

## TEIL II : STATIK STARRER KÖRPER

### 2. GRUNDBEGRIFFE

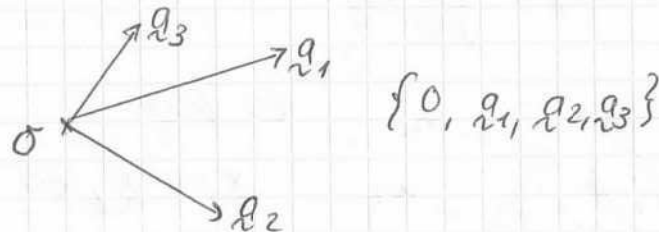
#### 2.1 Materieller Punkt, System materieller Punkte

DEF: Ein materieller Punkt (Massenpunkt)  $P$  ist ein Objekt mit folgenden Eigenschaften

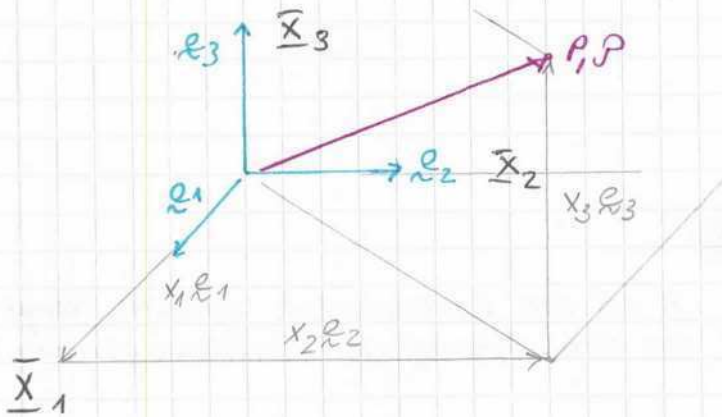
(1) Die Lage von  $P$  ist durch einen Ortsvektor  $\underline{x}(P) \in V^3$  eindeutig festgelegt

(2) Jedem  $P$  ist eindeutig eine Masse  $m(P) > 0$  zugeordnet.

DEF Ein Bezugssystem im Anschauungsraum besteht aus einem Bezugspunkt  $O$  und 3 nicht koplanaren Vektoren  $\underline{g}_i \in V^3$



Bem.: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $\underline{g}_i$  mit einem orthonormierten System  $\underline{e}_i$  identifiziert werden.



$P$ : Raumpunkt

$P$ : Massenpunkt

$V^3$ : EUKLIDISCHER Vektorraum

$\underline{e}_i$ : orthonormiertes Bezugssystem

MERKE Die Parameter in einem Bezugssystem mit orthonormierter Basis heißen 'kartesische Parameter' oder 'kartesische Koordinaten'.

#### Komponentenrepräsentation des Ortsvektors $\underline{x}(P)$

$$\underline{x} : \lambda_i \underline{e}_i = \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 + \lambda_3 \underline{e}_3$$

mit  $\begin{cases} \lambda_i \underline{e}_i \ (i=1,2,3) : \text{Komponenten von } \underline{x} \\ \lambda_i : \text{Koeffizienten der Vektorkomponenten} \end{cases}$

DEF Ein System  $\gamma$  von materiellen Punkten  $P_i$ ,

$$\gamma(P_i) \text{ mit } i = 1, 2, 3, \dots$$

besitzt folgende Eigenschaften

(1) Die Lage jedes materiellen Punktes  $P_i$  ist durch seinen Ortsvektor  $x_i(P_i) \in V^3$  eindeutig festgelegt:

$$x_i = x(P_i) \text{ mit } x_i \neq x_k$$

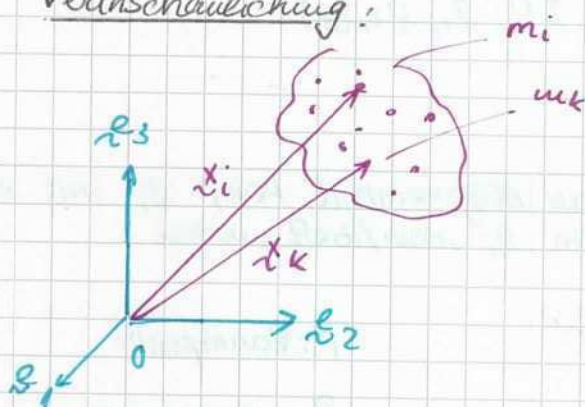
(2) Jedem  $P_i$  ist eindeutig eine Masse zugeordnet

$$m_i = m(P_i)$$

(3) Die Masse von  $\gamma$  ergibt sich aus

$$M = m(\gamma) = \sum_{j=1}^n m_j$$

Veranschaulichung:



Es folgt

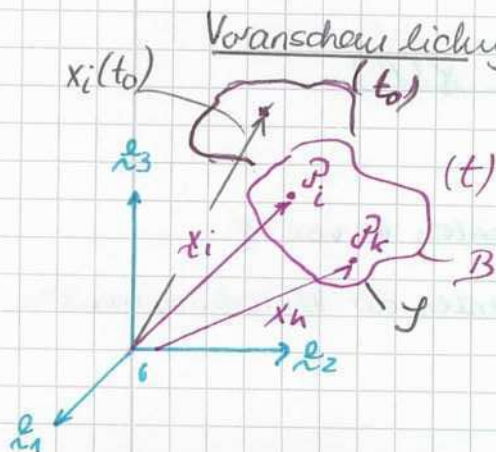
$$x_i \neq x_k \Leftrightarrow P_i \neq P_k$$

## 2.2 Materielles Körper

DEF: Ein materielles Körper  $B$  ist eine kontinuierlich verteilte Menge materieller Punkte  $P_i$ , die sich eindeutig im Anschauungsraum  $V^3$  darstellen lässt.

Eine solche Darstellung heißt KONFIGURATION.

Veranschaulichung:



$P_i, P_k$ : materielle Punkte

$B$ : materielles Körper

$\gamma$ : Oberfläche von  $\gamma$



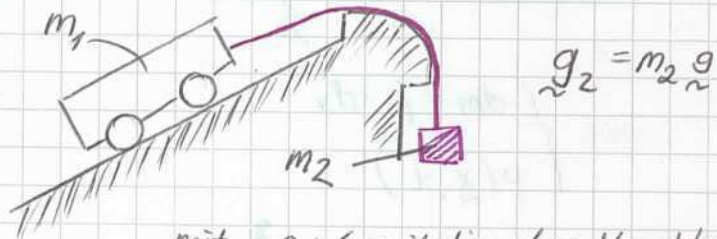
## 2.3 Die Kraft

Einführung des Begriffs, 'Kraft' aus der physikalischen Erfahrung.

MERKE: Eine Kraft ist eine phys. Größe, die in ihrer Wirkung mit einer Gewichtskraft äquivalent ist.

↳ Galileo Galilei (1564 - 1642)

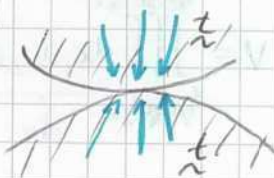
Veranschaulichung:



mit  $\vec{g}$ : Gravitation (Erdbeschleunigung)

### ► Nah- und Fernwirkungskräfte

(a)

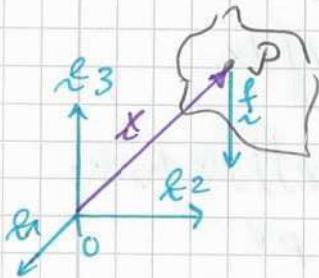


Nahwirkung:

über eine Fläche verteilt, oder (idealisiert) in einem Punkt konzentrierte Wirkung von Kräften.

Übergangsmechanismus: KONTAKT

(b) Fernwirkung: über ein Volumen verteilt angreifende Kraftwirkungen, z.B.:  $\vec{f}$



BEGRIFFE

$\vec{t}$ : Oberflächenspannung (Kraft pro Fläche)

$\vec{f}$ : Volumenkraft (Kraft pro Volumen)

### ► Die Einzelkraft

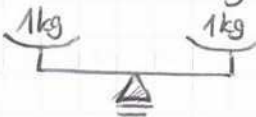
Die Einzelkraft entsteht aus der Zusammenfassung verteilt angreifender Kräfte zu einer, physikalisch äquivalenten Größe.

## DIMENSION EINER KRAFT

Es gilt das NEWTON'sche Grundgesetz (Isaac Newton 1643-1727)

$$\text{Kraft} \stackrel{!}{=} \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

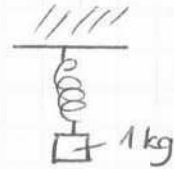
$$[1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$$

Bem.: Massenmessung  


$\Leftrightarrow$

Kräftermessung

$$F = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ = 9,81 \text{ N}$$



## EIGENSCHAFTEN VON (EINZEL-)KRÄFTEN

Eine Einzelkraft ist ein Kraftvektor mit folgenden Eigenschaften.

(a) Betrag

(b) Richtung

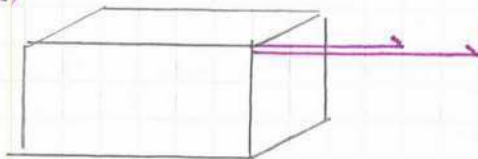
(c) Angriffspunkt am Körper

freie Vektoren (a, b)

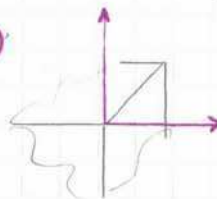
$\hookrightarrow$  gebundene Vektoren (a, b, c)

Veranschaulichung:

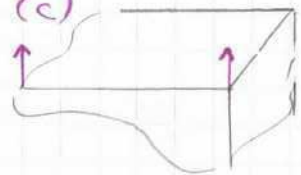
(a)



(b)



(c)



Merke: Die Kraft ist ein gebundener Vektor.

Beispiel



Wirkungslinie von  $\vec{F}$

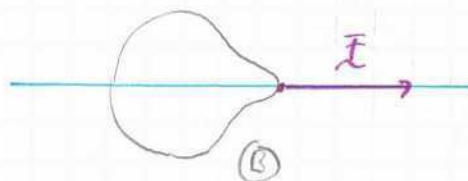
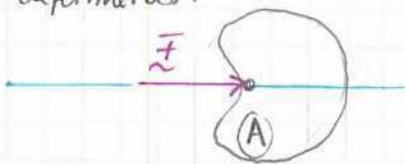
Komponentendarstellung von  $\vec{F}$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F_i \vec{e}_i$$

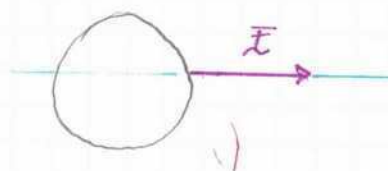
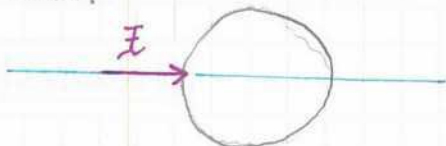
mit  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i : \text{Kraftkomponenten} \\ F_i : \text{Koeffizienten der Vektorkomponenten} \end{array} \right.$

## Die Kraft am deformierbaren und starren Körper

deformierbar:



starr:



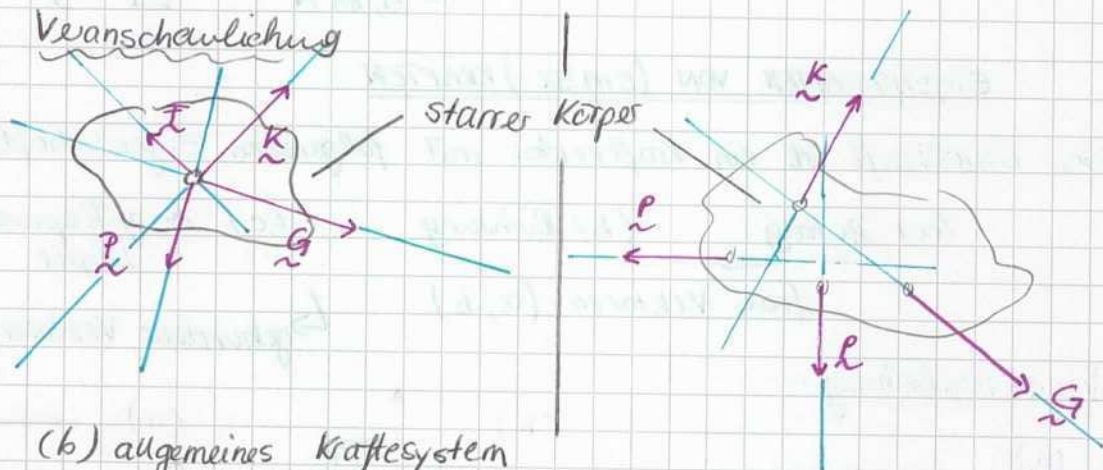
Konsequenz: Am starren Körper kann  $\vec{F}$  beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden, d.h.

MERKE: Am starren Körper ist die Kraft ein linienflüchtiger Vektor.

## ZENTRALE UND ALLGEMEINE KRÄFTESYSTEME

### (a) Zentrales Kräftesystem

DEF: Im zentralen Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien der Einzelkräfte in einem Punkt.



### (b) allgemeines Kräftesystem

DEF: In einem allgemeinen Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien der Einzelkräfte nicht in einem Punkt.

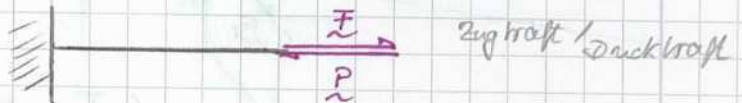
## 2.4 KRÄFTEÜBERTRAGUNG, STÜTZUNG, SCHNITTPRINZIP

### (a) Kräfteübertragung

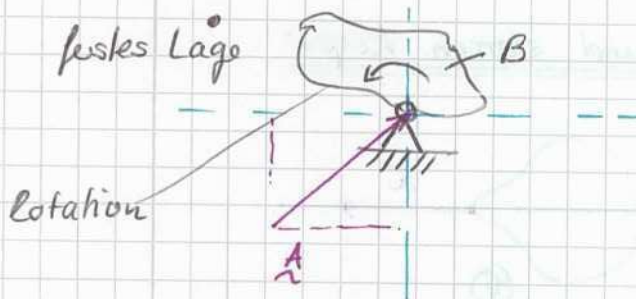
• Seile



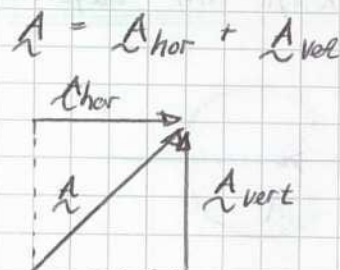
• gelenkig gelagerte Stäbe



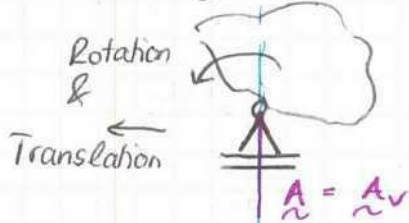
### (b) Stützung (ebene Stützung) ↳ 2-dim



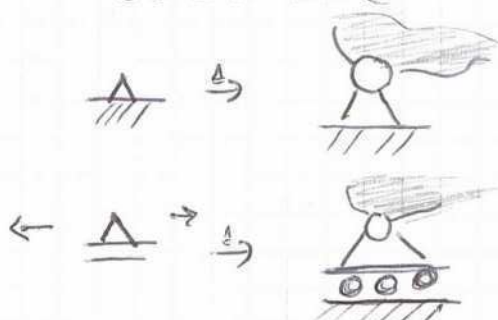
2 Kraftkomponenten



- bewegliche Auflager



Bem. zu Lagern



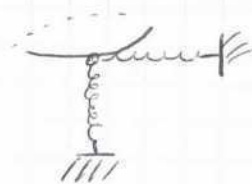
MERKE: Eine Lagerung (Stützung) ermöglicht eine Auflagerkraft (starre Stützung)\* behindert eine Bewegung und damit eine Verschiebung (elastische Stützung)

bzw.

