \mathbf{G}$$

Bem.: Reduktion auf eine Einzelkraft in $\mathbb{S}$ mit $\{\mathbf{G}, \mathbf{M}_S\} = \{\mathbf{G}, \mathbf{0}\}$ ist möglich, wenn:

- $\mathbf{r}_S \perp \{\mathbf{G}, \mathbf{M}_0\}$ d.h. $\mathbf{r}_S \cdot \mathbf{G} = 0$
 $\rightarrow$ Reduktion auf eine Kraftschraube
- $\mathbf{M}_0 \perp \mathbf{G}$ d.h. $\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{G} = 0$
 $\rightarrow$ Reduktion auf eine Einzelkraft

(a) $\mathbf{G}$ kann beliebig auf seiner Wirkungslinie verschoben werden:

$\mathbf{r}_S$ liegt z.B. in der $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ - Ebene, so dass

$$\mathbf{r}_S = \overline{\mathbf{r}_S} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r}_S \perp \mathbf{G}$$

(b) $\mathbf{M}_0$ liegt immer in der $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ - Ebene

$$\longrightarrow \mathbf{M}_0 \perp \mathbf{G}$$

Begründung: $\mathbf{G}_i = G_{i3} \mathbf{e}_3$; $G_{i3} = -m_i g$; $\mathbf{r}_i = r_{ij} \mathbf{e}_j$

$$\longrightarrow \mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i = \sum_i (r_{i2} G_{i3} \mathbf{e}_1 - r_{i1} G_{i3} \mathbf{e}_2)$$

Reduktion auf eine Einzelkraft in $\overline{\mathbb{S}}$

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{0} = \mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{r}_S} \times \mathbf{G}; \quad \overline{\mathbf{r}_S} = r_{S1} \mathbf{e}_1 + r_{S2} \mathbf{e}_2$$

$$\rightarrow \sum_i (r_{i2} G_{i3} \mathbf{e}_1 - r_{i1} G_{i3} \mathbf{e}_2) \stackrel{!}{=} r_{S2} G_3 \mathbf{e}_1 - r_{S1} G_3 \mathbf{e}_2$$

so dass durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\mathbf{e}_1 : \quad r_{S2} = \frac{\sum_i r_{i2} G_{i3}}{G_3} = \frac{\sum_i r_{i2} m_i}{m}$$

$$\mathbf{e}_2 : \quad r_{S1} = \frac{\sum_i r_{i1} G_{i3}}{G_3} = \frac{\sum_i r_{i1} m_i}{m}$$

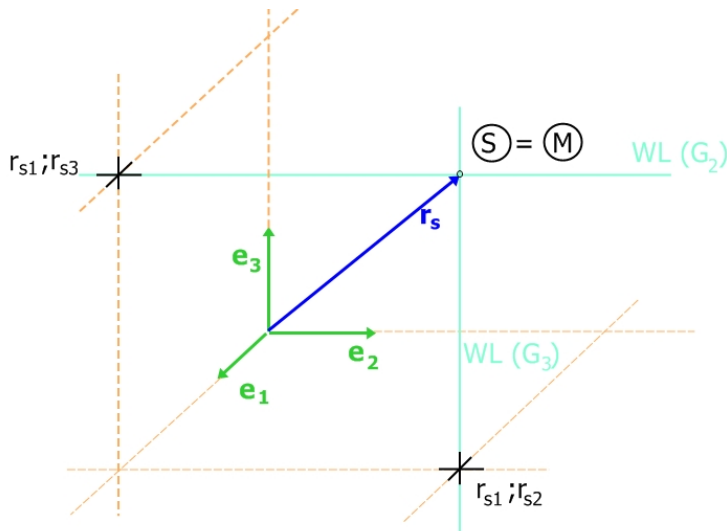
$$\text{mit } m := \sum_i m_i$$

Bem.: Die Wirkungslinie der resultierenden Gewichtskraft ist eine Gerade in $\mathbf{e}_3$ - Richtung durch $\overline{\mathbb{S}}$. Die oben genannten Gleichungen geben in der $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ - Ebene die Koordinaten des Massenmittelpunktes von γ an.

Konsequenz: Sind in einem System von Massepunkten alle Gewichtskräfte parallel, dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes gleichzeitig die Koordinaten des Massenmittelpunktes.

Durch die fiktive Annahme einer um den Winkel α gedrehten Erdbeschleunigung (z.B. $\alpha = 90^\circ$; $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_2$) erhält man z.B. die Koordinaten r_{S1} und r_{S2} des Schwerpunktes bzw. des Massenmittelpunktes in der $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ - Ebene.

Veranschaulichung:



Bestimmung des Massenmittelpunktes $\mathbb{S} = \mathbb{M}$

Ausgangsgleichung ist die Äquivalenzbeziehung

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_M = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{r}_m \times \mathbf{G} - \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i = (m \mathbf{r}_m - \sum_i m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g}$$

Für „beliebige Richtungen“ von $\mathbf{g}$ (z.B. $\mathbf{e}_3$ - bzw. $\mathbf{e}_2$ - Richtung) verschwindet das o.g. Kreuzprodukt, wenn gilt:

$$\mathbf{r}_m = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

Bem. Der Ortsvektor des Schwerpunktes (Massemittelpunktes) ist der massengerichtete Mittelwert der Ortsvektoren der Massepunkte P_i .

Schwerpunkt $\mathbb{S}$ und Massemittelpunkt $\mathbb{M}$

Bem.: Der Schwerpunkt wurde als Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft eingeführt (Reduktion auf eine Einzelkraft ist jedoch nur in Sonderfällen möglich).

Der Massenmittelpunkt ist als „Massenzentrum“ aufzufassen.

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt sind identisch, wenn die Richtung von $\mathbf{g}$ aller $P_i \in \gamma$ parallel sind. Dies trifft jedoch nur in der Nähe der Erdoberfläche zu. Im Allgemeinen können Schwerpunkt $\mathbb{S}$ und Massenmittelpunkt $\mathbb{M}$ jedoch verschieden sein.

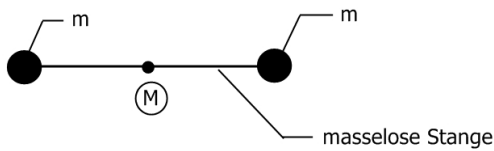
Resultat:

Lage des Mittelpunkt $\mathbb{M}$

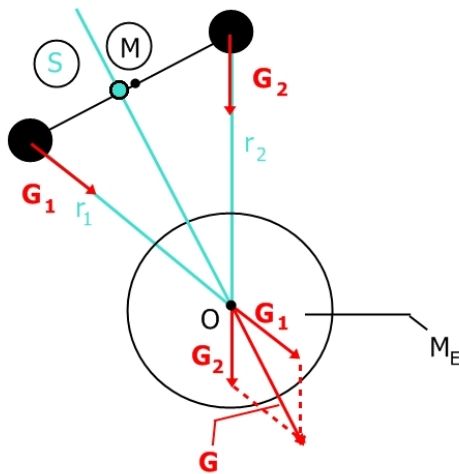
- Im Allgemeinen gilt: $\mathbb{M} \neq \mathbb{S} \longleftrightarrow \mathbf{r}_M \neq \mathbf{r}_S$
- Sonderfall paralleler Schwerkraft: $\mathbb{M} = \mathbb{S} \longleftrightarrow \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_S$

Beispiel für $\mathbb{M} \neq \mathbb{S}$

Geg.: Hantelsatellit im Orbit



Ges.: Lage des Schwerpunktes $\mathbb{S}$



Vorraussetzungen:

$$|\mathbf{r}_1| \approx |\mathbf{r}_2| = r$$

$$\rightarrow G_1 = G_2 = \frac{\tau M}{r^2} m$$

τ : universelle Gravitationskonstante

$$\tau = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg}$$

Bem.: - Gravitationsgesetz

- Gravitationskonstante

Konsequenz: Die resultierende Schwerkraft $\mathbf{G}$ in $\mathbb{S}$ verursacht ein Moment um $\mathbb{M} \rightarrow$ Der Satellit stellt sich „nadelförmig“ zum Massenmittelpunkt der Erde.

Anmerkung zur Gewichtskraft im Schwerfeld

An der Erdoberfläche gilt für die Gewichtskraft $\mathbf{G}$ eines Körpers mit der Masse m :

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} \text{ mit } \begin{cases} \text{Richtung von } \mathbf{g} : \text{ Lotrichtung} \\ \text{Betrag von } \mathbf{g} : g = \frac{\tau M_E}{R_E^2} \end{cases}$$

Es sind $M_E = 5,977 \cdot 10^{24} kg$: Erdmasse
 $R_E = 6371,04 km$: Radius einer der Erde volumengleiche Kugel

Einige reale Werte für g:

$g = 9,83 \frac{m}{s^2}$: an den Polen

$g = 9,78 \frac{m}{s^2}$: am Äquator

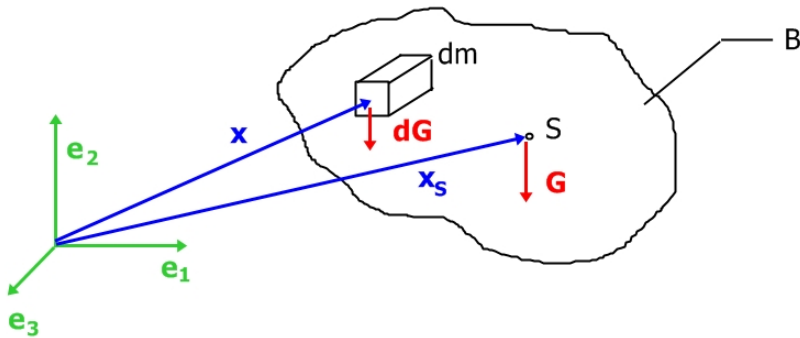
$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$: Mittelwert (50° Breite)

$g = 10 \frac{m}{s^2}$: im Bauingenieurwesen

Bem.: Die Gewichtskraft ist auf den Massenmittelpunkt der Erde gerichtet (Lotrichtung).
Lokale Schwankungen in der Massenverteilung bewirken Änderungen.

4.2 Schwerpunkt eines materiellen Körpers

hier: Voraussetzung sind paralleler Schwerkraften; d.h. Schwerpunkt und Massenmittelpunkt fallen zusammen



Eingangsgrößen:

differentielle Schwerkraft

$$d\mathbf{G} = \mathbf{g} \, dm$$

$$dm = \rho \, dv$$

Reduktion des Schwerkraftsystems bzgl. $\textcircled{S}$

$$\mathbf{G} = \int_B d\mathbf{G} = m\mathbf{g}; \quad m = \int_B dm$$

$$\mathbf{M}_S = \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times d\mathbf{G} = \int_B \mathbf{x} \times d\mathbf{G} - \mathbf{x}_S \times G$$

Bedingungen für den Schwerpunkt: $\mathbf{M}_S = \mathbf{0}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_B \mathbf{x} \, dm \times \mathbf{g} - m\mathbf{x}_S \times \mathbf{g} \\ \rightarrow \mathbf{0} &= (m\mathbf{x}_S - \int_B \mathbf{x} \, dm) \times \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \mathbf{g} = \text{konst.}$$

Bem.: Unter der Voraussetzung $\textcircled{S} = \textcircled{M}$ folgt wie in 4.1, dass die Bestimmungsgleichung für den Schwerpunkt dann erfüllt ist, wenn der Klammerausdruck für sich verschwindet.

Resultat:

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_M = \frac{1}{m} \int_B \mathbf{x} \, dm$$

4.3 Volumen-, Flächen- und Linienschwerpunkte

(a) Volumenschwerpunkt (Volumenmittelpunkt)

Für materielle Körper mit homogener Dichte ($\rho = \text{konst.}$) gilt:

$$m = \int_B dm = \rho \int_B dv = \rho V \quad \rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho}$$

Es folgt nun mit der Bestimmungsgleichung für den Massenmittelpunkt:

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{m} \rho \int_B \mathbf{x} dv$$
$$\rightarrow \mathbf{x}_V = \mathbf{x}_m = \frac{1}{V} \int_B \mathbf{x} dv$$

Bem.: Die Lage $\mathbf{x}_V$ des Volumenschwerpunktes wird ausschließlich von der geometrischen Form des Körpers bestimmt.

Volumenelement und Volumen B (kartesisch Koordinaten):

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3$$
$$\rightarrow V = \int_B dv = \int_{x_3} \int_{x_2} \int_{x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

(b) Flächenschwerpunkt (Flächenmittelpunkt)

Für Volumina mit homogener Dicke ($t = \text{konst.}$) gilt:

$$V = \int_0^t \int_{x_2} \int_{x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = t \int_{x_2} \int_{x_1} dx_1 dx_2$$

Flächeninhalt und Fläche (kartesische Koordinaten)

$$da = dx_1 dx_2$$
$$\rightarrow A = \int_S da = \int_{x_2} \int_{x_1} dx_1 dx_2 = \frac{V}{t}$$

Es folgt nun aus der Bestimmungsgleichung für den Volumenschwerpunkt:

$$\mathbf{x}_V = \frac{1}{V} t \int_S \mathbf{x} da$$
$$\rightarrow \mathbf{x}_F = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{x} da$$

Koeffizientengleichung zur Bestimmung des Flächenschwerpunktkoordinaten

Es folgt durch Koeffizientenvergleich

$x_{1F} = \frac{1}{A} \int_S x_1 da$ $x_{2F} = \frac{1}{A} \int_S x_2 da$	$S_2 := \int_S x_1 da$ $S_1 := \int_S x_2 da$
---	---

Bem.: Die darin enthaltenen Integrale S_1 und S_2 bezeichnet man als „Flächenmoment 1. Grades“ bzw. statisches Moment.

$\rightarrow$ Ausführliche Behandlung in TM 2.

(c) Linienschwerpunkt (Linienmittelpunkt)

Für Flächen mit homogener Höhe h ($h = \text{konst.}$) gilt:

$$A = \int_0^h \int_{x_1} dx_1 dx_2 = h \int_{x_1} dx_1$$

Linielemente und Linien (kartesische Koordinaten)

$$dl = dx_1$$

$$\longrightarrow l = \int_{x_1} dx_1 = \frac{A}{h}$$

Es folgt aus der Bestimmungsgleichung für den Flächenschwerpunkt

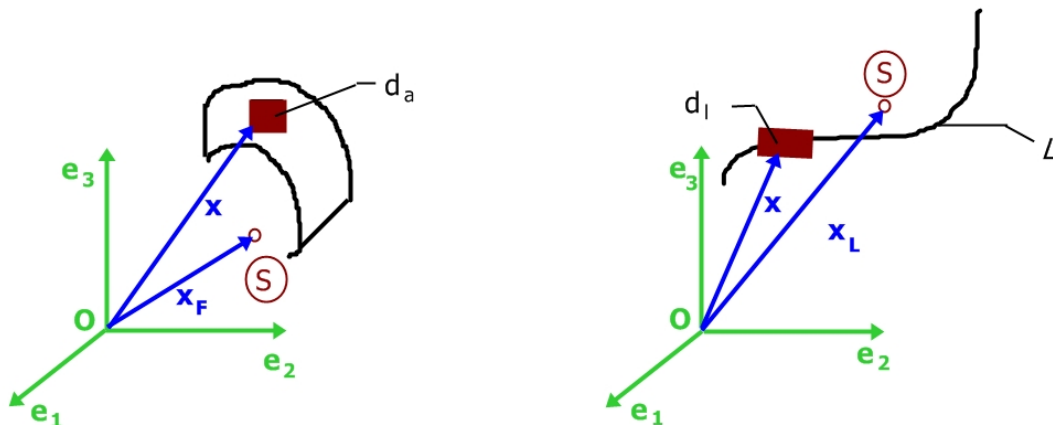
$$\mathbf{x}_P = \frac{1}{A} h \int_B \mathbf{x} dl$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}_L = \frac{1}{L} \int_B \mathbf{x} dl$$

Abschließende Bemerkungen

- Flächen- und Linienschwerpunkte können für gekrümmte Flächen und gekrümmte (und gewundene) Linien auch außerhalb dieser Flächen und Linien liegen.

Veranschaulichung



- In Analogie zur Definition des Massenmittelpunktes eines materiellen Körpers können auch Massenmittelpunkte für Flächen und Linien eingeführt werden. Man benutzt die Größen:

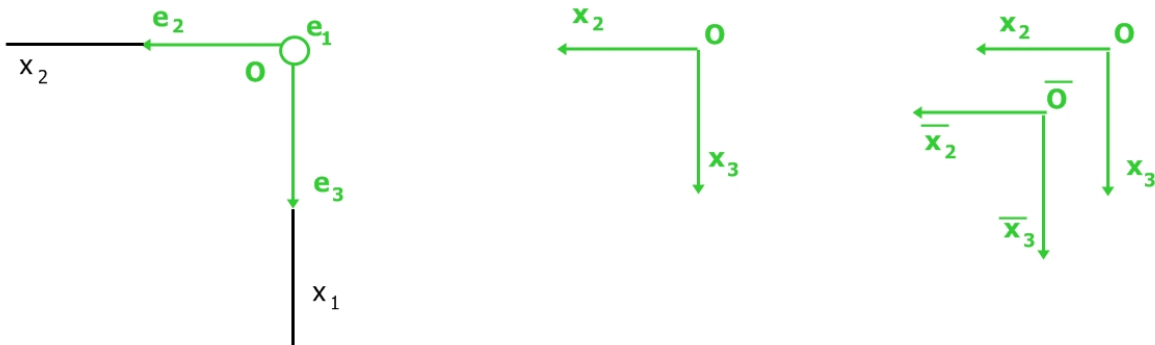
- * ρ : Dichte (Masse pro Volumeneinheit)
- * μ : Massenbelegung (Masse pro Flächeneinheit)
- * ν : Massenbelegung (Masse pro Linieneinheit)

Für homogene ρ , μ , ν sind die Massenmittelpunkte und die Volumen-, Flächen-, und Linienschwerpunkte identisch.