starre Stützung

vs.

elastische Stützung



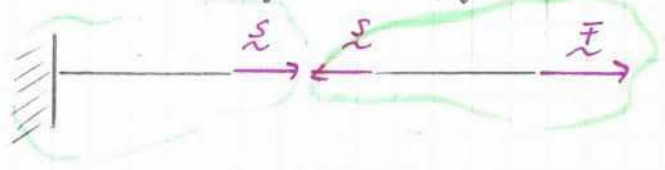
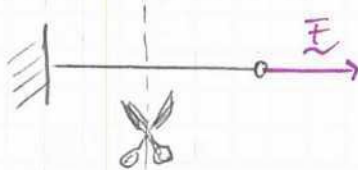
KONSEQUENZ:

- Im Anschauungsraum  $V^3$  existieren 3 linear unabhängige Verschiebungsrichtungen. Daraus ergeben sich auch 3 unterschiedliche Kräfte-richtungen.
- In der Ebene  $V^2$  existieren 2 Richtungen

### (c) SCHNITTPRINZIP

Bem.: Um Kräfte erkennbar zu machen, bedient man sich des Schnittprinzips (→ EULER, Leonard)

Veranschaulichung (am Seil): Schnittführungen durch, geschlossene Schnitte



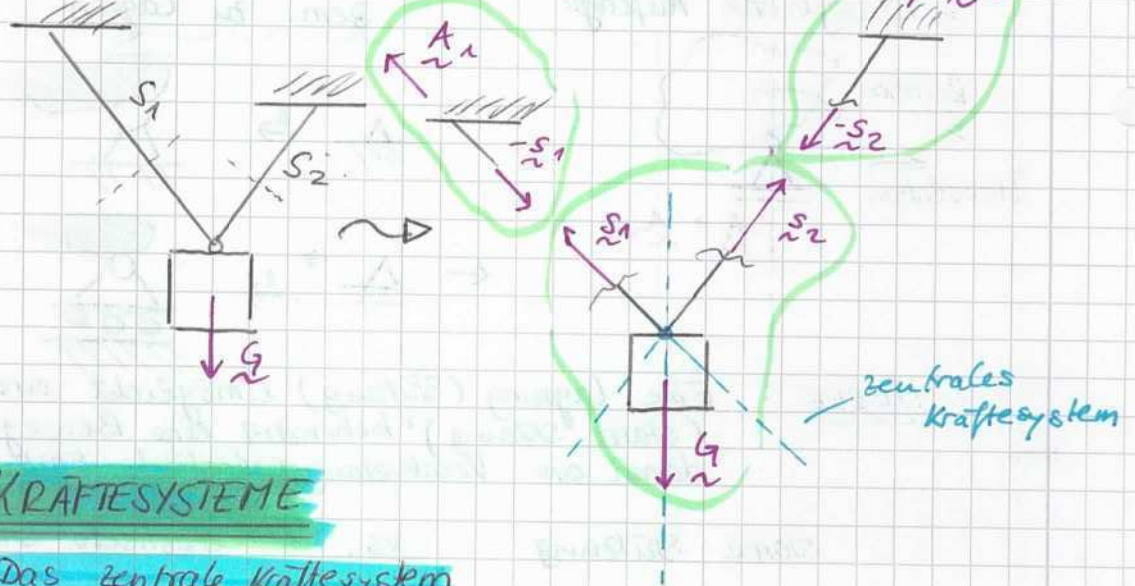
→ Konsequenz: Es gilt das Wechselwirkungsgesetz:

[ Die Kräfte, die zwei (Teil-) Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß (gleicher Betrag), entgegengesetzt und liegen auf einer Wirkungslinie

in Kurzform (nach Newton)

actio = reactio

Bsp:



## 3. KRAFTESYSTEME

### 3.1 Das zentrale Kräftesystem

Bem: (siehe Def aus 2.3)

⇒ Es existieren 3 Grundaufgaben

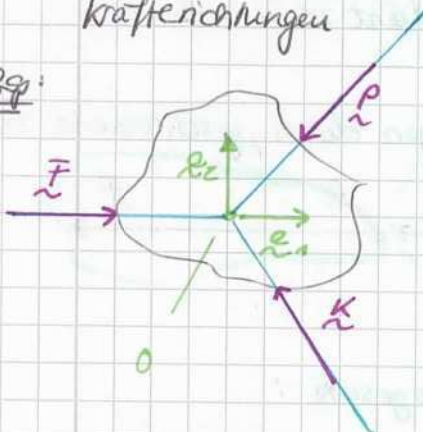
(In THH nur  
starre Körper)

- Reduktion des Kräftesystems auf eine Einzelkraft (Resultierende)
- Zerlegung einer Kraft
- Bedingungen für ein Gleichgewicht

#### (1) Das zentrale, ebene Kräftesystem (2-dim)

In der Ebene ex. 2 voneinander unabhängige Verschiebungs- und Kräfterichtungen

Bsp:



Geg.:  $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1$   $F_1 = 3 \text{ kN}$

$\vec{K} = K_1 \vec{e}_1 + K_2 \vec{e}_2$   $K_1 = -4 \text{ kN}$   
 $K_2 = -3 \text{ kN}$

$P = |\vec{P}| = 5 \text{ kN}$

$\vec{K} = K_1 \vec{e}_1 + K_2 \vec{e}_2$   $K_1 = -7 \text{ kN}$   
 $K_2 = 4 \text{ kN}$

$K = |\vec{K}| = 5 \text{ kN}$

- Reduktion auf die Resultierende
- Zerlegung der Resultierenden in 2 Richtung

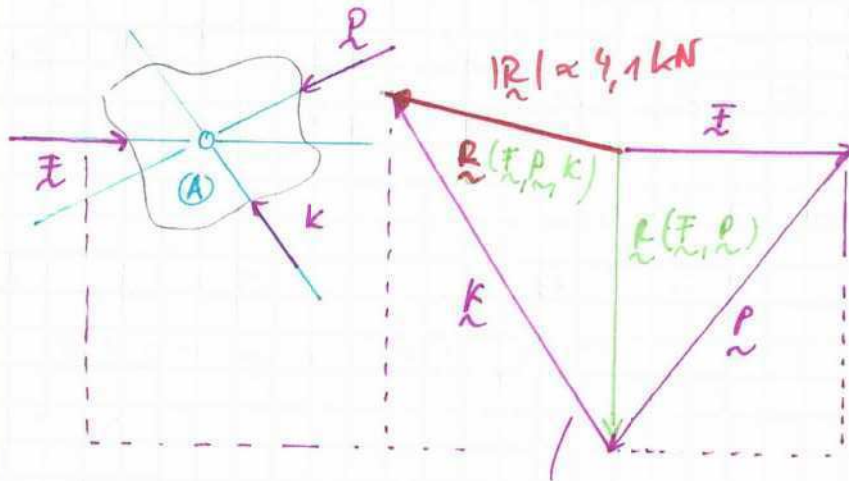
Lösung:

(a) Ermittlung d. Resultierenden

• graphische Lösung

Lageplan (1cm  $\hat{=}$  1m)

Kräfteplan (1cm  $\hat{=}$  1kN)



nicht maßstäblich

• analytische Lösung

$$\underline{R} = \underline{F} + \underline{P} + \underline{K} = R_1 \underline{e}_1 + R_2 \underline{e}_2$$

→ Koeffizientengleich

$$\underline{e}_1: R_1 = F_1 + P_1 + K_1 = 3 \text{ kN} - 4 \text{ kN} - 3 \text{ kN} = -4 \text{ kN}$$

$$\underline{e}_2: R_2 = F_2 + P_2 + K_2 = 0 \text{ kN} - 3 \text{ kN} + 4 \text{ kN} = 1 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \text{ERGEBNIS: } \underline{R} = -4 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \text{ [kN]}$$

$$\rightarrow R = |\underline{R}| = ((-4)^2 + 1^2)^{1/2} = \underline{\underline{4,12 \text{ kN}}}$$

(b) Zerlegung von  $\underline{R}$  in 2 Richtungen

hier:

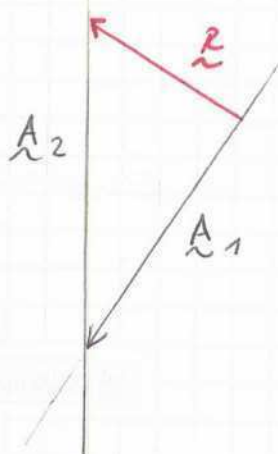
$$\underline{a}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{e}_2 \quad |\underline{a}_1| = 1$$

$$\underline{a}_2 = \underline{e}_2$$

normiertes  
Basissystem



graphische Lösung



abgemessen  $A_1 = 5,65 \text{ kN} \quad / \quad A_2 = 5 \text{ kN}$

## analytische Lösung

$$\underline{R} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \text{ mit } \begin{cases} \underline{A}_1 = A_1 \underline{a}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A_1 (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \\ \underline{A}_2 = A_2 \underline{a}_2 = A_2 \underline{e}_2 \end{cases}$$

Koeffizientengleichungen

$$\underline{e}_1: R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A_1 \rightarrow A_1 = -5,66 \text{ kN}$$

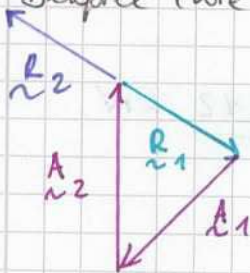
$$\underline{e}_2: R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A_1 + A_2 \rightarrow A_2 = 5 \text{ kN}$$

## (c) GLEICHGEWICHT

Bemerkung: In einem Gleichgewichtssystem (statisch) existiert keine resultierende Kraft, die am starren Körper eine Bewegung verursachen könnte.

Axiom: In einem Gg.-system verschwindet die Summe der angreifenden Kräfte.

Beispiel (wie oben)



$$\underline{R}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$$

$$\text{Gesamtresultierende } \underline{R} = \underline{R}_1 + \underline{R}_2 = \underline{0}$$

## Koeffizientendarstellung des Gleichgewichts

$$\underline{e}_1: R_1 = 0 = \sum_{i=1}^n (F_1)_i \text{ mit } (F_1)_i = \underline{F}_i \cdot \underline{e}_1$$

$$\underline{e}_2: R_2 = 0 = \sum_{i=1}^n (F_2)_i \text{ mit } (F_2)_i = \underline{F}_i \cdot \underline{e}_2$$

übliche Kurzdarstellung

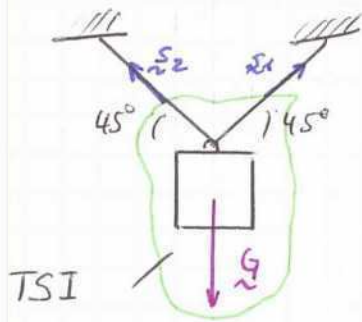
$$\underline{e}_1 =: \underline{e}_H; \quad \underline{e}_2 =: \underline{e}_V \rightarrow \text{es folgt}$$

$\rightarrow \sum H = 0$  : Summe aller Horizontalkräfte (Koeffizienten!)

$\uparrow \sum V = 0$  : Summe aller Vertikalkräfte

## Beispiel für Gleichgewicht

(1)



Geg:  $\underline{G}$  mit  $G = 10 \text{ kN}$

analytische Lösungen

- geschlossener Schnitt  $\rightarrow$  Schnittkräfte

Gesucht: Seilkräfte für Gleichgewicht?

- Bedingungen für Gleichgewicht im TS I

$$\rightarrow \sum H = 0 : S_{1,H} - S_{2,H} = 0 \Leftrightarrow S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\uparrow \sum V = 0 : S_{1,V} + S_{2,V} - G = 0 \Leftrightarrow 2 S_1 \sin 45^\circ - G = 0$$

$$S_1 = S_2 = \frac{G}{2 \sin 45^\circ} = 7,07 \text{ kN}$$

(2) Das zentrale räumliche Kräftesystem

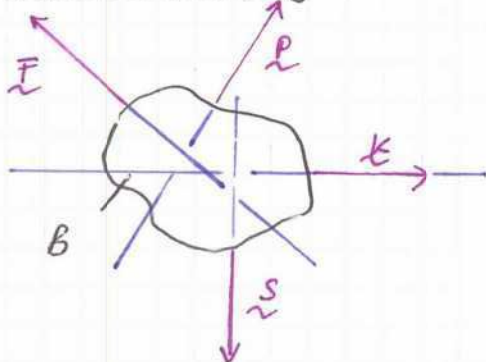
Bem.: Alle Ausführungen für das ebene, zentrale Kräftesystem gelten uneingeschränkt weiter.

allerdings: ex. in 3-dim. Ausdehnungsraum 3 unabhängige Richtungen und Kräfterichtungen.

## 3.2 ALLGEMEINES KRÄFTESYSTEM (Einführung)

Bem.: Die Kräfte schneiden sich nicht alle in einem Punkt.

Veranschaulichung



### 3 Grundaufgaben

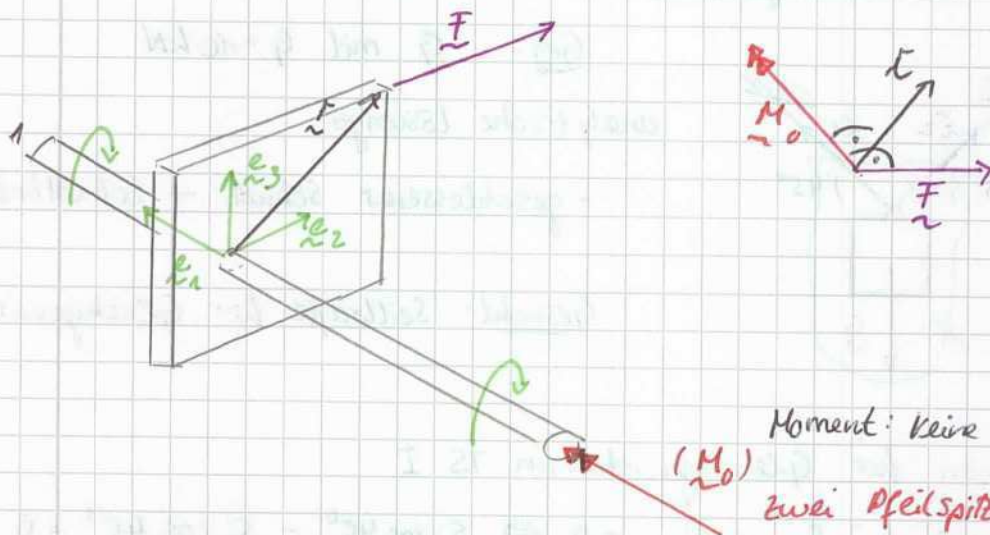
(a) Reduktion des Kräftesystem auf ein äquivalentes System

(b) Zerlegung einer Kraft

(c) Bedingungen für Gleichgewicht

Voraussetzung zur Lösung der Grundaufgaben

- Einführung des Begriffs „Moment einer Kraft“  
(um eine Achse  $\rightarrow$  axiales Moment)



Moment: keine Addition

zwei Pfeilspitzen

### allgemeiner Momentenbegriffe

Def: Das Moment einer Kraft  $\vec{F}$  in Bezugspunkt Bezug auf einen beliebigen Bezugspunkt (B) lautet

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$  ist der Differenzvektor zwischen (B) und dem Angriffspunkt (A) von  $\vec{F}$

→ von (B) auf (A) gerichtet.

Maßeinheit (Dimension) des Moments  $1 \text{ Nm} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$

Es gilt allgemein

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (r_2 F_3 - r_3 F_2) \vec{e}_1 + (r_3 F_1 - r_1 F_3) \vec{e}_2 + (r_1 F_2 - r_2 F_1) \vec{e}_3$$

Bemerkung:  $\vec{M}_B$  steht senkrecht (Rechtsschraubenregel) zu der durch  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  aufgespannten Ebene.

Bsp wie oben:  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  liegen in der  $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ -Ebene

$$\vec{F} = F \vec{e}_3 ; \quad \vec{r} = a \vec{e}_2 + b \vec{e}_3$$

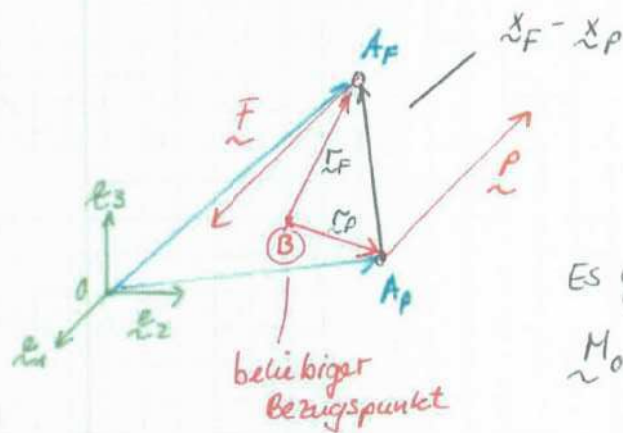
Man erhält das Moment um O

$$\vec{M}_O = r_2 F_3 \vec{e}_1 = a F \vec{e}_1 \rightarrow M_0 = a F \vec{e}_1$$

## Das Kräftepaar und das Moment des Kräftepaars

Def: Ein Kräftepaar besteht aus 2 gleichgroßen, entgegengesetzten, gerichteten Kräften mit parallelen Wirkungslinien.

Veranschaulichung:



Kräftepaar:

$$\vec{F} = -\vec{P}$$

Moment des Kräftepaars

Es gilt für  $\vec{M}_0$

$$\begin{aligned}\vec{M}_0 &= \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_P \times \vec{P} \\ &= (\vec{r}_F - \vec{r}_P) \times \vec{F}\end{aligned}$$

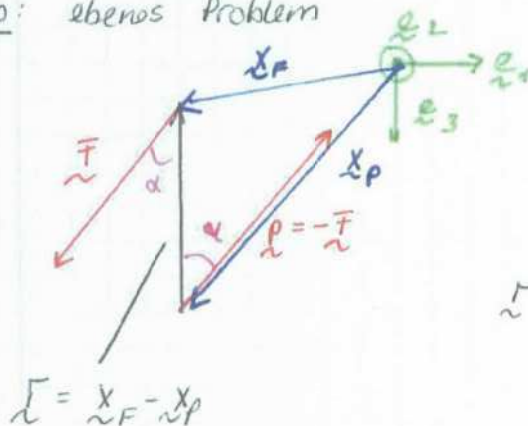
Es folgt für  $\vec{M}_B$

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_P \times \vec{P} \\ &= (\vec{r}_F - \vec{r}_P) \times \vec{F} \Leftrightarrow (\vec{r}_F - \vec{r}_P) \times \vec{F}\end{aligned}$$

Konsequenz: Das Moment eines Kräftepaars ist unabhängig vom Bezugspunkt.

d.h.  $\vec{M}_B, \vec{M}_0$  sind freie Vektoren!

Bsp: ebenes Problem



$$\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2$$

$$\text{mit } \begin{cases} F_1 = -F \sin \alpha \\ F_2 = F \cos \alpha \end{cases}$$

$$\vec{r} = r_3 \vec{e}_3 \rightarrow r_3 = -r$$

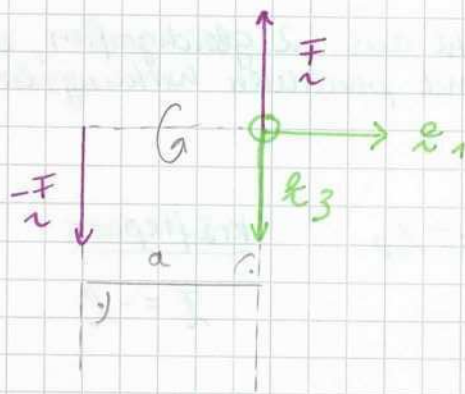
$$\text{Es folgt: } \vec{M} = \vec{M}_0 = (\vec{r}_F - \vec{r}_P) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= r_3 F_1 \vec{e}_2 = M_2 \vec{e}_2$$

$$(M_2 = r_3 F_1)$$

$$M_2 = r_3 F_1 = + r \cdot F \sin \alpha$$

Es folgt der Zusammenhang

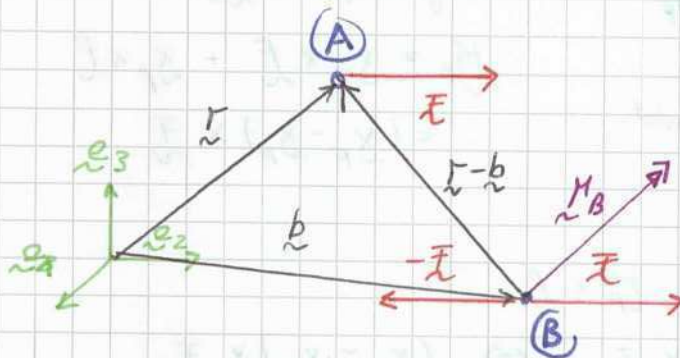


$$M = M_2 \tilde{e}_2$$

Bem:

Das Moment (Betrag des Moments) eines Kräftepaars entspricht dem Betrag der Einzelkraft, mit dem senkrechten Abstand zwischen dem Kräftepaar multipliziert.

• Versatzmoment des Kräftepaars



Man ergänzt eine Einzelkraft  $\tilde{F}$  in (A)

und  $\tilde{F}$  und  $-\tilde{F}$  in (B)

sowie um das Versatzmoment  $\tilde{M}_B$ :

$$\tilde{M}_B = (\tilde{l} - \tilde{b}) \times \tilde{F}$$

Konsequenz bzgl. (B) entstehen äquivalente Wirkungen durch

- $\tilde{F}$  in (A)
- $\tilde{F}$  in (B) und  $\tilde{M}_B$

Bemerkungen:

Am starren Körper ist das Moment eines Kräftepaars  $\{\tilde{F}; -\tilde{F}\}$  nicht vom Bezugspunkt abhängig

aber

Das Moment einer Einzelkraft hängt immer vom Bezugspunkt ab.

⇒ Konsequenz:

Am starren Körper gilt

- \* zentrales Kräftesystem: 3 Freiheitsgrade und Krachrichtungen:  
3 Translationen
- \* allg. Kräftesystem: 6 Freiheitsgrade: 3 Translationen (Kraft-)  
3 Rotationen (Momentenrichtungen)

③ Reduktion auf ein ebenes System verbleiben

• im zentralen Kräftesys.: 2 Translationen & Kraftrichtungen

• im allg. Kräftesys.: 2 Translationen & Kraftrichtungen

1 Rotation & Momentenrichtung  
(⊥ zur Translationsebene)

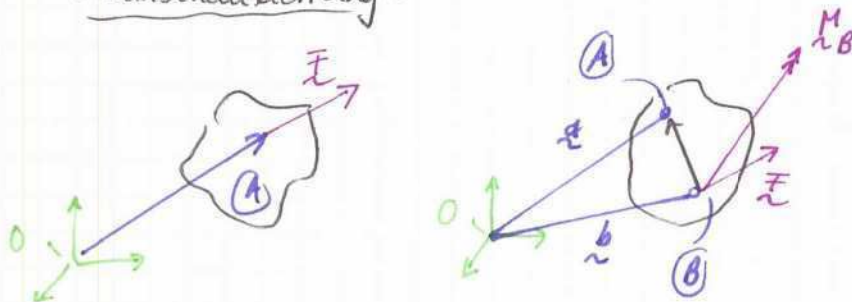
### 3.3 ÄQUIVALENZ ALLGEMEINER KRÄFTESYSTEME

Einführung des Äquivalenzbegriffs

Def: Sind  $\vec{F}, \vec{a}$ , so ist dieses System zu  $\vec{F}$  in  $\textcircled{B}$  und dem Versatzmoment  $\vec{M}_B$  äquivalent  
 Kraftvektor      Ortsvektor zum Angriffspunkt  $\textcircled{A}$  von  $\vec{F}$

$$\{\vec{F}, \vec{a}\} \Leftrightarrow \left\{ \vec{F}, \vec{b} \right. \\ \left. \vec{M}_B : (\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{F} \right\}$$

Veranschaulichung:



Kräftesysteme und Äquivalenzbegriff

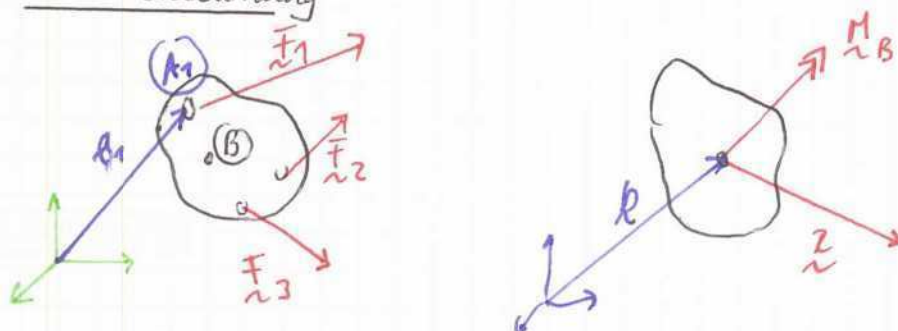
Def: Sind  $\tilde{F} = \{F_i, a_i\}$  mit  $i = 1, \dots, n$  ein Kräftesystem und  $\vec{b}$  ein beliebiger Ortsvektor, so sind

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad : \text{resultierende Kraft}$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^n (\vec{a}_i - \vec{b}) \times \vec{F}_i \quad : \text{resultierendes Moment von } \tilde{F} \text{ in } \textcircled{B}$$

Man bezeichnet die Dynami  $\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$  als Reduktion von  $\tilde{F}$  in  $\textcircled{B}$

Veranschaulichung



## Zu: ÄQUIVALENTE KRÄFTESYSTEME

Def: Zwei Kräftesysteme

$$\tilde{F} = \{ \tilde{F}_1, \tilde{q}_1, \tilde{F}_2, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{F}_n, \tilde{q}_n \}$$

$$\tilde{F}^* = \{ \tilde{F}_1^*, \tilde{q}_1^*, \tilde{F}_2^*, \tilde{q}_2^*, \dots, \tilde{F}_n^*, \tilde{q}_n^* \}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i = \sum_{i=1}^k \tilde{F}_i^* \rightarrow \tilde{R} = \tilde{R}^* \\ \sum_{i=1}^n (\tilde{q}_i - \tilde{b}) \times \tilde{F}_i = \sum_{i=1}^k (\tilde{q}_i^* - \tilde{b}) \times \tilde{F}_i^* \rightarrow \tilde{M}_B = \tilde{M}_B^* \end{cases}$$

sind äquivalent, wenn die Dynamen  $\{\tilde{R}, \tilde{M}_B\}$  von  $\tilde{F}$  und  $\{\tilde{R}^*, \tilde{M}_B^*\}$  von  $\tilde{F}^*$  identisch sind.

→ Damit führen  $\tilde{F}$  und  $\tilde{F}^*$  auf dieselbe Reduktion in  $\mathcal{B}$  mit Ortsvektor  $\tilde{b}$ .

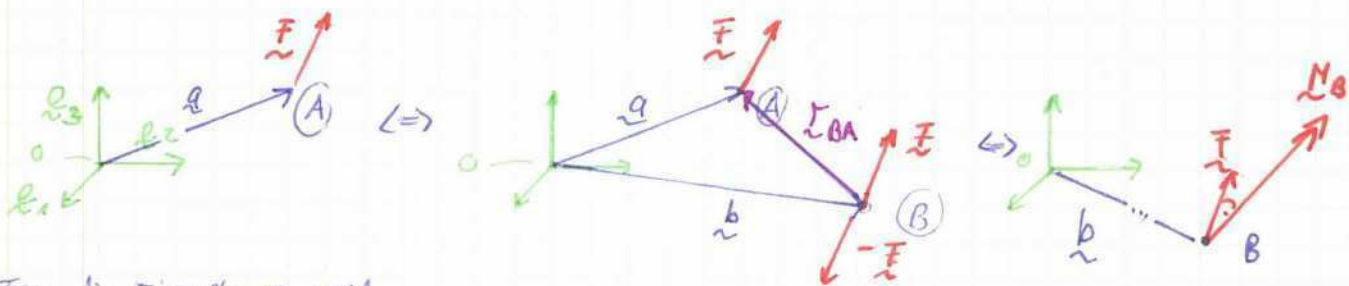
## 3.4 DAS ALLGEMEINE, RÄUMLICHE KRÄFTESYSTEM

Bem.: Lösung der 3 Grundaufgaben im 5-dim. Raum mit

- 3 Translationen mit 3 Kraftrichtungen und
- 3 Rotationen mit 3 Momentenrichtungen.

(a) Reduktion des Kräftesystems auf ein äquivalentes System (1. Grundaufgabe) auf eine Dyname.

Reduktion einer Einzelkraft auf eine Dyname

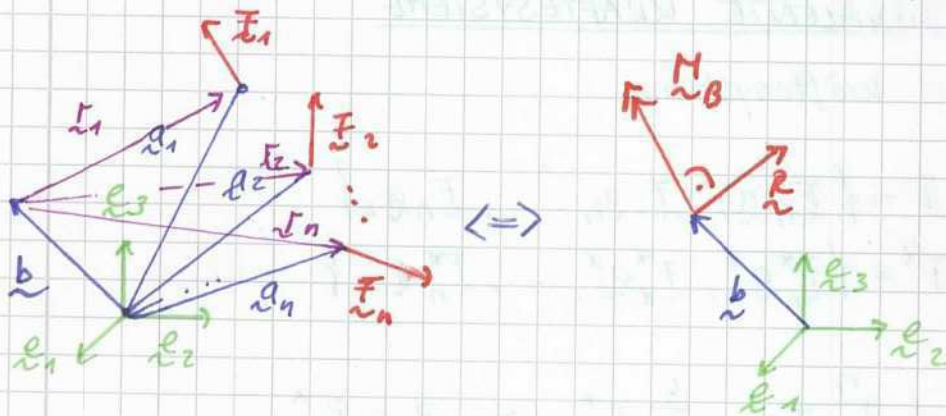


Für die Einzelkraft gilt

$\tilde{F}$  in  $\mathcal{A}$  ist äquivalent zu  $\{\tilde{F}, \tilde{M}_B\}$  in  $\mathcal{B}$ . D.h. die Dynamen  $\{\tilde{F}, \tilde{q}\}$  in  $\mathcal{A}$  und  $\{\tilde{F}, \tilde{M}_B\}$  in  $\mathcal{B}$  sind äquivalent; es gilt

$$\tilde{M}_B = \underbrace{(\tilde{q} - \tilde{b})}_{\tilde{r}_{AB}} \times \tilde{F}$$

## Reduktion eines Kräftesystems $\vec{F}$ auf eine Dynam



Für das Kräftesystem  $\vec{F}$  gilt:

- Reduktion von  $\vec{F} = \{ \vec{F}_i, \vec{a}_i \}$   $i = 1, 2, \dots, n$  in  $\textcircled{B}$  liefert die Dynam  $\{ \vec{R}, \vec{M}_B \}$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \begin{cases} e_1: R_1 = \sum_i F_{i,1} \\ e_2: R_2 = \sum_i F_{i,2} \\ e_3: R_3 = \sum_i F_{i,3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Es folgt:} \\ \vec{R} = R_i e_i \end{array}$$