4.4 Bemerkungen zur Bestimmung des Flächenschwerpunktes

hier: Einige Sonderfälle ebener Flächen

(a) Basisvektoren, kartesische Koordinaten, Koordinatentransformation

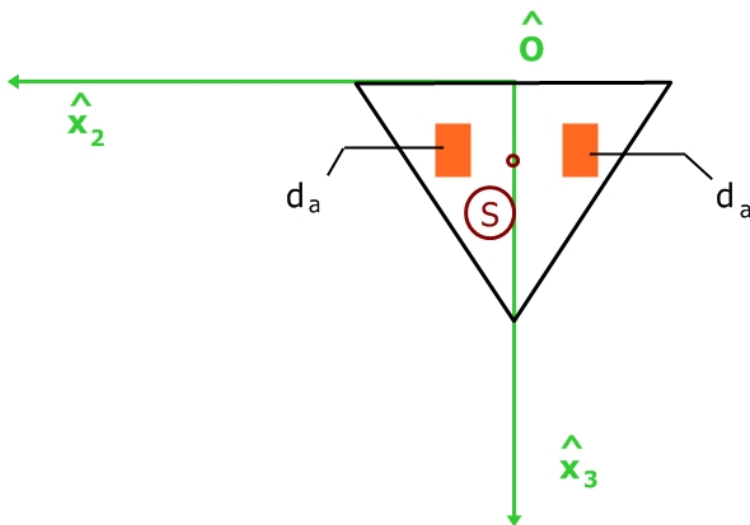


Bezugssystem mit Darstellung kartesischer Koordinaten

kartesische Koordinaten

kartesisches Koordinaten und Koordinatentransformation (Translation)

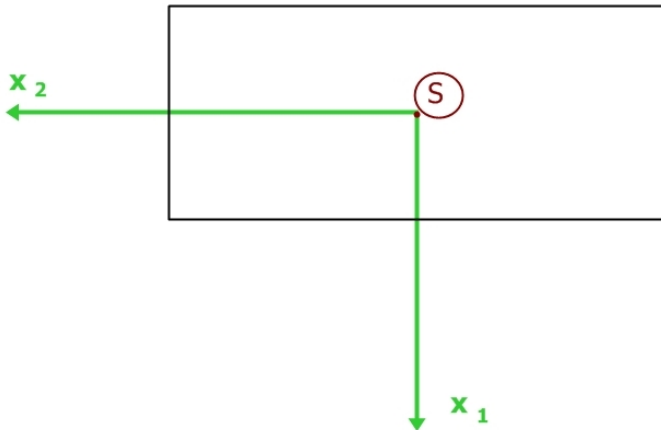
(b) Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften



$$\hat{x}_{F2} = \frac{1}{A} \int_A \hat{x}_2 \, da = 0$$

d.h. $\textcircled{S}$ liegt auf der Symmetrieachse (geometrischer Ort zur Bestimmung des Flächenschwerpunktes)

Sonderfall doppelt geometrischer Flächen



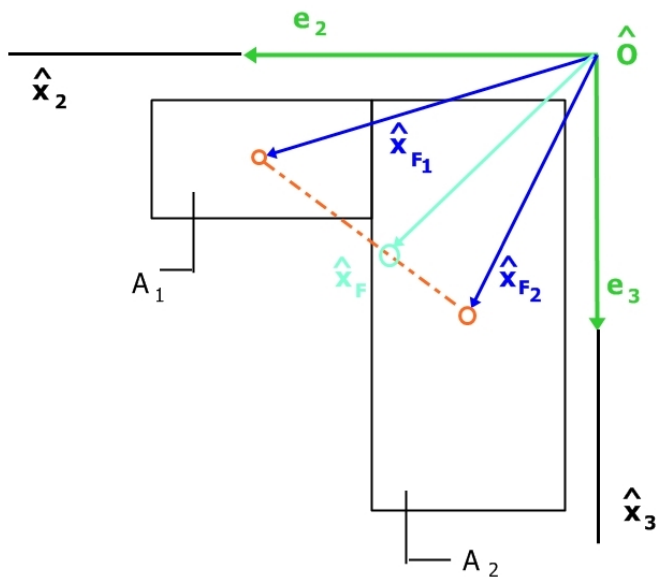
$$x_{2F} = x_{3F} = 0$$

für die statischen Momente folgt:

$$S_2 = x_{3F}A = \int_S x_3 \, da = 0$$

$$S_3 = x_{2F}A = \int_S x_2 \, da = 0 \quad \underline{\text{Bem.:}} \text{ Im Bezug auf den Schwerpunkt verschwinden die statischen Momente.}$$

(c) Zusammengesetzte Flächen:

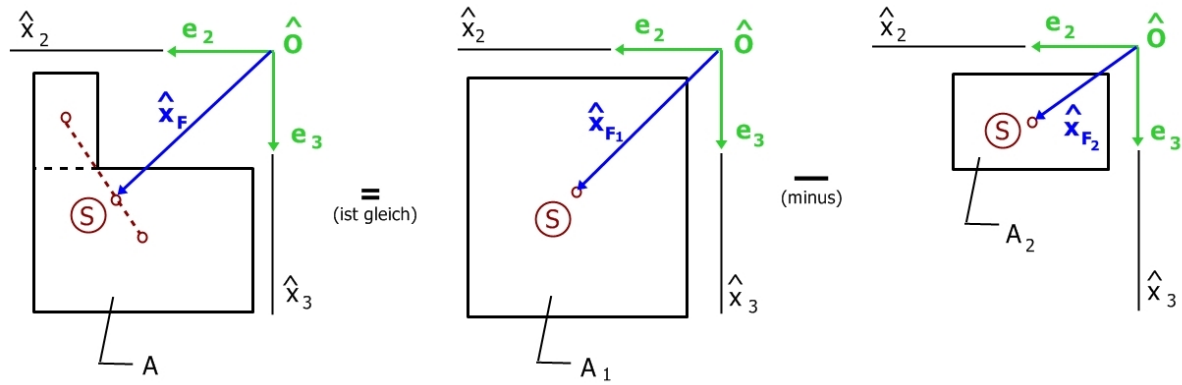


$$\hat{\mathbf{x}}_F = \frac{1}{A} \int_S \hat{\mathbf{x}} \, da = \frac{1}{A} (\hat{\mathbf{x}}_{F1} A_1 + \hat{\mathbf{x}}_{F2} A_2)$$

Für zusammengesetzte Flächen gilt allgemein:

$$\hat{\mathbf{x}}_F = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{Fi} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

(d) „Negative Teilflächen“



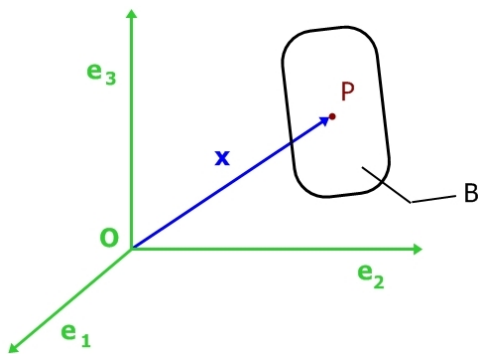
$$\rightarrow \hat{x}_F = \frac{\hat{x}_{F1}A_1 - \hat{x}_{F2}A_2}{A_1 - A_2}$$

- $\hat{x}_i$: beliebige kartesische Koordinaten
- x_i : kartesische Koordinaten durch den Schwerpunkt

5 Verschieblichkeitsuntersuchungen

5.1 Begriffe und Symbole

Kinematische Freiheitsgrade des starren Körpers:



- im Raum
 - 3 Translationen
 - 3 Rotationen } 6 Freiheitsgrade
- in der Ebene
 - 2 Translationen
 - 1 Rotationen } 3 Freiheitsgrade

Merke: Unter dem Einfluss äußerer Kräfte (Belastungen) bleibt ein starrer Körper in Ruhe, wenn die Anzahl der voneinander unabhängigen kinematischen Bindungen wenigstens so groß ist, wie die Anzahl kinematischer Freiheitsgrade.

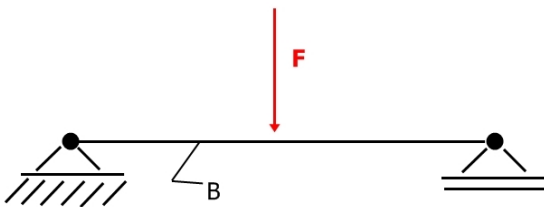
Kinematische Bindungen

Bem.: kinematische Bindungen treten auf, um Auflager und Zwischenlagern (Kopplungen von starren Körpern).

Kinematische Bindungen dienen der Kraftübertragung.

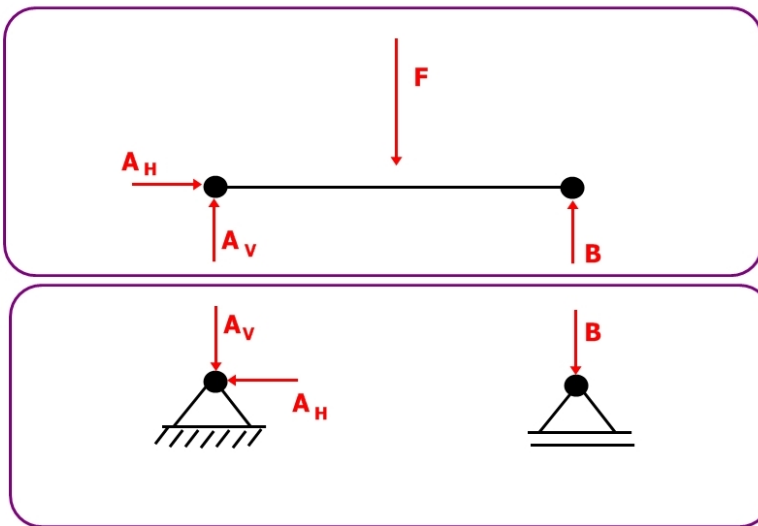
(a) Auflager (Stützungen)

Beispiel: Balken auf zwei Stützen (ebenes Problem)



F ist eingetragte Kraft

bzw. mit Schnittprinzip und Reaktionsprinzip



A_H , A_V und B sind Reaktionskräfte

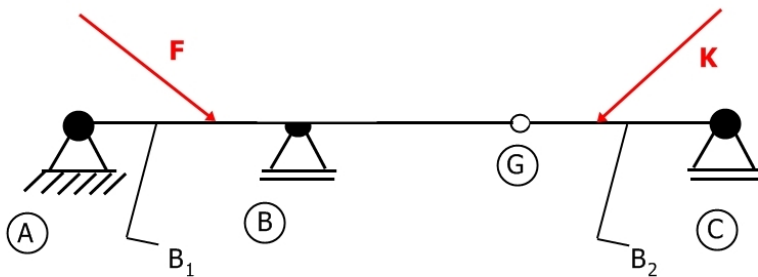
Bem.: Mit Hilfe des Schnittprinzips und des Reaktionsprinzips wird deutlich, dass jeder kinematischen Bindung eine potentielle Reaktionskraft zugeordnet ist.

Merke: Eine Reaktionskraft ist eine Kraft, die sich als „Antwort“ auf eine dem Körper belastende eingeprägte Kraft einstellt.

(b) Zwischenlager (Gelenke)

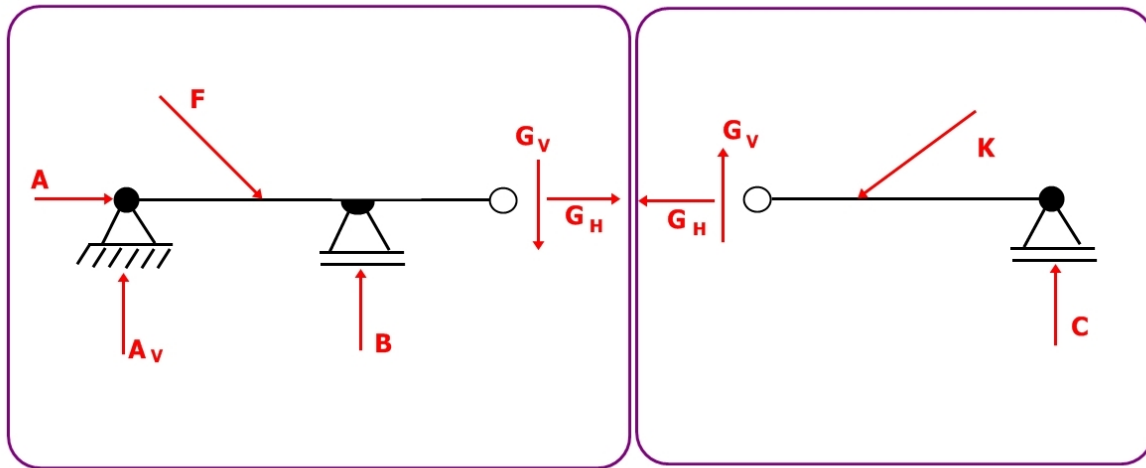
Bem.: Zwischenlager treten auf bei Systemen die aus mehr als einem starren Körper bestehen.

Bespiel: Gelenkbalken bzw. Gerber-Träger (ebenes Problem)



Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ: Auflager

Ⓔ: Zwischenlager (Gelenk)



(c) Symbole für Auflager und Zwischenlager

Bem.: Die statische Wertigkeit eines Auflagers bzw. Zwischenlagers entspricht der Anzahl der unabhängigen Komponenten der Reaktionskräfte bzw. der Reaktionsmomente.
 → siehe Tabelle

5.2 Statische und kinematische Bestimmtheit

Definition: Ein gekoppeltes System starrer Körper ist statisch bestimmt, wenn die Anzahl der zu berechnenden Reaktionskräfte mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen übereinstimmt.

Bem.: Ist ein starrer Körper nicht statisch bestimmt, dann kann es sein:

- **statisch unterbestimmt:** mehr Unbekannte als Gleichungen
- **verschieblich:** mehr Gleichungen als Unbekannte

Merke: Ein verschiebliches System starrer Körper ist kinematisch unbestimmt, d.h. seine Lage im Raum ist nicht dauerhaft fixiert.

Kinematische Systeme können demnach sowohl statisch bestimmt als auch statisch unbestimmt sein.

$$f = \begin{cases} 6p - (a + z) : & \text{räumliches System} \\ 3p - (a + z) : & \text{ebenes System} \end{cases}$$

Auswertung des Abzählkriteriums:

$$f = i \begin{cases} > 0 : & \text{i-fach verschieblich} \\ = 0 : & \text{statisch bestimmt} \\ < 0 : & \text{statisch unbestimmt} \end{cases}$$

mit $\begin{cases} f : & \text{Anzahl der Freiheitsgrade} \\ p : & \text{Anzahl der starren Körper (Scheiben)} \\ a : & \text{Anzahl der Auflagerreaktionen} \\ z : & \text{Anzahl der Zwischenreaktionen} \end{cases}$

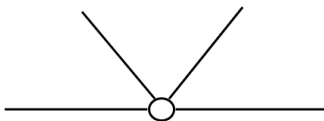
Berechnung der Anzahl Zwischenlagerreaktionen:

$$z = (S - 1) \cdot W \quad \text{mit} \quad \begin{cases} S : & \text{Anzahl der Stäbe} \\ W : & \text{stat. Wertigkeit der Verbindung} \end{cases}$$

Beispiel



$S = 2, W = 2$
 $\Rightarrow z = (2 - 1) \cdot 2 = 2$

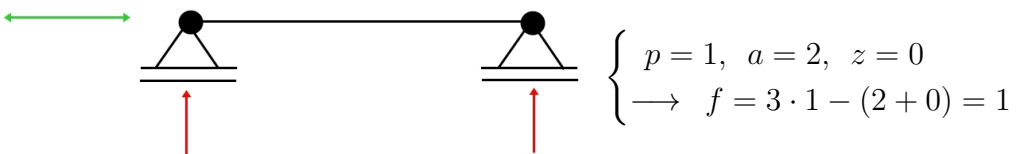
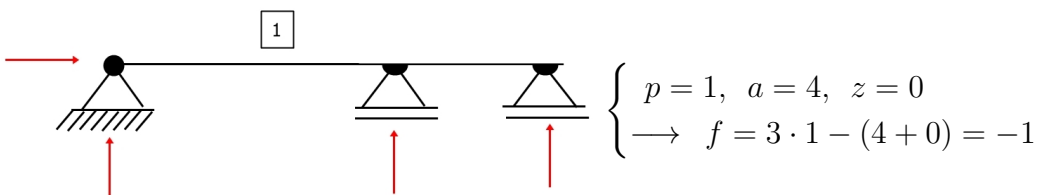
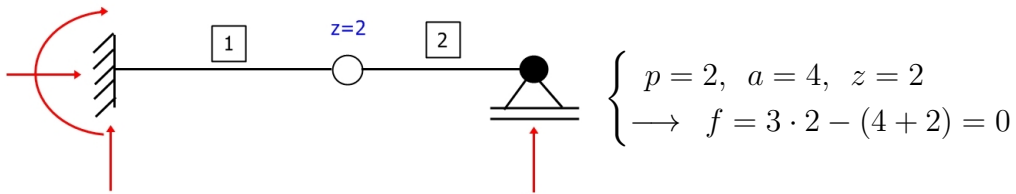
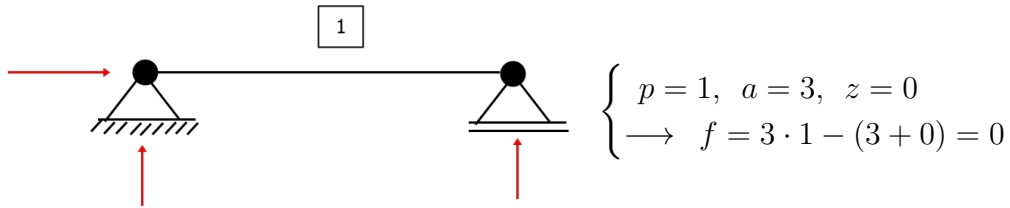


$S = 4, W = 2$
 $\Rightarrow z = (4 - 1) \cdot 2 = 6$

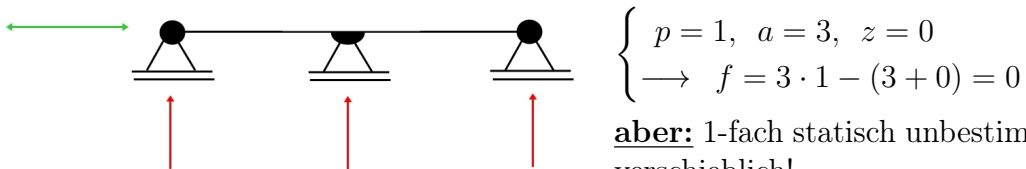
außerdem sind

- $6p$ bzw. $3p$: Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen
- $(a + z)$: Anzahl der unbekannten Reaktionskräfte

Beispiele für ebene Systeme:

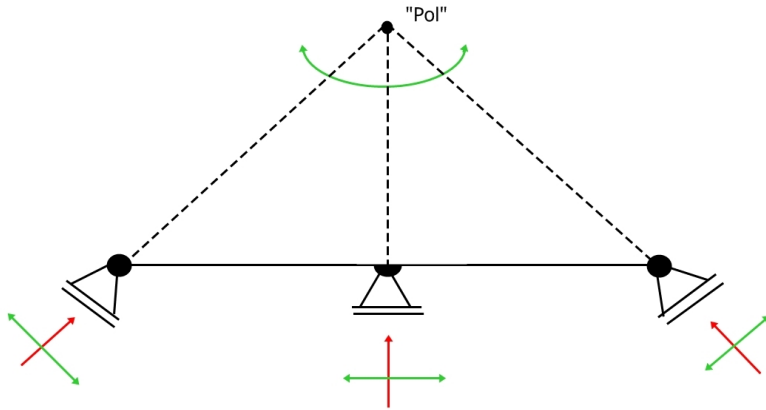


Achtung: statische Unbestimmtheiten und kinematische Unbestimmtheiten (Verschieblichkeiten) können sich rechnerisch kompensieren.



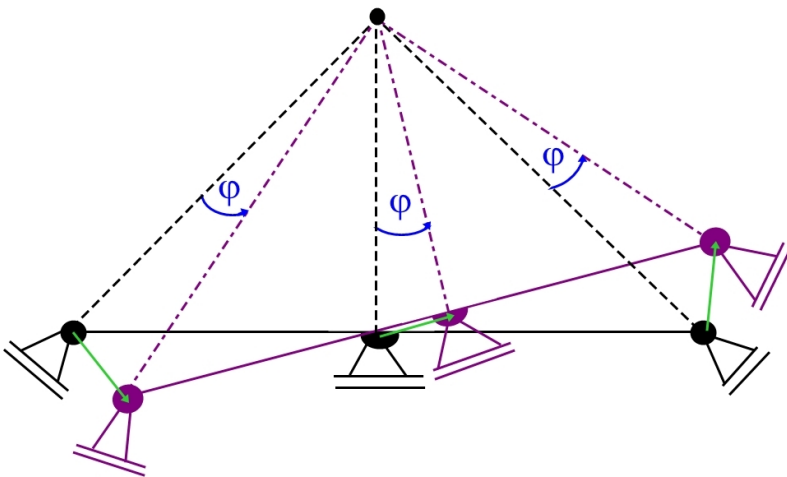
aber: 1-fach statisch unbestimmt und 1-fach verschieblich!

Sonderfälle: versteckte „zentrale Kräftesysteme“ der möglichen Reaktionskräfte



Bem.: Im zentralen Kräftesystem ist der Körper nicht gegen Verdrehen gesichert; d.h. das System ist ebenfalls 1-fach statisch unbestimmt und einfach verschieblich.

Verschiebungsfigur für infinitesimale Verschiebungen



Bem.: Bei infinitesimalen Drehungen ersetzt die Tangente den Kreisbogen.

6 Auflagerreaktionen und Schnittgrößen

6.1 Belastung von Stützen und Balken

nur statisch bestimmte und unverschiebliche Systeme

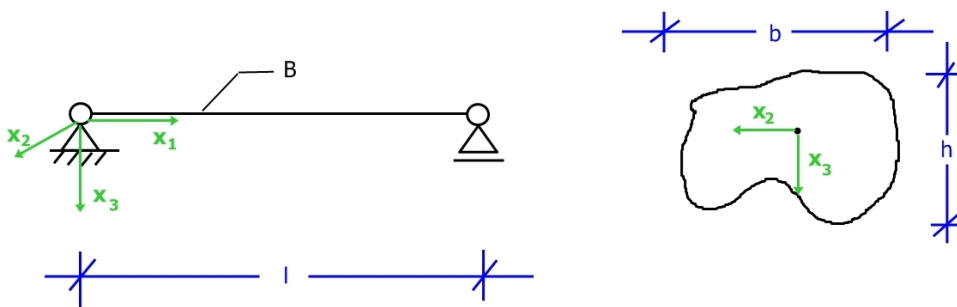
Stäbe und Balken

- Tragwerke deren Länge l groß im Vergleich zu den Querabmessungen (Höhe h , Breite b) ist.

$$l \gtrsim 10 h; \quad l \gtrsim 10 b$$

- beschrieben durch Längsachse und Querschnittsfläche
- Achse verläuft durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.