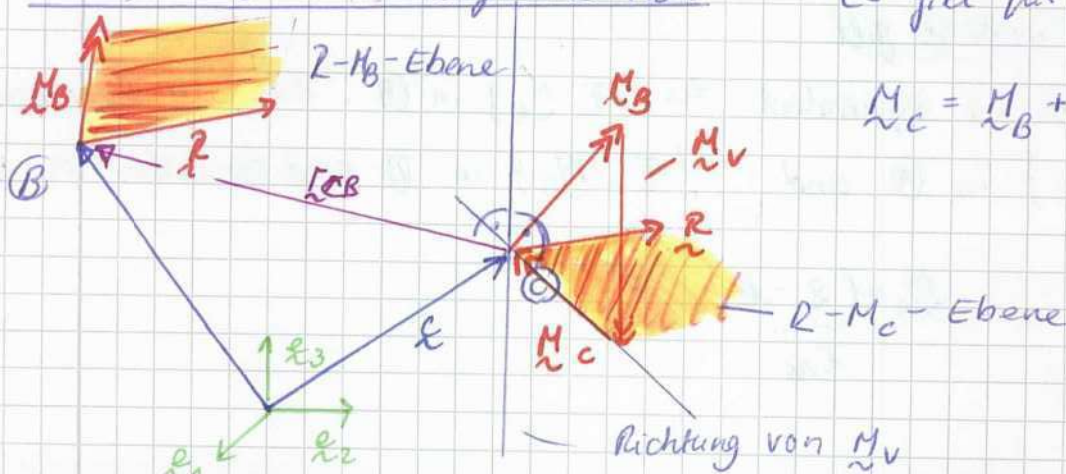
$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^n (\vec{a}_i - \vec{b}) \times \vec{F}_i = \quad \begin{array}{l} e_1: M_{B1} = \sum_i (r_{i,2} F_{i,3} - r_{i,3} F_{i,2}) \\ e_2: M_{B2} = \sum_i (r_{i,3} F_{i,1} - r_{i,1} F_{i,3}) \\ e_3: M_{B3} = \sum_i (r_{i,1} F_{i,2} - r_{i,2} F_{i,1}) \end{array}$$

Es folgt  $\vec{M}_B = M_{Bi} e_i$

## Untersuchung spezieller Reduktionsfälle

Bem.: Betrachtung äquivalenter Dynam  $\{ \vec{R}, \vec{M}_B \}$  in  $\textcircled{B}$  und  $\{ \vec{R}, \vec{M}_C \}$  in  $\textcircled{C}$

(1) Basis: Der allgemeine Fall



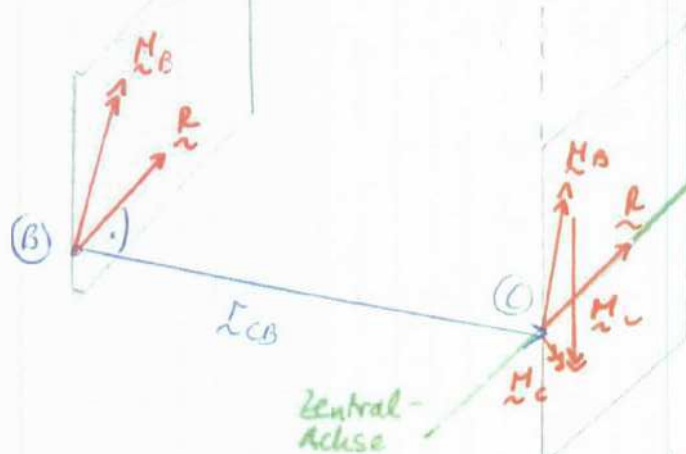
Es gilt für  $\vec{M}_C$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_B + \vec{r}_{CB} \times \vec{R} = \vec{M}_v$$

mit  $\vec{M}_v = \vec{r}_{CB} \times \vec{R} \perp \{\vec{r}_{CB}, \vec{R}\}$

## (2) Sonderfälle der Reduktion

Sonderfall 1:  $\vec{r}_{CB} \perp \{\vec{R}, \vec{M}_B\}$



$$\vec{M}_v = \vec{r}_{CB} \times \vec{R}$$

$\rightarrow \vec{r}_{CB}, \vec{R}, \vec{M}_v$  bilden ein orthogonales System

$\vec{M}_v$  liegt in  $\vec{R}-\vec{M}_B$ -Ebene in C

$$\vec{M}_C = \vec{M}_B + \vec{M}_v$$

$\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$  und  $\{\vec{R}, \vec{M}_C\}$  bilden parallele Ebenen

Sonderfall 2 Reduktion auf Kraftschraube

Bem: Ausgangssituation ist Sonderfall 1, d.h.

$\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$  und  $\{\vec{R}, \vec{M}_C\}$  bilden parallele Ebenen.

Ziel Ermittlung der Kraftschraube  $\vec{R} \parallel \vec{M}_C$  mit gemeinsamer Wirkungsline ( $\rightarrow$  Zentralachse)

$$\vec{R} \parallel \vec{M}_C \Rightarrow \vec{R} \times \vec{M}_C = \vec{0}$$

Einsetzen und Anwenden des Entwicklungssatzes

$$\vec{0} = \vec{R} \times \vec{M}_B + \vec{r}_{CB} \times (\vec{r}_{CB} \times \vec{R})$$

$$\vec{R} \times \vec{M}_v = (\vec{R} \cdot \vec{R}) \vec{r}_{CB} - (\vec{R} \cdot \vec{r}_{CB}) \vec{R}$$

$0, \text{ da } \vec{r}_{CB} \perp \vec{R}$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt: } \vec{r}_{CB} &= - \frac{\vec{R} \times \vec{M}_B}{\vec{R} \cdot \vec{R}} \\ &= \frac{\vec{M}_B \times \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \end{aligned}$$

Einsetzen in  $\vec{M}_C$  & Anwendung des Entwicklungssatzes liefert.

$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= \vec{M}_B + \left( \frac{\vec{M}_B \times \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \right) \times \vec{R} \\ &= \vec{M}_B + \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \times (\vec{M}_B \times \vec{R}) \end{aligned}$$

$$= \underline{M}_B - \frac{1}{|\underline{r}|^2} ( (\underline{r} \cdot \underline{r}) \underline{M}_B - (\underline{r} \cdot \underline{M}_B) \underline{r} )$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \underline{M}_C &= \underline{M}_B - \frac{1}{|\underline{r}|^2} ( |\underline{r}|^2 \underline{M}_B - (\underline{r} \cdot \underline{M}_B) \underline{r} ) \\ &= \frac{\underline{r} \cdot \underline{M}_B}{|\underline{r}|^2} \underline{r} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

$\underline{M}_C$  liegt auf der Wirkungslinie von  $\underline{r}$  ✓

Betrag von  $\underline{M}_C$

$$\underline{M}_C = \sqrt{\underline{M}_C \cdot \underline{M}_C} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^2} \cdot \underline{M}_B$$

$$= |\underline{M}_B| \cdot \cos \varphi(\underline{r}, \underline{M}_B) \quad \checkmark$$

Sonderfall 3: Reduktion auf eine Einzelkraft

Bem.: Ausgangssituation ist Sonderfall 2

→ Ziel: Voraussetzung für  $\{\underline{r}, \underline{M}_C\}$  mit  $\underline{M}_C \equiv 0$

Reduktion auf eine Einzelkraft  $\{\underline{r}, \underline{0}\}$  nur ~~mit~~ möglich wenn für alle  $\underline{M}_B$   $\underline{M}_C \equiv 0$  wird.

$$\underline{M}_C \equiv 0 \Rightarrow \underline{r} \cdot \underline{M}_B = 0 \Rightarrow \underline{r} \perp \underline{M}_B$$

Bemerkung: Sonderfall 3 ist i.d.R. nur für ebene Probleme möglich, d.h. alle Kräfte liegen in einer Kraftebene.

Dann ist das Moment der Kräfte immer senkrecht zu dieser Ebene.

Äquivalenzsatz für allgemeine, räumliche Kräftesysteme

Für  $\underline{F}^*$   
und  $\underline{F}^*$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{r} = \underline{r}^* \\ \underline{M}_B = \underline{M}_B^* \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{r}_1 : \underline{r}_1 = \underline{r}_1^* , \quad \underline{M}_{B1} = \underline{M}_{B1}^* \\ \underline{r}_2 : \underline{r}_2 = \underline{r}_2^* , \quad \underline{M}_{B2} = \underline{M}_{B2}^* \\ \underline{r}_3 : \underline{r}_3 = \underline{r}_3^* , \quad \underline{M}_{B3} = \underline{M}_{B3}^* \end{array}$$

✓ } Das oben genannte System mit 6 Gleichungen für  
 1 } 6 unabhängige Größen die daraus zu  
 1 } bestimmen sind.

Satz: Die in den Äquivalenzbedingungen enthaltenen Kräfteäquivalenzen können durch weitere Momentenäquivalenzbedingungen ersetzt werden. Bezüglich weitere Punkte ① und ②.

Bemerkung: Man beachte, dass dabei linear abhängige Gleichungen auftreten können, vgl. 3.5.

## (b) Zerlegung einer Kraft im Raum (2. Grundaufgabe)

Bem.: Die Zerlegung ist eindeutig möglich in

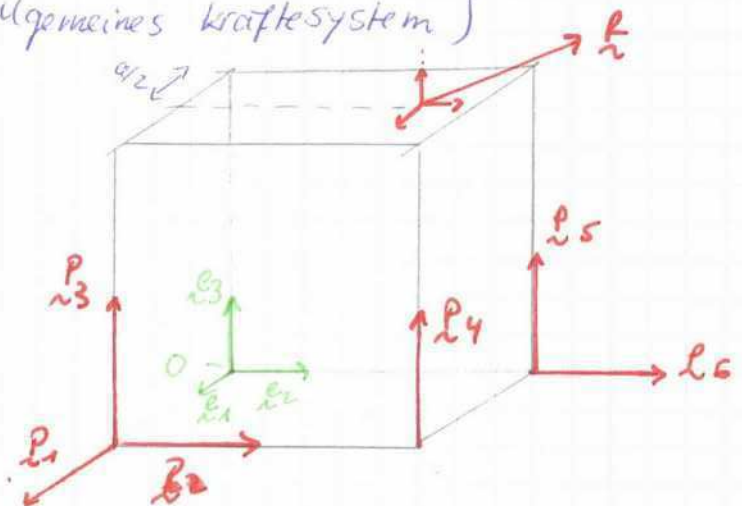
- 3 Richtungen (zentrales Kräftesystem)
- 6 Richtungen (allgemeines Kräftesystem)

### Veranschaulichung

Kantenlänge:  $a$

Eine Eindeutige Zerlegung von  $R$  in 6 verschiedene Richtungen ist möglich, wenn

- mindestens 3 WL in einer Ebene liegen
- höchstens 3 WL nicht in einer Ebene liegen, die sich in einem Punkt schneiden.



### Bestimmungsgleichungen für die Zerlegung

Äquivalenz beider Systeme bei der Reduktion auf 0

• Kräfteäquivalenz

$$R_1 = L_1$$

$$L_2 = L_2 + L_6$$

$$L_3 = L_3 + L_4 + L_5$$

• Momentenäquivalenz

$$M_{01} = a(\frac{1}{2}R_3 - R_2) = a(L_4 + L_5)$$

$$M_{02} = -a(\frac{1}{2}R_3 - R_1) = a(L_3 + L_4)$$

$$M_{03} = a(\frac{1}{2}R_2 - R_1) = aL_2$$

Zusammenfassung der Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \frac{1}{2}r_3 - r_2 \\ r_1 - \frac{1}{2}r_3 \\ \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} \underline{x} = \underline{y} \rightarrow \underline{x} = \underline{K}^{-1} \underline{y}$$

### (C) GLEICHGEWICHT (3. GRUNDAUFGABE)

AXIOM: In einem Gleichgewichtssystem verschwindet die Dynamik  $\{\underline{R}, \underline{M}_B\}$  eines gegebenen Kräftesystems  $\mathcal{F}$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $B$ .

$$\underline{R} = 0, \quad \underline{M}_B = 0$$

Bemerkung: Im allgemeinen muss gelten

Impulssatz:  $\dot{\underline{L}} = \underline{R}$ , mit  $\dot{\underline{L}} = (m \dot{\underline{x}})'$ ,  $\underline{L} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$

Drehsatz:  $\dot{\underline{L}}_B = \underline{M}_B$ , mit  $\dot{\underline{L}}_B = [(\underline{x} - \underline{x}_B) \times \underline{L}]'$ ,  $\underline{L}_B = \frac{d}{dt} ((\underline{x} - \underline{x}_B) \times \underline{L})$

Im Fall der Statik folgt: Impulssatz  $\rightarrow$  Kräftesatz (Kräftegleichgewicht)

Drehsatz  $\rightarrow$  Momentensatz (Momentengleichgewicht)

Nur Statik in TM 1, Dynamik mit  $\dot{\underline{L}}$  und  $\dot{\underline{L}}_B$  in TM 3

Es gelten die Gleichgewichtsbedingungen der Statik

$$\underline{R} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_1: \sum_{i=1}^n \underline{F}_{1i} = 0 \\ \underline{e}_2: \sum_{i=1}^n \underline{F}_{2i} = 0 \\ \underline{e}_3: \sum_{i=1}^n \underline{F}_{3i} = 0 \end{array} \right. \quad \underline{M}_B = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_1: \sum_{i=1}^n M_{B1}(\underline{F}_i) = 0 \\ \underline{e}_2: \sum_{i=1}^n M_{B2}(\underline{F}_i) = 0 \\ \underline{e}_3: \sum_{i=1}^n M_{B3}(\underline{F}_i) = 0 \end{array} \right.$$

Bemerkung: Entsprechend dem allgemeinen Äquivalenzsatzes können die Kräftegleichgewichtsbedingungen durch weitere Momentengleichgewichtsbedingungen ersetzt werden.

$\Rightarrow$  Man beachte lineare Abhängigkeiten!

### 3.5 Das allgemeine, ebene Kräftesystem

Bemerkung: Die Gleichgewichtsbedingungen  $\underline{R} = 0$  und  $\underline{M}_B = 0$  von 6 Gleichungen auf 3 Gleichungen.

2x Kräftegleichgewicht, 1x Momentengleichgewicht

Dies gilt auch für die Ermittlung äquivalenter Systeme.

Grundaufgaben (a) Reduktion des Kräftesystems auf ein äquival. System

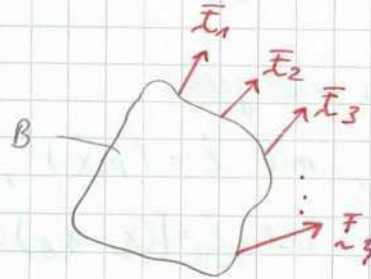
$\Rightarrow$  Reduktion auf eine Einzelkraft möglich, da  $\underline{M}_B \perp \underline{R}$ , vgl. 3.4 (a), Sonderfall 3

Es folgt  $\tilde{F} = \{\tilde{F}_i, q_i\}$  mit  $i=1, \dots, n$  ist äquivalent zu  
 $R = \{R, \tilde{\tau}\}$

### Analytische Lösung

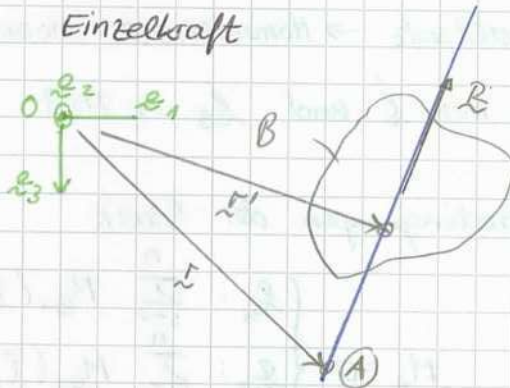
Bem.: Lösung in zwei Schritten (1) Reduktion auf eine @dynamie (B)

(2) Reduktion auf eine Resultierende



(2) Suche eines äquivalenten Systems mit Reduktion auf eine

Einzelkraft



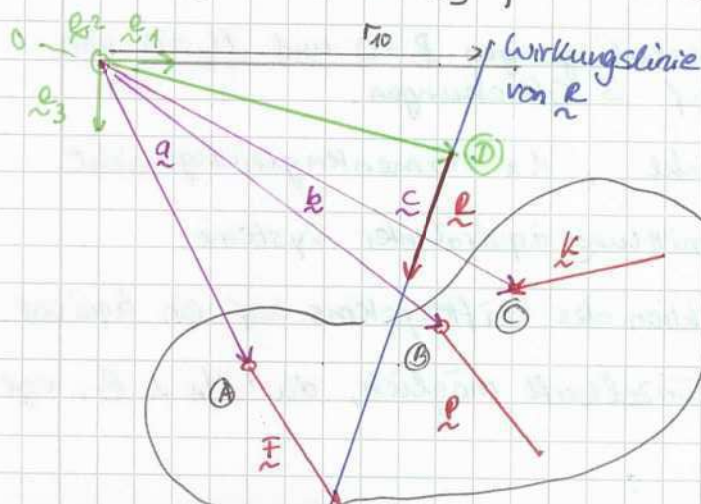
bei ebenem System:

$$\text{Reduktion von } \tilde{F} = \{\tilde{F}_i, q_i\} \Leftrightarrow R = \{R, \tilde{\tau}\}$$

$$\text{d.h. } \left. \begin{matrix} \tilde{F} \\ R \end{matrix} \right\} \rightarrow \{R, M_B\} \text{ in (B)}$$

### BEISPIEL

$$\begin{aligned} \text{Geg: } \left. \begin{aligned} \tilde{F} &= -2e_1 + 3e_3 \\ R &= 3e_1 + 2e_3 \\ K &= -2e_1 + 0.5e_3 \end{aligned} \right\} [\text{kN}] \quad \left. \begin{aligned} q &= 2e_1 + 4e_3 \\ b &= 4.5e_1 + 3.5e_3 \\ c &= 5.5e_1 + 3e_3 \end{aligned} \right\} [\text{m}] \end{aligned}$$



ges:  $R$ , Wirkungslinie  $\tilde{\tau}$   
 $\rightarrow$  Reduktion auf Einzelkraft

Lösung in zwei Schritten

Reduktion von  $\vec{F}$  z.B. in  $\vec{O}$

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1: R_1 + P_1 + K_1 + F_1 = -1 \text{ kN} \\ \varepsilon_3: F_3 = F_3 + P_3 + K_3 = 5,5 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$R = 5,59 \text{ kN}$$

$$M_0(\vec{F}, \vec{P}, \vec{K}) = -(a_1 F_3 - a_3 F_1) \varepsilon_1 - (b_1 P_3 - b_3 P_1) \varepsilon_2 + (c_1 K_2 - c_2 K_1) \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_2: M_{02} = -21,25 \text{ kN} \quad (M_{01} = M_{03} = 0)$$

Äquivalentes Kräftesystem  $\vec{R} = \{R, \vec{r}\}$  in ①, so dass  $\{\vec{R}, \vec{r}\}$

Dynamie in ②  
hier: Ursprung

Bemerkung: Die Äquivalenzbeziehung  $M_0(\vec{F}, \vec{P}, \vec{K}) \stackrel{!}{=} M_0(\vec{R})$

liefert eine Gleichung für  $\vec{r}$ , d.h. einen Kraftangriffspunkt ② auf der Wirkungslinie von  $\vec{R}$

→ Reduktion auf eine Einzelkraft

$$M_0(\vec{R}) = -(\vec{r}_1 R_3 - \vec{r}_3 R_1) \varepsilon_2 \stackrel{!}{=} M_{02} \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt:} \quad \vec{r}_3(\vec{r}_1) &= \frac{M_{02} - \vec{r}_1 R_3}{R_1} = \frac{-21,29 + \vec{r}_1 \cdot 5,5}{-1} \\ &= 21,25 - 5,5 \vec{r}_1 \end{aligned}$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } \varepsilon_1\text{-Richtung: } r(\vec{r}_{10}) = 0 \rightarrow \vec{r}_{10} = 3,86 \text{ m}$$

Äquivalenzsatz für allgemeine, ebene Systeme

Zwei Kräftesysteme  $\vec{F}$  und  $\vec{F}^*$  sind äquivalent, wenn

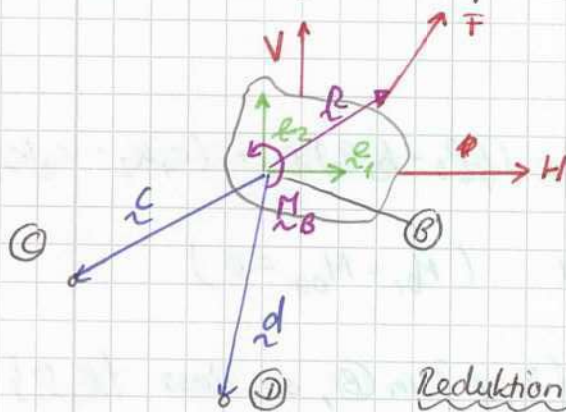
$$\vec{R} = \vec{R}^* = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1: R_1 = R_1^* \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_H: R_H^* = R_H \\ \varepsilon_3: R_3 = R_3^* \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_V: R_V^* = R_V \end{array} \right.$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_B^*: \varepsilon_2: M_{B2} = M_{B2}^* \quad \text{bzw.} \quad \vec{O}: M_B = M_B^*$$

Oben genannte Gleichungen stellen ein System von 3 linear unabhängigen Gleichungen dar.

Satz: Die in den Äquivalenzbedingungen enthaltenen Kräfte-äquivalenzen können durch weitere Momentenäquivalenzen bezüglich ③ und ④ ersetzt werden, sofern ③, ④ und ⑤ nicht auf einer Geraden liegen

### Untersuchung des Äquivalenzsatzes



geg.: Kräftesystem  $\tilde{F}$  mit  $X, F, H$

→ Reduktion von  $F$  in ③ (0/0) auf  $R, M_B$

ges.: Reduktion von  $F$  in ③ und ④

Reduktion in ③:  $M_C = M_B + (c_1 R_2 - c_2 R_1)$

$$(i) \Rightarrow R_1 = \frac{1}{c_2} [(M_B - M_C) + c_1 R_2]$$

Reduktion in ④:  $M_D = M_B + (d_1 R_2 - d_2 R_1)$

$$(ii) \Rightarrow R_2 = \frac{1}{d_1} [(M_D - M_C) + d_2 R_1]$$

Bem.: (i) und (ii) sind zwei linear unabhängige Gleichungen zur Darstellung von  $R_1$  und  $R_2$  in Abhängigkeit von  $M_B, M_C$  und  $M_D$ .

Es folgt aus (i) und (ii)

$$(iii) \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{c_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \left[ \frac{d_2 + c_2}{c_1} M_B - \frac{d_1}{c_1} M_C - M_D \right] \\ R_2 &= \frac{c_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \left[ \frac{d_2 - c_2}{c_2} M_B - \frac{d_2}{c_2} M_C + M_D \right] \end{aligned} \right.$$

Konsequenz:

$R_1$  und  $R_2$  sind darstellbar durch

- $M_B, M_C$  bzw.  $M_D$  seien  $R_1$  bzw.  $R_2$  (i) (ii)
- $M_B$  und  $M_C, M_D$ , vgl. (iii)

Ergebnis des Äquivalenzsatzes:

Äquivalenzbedingung für allgemeine, ebene Kräftesysteme lauten

$$(*) \quad R_H = R_H^*, \quad R_V = R_V^*, \quad M_B = M_B^*$$

$$(**) \text{ alternativ gilt: } R_V = R_V^*, \quad M_B = M_B^*, \quad M_C = M_C^*$$

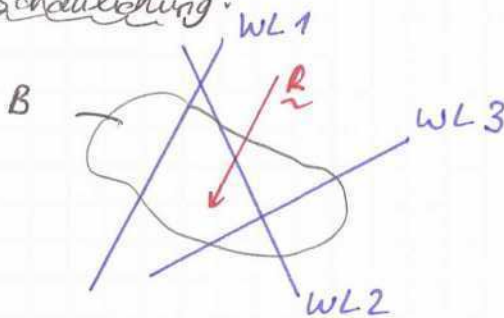
$$M_B = M_B^*, \quad M_C = M_C^*, \quad M_D = M_D^*$$

B, C, D dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

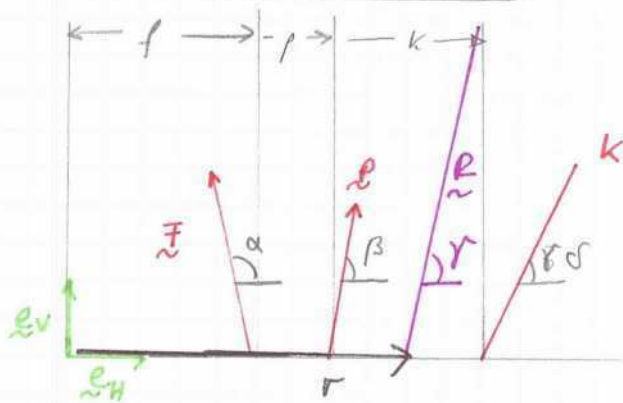
(b) Zerlegung einer Kraft in der Ebene (2. Grundaufgabe)

Bemerkung: Beim allgemeinen, ebenen Kräftesystem ist eine Zerlegung in 3 Kräfte (3 Wirkungslinien) möglich.

Veranschaulichung:



Beispiel: ANALYTISCHE LÖSUNG



geg.:  $R$ , Wirkungslinien von  $F, P, K$

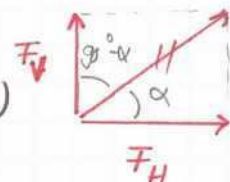
gesucht:  $F, P, K$

Erinnerung:

Zerlegung einer Kraft in die Richtungen  $e_H$  und  $e_V$

$$F_H = \vec{F} \cdot \vec{e}_H = F \cos \alpha \quad F = |\vec{F}|$$

$$F_V = \vec{F} \cdot \vec{e}_V = F \sin \alpha \quad (\text{bzw. } F \cdot \cos(90^\circ - \alpha))$$



Lösung

(1) Reduktion von  $\{R, \vec{r}\}$  und  $\{\vec{F}, \vec{e}_H, R, R, \vec{e}_V, \vec{e}_V\}$  in  $V$

$$R : \begin{cases} \uparrow R_V = R \sin \gamma \\ \rightarrow R_H = R \cos \gamma \\ \curvearrowright M_A = r \cdot R \sin \gamma \end{cases} \quad R_V$$

$$F, P, K: \begin{cases} \uparrow R_V = F \sin \alpha + P \sin \beta + K \sin \delta \\ \rightarrow R_H = F \cos \alpha + P \cos \beta + K \cos \delta \\ \curvearrowright M_O = f F \sin \alpha + p P \sin \beta + k K \sin \delta \end{cases}$$

### (c) Gleichgewicht (3. Grundaufgabe)

Axiom: In einem Gleichgewichtssystem verschwindet die resultierende Kraft und das resultierende Moment bzgl. eines beliebigen Punktes  $\mathcal{B}$ .

Bemerkung: Allgemein gilt Impulssatz  $\rightarrow$  Kräftesatz

Drallsatz  $\rightarrow$  Momentensatz

Gleichgewichtsaxiom liefert bei Reduktion  $F$  in  $\mathcal{B}$

$$\underline{R} = 0, \underline{M}_{\mathcal{B}} = 0$$

$\rightarrow$  Es folgt speziell für ebene Systeme

$$\begin{array}{lcl} \underline{e}_1: R_1 = 0 & \rightarrow & R_H = 0 \\ \underline{e}_2: R_2 = 0 & \rightarrow & R_V = 0 \\ \underline{e}_3: M_{B3} = 0 & \rightarrow & M_B = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} R_H \\ R_V \\ M_B \end{array}} \right\} \text{Kraftebene}$$

bzw.  $\rightarrow \sum H = 0, \sum V = 0, \sum M_B = 0$

## Ausnutzung des Äquivalenzsatzes für ebene Systeme

Bem.: Aus den Äquivalenzbeziehungen für allgemeine ebene Kräftesysteme lässt sich unmittelbar schließen, dass die Kräftegleichgewichtsbedingungen bzgl. beliebiger Punkte ① und ② ersetzt werden können, sofern ③, ④ und ⑤ nicht auf einer Geraden liegen.

Mögliche Varianten für Gleichgewichtsbedingungen:

$$(1) \rightarrow \sum H = 0, \rightarrow \sum V = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$(2) \uparrow \sum V = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0$$

$$\rightarrow \sum H = 0, \circlearrowleft \sum M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0$$

$$(3) \circlearrowleft M_B = 0, \circlearrowleft \sum M_C = 0, \circlearrowleft \sum M_D = 0$$

## 4. SCHWERPUNKT

Einführung des Begriffs "Schwerpunkt"

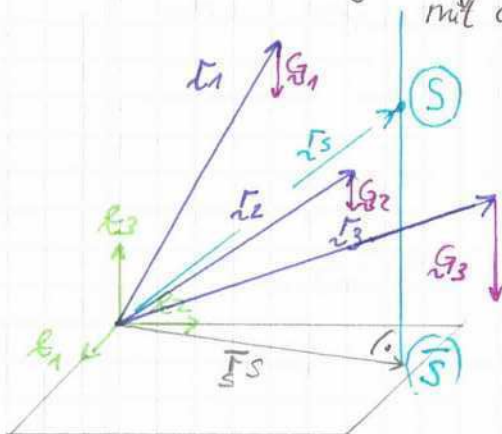
Vor.: Existenz eines Systems von Massepunkten bzw. eines materiellen Körpers im Gravitationsfeld. Die resultierende Gewichtskraft sei durch das Kräftesystem

$\{G_i, \vec{r}_i\}$  repräsentiert.

Def.: Der Angriffspunkt  $S$  (Ortsvektor  $\vec{r}_S$ ) der resultierenden Gravitations- bzw. Schwerpunkt  $G$  heißt Schwerpunkt

### 4.1 Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte

Problemstellung: Gegeben sei ein System von  $n$  materiellen Punkte  $P_i$  mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  und den Gewichtskräften  $G_i$



$$\gamma = \{P_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$F = \{G_i, \vec{r}_i\}$$

$$\text{mit } G_i = m_i g = -m_i g e_3$$

Bem.: Man setzt voraus, dass in der Nähe der Erdoberfläche

- die Wirkungslinien aller  $G_i$  parallel verlaufen
- für die Erdbeschleunigung  $g$  gilt:  $g = \text{konst.}$

Anmerkung: Die Erdbeschleunigung  $g$  ist durch äußere Fernwirkung aller  $G_i$  parallel verlaufend (Gravitation) erzeugte Volumenkraft pro Masseneinheit.