Veranschaulichung



mit x_i : kartesische Koordinaten

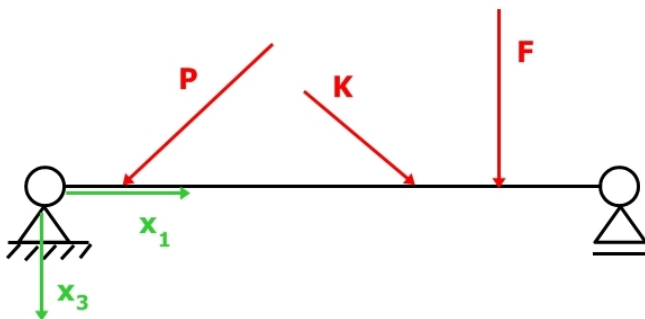
Belastungen:

- Stabproblem: Belastung nur in Längsrichtung (x_1)
- Balkenproblem: Belastung nur quer zur Längsrichtung (x_2, x_3)

Bem.: im Allg. spricht man immer von Balkenproblemen

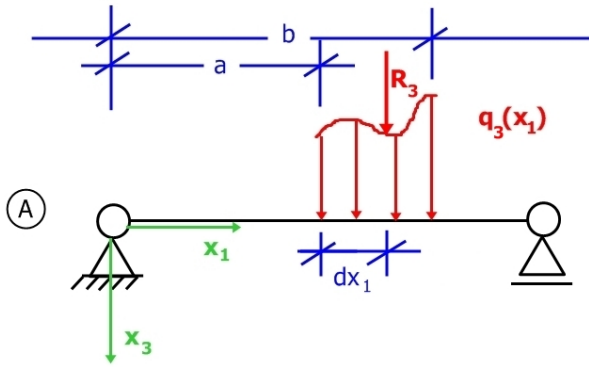
Belastung des allgemeinen, ebenen Balkens

(a) durch Einzelkräfte (wie bisher)



$P, K, F = \text{Dim [K]}$

(b) durch Linienlasten $q_3(x_1)$, $q_2(x_1)$



$$q_3(x_1) = \text{Dim [K/L]}$$

belastetes differentielles Linienelement dx_1

$$dR_3 = q_3(x_1) dx_1$$

zur Linienlast äquivalent Resultierende R_3

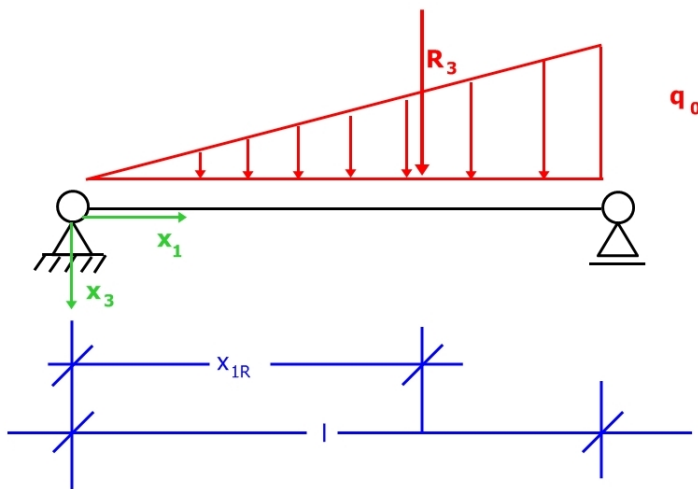
$$R_3 = \int_a^b dR_3 = \int_a^b q_3(x_1) dx_1$$

Bem.: Lage von R_3 über den Äquivalenzsatz

$$\circlearrowleft M_A = -x_{1R} R_3 = -\int_a^b x_1 q_3(x_1) dx_1$$

$$\Rightarrow x_{1R} = \frac{\int_a^b x_1 q_3(x_1) dx_1}{R_3}$$

Beispiel: „Dreieckslast“



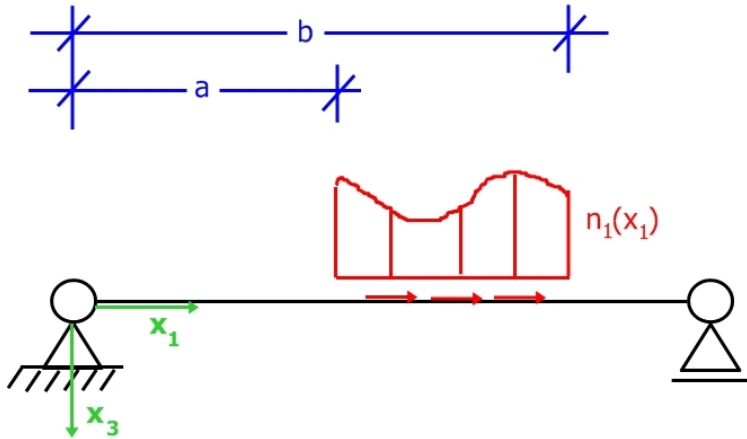
Bestimmung von R_3 und x_{1R}

$$q_3(x_1) = \frac{q_0}{l} x_1$$

$$R_3 = \int_0^l \frac{q_0}{l} x_1 dx_1 = \frac{1}{2} q_0 l$$

$$\Rightarrow x_{1R} = \frac{\int_0^l x_1 \frac{q_0}{l} x_1 dx_1}{\frac{1}{2} q_3 l} = \frac{2}{3} l$$

(c) Linienlasten in Richtung der Balkenachsen



$n_1(x_1)$: Dim [K/L]

belastetes differentielles Linienelement:

$$dR_1 = n_1(x_1) dx_1$$

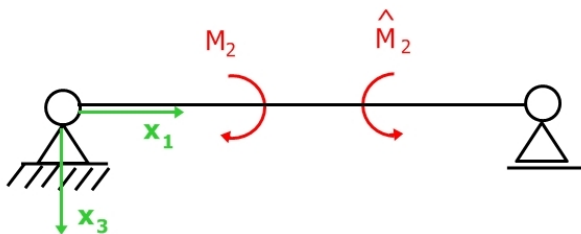
Bestimmung der Resultierenden

$$R_1 = \int_a^b n_1(x_1) dx_1$$

Bem.: R_1 greift an im Schwerpunkt der Querschnittsfläche und kann beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

(d) Einzelmomente M_2 , M_3

z.B. M_2 und $\tilde{M}_2$

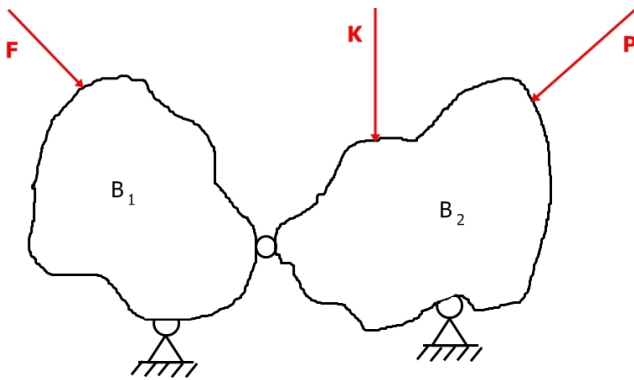


Bem.: Weitere Belastungsarten sind durchaus möglich.

6.2 Auflagerreaktionen an zusammengesetzten ebenen Tragwerken

Bem.: Lösung für statisch bestimmte Systeme

Vorgehensweise:



(1) Kontrolle der statischen Bestimmtheit

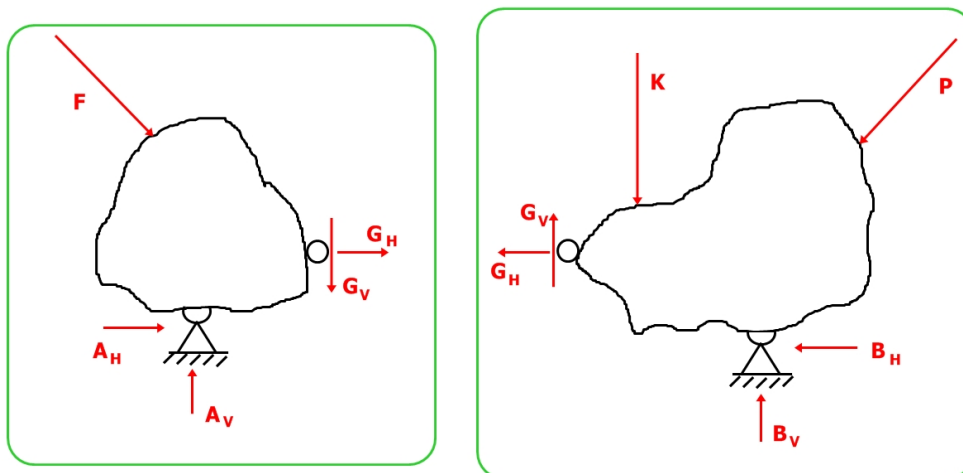
$$p = 2, \quad a = 4, \quad z = 2$$

$$\rightarrow f = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

$\rightarrow$ statisch bestimmtes System

(2) Freischneiden der Teilsysteme

- Führung geschlossener Schnitte
- Antragen der „sichtbar“ gemachten Auflager- und Zwischenreaktionen

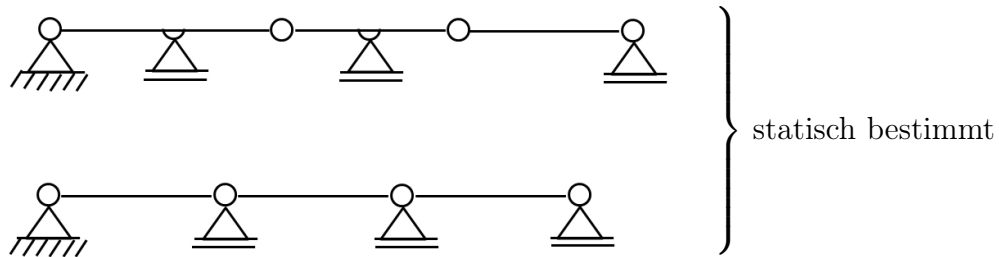


(3) Berechnung der Auflager- und Gelenkreaktionen

Bem.: Man versucht ein Gleichgewichtssystem zu finden bei dem man aus jeder Gleichung eine Unbekannte ermitteln kann.

Einige typische Systeme:

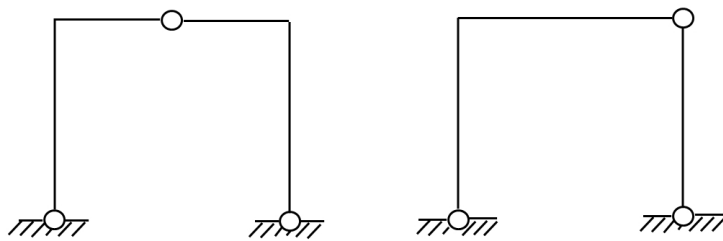
- Gelenkbalken bzw. Gerber-Träger



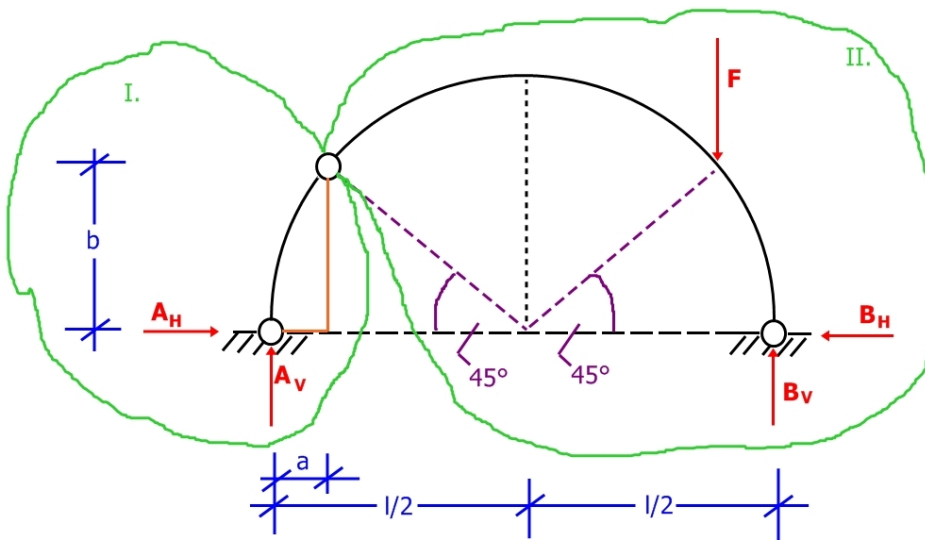
- Dreigelenk-Bogenträger (Kreisbogenträger)



- Dreigelenkträger



Beispiel: Dreigelenk-Bogenträger



Geg.: F, l

Ges.: Auflagerreaktionen, Gelenkreaktionen

Kontrolle der statischen Bestimmtheit

$$p = 2, \quad a = 4, \quad z = 2 \quad \longrightarrow \quad f = 3 \cdot 2 - (4 + 1) = 0$$

Lösung

$$a = \frac{l}{2}(1 - \cos 45^\circ)$$

$$b = \frac{l}{2} \sin 45^\circ$$

- am Gesamtsystem, d.h. (I) und (II)

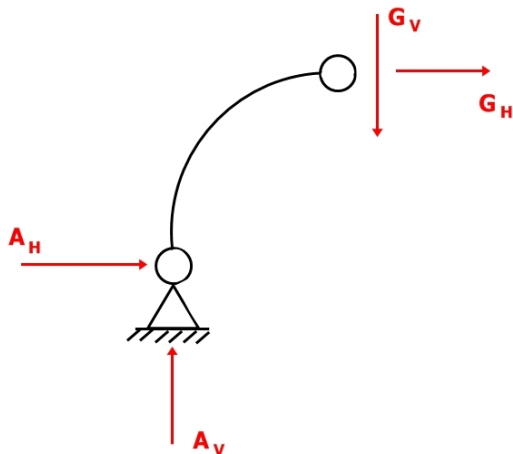
$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 = -l A_V + a F$$

$$\implies A_V = \frac{a F}{l}$$

$$\uparrow \sum V = 0 = A_V + B_V - F$$

$$\implies B_V = F \left(1 - \frac{a}{l} \right) = F - A_V$$

- am Teilsystem (I)



$$\circlearrowleft \sum M_G = 0 = -a A_V + b A_H$$

$$\implies A_H = \frac{a A_V}{b}$$

$$\uparrow \sum V = 0 = A_V - G_V \quad \implies \quad G_V = A_V$$

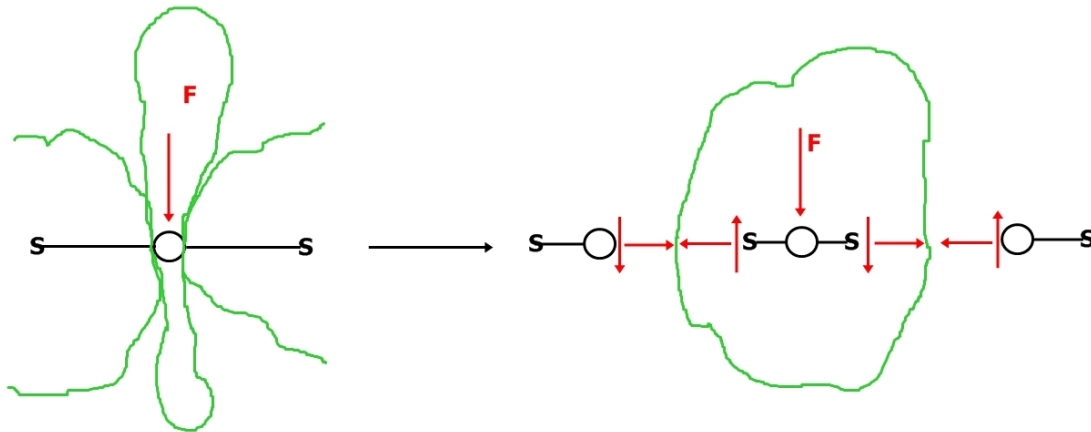
$$\rightarrow \sum H = 0 = A_H + G_H \quad \implies \quad G_H = -A_H$$

- am Gesamtsystem (bzw. am TS (II))

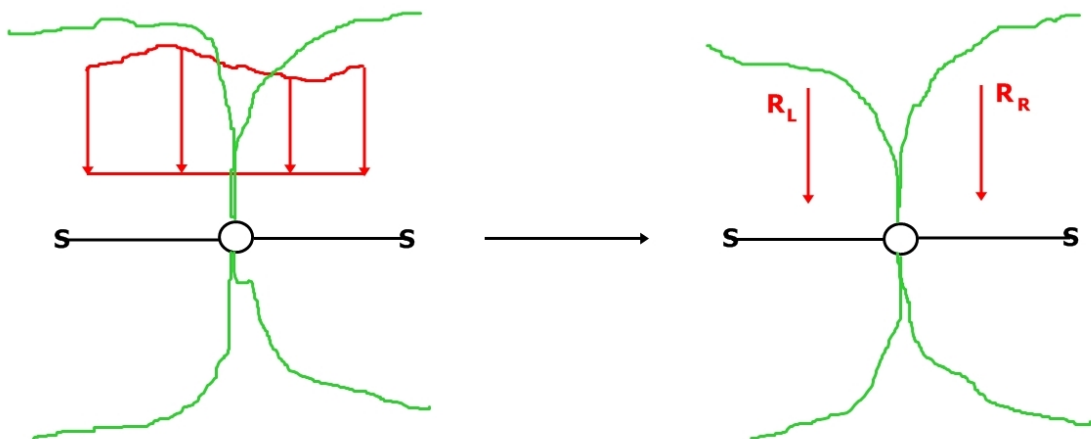
$$\rightarrow \sum H = 0 = A_H - B_H \quad \implies \quad B_H = A_H$$

Abschließende Bemerkungen

- Gelenke mit Einzellasten sind wie Teilsysteme zu behandeln

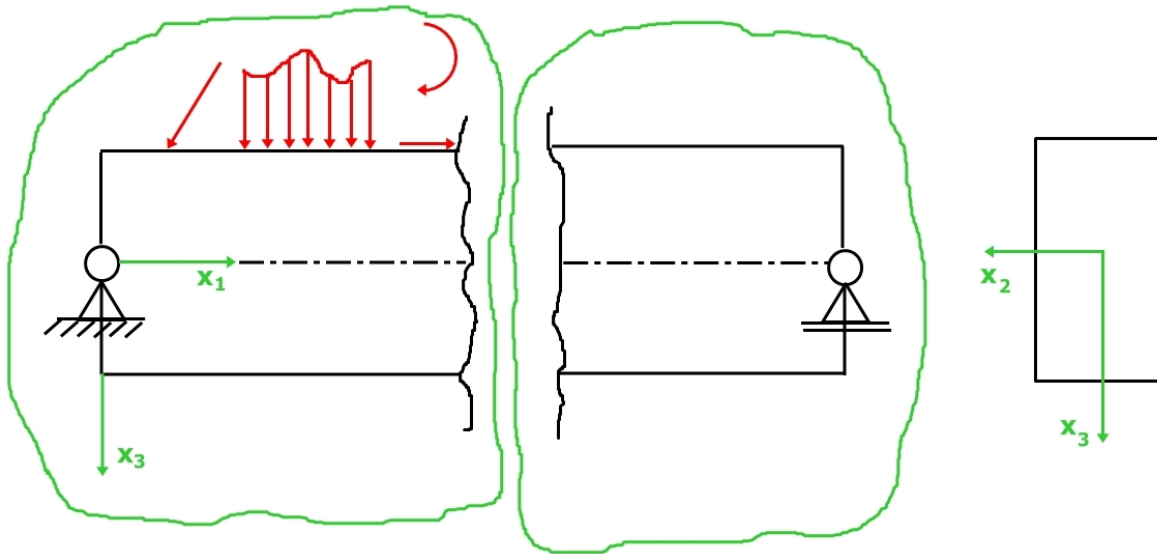


- Linienlasten, die sich über Bereichsgrenzen erstrecken:

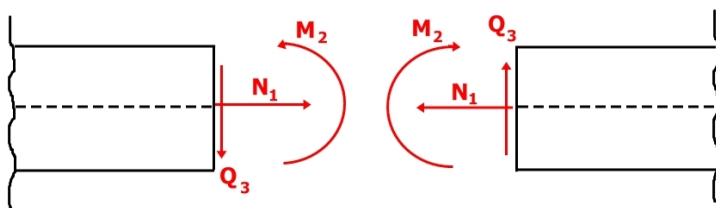


6.3 Schnittgrößen am geraden Balken unter ebener Belastung

Einführung des Begriffs „Schnittgrößen“



„Sichtbarmachen“ der Schnittgrößen

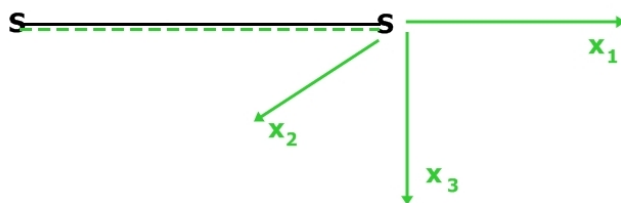


Bezeichnung: $\begin{cases} N_1 : & \text{„Normalkraft“} \\ Q_3 : & \text{„Querkraft“} \\ M_2 : & \text{„Biegemoment“} \end{cases}$

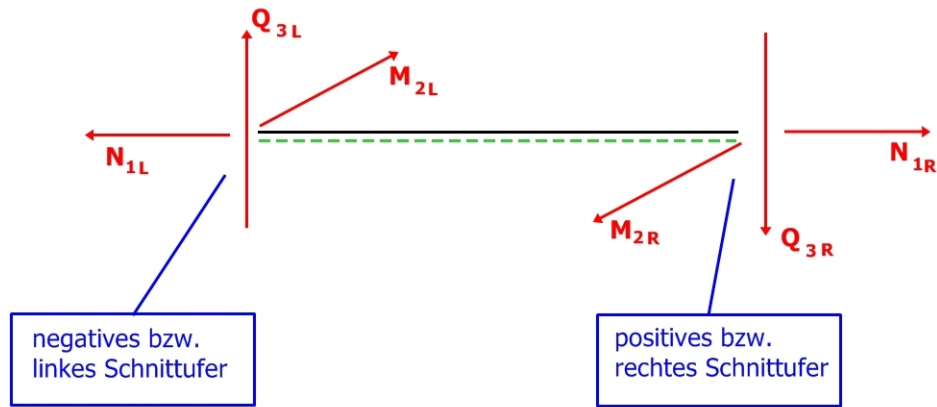
Bem.: Schnittgrößen (stress resultants) sind die Resultierende aus den Spannungen (TM II).

Vorzeichendefinition und „gestrichelte Zone“

- kartesische Schwerpunktskoordinaten und gestrichelte Zone



- positive Schnittgrößen an rechten und linken Schnittufer



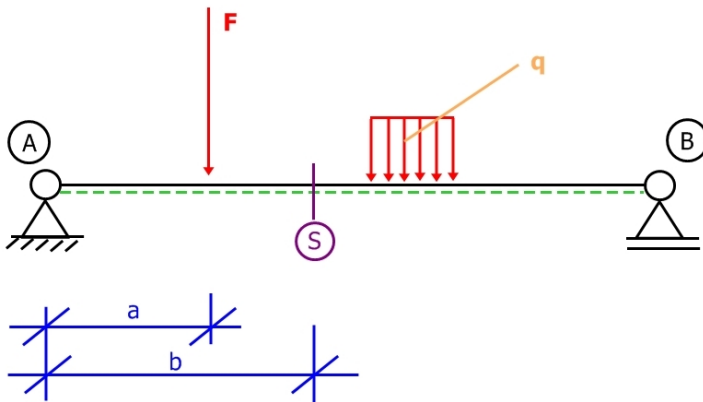
Bem.: bei gestrichelter Zone unterhalb des Balkens

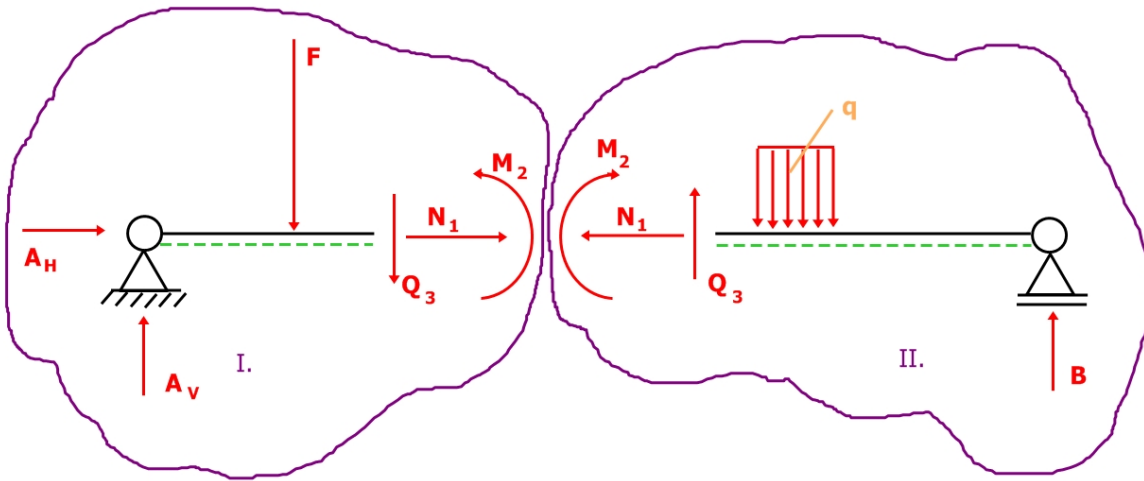
Merke: Positive Schnittgrößen wirken am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung und am negativen Schnittufer in negativer Koordinatenrichtung.

Elementare Berechnung von Schnittgrößen

Satz: Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn sich jeder Teilkörper, der sich durch geschlossene Schnittgrößen bilden lässt im Gleichgewicht befindet.

Veranschaulichung





Gleichgewicht am TS I

Vorr.: A_H , A_V , F sind bekannt

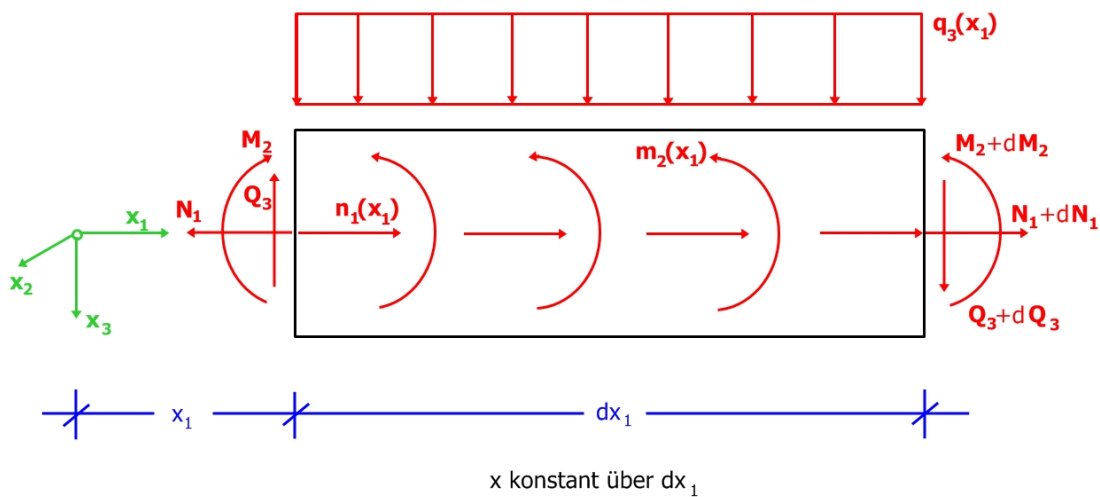
$$\rightarrow \sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = -A_V$$

$$\uparrow \sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = A_V - F$$

$$\circlearrowleft \sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = b A_V - (b - a) F$$

Differentialgleichungen für Schnittgrößen

hier: Behandlung des geraden Balkens



x konstant über dx_1

Zuwächse der Schnittgrößen und Taylorreihenentwicklung bei Entwicklung nach dem Anfangsglied an der Stelle x_1

Es gilt z.B.:

$$N_{1R} = N_1 \Big|_{x_1=x_{1L}} + \frac{dN_1(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1L}} dx_1$$

bzw. „kurz“:

$$N_{1R} = N_1 + dN_1 \quad \text{mit } N_1 = N_{1L}$$

Gleichgewicht am Balkenelement

$$\rightarrow \sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_1 + n_1(x_1) dx_1 + N_1 + dN_1 = 0$$

$$\uparrow \sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_3 - q_3(x_1) dx_1 - Q_3 - dQ_3 = 0$$

$$\circlearrowleft \sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_2 + m_2(x_1) dx_1 + M_2 + dM_2 - Q_3 dx_1 + \underbrace{\frac{1}{2} q_3(x_1) dx_1^2}_{\approx 0} = 0$$

Es folgt

z.B. für den Normalkraftverlauf

$$n(x_1) dx_1 + dN_1 = 0$$

$$\Rightarrow n_1(x_1) = -\frac{dN_1}{dx_1} =: -N'_1$$

Differentialgleichungen für den geraden Balken

$$\frac{dN_1}{dx_1} = N'_1 = -n_1(x_1)$$

$$\frac{dQ_3}{dx_1} = Q'_3 = -q_3(x_1)$$

$$\frac{dM_2}{dx_1} = M'_2 = -m_2(x_1) + Q_3(x_1)$$

Bem. In fast allen real auftretenden Fällen gilt $m_2(x_1) = 0$, d.h.:

$$m_2(x_1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} M'_2 = Q_3(x_1) \\ M''_2 = Q'_3(x_1) = -q_3(x_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Entkopplung der Diff.gleichung am geraden Balken in

- das Stabproblem (N_1)
- das Balkenproblem (Q_3, M_2)

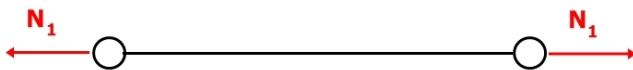
Schnittgrößen am geraden Balken

Integration der Differentialbeziehung für Schnittgrößen liefert mit $m_2(x_1) \approx 0$

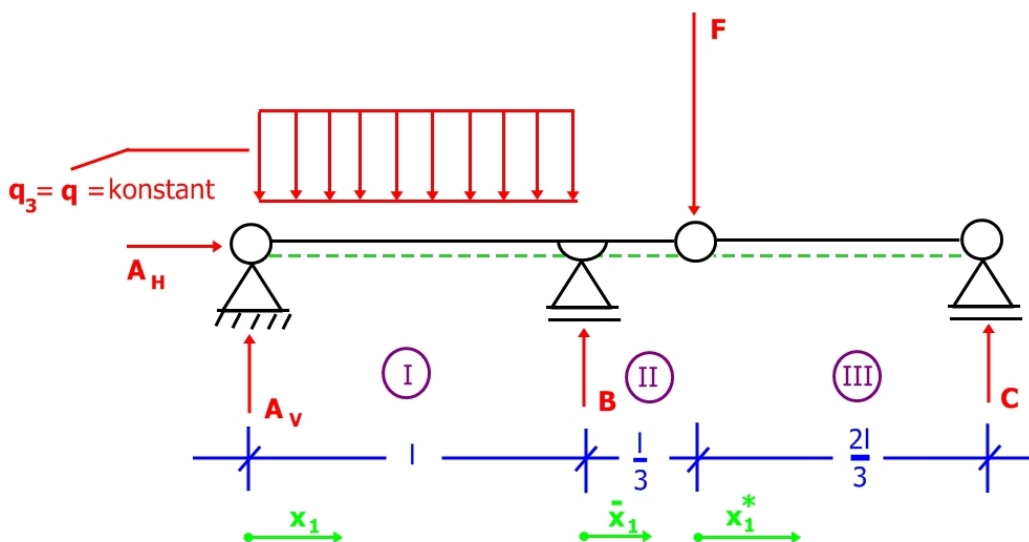
$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= N_1(x_{10}) - \int_{x_{10}}^{x_1} n_1(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \\ Q_3(x_1) &= Q_3(x_{10}) - \int_{x_{10}}^{x_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \\ M_2(x_1) &= M_2(x_{10}) + \int_{x_{10}}^{x_1} Q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 = \\ &= M_2(x_{10}) + Q_3(x_{10})(x_1 - x_{10}) - \int_{x_{10}}^{x_1} \int_{x_{10}}^{x_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_1 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Am geraden Balken sind das Stab- und Balkenproblem entkoppelt.
- Für $Q_3 = 0$ tritt ein Extremwert für M_2 auf, Maximum für $q_3 > 0$ Minimum für $q_3 < 0$
- Treten Unstimmigkeiten in Geometrie und Belastungen auf (Einzellasten, Einzelmomente, Knicke, etc.), dann sind die Integrationsbereiche entsprechend zu trennen.
- Für $Q_3 = 0$ und $M_2 = 0$ liegt ein reines Stabproblem vor. Gilt außerdem $n_1(x_1) = 0$, dann nennt man den Stab „Pendelstab“ bzw. „Pendelstütze“



Beispiel zur Schnittgrößenberechnung



Geg.: F, q, l

Ges.: Verlauf der Schnittgrößen $N_1(x_1), Q_3(x_1), M_2(x_1)$

Lösungsweg:

(1) Kontrolle der stat. Bestimmtheit

$$p = 2, a = 4, z = 2 \quad \longrightarrow f = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

(2) Berechnung der Auflagerreaktionen

$$A_V = \frac{ql}{2} - \frac{F}{3}, \quad A_H = 0$$

$$B = \frac{ql}{3} + \frac{4F}{3}, \quad C = 0$$

(3) Festlegung der Integrationsbereiche

→ Führung geschlossener Schnitte

(4) Berechnung der Schnittgrößen

Bereich I

$$* N_1(x_1) = 0$$

$$* Q_3(x_1) = A_V - \int_0^{x_1} q d\tilde{x}_1 = A_V - qx_1 = q \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - \frac{F}{3}$$
$$\implies Q_3(x_1 = l) = -q \frac{l}{2} - \frac{F}{3}$$

$$\text{Nulldurchgang: } Q_3(x_1 - x_{1N}) = 0$$

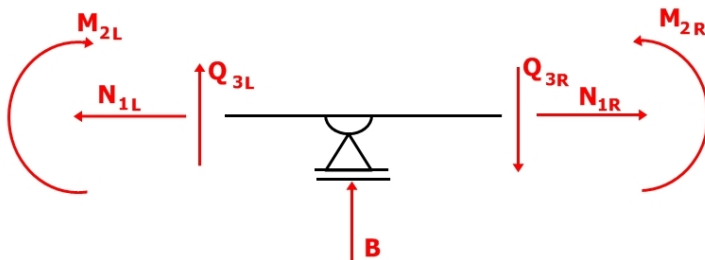
$$\implies x_{1N} = \frac{1}{2} l - \frac{F}{3}$$

$$* M_2(x_1) = \int_0^{x_1} \left[q \left(\frac{l}{2} - \tilde{x}_1 \right) - \frac{F}{3} \right] d\tilde{x}_1 = \frac{q}{2} (lx_1 - x_1^2) - \frac{F}{3} x$$

$$M_2(x_1 = \frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{8} - \frac{Fl}{6}$$

$$M_2(x_1 = l) = -\frac{Fl}{3}, \quad \max\{M_2\} = M_2(x_{1N})$$

Übergangsbedingungen Bereich I - II



$$N_{1R} = N_{1L}, \quad M_{2R} = M_{2L}, \quad Q_{3R} = Q_{3L} + B$$

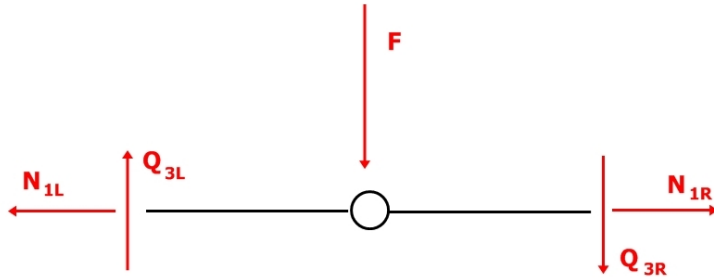
Bereich II

$$* N_1(\bar{x}_1) = 0$$

$$* Q_3(\bar{x}_1) = Q_3(x_1 = l) + B = F \Rightarrow \text{konst.}$$

$$* M_2(\bar{x}_1) = M_2(x_1 = l) + F\bar{x}_1 = F \left(-\frac{l}{3} + \bar{x}_1 \right)$$
$$\Rightarrow M_2(\bar{x}_1 = \frac{l}{3}) = 0$$

Übergangsbedingungen Bereich II - III



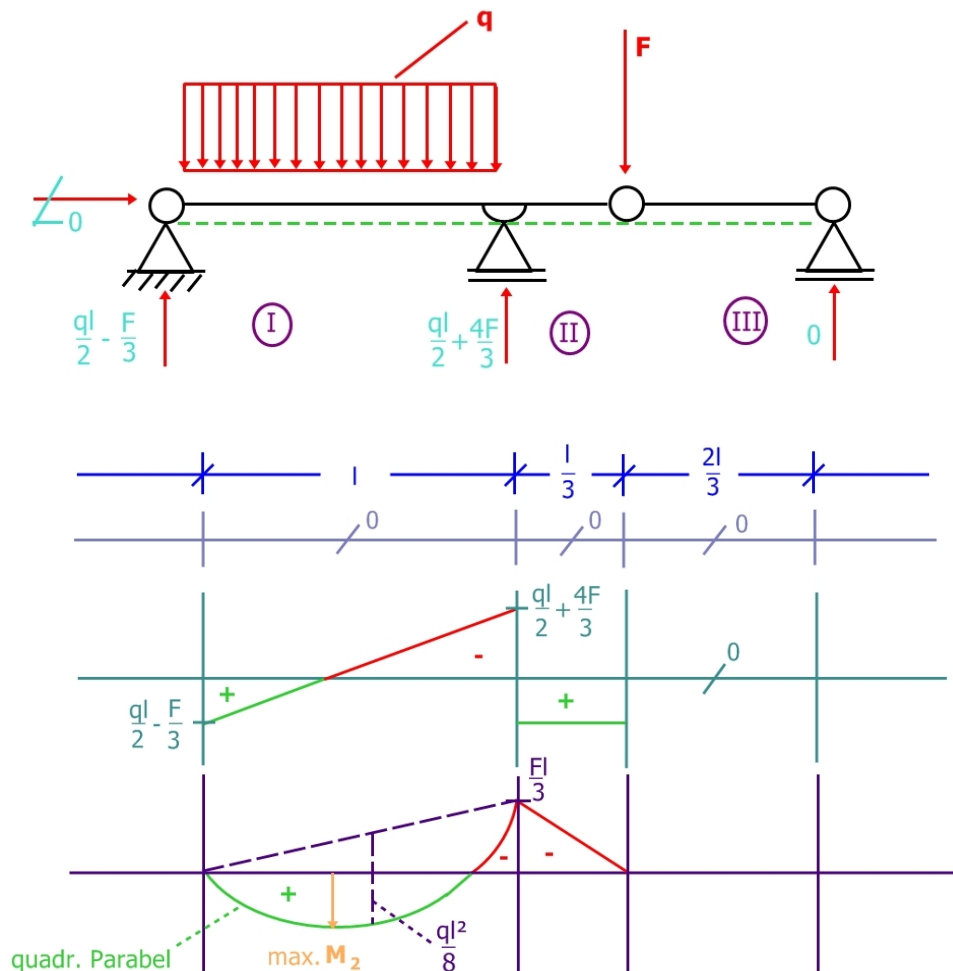
$$N_{1L} = N_{1R}, \quad M_{2L} = M_{2R} = 0, \quad Q_{3L} = Q_{3R} - F = 0$$

Bereich III

$$N_1(x_1^*) = 0, \quad Q_3(x_1^*) = 0, \quad M_2(x_1^*) = 0$$

(5) Darstellung der Schnittgrößen

graphische Darstellung der Funktionsverläufe von $N_1(x_1)$, $Q_3(x_1)$ und $M_2(x_1)$ mit Angaben typischer Werte an ausgewählten Stellen.



Bem.: Darstellung von Schnittgrößen

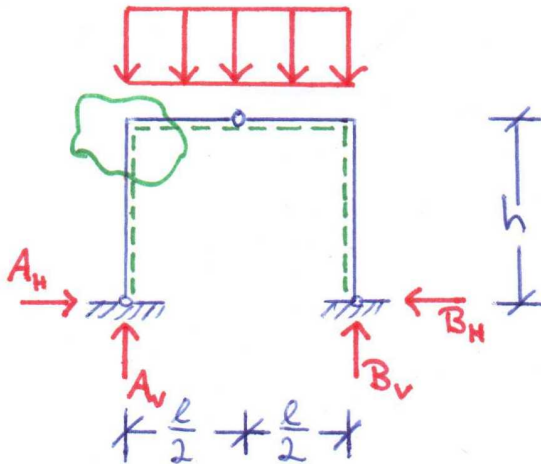
- positiv (blau): auf der Balkenseite mit gestrichelter Zone
- negativ (rot): auf der, der gestrichelten Zone gegenüberliegenden Seite des Balkens

Zusammenhänge zwischen äußerer Belastung, Querkraft und dem Biegemoment beim Balkenproblem.