Reduktion  $\tilde{F}$  bzgl.  $O$ :

Man bildet die Dynamide  $\{\tilde{G}, \tilde{M}_0\}$

$$\tilde{G} = \sum_{i=1}^n \tilde{G}_i : \text{resultierende Gewichtskraft}$$

$$\tilde{M}_0 = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \times \tilde{G}_i$$

Reduktion von  $\tilde{F}$  bezüglich  $S$ :

Man bildet die Dynamide  $\{\tilde{G}, \tilde{M}_S\}$  mit

$$\tilde{M}_S = \sum_{i=1}^n (\tilde{r}_i - \tilde{r}_S) \times \tilde{G}_i$$

$$= \sum_i \tilde{r}_i \times \tilde{G}_i - \tilde{r}_S \times \sum_i \tilde{G}_i = \tilde{M}_0 = \tilde{r}_S \times \tilde{G}$$

Bemerkung: Die Reduktion auf eine Einzelkraft in  $S$  mit

$$\{\tilde{G}, \tilde{M}_S\} = \{\tilde{G}, 0\} \text{ ist möglich, wenn}$$

- $\tilde{r}_S \perp \{\tilde{G}, \tilde{M}_0\}$  d.h.  $\tilde{r}_S \cdot \tilde{G}_S = 0$

→ Reduktion auf eine Kraftschraube

- $\tilde{M}_0 \perp \tilde{G}$ , d.h.  $\tilde{M}_0 \cdot \tilde{G} = 0$

→ Reduktion auf eine Einzelkraft

(a)  $\tilde{G}$  kann beliebig auf seiner Wirkungslinie verschoben werden:

$\tilde{r}_S$  liegt z.B. in der  $e_1$ - $e_2$ -Ebene, so dass

$$\tilde{r}_S = \bar{\tilde{r}}_S \rightarrow \tilde{r}_S \perp \tilde{G}$$

(b)  $\tilde{M}_0$  liegt immer in der  $e_1$ - $e_2$ -Ebene  $\rightarrow \tilde{M}_0 \perp \tilde{G}$

Begründung:  $\tilde{G}_i = G_{i3} e_3$ ;  $G_{i3} = m_i g$ ;  $\tilde{r}_i = r_{ij} e_j$

$$\rightarrow \tilde{M}_0 = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \times \tilde{G}_i$$

$$= \sum_i (r_{i2} G_{i3} e_2 - r_{i1} G_{i3} e_3)$$

Reduktion auf eine Einzelkraft in (S)

$$\vec{M}_S = \vec{0} = \vec{M}_0 - \vec{r}_S \times \vec{G}; \quad \vec{r}_S = r_{S1} \vec{e}_1 + r_{S2} \vec{e}_2$$

$$\rightarrow \sum_i (r_{i2} G_{i3} \vec{e}_1 - r_{i1} G_{i3} \vec{e}_2) = r_{S2} G_3 \vec{e}_1 - r_{S1} G_3 \vec{e}_2$$

so dass durch Koeffizientenvergleich

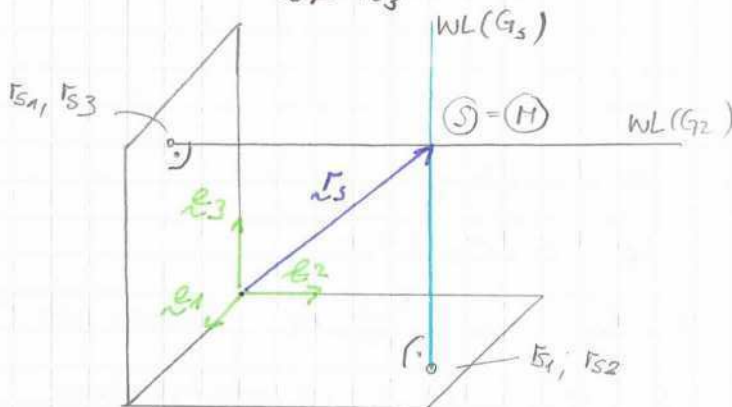
$$\vec{e}_1: r_{S2} = \frac{\sum_i r_{i2} G_{i3}}{G_3} = \frac{\sum_i r_{i2} m_i}{m}$$

$$\vec{e}_2: r_{S1} = \frac{\sum_i r_{i1} G_{i3}}{G_3} = \frac{\sum_i r_{i1} m_i}{m} \quad \text{mit } m := \sum_i m_i$$

Bem.: Die WL der resultierenden Gewichtskraft ist eine Gerade in  $\vec{e}_3$ -Richtung durch (S). Die o.g. Gleichungen geben in der  $\vec{e}_1\vec{e}_2$ -Ebene die Koordinaten des Massenmittelpunkts von  $\gamma$  an.

Konsequenz: Sind in einem System von Massenpunkten alle Gewichtskräfte parallel, dann sind die Koordinaten des Schwerpunkts gleichzeitig die Koordinaten des Massenmittelpunkts.

Durch die fiktive Annahme einer um den Winkel  $\alpha$  gedrehten Erdbeschleunigung (z.B.  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\vec{g} = -g \vec{e}_2$ ) erhält man z.B. die Koordinaten  $r_{S1}$  und  $r_{S2}$  des Schwerpunkts bzw. Massenmittelpunkts in der  $\vec{e}_1\vec{e}_3$ -Ebene



Bestimmung des Massenmittelpunktes (S) - (M)

Ausgangsgleichung ist die Äquivalenzbeziehung

$$\vec{M}_S = \vec{M}_M = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{0} = \vec{r}_M \times \vec{g} - \sum_i \vec{r}_i \times \vec{G}_i$$

$$= (m \vec{r}_M - \sum_i m_i \vec{r}_i) \times \vec{g}$$

Für beliebige Richtungen von  $\vec{g}$  (z.B.  $\vec{e}_3$ - bzw.  $\vec{e}_2$ -Richtung) verschwindet das o.g. Kreuzprodukt, wenn gilt

$$\vec{r}_m = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

Bem.: Der Ortsvektor des Schwerpunkts (Massenmittelpunkt) ist der massengewichtete Mittelwert der Ortsvektoren der Masspunkte  $P_i$ .

Schwerpunkt  $(S)$  und Massenmittelpunkt  $(M)$

Bem.: Der Schwerpunkt wurde als Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft eingeführt. (Reduktion auf Einzelkraft, wenn möglich)

Der Massenmittelpunkt ist alles „Massenzentrum“ aufzufassen.

⇒ Schwerpunkt und Massenmittelpunkt sind identisch, wenn die Richtungen von  $g$  aller Punkte  $P_i \in \gamma$  parallel sind. Dies trifft nur in der Nähe der Erdoberfläche zu.

Im Allgemeinen können  $S$  und  $M$  jedoch verschieden sein.

Resultat: Lage des Massenmittelpunktes  $(M)$

• im allgemeinen gilt  $M \neq S \Leftrightarrow \vec{r}_M \neq \vec{r}_S$

• Sonderfall: parallele Schwerkraft

$$M = S \Leftrightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_S$$

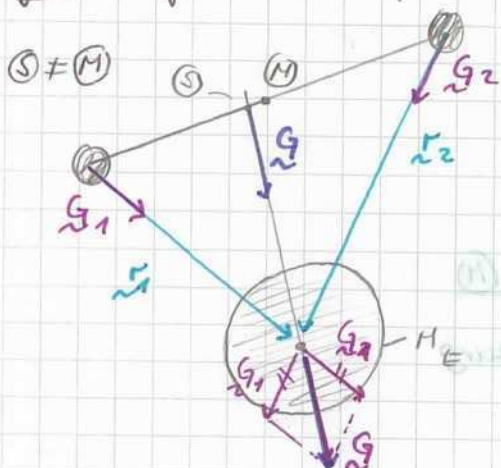
BEISPIEL für  $M \neq S$

geg.: Hantelsatellit im Orbit

Massenlose Stange

ges.: Lage des Schwerpunkts:

Voraussetzung



$$|\vec{r}_1| \approx |\vec{r}_2| = r$$

$$\rightarrow G_1 = G_2 = \frac{\Gamma \cdot M}{r^2} \cdot m \quad (\text{NEWTON'sches Gravitationsgesetz})$$

$\Gamma$ : universelle Gravitationskonstante

$$\Gamma \approx 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}$$

Konsequenz: Die resultierende Schwerkraft  $G$  in  $S$  verursacht ein Moment um  $M$ .

→ Der Satellit stellt sich Nadelförmig zum Massenmittelpunkt der Erde.

## Anmerkung zur Gewichtskraft im Schwerfeld

An der Erdoberfläche gilt für die Gewichtskraft  $\underline{G}$  eines Körpers mit der Masse  $m$

$$\underline{G} = m \underline{g} \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Richtung von } \underline{g}: \text{ Lotrichtung} \\ \text{Betrag von } \underline{g}: g = \frac{GM_E}{R_E^2} \end{array} \right.$$

Es sind  $M_E = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  : Erdmasse

$R_E = 6371,0 \text{ km}$  : Radius einer der Erde volumengleichen Kugel

Einige reale Werte für  $g$

$$g = 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ an den Polen.}$$

$$g = 9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ am Äquator}$$

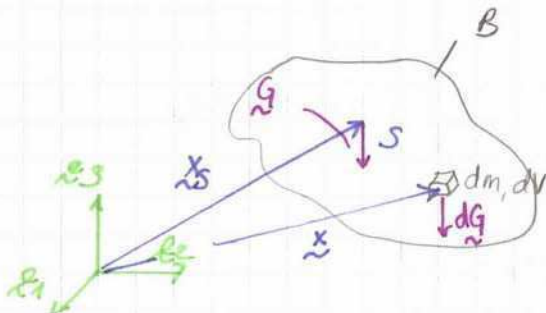
$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ Mittelwert } (\sim 50^\circ \text{ Breite})$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ im BauING}$$

Bem.: Die Gewichtskraft ist auf den Massenmittelpunkt der Erde gerichtet. Lokale Schwankungen in der Massenverteilung bewirken Änderungen.

## 4.2. SCHWERPUNKT EINES MATERIELLEN KÖRPERS

hier: Voraussetzung paralleler Schwerkäfte (M) = (S)



Eingangsgrößen:

Differenzielle Schwerkraft

$$d\underline{G} = \underline{g} dm$$

$$dm = \rho \cdot dV$$

$\rho$ : Dichte

Reduktion des Schwerpunkts (S)

$$\underline{G} = \int_B d\underline{G} = m \underline{g} \quad ; \quad m = \int_B dm$$

$$\underline{M}_S = \int_B (\underline{x} - \underline{x}_S) \times d\underline{G} = \int_B \underline{x} \times d\underline{G} - \underline{x}_S \times \underline{G}$$

Bedingung für den Schwerpunkt:  $\underline{M}_S = \underline{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{L} = \int_B \underline{x} dm \times \underline{g} - m \underline{x}_S \times \underline{g} \\ \rightarrow \underline{0} = (m \underline{x}_S - \int_B \underline{x} dm) \times \underline{g} \end{array} \right\} g = \text{konst.}$$

Bem: Unter der Voraussetzung  $\textcircled{S} = \textcircled{M}$  folgt wie in 4.1, dass die Bestimmungsgleichung für den Schwerpunkt dann erfüllt ist, wenn der Klammerausdruck verschwindet

Resultat:  $\bar{x}_S \approx \bar{x}_M = \frac{1}{m} \int_B \bar{x} dm$

### 4.3 VOLUMEN-, FLÄCHEN- UND LINIENSCHWERPUNKTE

#### (a) Volumenschwerpunkt (Volumenmittelpunkt)

Für materielle Körper mit homogener Dichte ( $\rho = \text{konst}$ ) gilt:

$$m = \int_B dm = \int_B \rho dV = \rho V \rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

Es folgt aus der Bestimmungsgleichung für den Massenmittelpunkt

$$\bar{x}_M = \frac{1}{m} \rho \int_B \bar{x} dV \rightarrow \bar{x}_V = \bar{x}_M = \frac{1}{V} \int_B \bar{x} dV$$

Bem: Die Lage  $\bar{x}_V$  des Volumenschwerpunktes wird ausschließlich von der geometrischen Form des Körpers bestimmt.

Volumenelement und Volumen  $B$  (kartesische Koordinaten)

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\rightarrow V = \int_B dV = \int_B \int_B \int_B dx_1 dx_2 dx_3$$

#### (b) Flächenschwerpunkt (Flächenmittelpunkt)

Für Volumina mit homogener Tiefe ( $t = \text{konst}$ ) gilt

$$V = \int_0^t \int_{x_1} \int_{x_2} dx_1 dx_2 dx_3 = t \int_{x_1} \int_{x_2} dx_1 dx_2$$

Flächeninhalt und Fläche (kart. Koordinaten)

$$da = dx_1 dx_2$$

$$\rightarrow A = \int_S da = \int_{x_1} \int_{x_2} dx_1 dx_2 = \frac{V}{t}$$

Es folgt aus der Bestimmungsgleichung für den Volumenschwerpunkt

$$\bar{x}_v = \frac{1}{V} \cdot t \int_S \bar{x} da \rightarrow \bar{x}_F = \frac{1}{A} \int_S \bar{x} da$$

⇒ Koeffizientengleichungen zur Bestimmung der Flächenschwerpunktskoordinaten:

Es folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \left\| \begin{aligned} \bar{x}_{1F} &= \frac{1}{A} \int_S \bar{x}_1 da & S_2 &:= \int_S \bar{x}_1 da \\ \bar{x}_{2F} &= \frac{1}{A} \int_S \bar{x}_2 da & S_1 &:= \int_S \bar{x}_2 da \end{aligned} \right.$$

Bem.: Die darin enthaltenen Integrale  $S_1$  und  $S_2$  bezeichnet man als „Flächenmoment 1. Grades“ bzw. statisches Moment

↳ Ausführliche Diskussion in TM 2 ↴ haha

### (c) Linien Schwerpunkt (Linienmittelpunkt)

Für Flächen mit homogener Höhe ( $h = \text{konst.}$ ) gilt

$$A = \int_0^h \int_{x_1} dx_1 dx_2 = h \int_{x_1} dx_1$$

Linienelemente und Linien (Kartesische Koordinaten)

$$dl = dx_1$$

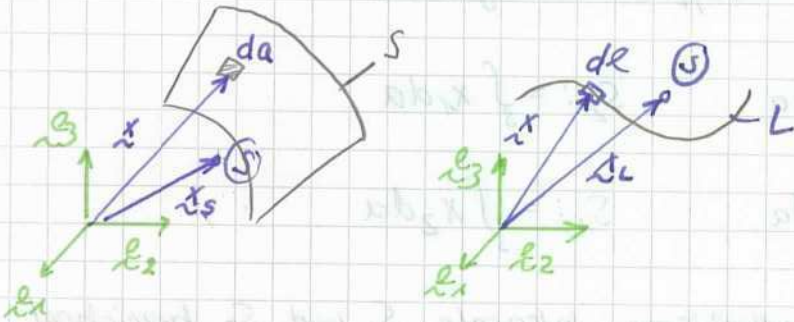
$$L = \int_{x_1} dx_1 = \frac{A}{h}$$

Es folgt aus der Bestimmungsgleichungen für den Flächenschwerpunkt,

$$\bar{x}_p = \frac{1}{A} h \int_B \bar{x} dl \rightarrow \bar{x}_L = \frac{1}{L} \int_B \bar{x} dl$$

## Abschließende Bemerkungen

- Flächen- und Linienschwerpunkte können für gekrümmte Flächen und gekrümmte (bzw. gewundene) Linien auch außerhalb dieser Flächen und Linien liegen.