äußere Last	Querkraft	Moment
Einzellast	Sprung	Knick
Rechteckskraft	Gerade	quadr. Parabel
Dreieckslast	quadrat. Parabel	kubische Parabel
Einzelmoment	/	Sprung

6.4 Schnittgrößen an Rahmenecken und an Knoten mit mehr als 2 Stabanschlüssen

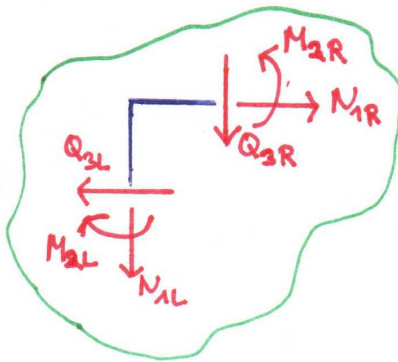
(a) Rahmentragwerk (Beispiel)



$$A_V = B_V = \frac{ql}{2}$$

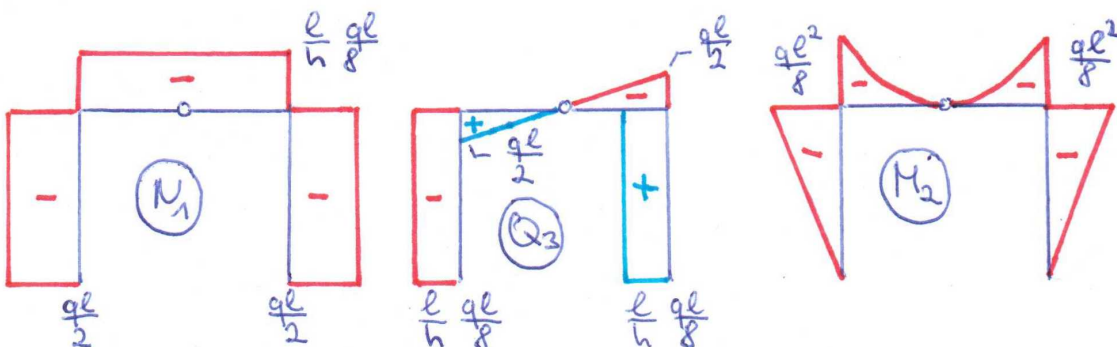
$$A_H = B_H = \frac{l}{h} \frac{ql}{8}$$

Rahmeneck:

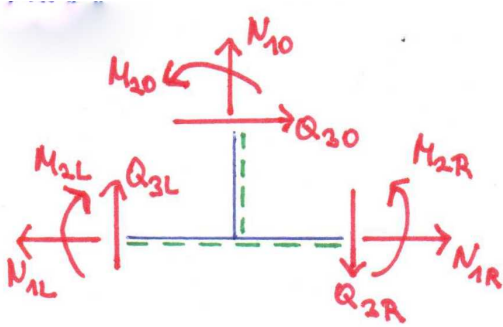


$N_{1R} = Q_{3L}$	$Q_{3R} = -N_{1L}$	$M_{2R} = M_{2L}$
-------------------	--------------------	-------------------

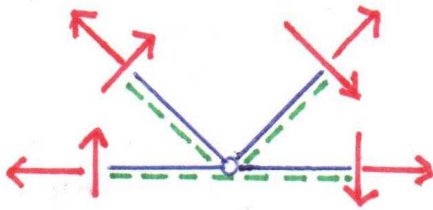
Darstellung der Schnittgrößen



(b) Knoten mit mehr als 2 Stabanschlüssen



$N_{1R} = N_{1L} - Q_{30}$	$Q_{3R} = Q_{3L} + N_{10}$	$M_{2R} = M_{2L} - M_{20}$
----------------------------	----------------------------	----------------------------



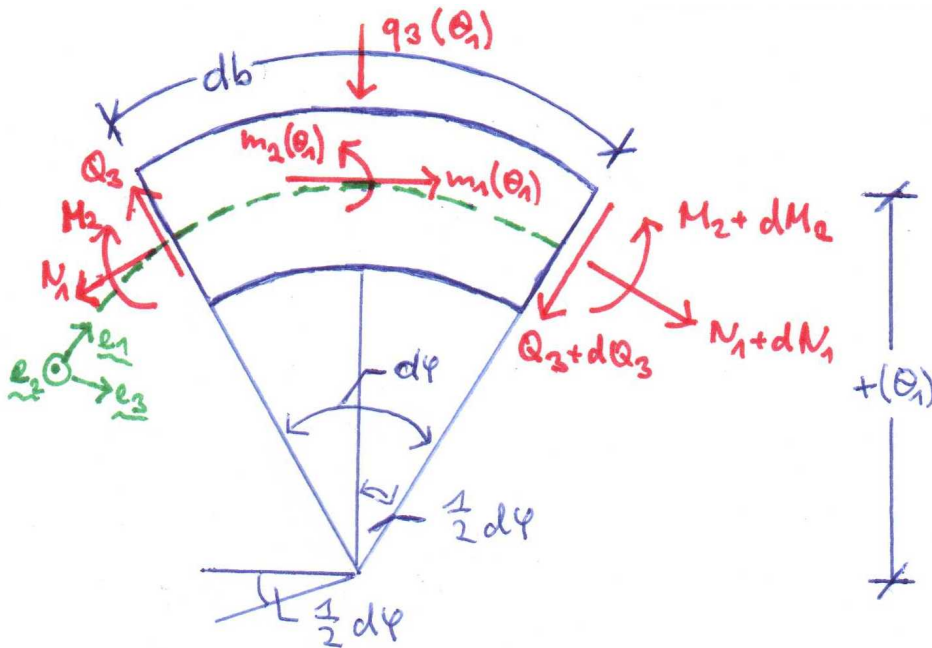
Übergangsbedingungen aus $\sum H = 0$ und $\sum V = 0$
--

Anzahl der Zwischenreaktionen aus:

$$z = (s - 1) \cdot w \quad \begin{cases} s : \text{Anzahl der Stäbe} \\ w : \text{Wertigkeit der Verbindungen} \end{cases}$$

6.5 Schnittgrößen an einem in der Ebene gekrümmten Balken unter ebener Belastung

Differentialbeziehungen für Schnittgrößen



Geometrie des in der Ebene gekrümmten Balkens

- θ^1 : Bogenlänge (natürliche Koordinaten)
- $\theta^1 = r(\theta^1) d\varphi$

Gleichgewicht am Balkenelement

$$\rightarrow \sum H = 0 : \quad -N_1 \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - Q_3 \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) + n_1(\theta^1) d\theta^1 + \\ + (N_1 + dN_1) \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - (Q_3 + dQ_3) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0$$

$$\uparrow \sum V = 0 : \quad Q_3 \cos\left(\frac{2}{3} d\varphi\right) - N_1 \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - q_3(\theta^1) d\theta^1 - \\ - (Q_3 + dQ_3) \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - (N_1 + dN_1) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0$$

$$\odot \sum M_R = 0 : \quad -M_2 + m_2(\theta^1) d\theta^1 + M_2 + dM_2 - \\ - Q_3 \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) d\theta^1 + N_1 \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) d\theta^1 + \frac{1}{2} q_3(\theta^1) (d\theta^1)^2 = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\frac{1}{2} d\varphi}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

Reihenentwicklung für Winkelfunktionen:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

So dass für kleine Winkel gilt:

$$\sin(\tfrac{1}{2} d\varphi) \cong \tfrac{1}{2} d\varphi$$

$$\cos(\tfrac{1}{2} d\varphi) \cong 1$$

$$\Rightarrow \quad \circlearrowleft \sum M_R = 0 = -M_2 + m_2(\theta^1) d\theta^1 + M_2 + dM_2 - Q_3 d\theta^1 + N_1 \tfrac{1}{2} d\varphi d\theta^1 + 0$$

Es folgt z.B. für die Normalkraft mit $d\varphi = \frac{d\theta^1}{r(\theta^1)}$

$$-Q_3 d\varphi + n_1(\theta^1) d\theta^1 + dN_1 - \underbrace{\tfrac{1}{2} dQ_3 d\varphi}_{\approx 0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r(\theta^1)} Q_3 + n_1(\theta^1) = -\frac{dN_1}{d\theta^1} =: -N'_1$$

Man erhält somit für die Differentialgleichungen:

$$\frac{dN_1}{d\theta^1} = N'_1 = -n_1(\theta^1) + \frac{1}{r(\theta^1)} Q_3(\theta^1)$$

$$\frac{dQ_3}{d\theta^1} = Q'_3 = -q_3(\theta^1) - \frac{1}{r(\theta^1)} N_1(\theta^1)$$

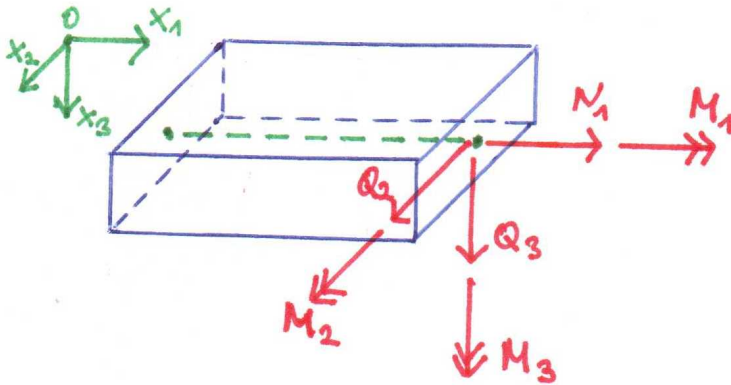
$$\frac{dM_2}{d\theta^1} = M'_2 = -m_2(\theta^1) + Q_3(\theta^1)$$

Bemerkungen:

- Normalkraft und Querkraft sind gekoppelt, d.h. es existiert keine Aufteilung in Stab- und Balkenproblem
- $r(\theta^1) = \text{konst.}$: Kreisbogenträger
- $r(\theta^1) = \infty$: gerade Balken mit Entkopplung in Stab- und Balkenproblem

6.6 Schnittgrößen am geraden Balken unter räumlicher Belastung

Vorzeichendefinition



Bem.:

- M_2, M_3 : Biegemoment
- M_1 : Drillmoment

Analogschluss:

Positive Schnittgrößen weisen am positiven (negativen) Schnittufer in positiver (negativer) Koordinatenrichtung.

am Balkenelement der Länge x_1 treten folgende Belastungen auf:

$$\left. \begin{array}{l} n_1(x_1); m_1(x_1) \\ q_2(x_1); m_2(x_1) \\ q_3(x_1); m_3(x_1) \end{array} \right\} \text{ positiv in positiver Koordinatenrichtung}$$

Differentialbeziehungen für Schnittgrößen

$$\frac{dN_1}{dx_1} = N'_1 = -n_1(x_1)$$

$$\frac{dQ_3}{dx_1} = Q'_3 = -q_3(x_1);$$

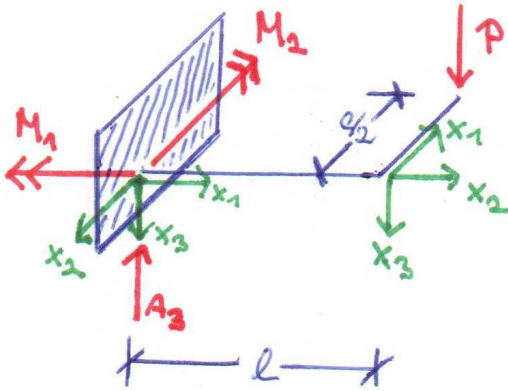
$$\frac{dQ_2}{dx_1} = Q'_2 = -q_2(x_1)$$

$$\frac{dM_2}{dx_1} = M'_2 = -m_2(x_1) + Q_3(x_1);$$

$$\frac{dM_3}{dx_1} = M'_3 = -m_3(x_1) - Q_2(x_1);$$

$$\frac{dM_1}{dx_1} = M'_1 = -m_1(x_1)$$

Beispiel:



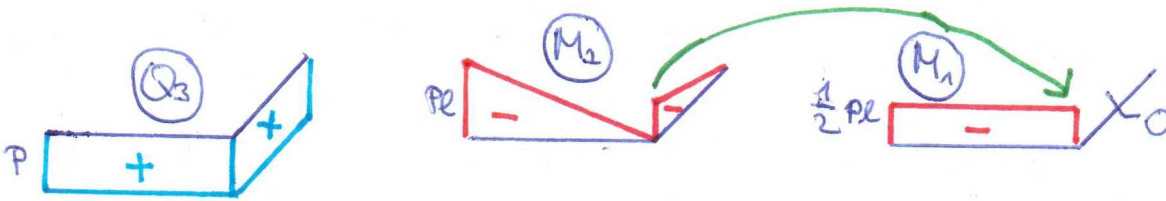
Auflagerreaktionen:

$$A_3 = P$$

$$M_1 = -\frac{1}{2}Pl$$

$$M_2 = -Pl$$

Schnittgrößen:



Abschließende Bemerkungen:

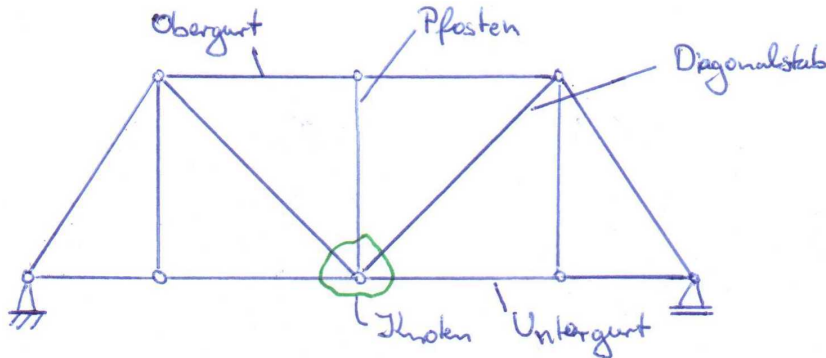
- Schnittgrößen (Zustandslinien) kennzeichnen den lokalen Beanspruchungsgrad eines Tragwerkes
- Sie sind erforderlich, um Bauwerke bzw. Tragelemente zu bemessen.

7 Ebene Fachwerke

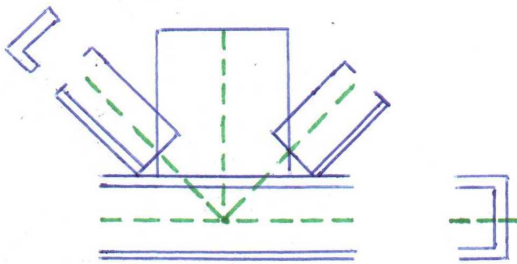
7.1 Definition und Begriffe

Definition: Fachwerke sind aus geraden Stäben zusammengesetzte Systeme für die einige idealisierende Annahmen getroffen werden.

Veranschaulichung



Detail am Knoten:



Ideales Fachwerk:

- Alle Fachwerksknoten (Gelenke) sind reibungsfreie Momentengelenke
- Alle Stabachsen (Systemmittellinien) der an den Knoten angeschlossenen Stäbe schneiden sich in einem Punkt
- Äußere Lasten greifen nur in den Knoten an

Konsequenz:

- Alle Fachwerksstäbe sind Pendelstützen
→ Zug- bzw. Druckkraft (Zug positiv)

Bem.: Bei idealen Fachwerken werden die wesentlichen Einflüsse der äußeren Belastung erfasst.

- durchlaufende Fachwerksstäbe (z.B.: Untergurt) führen zu inneren statischen Unbestimmtheiten
- Belastungen aus Eigengewicht, Wind o.ä. führen zu Querkraften und Biegemomenten

Diese Effekte sind aber von untergeordneten Einfluss.

7.2 Verschieblichkeitsuntersuchungen und Bildungsgesetze

Es gilt das allgemeine Abzählkriterium (vgl. 5.2)

$$f = \left\{ \begin{array}{l} 6p - (a + z), \text{ räumliches} \\ 3p - (a + z), \text{ ebenes} \end{array} \right\} \text{ System}$$

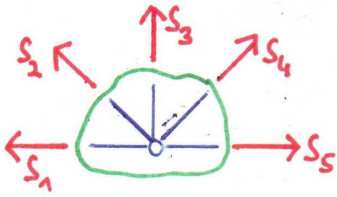
Beispiel von Oben:

$$p = 13, \quad a = 3, \quad z = 36$$

$$\Rightarrow f = 3 \cdot 13 - (3 + 36) = 0$$

darin sind $\begin{cases} 3p : & \text{Anzahl der Gleichungen} \\ a + z : & \text{Anzahl der Unbekannten} \end{cases}$

Vereinfachtes Abzählkriterium für Fachwerke



- 2 Gleichungen: $\sum H = 0$; $\sum V = 0$
- 5 Unbekannte: $S_1 - S_5$

Man erkennt daraus:

- Anzahl der Gleichungen: $2 \cdot k$
mit k: Anzahl der Knoten
- Anzahl der Unbekannten: $a + s$
mit s: Anzahl der Stäbe

Es folgt:

$$f = \left\{ \begin{array}{l} 3k - (a + s), \text{ räumliches} \\ 2k - (a + s), \text{ ebenes} \end{array} \right\} \text{ System}$$

Beispiel wie Oben:

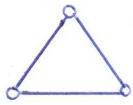
$$k = 8, \quad a = 3, \quad s = 13$$

$$\Rightarrow f = 2 \cdot 8 - (3 + 13) = 0$$

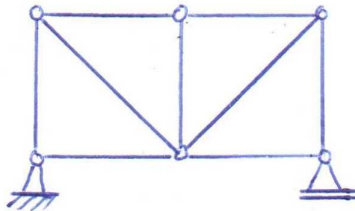
Bildungsgesetze zur Konstruktion unverschieblicher Fachwerke

1. Bildungsgesetz

- ein aus 3 starren Stäben zusammengesetztes System ist ein starrer Körper



- ein aus Dreiecken zusammengesetztes System heißt „einfaches Fachwerk“. Weitere Dreiecke können durch jeweils 2 Stäbe hinzugefügt werden.

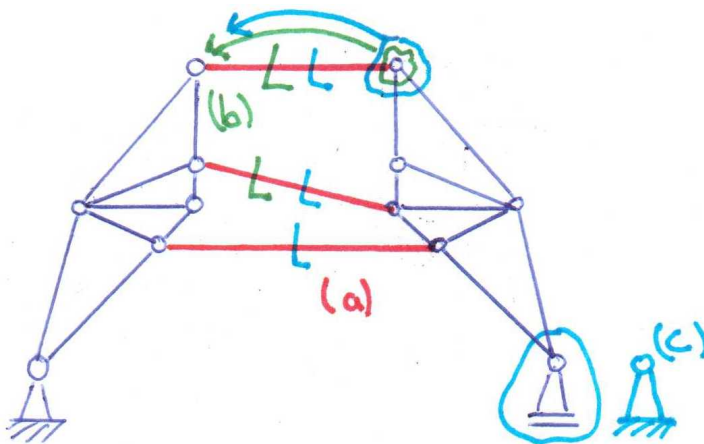


$$k = 6, \quad a = 3, \quad s = 9 \quad \Rightarrow f = 2 \cdot 6 - (3 + 9) = 0$$

2. Bildungsgesetz

Zwei nach dem ersten Bildungsgesetz konstruierte Fachwerke können miteinander verbunden werden, durch:

- 3 Stäbe, die nicht alle zueinander parallel sind.
- 2 dieser Stäbe können durch einen Knoten ersetzt werden, der zu beiden Fachwerken gehört.
- Der letzte Verbindungsstab kann durch eine entsprechende Lagerung ersetzt werden.



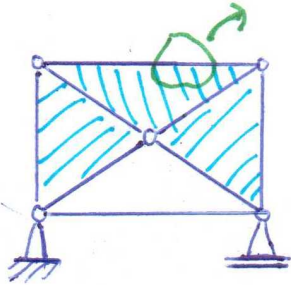
3. Bildungsgesetz

Wird ein Stab bei Fachwerken entfernt, die nach dem 1. und 2. Bildungsgesetz aufgebaut sind, so muss an anderer Stelle ein geeigneter Stab eingebaut werden.

Abschließende Bemerkungen

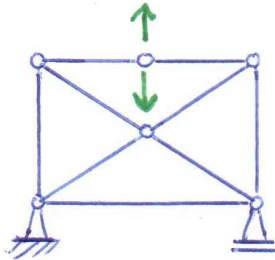
- Fachwerke, die nach den Bildungsgesetzen aufgebaut sind, sind statisch bestimmt.
- Sonderfälle bei der Nutzung des Abzählkriteriums sind möglich.