- In Analogie zur Definition des Massenmittelpunktes eines materiellen Körpers können auch Massenmittelpunkt für Flächen und Linien eingeführt werden. Man benutzt die Größen

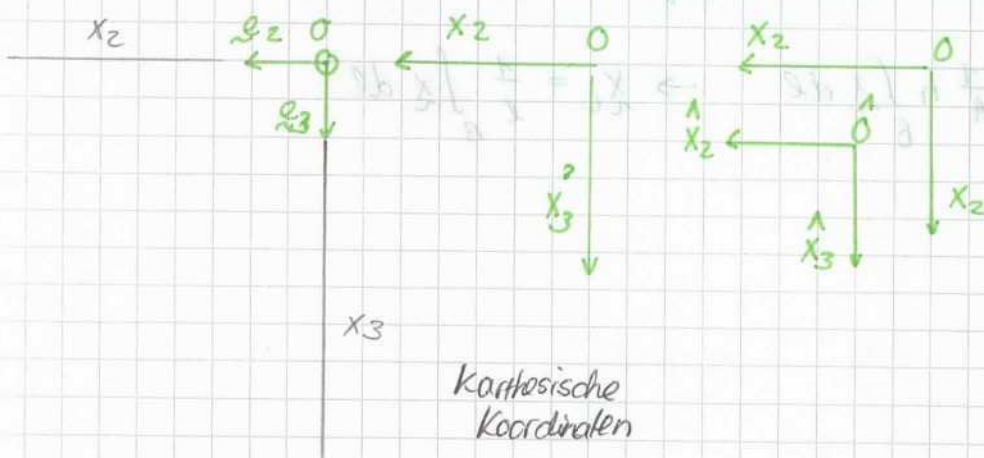
- \*  $\rho$ : Dichte (Masse pro Volumeneinheit)
- \*  $\mu$ : Massendichte (Masse pro Flächeneinheit)
- \*  $\nu$ : Massendichte (Masse pro Linieneinheit)

Für homogene  $\rho, \mu, \nu$  sind die Massenmittelpunkte und die Volumen-, Flächen- und Linienschwerpunkte identisch

## 4.4. BEMERKUNGEN ZUR BESTIMMUNG DES FLÄCHENSCHWERPUNKTES

hier: einige Sonderfälle ebener Flächen

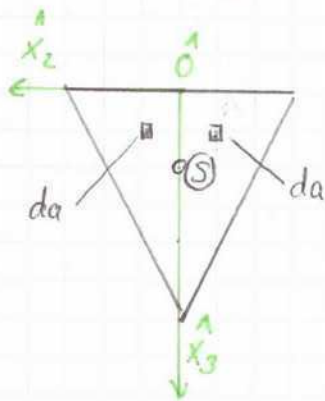
### (a) Basisvektoren, kartesische Koordinaten, Koordinatentransformationen



Bezugssystem mit Darstellung kartesischer Koordinaten

Kartesische Koordinaten u. Koordinatentransformation (Translation)

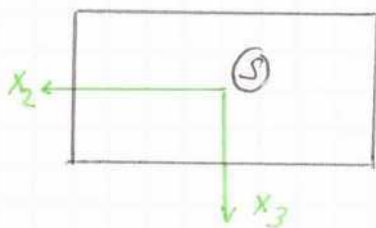
## (b) Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften



$$\bar{x}_{F2} = \frac{1}{A} \int_A \bar{x}_2 da = 0$$

d.h. (S) liegt auf der Symmetrieachse  
(geometrischer Ort zur Bestimmung des Flächenschwerpunkts)

Sonderfall doppelsymmetrische Flächen



$$x_{2F} = x_{3F} = 0$$

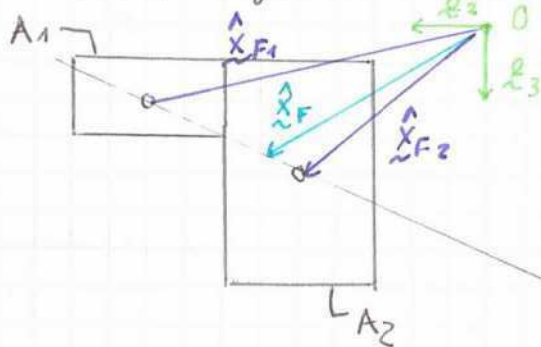
für die statischen Momente folgt

$$S_2 = x_{F3} A = \int_S x_3 da = 0$$

$$S_3 = x_{F2} A = \int_S x_2 da = 0$$

Bem.: Im Bezug auf den Schwerpunkt verschwinden die statischen Momente.

## (c) Zusammengesetzte Flächen



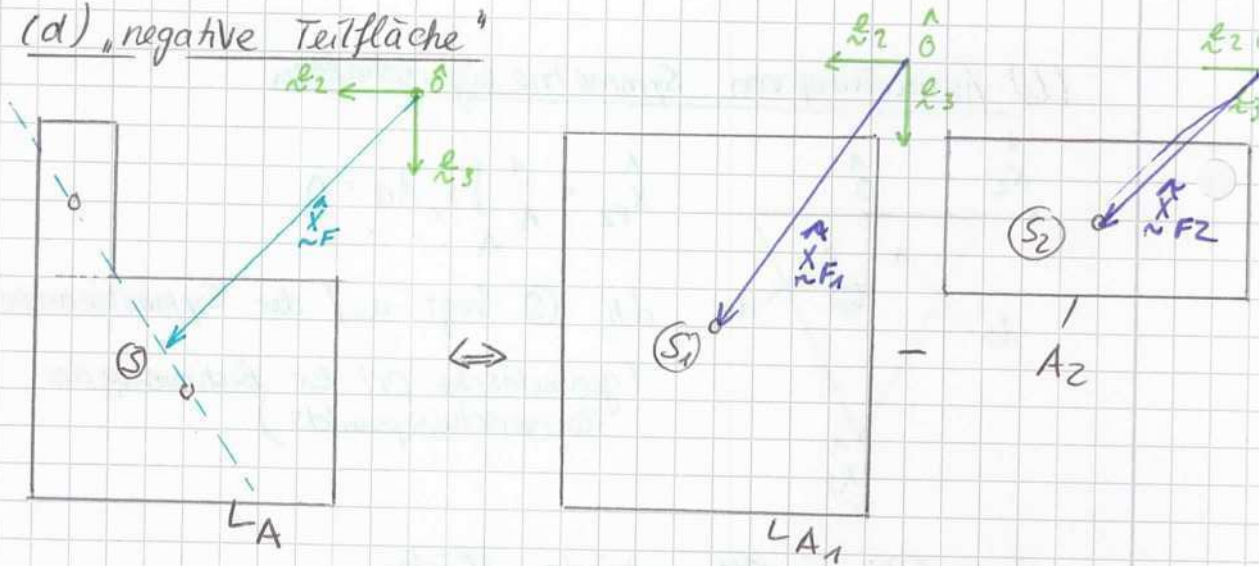
$$\begin{aligned} \bar{x}_F &= \frac{1}{A} \int_A \bar{x} da \\ &= \frac{1}{A} (\bar{x}_{F1} A_1 + \bar{x}_{F2} A_2) \end{aligned}$$

↳ Summation

Für zusammengesetzte Flächen gilt allgemein

$$\bar{x}_F = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_{Fi} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

(d) „negative Teilfläche“



$$\rightarrow \hat{x}_F = \frac{\hat{x}_{F1} A_1 - \hat{x}_{F2} A_2}{A_1 - A_2}$$

Bezeichnung der Koordinatenachsen

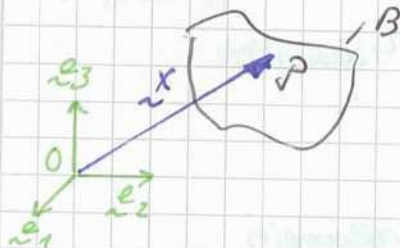
\*  $\hat{x}_j$  : beliebig kartesische Koordinaten

\*  $\hat{x}_i$  : ————— durch den Schwerpunkt

## 5. VERSCHIEBLICHKEITSUNTERSUCHUNGEN

### 5.1 BEGRIFFE UND SYSTEME

Kinematische Freiheitsgrade des starren Körpers



• Im Raum

3 Translationen } 6 Freiheitsgrade  
3 Rotationen

• in der Ebene

2 Translationen } 3 Freiheitsgrade  
1 Rotation

MERKE: Unter dem Einfluss äußerer Kräfte (Belastungen) bleibt ein starrer Körper in Ruhe, wenn die Anzahl der voneinander unabhängigen kinematischen Bindungen wenigstens so groß ist wie die Anzahl der kinematischen Freiheitsgrade.

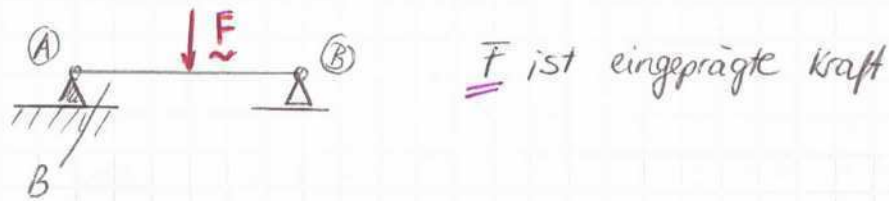
⇒ Kinematische Bindungen

Bem.: Kinematische Bindungen treten auf an Auflagern und an Zwischenlagern (Kopplungen von starren Körpern).

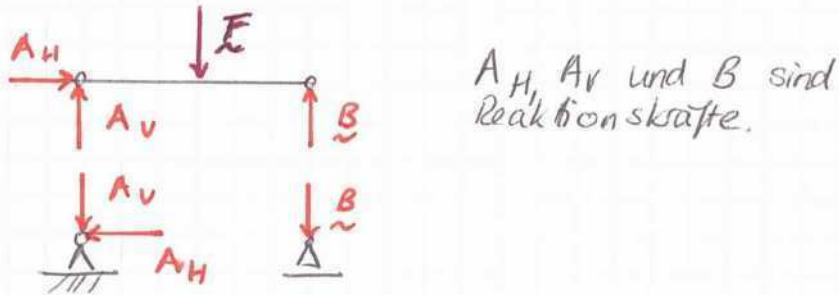
Kinematische Bindungen dienen der Kraftübertragungen.

## (a) Auflager (Stützungen)

Beispiel Balken auf zwei Stützen (ebenes Problem)



bzw. mit Schnittprinzip und Reaktionsprinzip



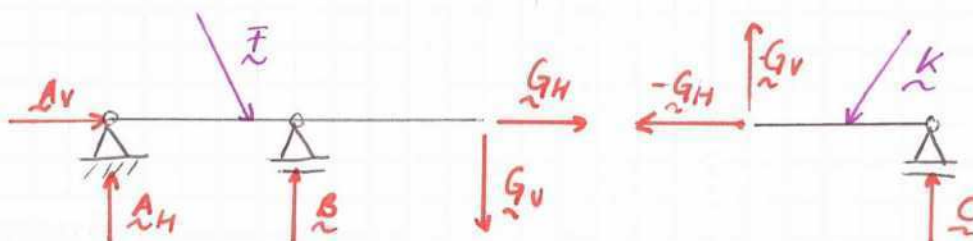
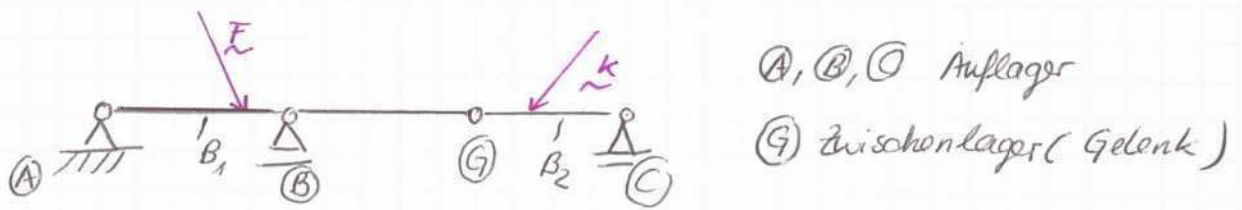
Bem.: Mit Hilfe des Schnittprinzips und des Reaktionsprinzips wird deutlich, dass jeder kinematischen Bindung eine potentielle Reaktionskraft zugeordnet ist.

MERKE: Eine Reaktionskraft ist eine Kraft, die sich als Antwort auf eine dem Körper eingetragene Kraft einstellt.

## (b) Zwischenlager (Gelenke)

Bem.: Zwischenlager treten bei Systemen, die aus mehr als einem starren Körper bestehen.

Bsp: Gelenkbalken bzw. GERBER-Träger (ebenes Problem)



### (c) Symbole für Auf- und Zwischenlager

Bem.: Die statische Wertigkeit eines Auflagers bzw. eines Zwischenlagers entspricht der Anzahl der unabhängigen Komponenten der Reaktionskräfte bzw. der Reaktionsmomente  $\rightarrow$  Tabelle

## 5.2 Statische und kinematische Bestimmtheit

Definition: Ein gekoppeltes System starrer Körper ist statisch bestimmt, wenn die Anzahl der zu Verfügung stehenden Reaktionskräfte mit der Anzahl der zu Verfügung stehenden Gleichungen übereinstimmt.

Bemerkung: Ist ein System von starren Körpern nicht statisch bestimmt, dann ist es

- statisch unbestimmt: mehr Unbekannte als Gleichungen
- verschieblich: mehr Gleichungen als Unbekannte.

MERKE: Ein verschiebliches System starrer Körper ist kinematisch unbestimmt, d.h. seine Lage im Raum ist nicht dauerhaft fixiert.  
Kinematisch bestimmte Systeme können demnach sowohl statisch bestimmt als auch statisch unbestimmt sein

### Abzahlkriterium für statische Bestimmtheit

$$f = \begin{cases} 6p - (a+z) & : \text{räumliches System} \\ 3p - (a+z) & : \text{ebenes System} \end{cases}$$

Auswertung:

$$f = \begin{cases} > 0 & : i\text{-fach verschiebliches System} \\ = 0 & : \text{statisch bestimmt} \\ < 0 & : i\text{-fach statisch unbestimmt} \end{cases}$$

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

$p$ : Anzahl der starren Körper (Scheiben)

$a$ : Anzahl der Auflagerreaktionen

$z$ : Anzahl der Zwischenreaktionen

## Berechnung der Anzahl der Zwischenreaktionen

$$z = (s-1)w \quad \text{mit} \quad \begin{cases} s \rightarrow \text{Anzahl der Stäbe} \\ w \rightarrow \text{statische Wertigkeit der Verbindung} \end{cases}$$

Bsp:   $s=2, w=2$

$$\rightarrow z = (2-1) \cdot 2 = 2$$

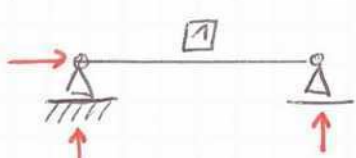
  $s=4, w=2$

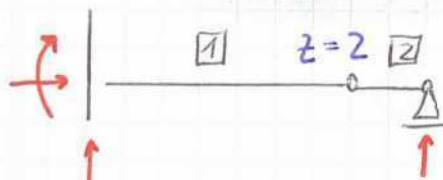
$$\rightarrow z = (4-1) \cdot 2 = 6$$

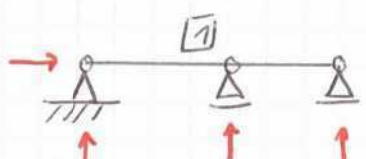
außerdem sind

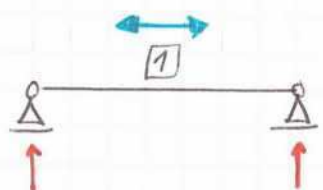
- $6p$  bzw.  $3p$ : Anzahl der zu Verfügung stehenden Gleichungen
- $(a+z)$ : — " — unbekannten Reaktionskräfte

## Beispiele für ebene Systeme

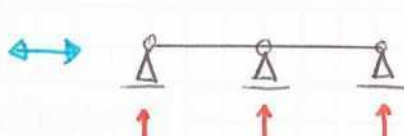
  $\begin{cases} p=1, a=3, z=0 \\ f = 3 \cdot 1 - (3+0) = 0 \quad \checkmark \end{cases}$

  $\begin{cases} p=2; a=4; z=2 \\ \rightarrow f = 3 \cdot 2 - (4+2) = 0 \quad \checkmark \end{cases}$

  $\begin{cases} p=1, a=4, z=0 \\ \rightarrow f = 3 \cdot 1 - (4+0) = -1 \end{cases}$   
(mehr Lager wie nötig  $\rightarrow$  mehr Sicherheit)

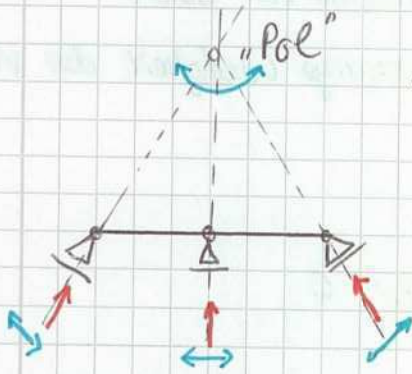
  $\begin{cases} p=1; a=2; z=0 \\ f = 3 \cdot 1 - (2+0) = 1 \end{cases}$

Achtung: statische und kinematische Unbestimmtheiten (Verschieblichkeiten) können sich rechnerisch kompensieren

  $\begin{cases} p=1; a=3; z=0 \\ \rightarrow f = 3 \cdot 1 - (3+0) = 0 \quad \checkmark \end{cases}$

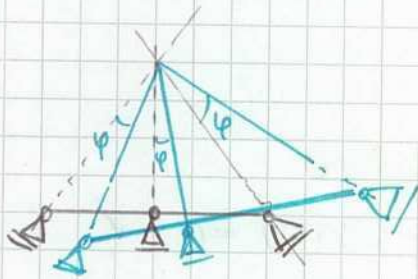
aber: 1-fach unbestimmt und 1-fach verschieblich  $\nabla$

Sonderfälle : versteckte zentrale Kräftesysteme der möglichen Reaktionskräfte



Bem.: Im zentralen Kräftesystem ist der Körper nicht gegen Verdrehen gesichert, d.h. das System ist ebenfalls 1-fach statisch unbestimmt und 1-fach verschieblich.