Beispiele:



$$k = 5, \quad a = 3, \quad s = 8 \quad \Rightarrow f = 2 \cdot 5 - (3 + 8) = -1$$

→ 1-fach stat. unbestimmt



$$k = 6, \quad a = 3, \quad s = 9 \quad \Rightarrow f = 2 \cdot 6 - (3 + 9) = 0$$

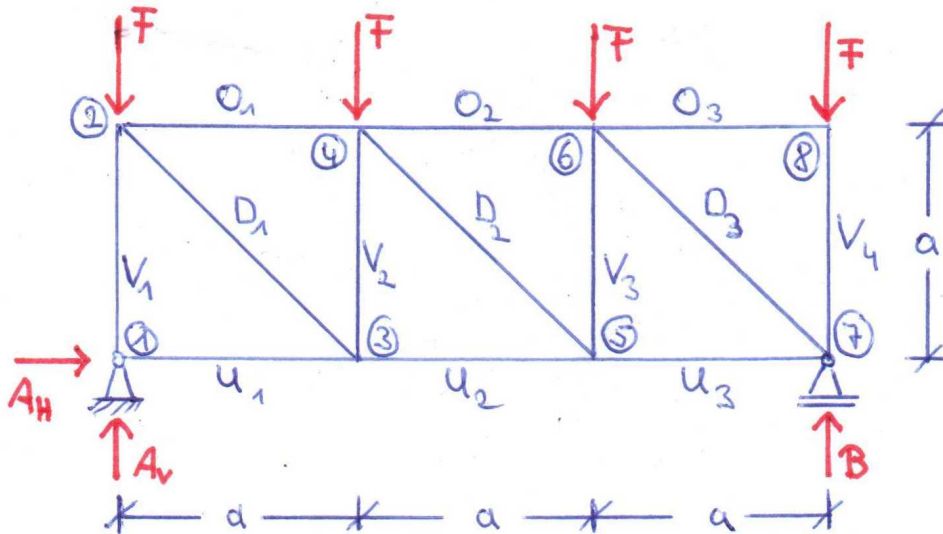
Achtung: → 1-fach stat. unbestimmt und 1-fach verschieblich

7.3 Berechnung von Fachwerken und Knotenschnittverfahren

Vorteil: Führt bei jedem Fachwerk zu einer Lösung

Nachteil: zur Ermittlung einzelner Stabkräfte ungünstig

Erläuterung des Verfahrens



$$k = 8, \quad a = 3, \quad s = 13$$

$$\Rightarrow f = 2 \cdot 8 - (3 + 13) = 0$$

d.h. statisch bestimmt.

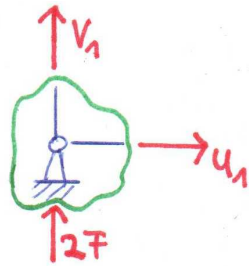
$$A_H = 0, \quad A_V = 2F, \quad B = 2F$$

Lösungsweg beim Knotenschnittverfahren

- (1) Überprüfung auf stat. Bestimmtheit
- (2) Bezeichnung der Knoten und Stäbe
- (3) Freischneiden von k Knoten und k zentralen Kräftesystemen
- (4) Berechnen der Stabkräfte

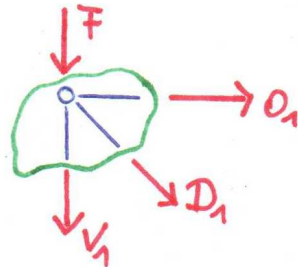
Beispiele:

Knoten ①



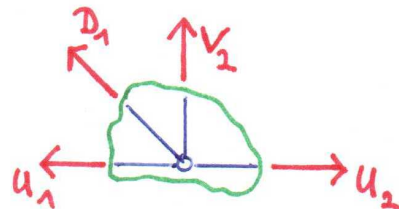
$$\begin{cases} \sum H = 0 : \Rightarrow U_1 = 0 \\ \sum V = 0 : \Rightarrow V_1 = -2F \end{cases}$$

Knoten ②



$$\begin{cases} D_1 = \sqrt{2}F \\ O_1 = -F \end{cases}$$

Knoten ③

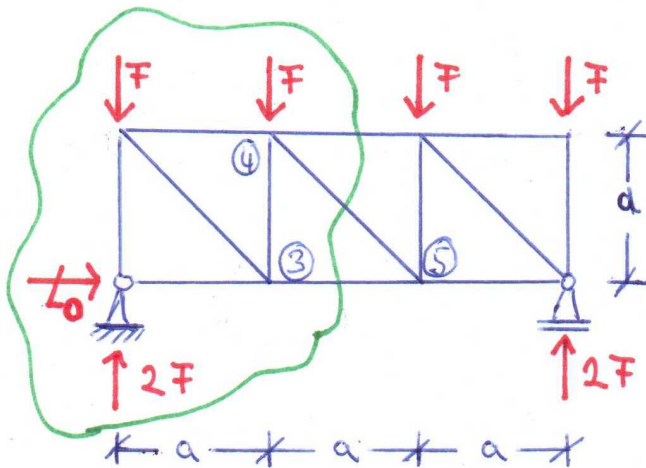


$$\begin{cases} \sum H = 0 : \\ \Rightarrow U_2 = D_1 \cos 45^\circ = F \\ \sum V = 0 : \\ \Rightarrow V_2 = -D_1 \sin 45^\circ = -F \end{cases}$$

Zusammenstellung des Ergebnisses

O_1	O_2	O_3	U_1	U_2	U_3	D_1	D_2	D_3	V_1	V_2	V_3	V_4
-F	-F	0	0	F	F	$\sqrt{2}F$	0	$-\sqrt{2}F$	-2F	-F	0	-F

7.4 Berechnung von Stabkräften mit dem Ritterschen Schnittverfahren

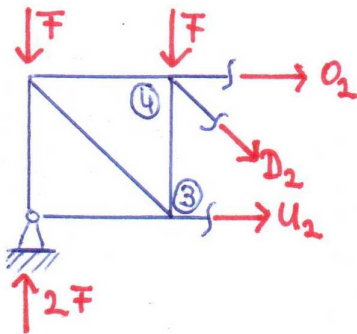


Beispiel: Berechnung von O_2 , U_2 , D_2

Lösungsweg beim Ritterschen Schnittverfahren

- (1) Herausschneiden eines Teilsystems, so dass höchstens 3 Unbekannte Stabkräfte freigeschnitten werden, die sich nicht alle in einem Punkt schneiden.
- (2) Berechnung der freigeschnittenen Stabkräfte
(z.B. 2 x Kräftegleichgewicht, 1 x Momentengleichgewicht)

Berechnung der Stabkräfte O_2 , U_2 , D_2



- 1.) Berechnung von U_2

$$\circlearrowleft \sum M_{\textcircled{4}} = 0 : \quad -2Fa + Fa + U_2a = 0 \\ \Rightarrow D_2 = F$$

- 2.) Berechnung von D_2

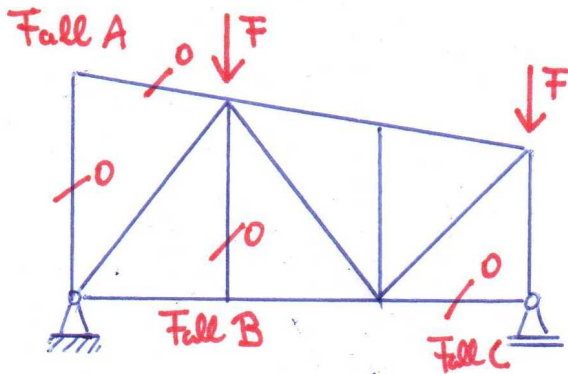
$$\uparrow \sum V = 0 : \quad 2F - F - F - D_2 \sin 45^\circ = 0 \\ \Rightarrow D_2 = 0$$

- 3.) Berechnung von O_2

$$\rightarrow \sum H = 0 : \quad U_2 + O_2 = 0 \\ \Rightarrow O_2 = -F$$

7.5 Ergänzende Bemerkungen

(a) Erkennung von Nullstäben

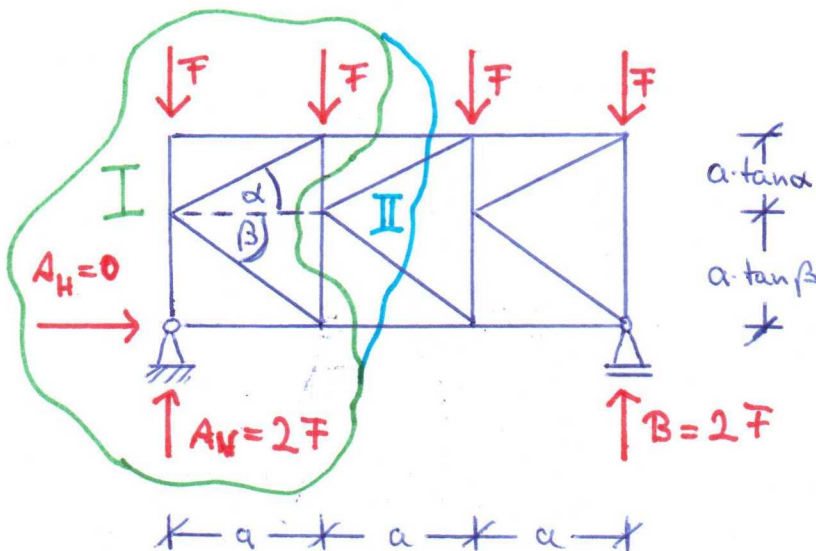


Nullstäbe sind:

- Fall A: nicht gleichgerichtete Stäbe eines unbelasteten Knotens mit nur 2 Stabanschlüssen
- Fall B: der 3. Stab eines unbelasteten Knotens mit 3 Stabanschlüssen, von denen die ersten 2 dieselbe Richtung haben
- Fall C: der 2. Stab eines belasteten Knotens mit 2 Stabanschlüssen, von denen der 1. Stab die Richtung der äußeren Kraft hat.]

(b) Schnittverfahren beim k-Fachwerk

Bem.: Beim k-Fachwerk ist es nicht möglich mit dem Ritterschen Schnittverfahren zu operieren, da immer 4 Stäbe geschnitten werden.

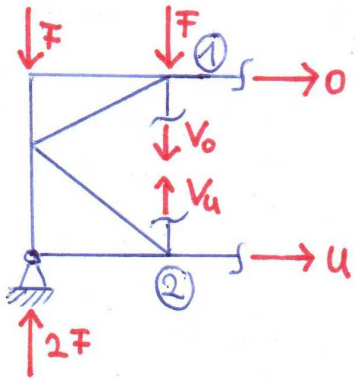


$$k = 11, \quad a = 3, \quad s = 19$$

$$\Rightarrow f = 2 \cdot 11 - (3 + 19) = 0$$

Lösungsweg bei der Ermittlung der Stabkräfte

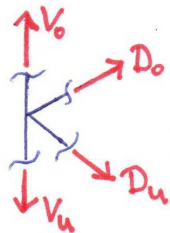
- (a) Führung von 2 Schnitten mit 4 Unbekannten Stabkräften in Schnitt I und 2 weiteren Unbekannten Stabkräften in Schnitt II.
- (b) Obergurt- und Untergurtkraft aus Schnitt I



$$\circlearrowleft \sum M_{\textcircled{1}} = 0 : \quad -2Fa + Fa + 4a (\tan \alpha + \tan \beta) = 0 \\ \Rightarrow U = \dots$$

$$\circlearrowleft \sum M_{\textcircled{2}} = 0 \quad \Rightarrow O = \dots$$

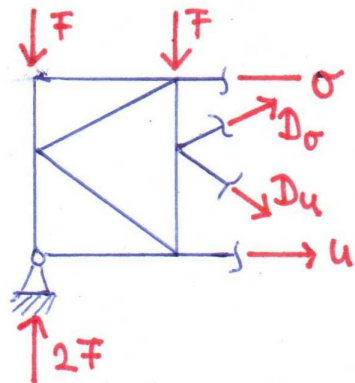
- (c) Knotenschnitt am k-Knoten



$$\rightarrow \sum H = 0 : \quad D_O \cos \alpha + D_U \cos \beta = 0 \\ \Rightarrow D_U = -D_O \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : \quad V_O - V_U + D_O \sin \alpha - D_U \sin \beta = 0 \\ \Rightarrow V_U = V_O + D_O (\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta)$$

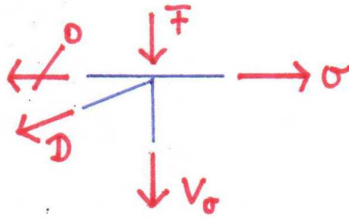
- (d) Diagonalkräfte am Schnitt II



$$\circlearrowleft \sum M_{\odot} = 0 : \quad -2F \cdot 2a + F \cdot 2a + F \cdot a - O \cdot a (\tan \alpha + \tan \beta) - D_O \cos \alpha \cdot a \tan \beta - D_O \sin \alpha \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_O = \dots \quad D_U = \dots$$

(e) Vertikalstabkräfte aus Knotenschnitt ①



$$\rightarrow \sum H = 0 : \quad 0 - D \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow D = \frac{O}{\cos \alpha}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : \quad -D \sin \alpha - F - V_O = 0$$

$$\Rightarrow V_O = F - O \tan \alpha, \quad V_H = \dots$$

„Zahlenbeispiel“ für $\alpha = \beta = 45^\circ$

$$(b) \quad U = \frac{1}{2} F; \quad O = -\frac{1}{2} F$$

$$(c) \quad D_H = -D_O; \quad V_U = V_O + 2 D_O$$

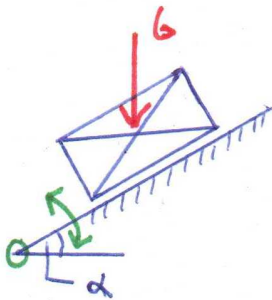
$$(d) \quad D_O = 0 \quad \Rightarrow \quad D_U = 0$$

$$(e) \quad V_O = -\frac{1}{2} F; \quad V_U = -\frac{1}{2} F$$

8 Reibung

8.1 Haftreibung und Gleitreibung

Veranschaulichung



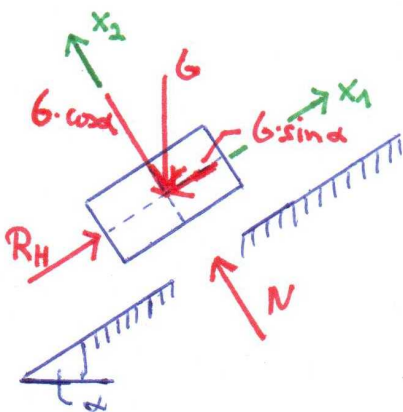
Beobachtung des Reibungsphänomens zeigt folgende Zusammenhänge:

- Die Steigung von $\alpha \geq 0$ führt auf einen Grenzwinkel $\alpha = \rho_H$, nach dessen Überschreitung sich der Klotz in Bewegung setzt.
- Für $0 \leq \alpha \leq \rho_H$ verhindert die Haftreibung ein Einsetzen der Bewegung.
- Im Zustand der Bewegung ($\alpha > \rho_H$) wird Gleitreibung aktiviert. Die Gleitreibung behindert die Bewegung.
- Reibkräfte entstehen in Folge von Oberflächenrauigkeiten von Klotz und schiefer Ebene.
- Reibungskräfte wirken tangential zur Reibungsebene.

(a) Haftreibung

Phänomen: Der Klotz bleibt in Ruhe. Es herrscht Gleichgewicht.

Gleichgewichtsbetrachtung:



$$\begin{aligned}\sum F_1 = 0 : & \quad R_H - G \sin \alpha = 0 \\ \sum F_2 = 0 : & \quad N - G \cos \alpha = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{R_H}{N} = \tan \alpha$$

bzw. $R_H = N \cdot \tan \alpha$

Grenzfall der Haftreibung:

$$\alpha \equiv \rho_H \quad \Rightarrow \quad R_H^* = N \cdot \tan \alpha$$

Einführung der Coulombschen Reibung (Konstitutivgesetz)

$$\boxed{R_H^* = \mu_H \cdot N} \quad \text{mit } \mu_H: \text{Haftreibungswinkel } (\mu_H = \tan \rho_H)$$

Einige Werte für μ_H :

$$\mu_H = \begin{cases} 0,15 & \text{Stahl auf Stahl} \\ 0,025 & \text{Stahl auf Eis} \\ 0,65 & \text{Stein auf Stein} \\ 0,577 & \text{Sand (trocken)} \Rightarrow \rho_H = 30^\circ \end{cases}$$

Bremsweg aus 100 km/h in Abhängigkeit von μ_h :

Asphalt	μ_H [✓]	x_B [m]
rau	1,2	32,8
normal	0,9	43,7
glatt	0,7	56,1
Eis	0,08	491,3

Reibkräfte

R_H : aus einer Gleichgewichtsbedingung $\longrightarrow$ Reduktionskraft

R_H^* : aus dem Konstitutivgesetz ($R_H^* = \mu_h N$),
muss aus Versuchen bestimmt werden.

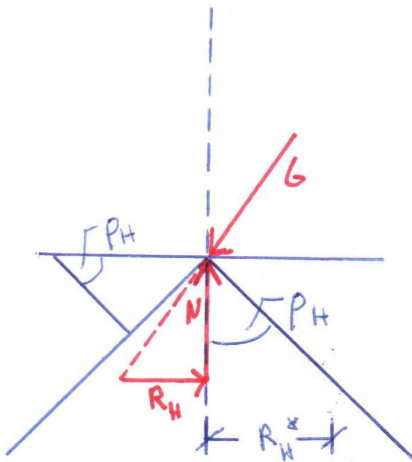
Gleichsetzen von R_H^* aus Grenzfall der Haftreibung und aus dem Reibungsgesetz liefert:

$$\boxed{\mu_H = \tan \rho_H}$$

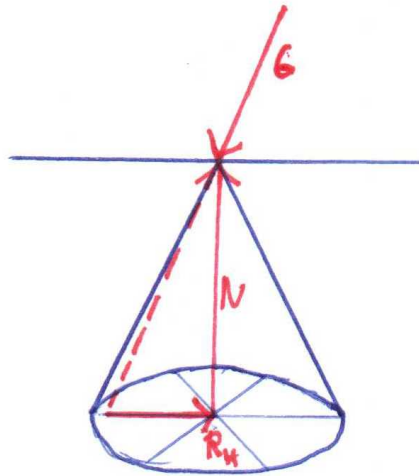
Bem.: Bei Reibungsmaterialien (z.B. trockener Sand) kann der Böschungswinkel ρ_H als „Winkel der inneren Reibung“ interpretiert werden.

Haftreibung und Haftreibungskegel

- ebenes Kräftesystem



- allgemeines Kräftesystem



(b) Gleitreibung

Bem.: Nach Überschreiten des Grenzfalles der Haftreibung tritt Gleitreibung ein.

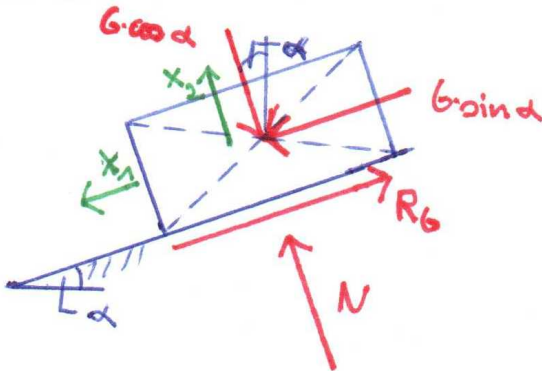
Konstitutivgesetz für die Gleitreibungskraft

in Analogie zum Coulombschen Haftreibungsgesetz gilt:

$$R_G = \mu_G \cdot N \quad \text{mit } \mu_G: \text{Gleitreibungskoeffizient}$$

Bem.: R_G ist eine ausgeprägte Kraft

Untersuchung der Bewegung aus Gleitreibung



$$\sum F_1 = G \sin \alpha - R_G = P_1 = m \cdot a_1$$

$$\sum F_2 = N - G \cos \alpha = 0$$

Bem.: Stat. Gleichgewicht in x_2 - Richtung

$\Rightarrow$ Kräftegleichgewicht als Spezialfall des Impulssatzes

Impulssatz ($\mathbf{k} = m\mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$) in x_1 - Richtung,

d.h. $P_1 = ma_1$, $G = mg$, g ist Gravitation

Untersuchung der Bewegung

$$\boxed{\sum F_i = ma_i} \quad \longrightarrow \text{TM III}$$

Man erkennt:

$$P_1 \begin{cases} ma_1 > 0 : & \text{beschleunigte Bewegung} \\ ma_1 = 0 : & \text{gleichförmige Bewegung} \\ ma_1 < 0 : & \text{gebremste Bewegung} \end{cases}$$

Abschließende Bemerkungen

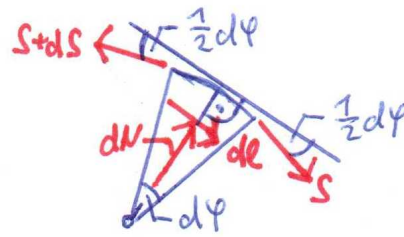
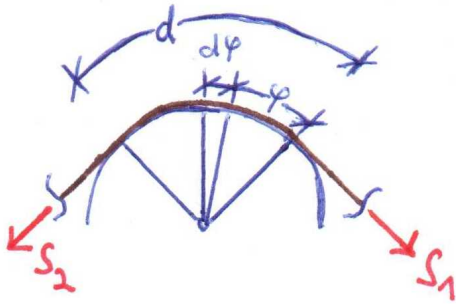
- Haftreibungskoeffizient und Gleitreibungskoeffizient

$$\mu_H \geq \mu_G$$

- Richtung der Reibungskraft

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung (Gleitreibung) bzw. entgegen der angestrebten Bewegung (Haftreibung).

8.2 Seilhaft- und Seilgleitreibung



Gleichgewicht am Element

hier: Betrachtung des Grenzfalles der Haftreibung

- Gleichgewicht in radialer Richtung

$$dN - (S + dS) \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) - S \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0$$
- Gleichgewicht in tangentialer Richtung

$$dR - (S + dS) \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) - S \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0$$

Für kleine Winkel gilt:

$$\sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = \frac{1}{2}d\varphi, \quad \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 1$$

damit folgt:

- $dN - Sd\varphi - \underbrace{\frac{1}{2}dS d\varphi}_{\approx 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad dN = Sd\varphi (*)$
- $dR = dS (*)$

Im Grenzfall der Haftreibung gilt:

- $dR_H = \mu_H dN$

Es folgt aus (*):

- $dS = \mu_H dN = \mu_H \cdot S \cdot d\varphi (**)$

Bem.: (**) ist Differentialgleichung 1. Ordnung für die Seilkraft $S(\varphi)$, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Integration durch „Trennung der Veränderlichen“

$$\frac{dS}{S} = \mu_H d\varphi \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1}^S \frac{d\tilde{S}}{\tilde{S}} = \mu_h \int_0^\varphi d\tilde{\varphi}$$

man erhält:

$$\ln S - \ln S_1 = \mu_h \varphi$$

$$\Rightarrow \ln \frac{S}{S_1} = \mu_h \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S_1} = e^{\mu_H \varphi} \quad \text{mit} \begin{cases} \ln : \text{logarithmus naturalis} \\ e : \text{eulersche Zahl} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = S_1 e^{\mu_H \varphi}}$$

Es folgt für den Umschlingungswinkel α

$$\boxed{S_2 = S_1 e^{\mu_H \alpha}}$$

Bem.: Durch die Richtung von dR am Element wurde vorausgesetzt, dass $S_2 > S_1$
Für den Fall $S_1 > S_2$ folgt analog:

$$S_1 = S_2 e^{\mu_H \alpha}$$

Für Gleitreibung gilt durch Analogschluss

$$\boxed{S_2 = S_1 e^{\mu_G \alpha}} \quad \text{Für Bewegung in Richtung von } S_2$$

Haftbedingung bei Seilreibung

$$S_2 \geq S_1 \quad \Rightarrow \quad S_2 \leq S_1 e^{\mu_H \alpha}$$

$$S_1 \geq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_2 \geq S_1 e^{\mu_H \alpha}$$

Folgerung nach Euler und Eyselwein:

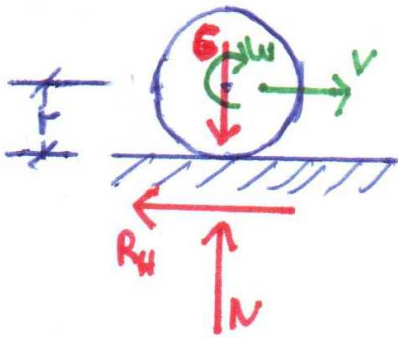
$$\boxed{e^{-\mu_H \alpha} \leq \frac{S_2}{S_1} \leq e^{\mu_H \alpha}}$$

Beispiel: Auf ein Rad maximal zu übertragende Kraft

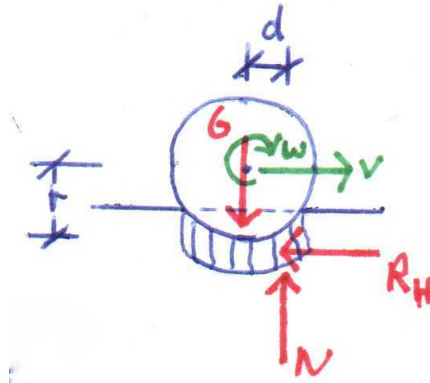
$$\max M = (S_2 - S_1) r = S_1 r (e^{\mu_H \alpha} - 1)$$

8.3 Rollreibung bzw. Rollwiderstand

- starres Rad



- deformiertes Rad



Momentengleichgewicht bzgl. des Radmittelpunktes für gleichförmige Bewegung

$$\sum M = 0 = R_H r$$

$$\begin{aligned}\sum M = 0 &= R_H r - N d \\ \Rightarrow R_H &= \frac{d}{r} N\end{aligned}$$

Konsequenz:

$$R_H = \mu_R \cdot N \quad \text{mit } \mu_R = \frac{d}{r}$$

Bem.: R_H hängt unmittelbar von r ab.

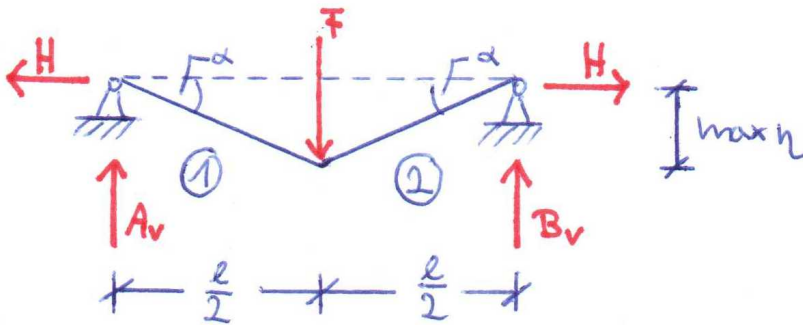
$\Rightarrow$ große Räder rollen leichter.

9 Seilstatik

9.1 Voraussetzungen

- Biegeschlaffheit: d.h. es können keine Querkräfte aufgenommen werden.
- Druckschlaffheit: d.h. es können keine Druckkräfte aufgenommen werden.
- Dehnsteifigkeit: d.h. es können nur Zugkräfte aufgenommen werden.
- Dehnstarrheit: keine Deformation in Folge von Zugbelastung

Beispiel: Seil unter Einzellast

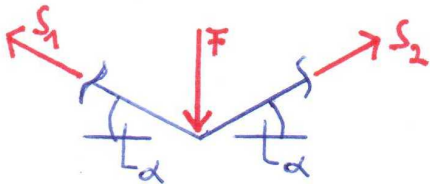


Geg.: $F, l, \max \eta$

Ges.: Seilkräfte

Seildurchhang: $\max \eta = \frac{1}{2} l \tan \alpha$

Seilkräfte:



$$\sum H = 0 \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{F}{2 \sin \alpha} \quad \text{mit } \tan \alpha = \frac{2 \max \eta}{l}$$

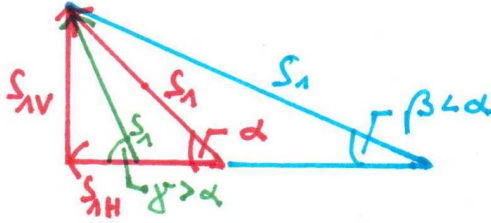
Bemerkungen:

- Für gegebene Werte von F und l hängen S_1 und S_2 nur vom größten Durchhang $\max \eta$ ab.
- Veränderungen von $\max \eta$ bewirken:
 - $\max \eta$ wird größer $\rightarrow$ Seilkräfte werden kleiner
(Grenzfall für $\max \eta \rightarrow \infty$: $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} F$)

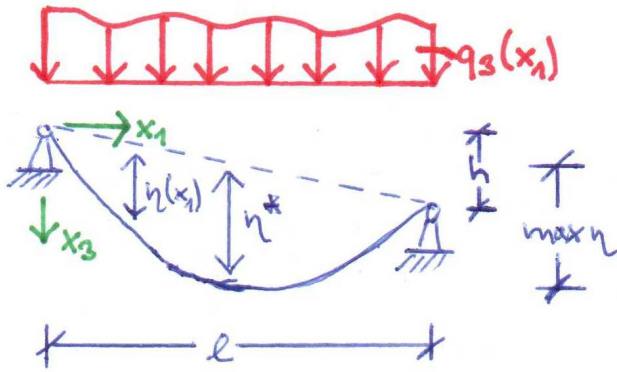
- $\max \eta$ wird kleiner $\rightarrow$ Seilkräfte werden größer
(Grenzfall für $\max \eta = 0$: $S_1 = S_2 = \infty$)

$\Rightarrow$ d.h. ohne Durchhang können Seile keine Kraft übertragen.

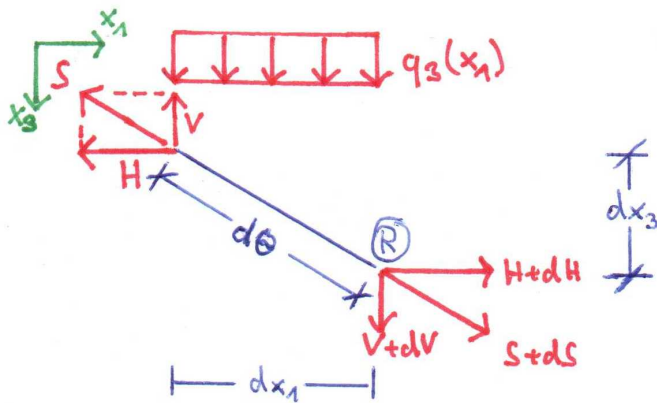
Veranschaulichung



9.2 Seile unter kontinuierlicher Vertikalbelastung



Gleichgewichtsbedingung am Seilelement



$$\begin{aligned} \sum F_1 = 0 &\implies dH = 0 \\ \sum F_3 = 0 &\implies dV = -q_3(x_1) dx_1 \\ \circ \sum M_{\textcircled{R}} = 0 &\implies H dx_3 - V dx_1 + \underbrace{\frac{1}{2} q_3(x_1) (dx_1)^2}_{\approx 0} \end{aligned}$$

Differentialbeziehungen für Schnittgrößen

$$H' = \frac{dH}{dx_1} = 0 \implies H = \text{konst.}$$

$$V' = \frac{dV}{dx_1} = -q_3(x_1)$$

$$V = H x_3 = H \frac{dx_3}{dx_1}$$

Ermittlung der Seilkraft:

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{H^2 + (H x_3')^2} = H \sqrt{1 + (x_3')^2}$$

Ermittlung der Seilkurve

$$x'_3 = \frac{V}{H}$$

$$\implies x''_3 = \frac{1}{H} V' = -\frac{1}{H} q_3(x_1)$$

Zweifache Integration liefert:

$$x_3(x_1) = -\frac{1}{H} \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 dx_1 + C_1 x_1 + C_2$$

$$\text{Randbedingungen} \begin{cases} x_3(x_1 = 0) = 0 & \implies C_2 = 0 \\ x_3(x_1 = l) = h & \implies C_1 = \dots \end{cases}$$

Gleichungssystem der Seilstatik

- 2 Gleichungen: $x_3(x_1)$ bzw. $\eta(x_1)$
 $\nu(H, x_2)$ bzw. $S(H, x_2)$
- 3 Unbekannte: x_3 bzw. η , ν bzw. S , H

Konsequenz: 1 zusätzliche Gleichung ist erforderlich!

Möglichkeiten sind:

- (1) max. Durchgang η^* ist vorgeschrieben
- (2) max. Seilkraft S^* ist vorgeschrieben
- (3) max. Seillänge l^* ist vorgeschrieben

9.3 Seil unter konstanter Vertikalbelastung

Bem.: Es werden 2 Fälle untersucht, nämlich

- (a) q_3 ist konstant bzgl. der Horizontallänge
- (b) q_3 ist konstant bzgl. der Seillänge L .

(a) Der Fall $q_3(x_1) = \text{konst.}$

Bestimmung der Seilkurve für $q_3(x_1) = q = \text{konst.}$

$$x_3(x_1) = -\frac{1}{2H} q x_1^2 + C_1 x_1 + C_2$$

$$\text{Randbedingungen (RB)} \quad \begin{cases} x_3(x_1 = 0) = 0 & \implies C_2 = 0 \\ x_3(x_1 = l) = h & \implies C_1 = \frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} \end{cases}$$

$$\implies \boxed{x_3(x_1) = \left(\frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} \right) x_1 - \frac{q}{2H} x_1^2}$$

$$\implies x'_3(x_1) = \left(\frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} \right) - \frac{q}{H} x_1$$

Ermittlung der Durchgangskurve $\eta(x_1)$

$$\eta(x_1) = x_3(x_1) - \frac{h}{l} x_1 = \frac{q}{2H} (lx_1 - x_1^2)$$

Bem.: Seilkurve $x_3(x_1)$ und Durchgangskurve $\eta(x_1)$ sind quadratische Parabeln.

Bestimmung des Horizontalzuges

- (1) $\max \eta = \eta^*$ ist vorgeschrieben.

– Lage $x_{1,2}$ von η^* :

$$\eta'(x_1) = 0 = \frac{q}{2H} (l - 2x_{1,2})$$

$$\implies x_{1,2} = \frac{l}{2}$$

– Durchhang η^* für $x_1 = \frac{l}{2}$

$$\eta \left(x_1 = \frac{l}{2} \right) = \eta^* = \frac{q}{2H} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{H} \right) = \frac{ql^2}{8H}$$

$$\implies \boxed{H = \frac{ql^2}{8\eta^*}}$$

- (2) $\max S = S^*$ ist vorgeschrieben.

– Lage x_{1S} von S^* :

$$\begin{aligned}
S &= H \sqrt{1 + (x'_3)^2} \\
\Rightarrow \quad \max S &\text{ für } \max |x'_3| \\
- \text{ Lage } x_{1S} &\text{ von } \max |x'_3| \\
x''_3 &= -\frac{q}{H} \neq 0 \\
\Rightarrow \quad &\text{kein Extremwert für } |x'_3| \text{ im Bereich } 0 \leq x_1 \leq l \\
\Rightarrow \quad &\text{Untersuchung der Randwerte für } x_1 = 0, x_1 = l \\
x_1 = 0 &\longrightarrow |x'_3| = \left| \frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} \right| \\
x_1 = l &\longrightarrow |x'_3| = \left| \frac{h}{l} - \frac{ql}{2H} \right| \\
\text{Konsequenz } \begin{cases} h \geq 0 : & \max S \text{ für } x_1 = 0 \\ h \leq 0 : & \max S \text{ für } x_1 = l \end{cases}
\end{aligned}$$

Bem.: $\max S$ tritt am jeweils höheren Seilauflager auf.

$$\begin{aligned}
- \max S &= S^* \text{ für } \max |x'_3|: \\
\max |x'_3| &= \frac{|h|}{l} + \frac{ql}{2H} \\
\text{Es folgt.} \\
S^* &= H \sqrt{1 + \left(\frac{|h|}{l} + \frac{ql}{2H} \right)^2} \\
\Rightarrow \quad H &= H(S^*)
\end{aligned}$$

(3) $\max L = L^*$ ist vorgeschrieben

– Ermittlung der Seillänge L

Es gilt für ein Element $d\theta$ der Seillänge:

$$d\theta = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx_3}{dx_1} \right)^2} dx_1 = \sqrt{1 + (x'_3)^2} dx_1$$

So dass gilt:

$$L = \int_0^L d\theta = \int_0^L \sqrt{1 + (x'_3)^2} dx_1$$

Auswertung des Integrals durch Substitution

$$x'_3 =: z \begin{cases} \frac{dz}{dx_1} = -\frac{q}{H} & \Rightarrow dx_1 = -\frac{H}{q} dz \\ x_1 = 0 & \Rightarrow z = z_1 = \frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} \\ x_1 = l & \Rightarrow z = z_2 = \frac{h}{l} - \frac{ql}{2H} \end{cases}$$

Einsetzen liefert:

$$L = -\frac{H}{q} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + z^2} dz = -\frac{H}{2q} \left(z \sqrt{1 + z^2} + \operatorname{arsinh} z \right) \Big|_{z_1}^{z_2}$$

mit $\operatorname{arsinh}(*) = \operatorname{area} \sinh(*)$: inv. Hyperbolicusfunktion ($\sinh^{-1}$)

$$\text{mit } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Es folgt: $H = H(L^*) \quad \text{für } L = L^*$

(b) Der Fall $q_3(\theta) = \text{konst.}$

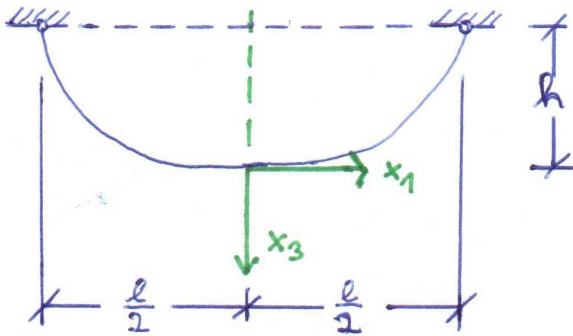
Bem.: Der Fall Seil unter Eigengewicht bedingt:

$$q_3(\theta) = \nu g \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \nu : & \text{Masse pro Längenelement} \\ g : & \text{Betrag der Gravitation} \end{cases}$$

Der Fall „Seil unter Eigengewicht“

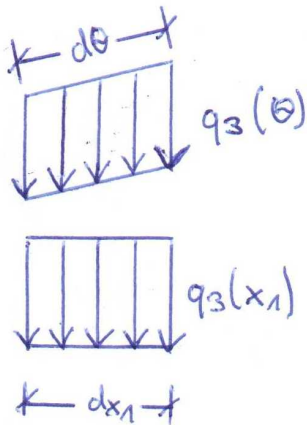
hier: beide Seilenden seien auf gleicher Höhe

Veranschaulichung



1

Ermittlung der Belastung $q_3(x_1)$



Es gilt:

$$q_3(\theta) d\theta \stackrel{!}{=} q_3(x_1) dx_1$$
$$\Rightarrow q_3(x_1) = \frac{q_3(\theta) d\theta}{dx_1}$$

Es gilt auch:

$$d\theta = \sqrt{1 + (x_3')^2} dx_1$$
$$\Rightarrow \theta' = \frac{d\theta}{dx_1} = \sqrt{1 + (x_3')^2}$$

Es folgen für homogene Seile mit $\nu = \text{konst.}$

$$q_3(x_1) = q_3(\theta) \sqrt{1 + (x_3')^2} = \nu g \sqrt{1 + (x_3')^2}$$

Seilkurve $x_3(x_1)$

Es gilt bei beliebiger Belastung

$$x_3'' = -\frac{1}{H} q_3(x_1')$$

so dass:

$$x_3'' = -\frac{\nu g}{H} \sqrt{1 + (x_3')^2}$$

Bem.: Man erhält eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Form $x_3'' = f(x_3')$ für die Seilkurve.

Behandlung durch Substitution:

$$z(x_1) := x_3'(x_1)$$

→ Überführung der DGL 2. Ordnung in eine DGL 1. Ordnung in $z(x_1)$.

Es folgt:

$$\frac{dz}{dx_1} = -\frac{\nu g}{H} \sqrt{1 + z^2}$$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{\nu g}{H} \int \sqrt{1+z^2} dx_1$$

Integration liefert:

$$\operatorname{arsinh} z = -\frac{\nu g}{H} x_1 + C$$

$$\text{R.B.: } z(x_1 = 0) = x_3'(x_1 = 0) = 0$$

Es folgt mit dem natürlichen Logarithmus

$$\operatorname{arsinh} z = \ln(z + \sqrt{1+z^2}) = -\frac{\nu g}{H} x_1 + C$$

$$\implies \operatorname{arsinh} z|_{z(x_1=0)=0} = 0$$

Es folgt:

$$z = x_3' = \sinh\left(-\frac{\nu g}{H} x_1\right)$$

$$\implies x_3(x_1) = -\int \sinh\left(-\frac{\nu g}{H} x_1\right) dx_1$$

Integration liefert:

$$x_3 = -\frac{H}{\nu g} \cosh\left(\frac{\nu g}{H} x_1\right) + C$$

$$\text{R.B.: } x_3(x_1 = 0) = 0 \implies C = \frac{H}{\nu g} \quad \text{mit } \cosh(0) = 1$$

Man erhält als Seilkurve

$$x_3(x_1) = \frac{H}{\nu g} \left(1 - \cosh \frac{\nu g x_1}{H}\right)$$

Bemerkungen

- Die Seilkurve stellt die „Kettenlinie“ dar.
(Bem.: Anwendung z.B.: bei Hochspannungsleitungen)
- Seilkraft $S = H \sqrt{1 + (x_3')^2}$
- Horizontalzug aus einer der 3 Zusatzbedingungen vgl. 9.2

Es gilt im einzelnen

$$V = H x'_3 = -H \sinh \frac{\nu g \cdot x_1}{H}$$

$$S = H \sqrt{1 + (x'_3)^2} = H \cosh \frac{\nu g \cdot x_1}{H}$$

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + (x'_3)^2} dx_1 = \frac{2H}{\nu g} \sinh \frac{\nu g \cdot l}{2H}$$

$$\eta(x_1) = x_3(x_1) + h \quad \text{mit } h = -x_3(x_1 = \frac{l}{2})$$

Analogie zur Seilstatik

Umkehrung der Seilkurve, d.h. unter Eigengewicht



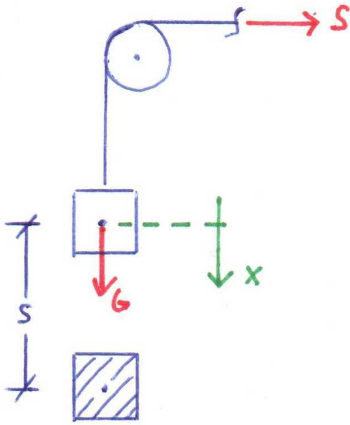
Anwendung: Mauerwerksträger, Gewölbe usw.

10 Prinzip der virtuellen Arbeit

10.1 Arbeitsbegriff in der Mechanik starrer Körper

Einführung des Arbeitsbegriffs

Beispiel: Heben eines Gewichtes



Beim Absenken von G um den Betrag S wird Arbeit geleistet.

$$A = G \cdot S$$

Dimension:

$$1 \text{ J (Joule)} \triangleq 1 \text{ Nm}$$

Physikalische Erfahrung:

- Heben eines Gewichtes: System verbraucht Arbeit
- Senken eines Gewichtes: System leistet Arbeit

Es gilt der allgemeine Zusammenhang:

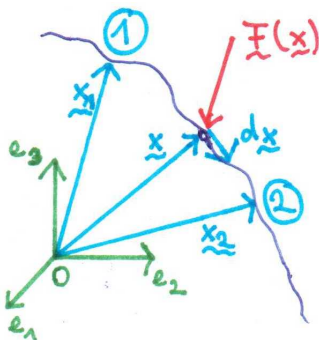
$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} G \, dx = G (x_2 - x_1)$$

- Heben von G ($x_1 = s, x_2 = 0$): $A_{12} = -Gs < 0$
- Senken von G ($x_1 = 0, x_2 = s$): $A_{12} = Gs > 0$

Konsequenz: Wird in einem System zwischen zwei Zuständen ① und ② Arbeit geleistet, dann gilt:

$$A_{12} > 0$$

Arbeit einer Kraft entlang eines beliebigen Weges



- differentielles Element der Arbeit

$$dA = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

- Arbeit zwischen ① und ②

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

„Konservative“ Kräfte bzw. Potentialkräfte

Def.: Eine Kraft ist konservativ, wenn die Arbeit A_{12} nicht vom Weg abhängt, auf der Sie zwischen den Zuständen ① und ② geleistet wird.

Beispiele:

- konservativ: z.B.: Gravitations- bzw. Gewichtskraft

$$\Rightarrow \oint \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

- nicht-konservative: z.B.: Reibungskraft $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \dots)$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{R}(\mathbf{x}, \dots) d\mathbf{x} \neq 0$$

Bem.: Die Arbeit konservativer Kräfte verschwinden längs eines geschlossenen Weges.

Arbeit und Potential konservativer Kräfte

für konservative Kräfte existiert ein Potential bzw. eine potentielle Energie.

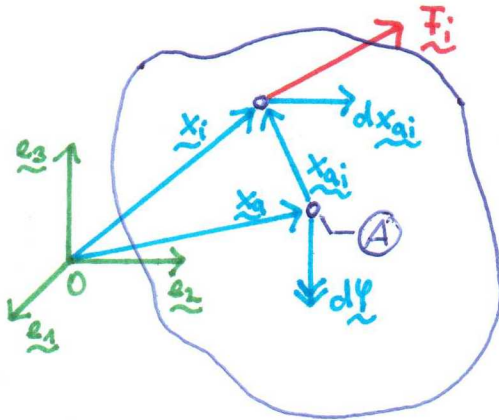
$$U_a = -A = -\int \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

Bem.: U_a und A haben entgegengesetzte Vorzeichen. U_a kann nur bis auf einen konstanten Faktor (Integrationskonstante) bestimmt werden.

Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= -\frac{dU_a}{d\mathbf{x}} =: -\text{grad } U_a \\ \text{mit grad } (\cdot) &:= \frac{d(\cdot)}{d\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} U_a(x) = \int \underbrace{\frac{dU_a}{d\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}}_{-\mathbf{F}_a(x)} = -\mathbf{F}_a(x)$$

Die Arbeit eines Kräftesystems am starren Körper



- differentielles Produkt des Kräftesystems $F = \{\mathbf{F}_i, \mathbf{x}\}$ mit $i = 1, \dots, u$

Es gilt mit $|x_{ai}| = \text{konst.}$

$$d\mathbf{x}_{ai} := d\varphi \times \mathbf{x}_{ai}$$

Bem.: Am Starrkörper erfährt jeder Punkt dieselbe Drehung.

$$\begin{aligned} dA &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (d\mathbf{x}_a + d\mathbf{x}_{ai}) = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_a + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (d\varphi \times d\mathbf{x}_{ai}) = \\ &= (\sum_i \mathbf{F}_i) \cdot d\mathbf{x}_a + (\sum_i \mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{F}_i) \cdot d\varphi = \\ &= \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}_a + \mathbf{M}_a \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Arbeit eines Systems konservativer Kräfte zwischen ① und ②

$$A = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}_a + \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \mathbf{M}_a \cdot d\varphi$$

10.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Bem.: Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PdvA) in der Form des Prinzips der virtuellen Verrückung (PdvV) hat in der „Analytischen Mechanik“ denselben Stellenwert, wie das Gleichgewichtsaxiom in der Eulerschen Mechanik.

Die virtuelle Verrückung (Verschiebungen, Verdrehungen)

Eigenschaften:

- gedacht (virtuell)
- unendlich klein
- mit den kinematischen Zwangsbedingungen des Systems verträglich

Einführung der Verrückungssymbole:

$$\text{virtuelle Veränderungen} \begin{cases} \delta \mathbf{x} : & \text{virtuelle Verschiebung} \\ \delta \varphi : & \text{virtuelle Verdrehungen} \end{cases}$$

mit $\delta(\cdot)$: Variationssymbol

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (PdvV)

$$\delta A = 0$$

virtuelle Arbeit eines Kräftesystems $F = \{\mathbf{F}_i, \mathbf{x}_i\}$ am starren Körper.

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i$$

bzw. bei Reduktion auf $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \delta A &= (\sum_i \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_a + (\sum_i \mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{F}_i) \cdot \delta \varphi = \\ &= \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{x}_a + \mathbf{M}_a \cdot \delta \varphi \end{aligned}$$

PdvV und Gleichgewichtsaxiom

(1) Es gelte das Gleichgewichtsaxiom (Eulersche Mechanik)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_a = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{PdvV } (\delta A = 0) \text{ ist erfüllt für beliebige } \delta \mathbf{x}_a \text{ und } \delta \varphi$$

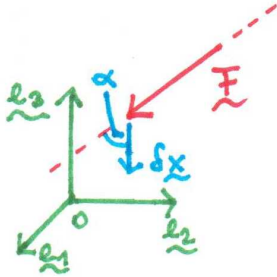
(2) Es gelte das PdvV (Analytische Mechanik)

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = 0 \\ \delta \mathbf{x}_a, \delta \varphi : \text{beliebig} \end{array} \right\} \text{Gleichgewicht, d.h. } \mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{M}_a = \mathbf{0} \text{ ist erfüllt.}$$

Bemerkungen zum PdvV

- δA kennzeichnet einen virtuellen Zustand
- $\delta(\cdot)$ - Variation wird formal behandelt wie das Differential $d(\cdot)$

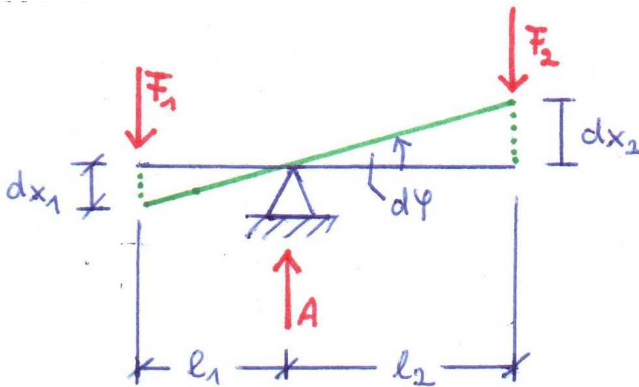
- wer leistet virtuelle Arbeit:
 - eingeprägte Kräfte (äußere Kräfte)
 - Reaktionskräfte (Statik) und Führungskräfte (Dynamik) leisten keine virtuelle Arbeit
- Berechnung der virtuellen Arbeit
Beispiel: Einzelkraft



$$\begin{aligned}\delta A(\mathbf{F}) &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} = |\mathbf{F}| |\delta \mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{F}, \delta \mathbf{x}) = \\ &= (F \cdot \cos \alpha) \delta x\end{aligned}$$

Beispiele:

(a) System mit 1 kinematischen Freiheitsgrad

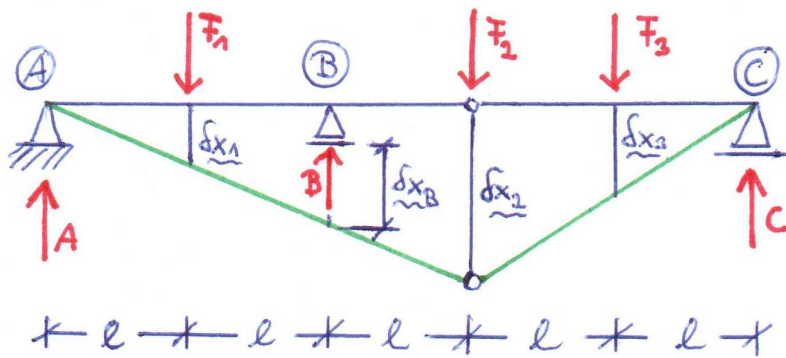


Geometrie:

$$\tan \delta \varphi \approx \delta \varphi \text{ mit } \delta \varphi = \frac{\delta x_1}{l_1} = \frac{\delta x_2}{l_2}$$

$$\begin{aligned}\text{PdV: } \delta A &= 0 = F_1 \delta x_1 - F_2 \delta x_2 = (F_1 - F_2 \frac{l_2}{l_1}) \delta x_1 \\ \Rightarrow 0 &= F_1 l_1 - F_2 l_2\end{aligned}$$

(b) statisch und kinematisch bestimmtes Tragwerk



Geg.: Gerberträger

Ges.: Lagerreaktion in B mit PdvV

Vorgehensweise:

- Lösen der kinematischen Bindung in B, d.h.
 - * Reaktionskraft B wird eingeprägte Kraft
 - * System erhält 1 kinematische Freiheitsgrad
- Anwendung des PdvV

Geometrie: $\delta x_1 = l \delta \varphi$, $\delta x_2 = 3l \delta \varphi$
 $\delta x_B = 2l \delta \varphi$, $\delta x_3 = \frac{3}{2}l \delta \varphi$

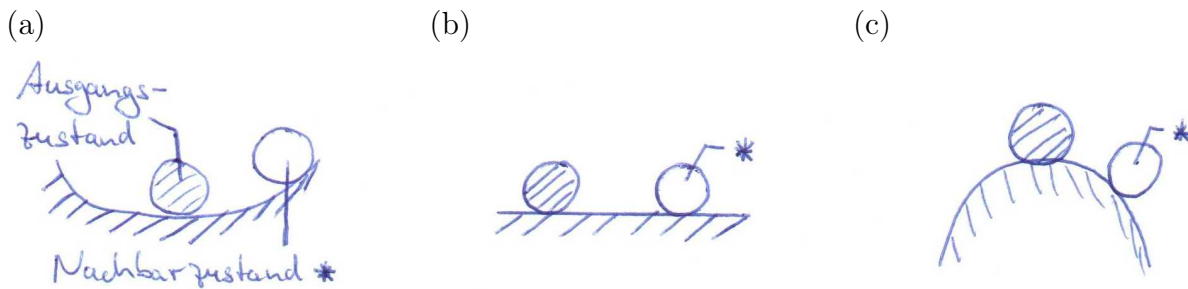
PdvV: $\delta A = 0 = F_1 \delta x_1 - B \delta x_B + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3$

(*) $\implies B = \frac{1}{2}(F_1 + 3 F_2 + \frac{3}{2} F_3)$

Bem.: (*) entspricht der Gleichgewichtsbedingung $\sum M_{\textcircled{A}} = 0$, wenn zuvor C berechnet wurde.

10.3 Stabilität des Gleichgewichts

Bemerkungen zur Stabilität am Beispiel einer Walze



Fallunterscheidung von Gleichgewichtslagen

- (a) Stabiles Gleichgewicht: Die Walze kehrt nach Auslenkung in die Ruhelage zurück.
- (b) Neutrales Gleichgewicht: Die Walze verbleibt in der Nachbarlage
- (c) Labiles Gleichgewicht: Die Walze entfernt sich nach Auslenkung von der Gleichgewichtslage

Charakterisierung des Gleichgewichtszustand

- Entwicklung der potentiellen Energie des Nachbarzustands in einer Taylor-Reihe nach dem Anfangszustand (Ausgangslage)

$$U_a^* = U_a + \frac{dU_a}{dx} (x^* - x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2U_a}{dx^2} (x^* - x)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow U_a^* = U_a + \underbrace{\frac{dU_a}{dx} \delta x}_{\delta U_a} + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{d^2U_a}{dx^2} (\delta x)^2}_{\delta^2 U_a} + \dots$$

$$\Rightarrow U_a^* = U_a + \delta U_a + \frac{1}{2!} \delta^2 U_a + \dots$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta x := x^* - x \\ \delta U_a := \frac{dU_a}{dx} \delta x \end{cases}$$

Es folgt für den Potentialunterschied:

$$\delta U_a = U_a^* - U_a$$

Konsequenz:

$$\delta U_a \begin{cases} > 0 : & \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 : & \text{neutrales Gleichgewicht} \\ < 0 : & \text{labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

- Untersuchung von U_a^* in einem Arbeitsausdruck:

$$U_a^* = -A^* \quad \text{mit} \quad A^* = A + \underbrace{\delta A}_{=0(PdV)} + \frac{1}{2!} \delta^2 A + \dots$$

- Charakterisierung des Gleichgewichts durch die 2. Variation der Arbeit, d.h.

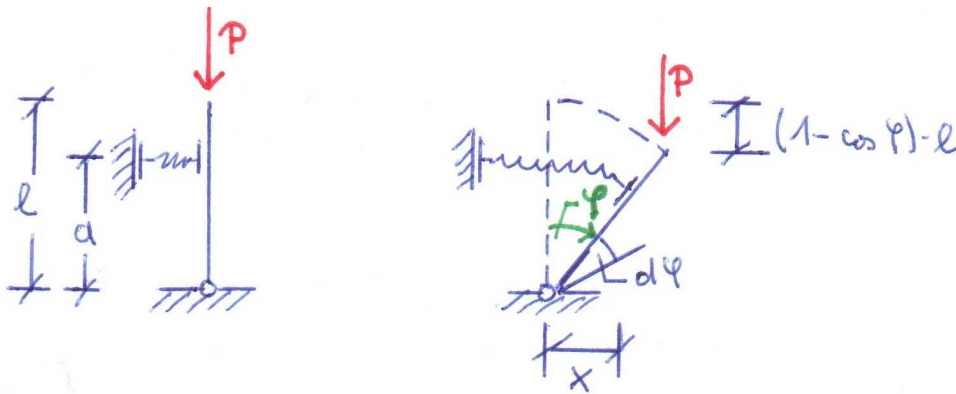
$$\delta^2 A \begin{cases} < 0 : & \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 : & \text{indifferentes Gleichgewicht} \\ > 0 : & \text{labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

Bem.: Für $\delta^2 A = 0$ (indifferentes Gleichgewicht) kennzeichnet die nächst kleinere, nicht verschwindende Variation die Art der Indifferenz.

Neutralität existiert nur für $\delta A = 0$.

Beispiel: Untersuchung der Stabilität des Gleichgewichts

hier: System mit 1 kinematischen Freiheitsgrad



Federgesetz:

$$F = c_F \cdot x \quad \text{mit} \quad x = a \cdot \tan \alpha$$

Bestimmung der Arbeit A

Bem.: maßgebend ist die Arbeit, die zwischen Grundzustand ($\varphi = 0$) und dem Ausgangszustand (φ) geleistet wird.

$$\begin{aligned} A &= P \cdot l (1 - \cos \varphi) - \int_0^x F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= P \cdot l (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} c_F (a \tan \varphi)^2 \end{aligned}$$

Ermittlung von Gleichgewichtszuständen

$$\delta A = \frac{dA}{d\varphi} \delta\varphi = \left(Pl \sin \varphi - c_F a^2 \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \delta\varphi$$

Mögliche Gleichgewichtszuständen sind:

$$\sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{c_F a^2}{Pl}}$$

Dies folgt aus:

$$0 = \sin \varphi \left(Pl - \frac{c_F a^2}{\cos^3 \varphi} \right)$$

Stabilität des Gleichgewichts:

$$\delta^2 A = \frac{d^2 A}{d\varphi^2} (\delta\varphi)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\varphi^2} &= \cos \varphi \left(Pl - \frac{c_F a^2}{\cos^3 \varphi} \right) - 3c_F a^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \dots = \\ &= Pl \cos \varphi - c_F a^2 \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

$$(1) \quad \sin \varphi = 0 \quad \implies \quad \cos \varphi = 1$$

$$\frac{d^2 A}{d\varphi^2} = Pl - c_F a^2 \quad \begin{cases} < 0 : & \text{stabil} \\ = 0 : & \text{indifferent} \\ > 0 : & \text{labil} \end{cases}$$

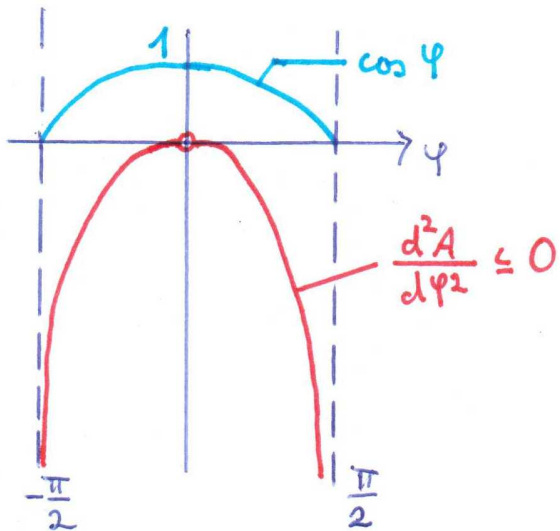
Zusammenhang der äußeren Last mit dem Gleichgewichtszustand

$$\frac{c_F a^2}{l} \quad \begin{cases} > P : & \text{stabil} \\ = P : & \text{indifferent} \\ < P : & \text{labil} \end{cases} \quad \implies \quad \boxed{P_{krit.} = \frac{c_F a^2}{l}}$$

$$(2) \quad \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{c_F a^2}{Pl}} \implies \quad c_F a^2 = Pl \cos^3 \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\varphi^2} &= Pl \cos \varphi - Pl \cos^3 \varphi \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \\ &= 3Pl \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \leq 0 \quad \begin{cases} \text{stabil} \\ \text{indifferent} \end{cases} \end{aligned}$$

Untersuchung für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$



Lastfunktion:

$$P = \frac{c_F a^2}{l \cos^3 \varphi}$$

Charakterisierung der Lastfunktion