Verschiebungsfigur für infinitesimale Verschiebungen



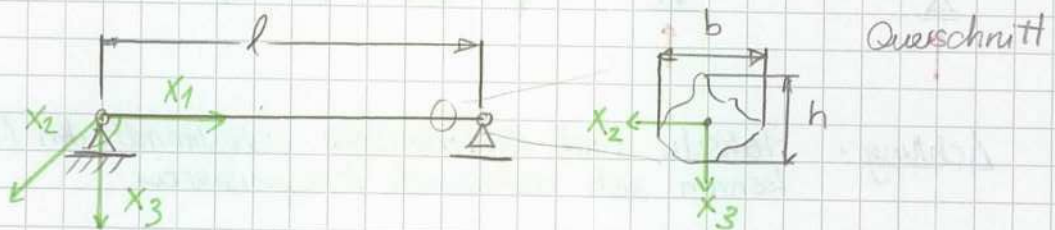
Bem. Bei infinitesimalen Drehungen ersetzt die Tangente den Kreisbogen.

## 6. AUFLAGERREAKTIONEN UND SCHNITTGRÖßEN

### 6.1 BELASTUNG VON STÄBEN UND BALKEN

Stäbe und Balken

- Tragwerke deren Länge groß ist im Vergleich zu den Querabmessungen (Höhe  $h$ , Breite  $b$ )  
 $l \geq 10h$ ,  $l \geq 10b$
- Beschrieben durch Längsachse und Querschnittsflächen
- Achse verläuft durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche



mit  $x_i$  : kartesischen Koordinaten

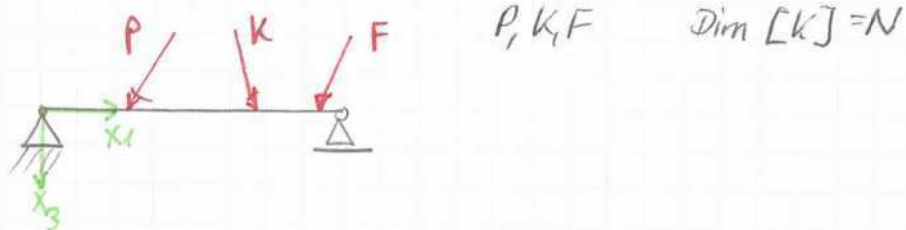
### Belastungen:

- Stabproblem: Belastung nur in Längsrichtung ( $x_1$ )
- Balkenproblem: Belastung nur quer zur Längsrichtung ( $x_2, x_3$ )

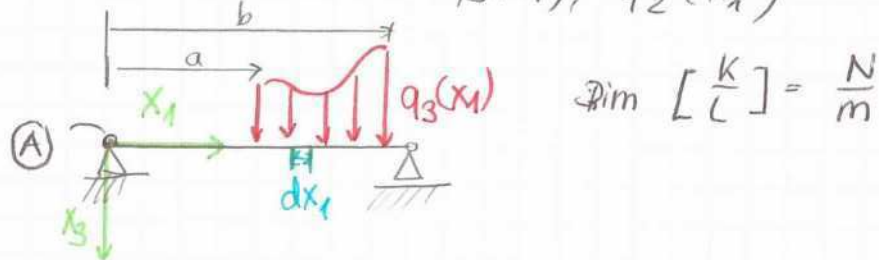
Bem.: i. A. spricht man immer von Balkenproblemen

### BELASTUNG DES ALLGEMEINEN, EBENEN BALKENS

(a) durch Einzelkräfte (wie bisher)



(b) durch Linienlasten  $q_3(x_1), q_2(x_1)$



Belastetes differenzielles Linienelement

$$dR_3 = q_3(x_1) dx_1$$

zur Linienlast äquivalente resultierende  $R_3$

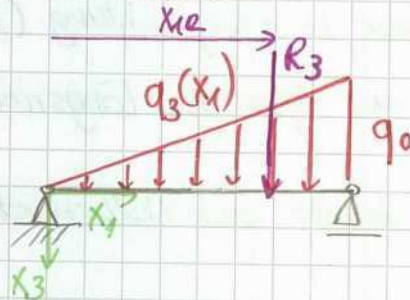
$$R_3 = \int_a^b dR_3 = \int_a^b q_3(x_1) dx_1$$

Bem.: Lage von  $R_3$  über den Äquivalenzsatzes:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= x_{1R} R_3 = - \int_a^b x_1 q_3(x_1) dx_1 \\ x_{1R} &= \frac{- \int_a^b x_1 q_3(x_1) dx_1}{R_3} \end{aligned}$$

Beis

Beispiel: Dreieckslast



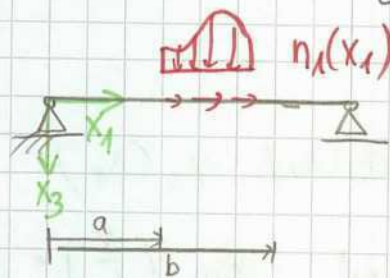
$$x_{1e} = \frac{\int_0^l x_1 \frac{q_0}{l} dx_1}{\frac{1}{2} q_0 l} = \frac{3}{2} l$$

Bestimmung von  $R_3$  und  $x_{1e}$

$$q_3(x_1) = \frac{q_0}{l} x_1$$

$$R_3 = \int_0^l \frac{q_0}{l} x_1 dx_1 = \frac{1}{2} q_0 l$$

(c) Linienlasten in Richtung der Balkenachsen



$$n_1(x_1): \text{Dim} \left[ \frac{k}{l} \right] = \frac{N}{m}$$

differentielles Linienlast  $dR_1 = n_1(x_1) dx_1$

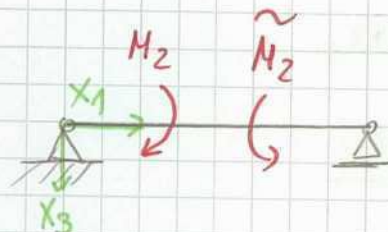
→ Bestimmung der Resultierenden

$$R_1 = \int_a^b n_1(x_1) dx_1$$

Bem.:  $R_1$  greift im Schwerpunkt der Querschnittsfläche und kann beliebig auf ihrer Wirkungslinie (Balkenlängsachse) verschoben werden

(d) Einzelmomente ( $x_2, x_3$ )

z.B.  $M_2$  und  $\tilde{M}_2$

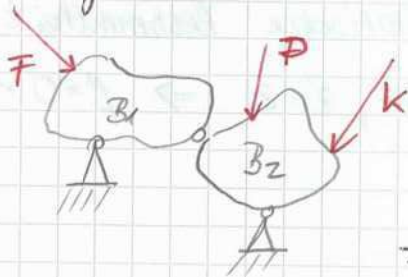


Bem.: weitere Belastungen sind möglich.

## 6.2 AUFLAGEREAKTIONEN AN ZUSAMMENGESETZTEN, EBENEN TRAGWERKEN

Bem.: In TMH nur Lösung für statisch bestimmte Systeme

Vorgehensweise:



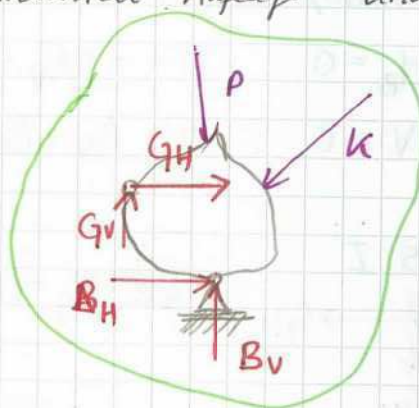
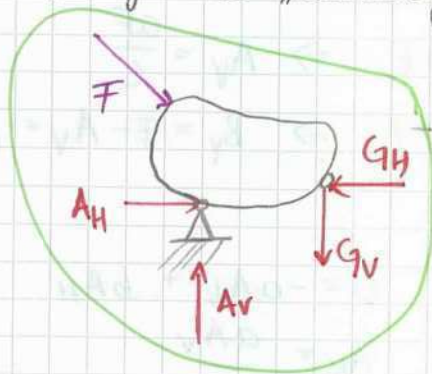
(1) Kontrolle der statischen Bestimmtheit

$$p=2, a=4, z=2$$

$$f = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0 \quad \checkmark$$

→ statisch bestimmtes System

(2) Freischneiden der Teilsysteme durch Führung geschlossener Schnitte  
- Antragen der „sichtbargemachten“ Auflager- und Zwischenreaktionen



(3) Berechnung der Auflager und Gelenkreaktion

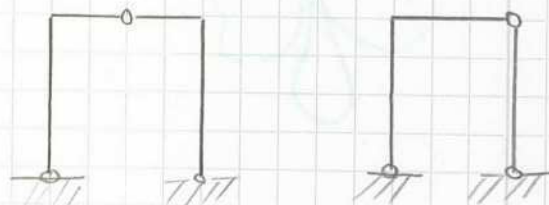
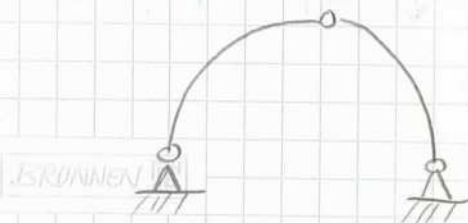
Bem.: Man versucht ein LGS zu finden, bei dem man aus jeder Gleichung eine Unbekannte ermitteln kann

Einige typische Systeme

→ Gelenkbolzen bzw. GERBER-Träger

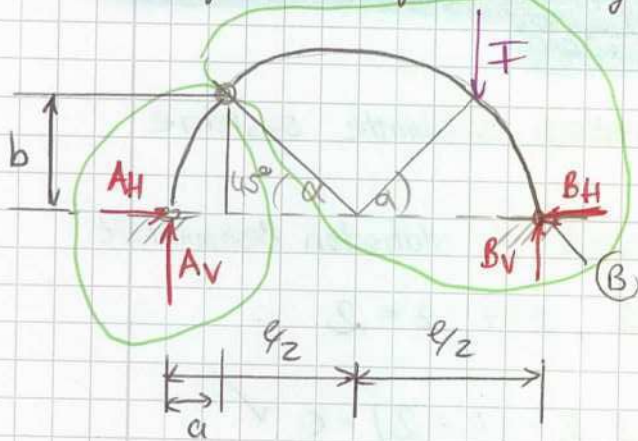


→ Dreigelenkträger, Bogenträger (Kreisbogenträger)



Dreigelenkrahmen

# Beispiel: Dreigelenk-Kreisbogenträger



geg:  $F, l$

ges: Auflager- und Gelenkreaktionen

(1) Statische Bestimmtheit

$$p=2, a=4, z=2 \Rightarrow f=0 \checkmark$$

Lösung  $a = \frac{l}{2} (1 - \cos 45^\circ)$

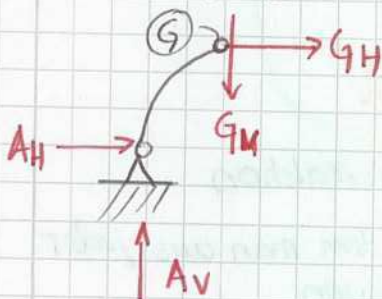
$$b = \frac{l}{2} (1 - \sin 45^\circ)$$

- Am Gesamtkörper (I.) und (II.)

$$\downarrow \sum M_B = 0 : 0 = -l A_V + a F \Rightarrow A_V = \frac{a F}{l}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : 0 = A_V + B_V + F \Rightarrow B_V = F - A_V = F \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

- Am TS I



$$\downarrow \sum M_G = 0 : 0 = -a A_V + b A_H$$

$$A_H = \frac{a A_V}{b}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : 0 = A_V - G_V \Rightarrow A_V = G_V$$

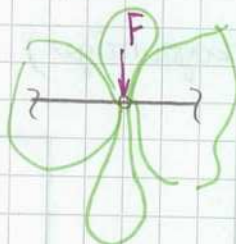
$$\rightarrow \sum H = 0 : 0 = A_H + G_H \Rightarrow G_H = -A_H$$

- Am Gesamtsystem (bzw. TS II)

$$\rightarrow \sum H = 0 : A_H - B_H \Rightarrow A_H = B_H$$

## Abschließende Bemerkung:

- Gelenke mit Einzellasten sind bei TSs zu behandeln

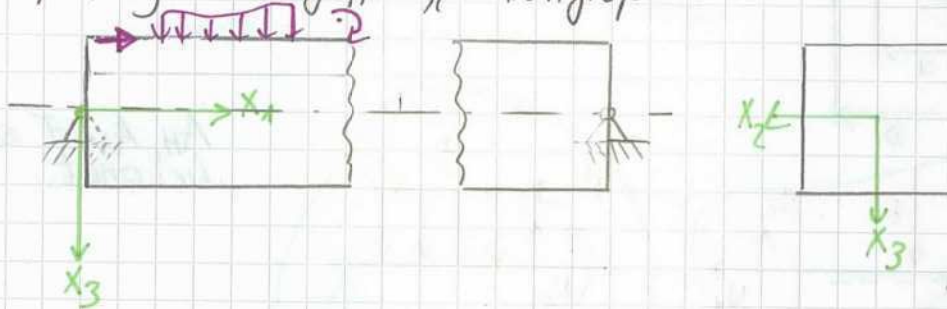


- Linienlasten, die sich über Bereichsgrenzen erstrecken

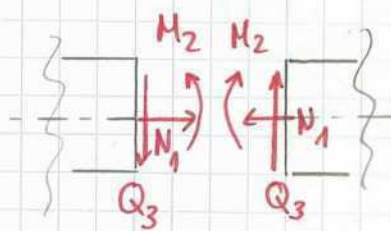


## 6.3 SCHNITTGRÖSSEN AN GERADEN BALKEN UNTER EBENER BELASTUNG

Einführung des Begriffs „Schnittgröße“



Sichtbarmachen der Schnittgrößen

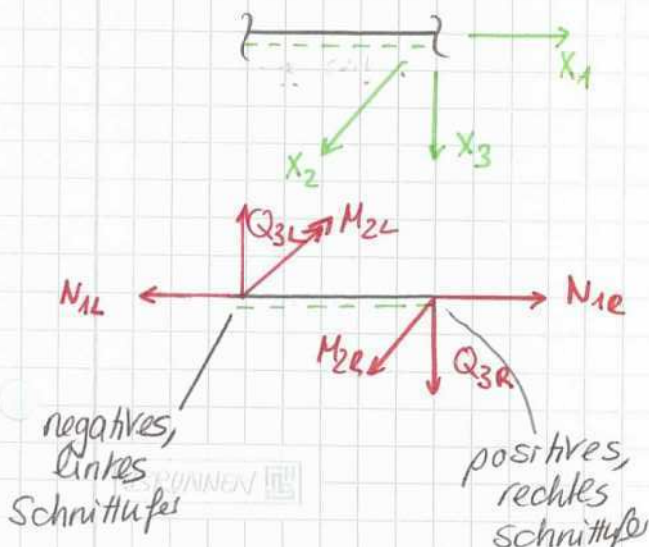


Bez.  $\left\{ \begin{array}{l} N_1: \text{Normalkraft in } x_1\text{-Richtung} \\ Q_3: \text{Querkraft in } x_3\text{-Richtung} \\ M_2: \text{Biegemoment (} x_2\text{-Richtung)} \end{array} \right.$

Bem.: Schnittgrößen (stress resultants) sind die Resultierenden aus den Spannungen (TM II)

Vorzeichendefinition und „gestrichelte Zone“

- kartesische Schwerpunktskoordinaten und gestrichelte Zone



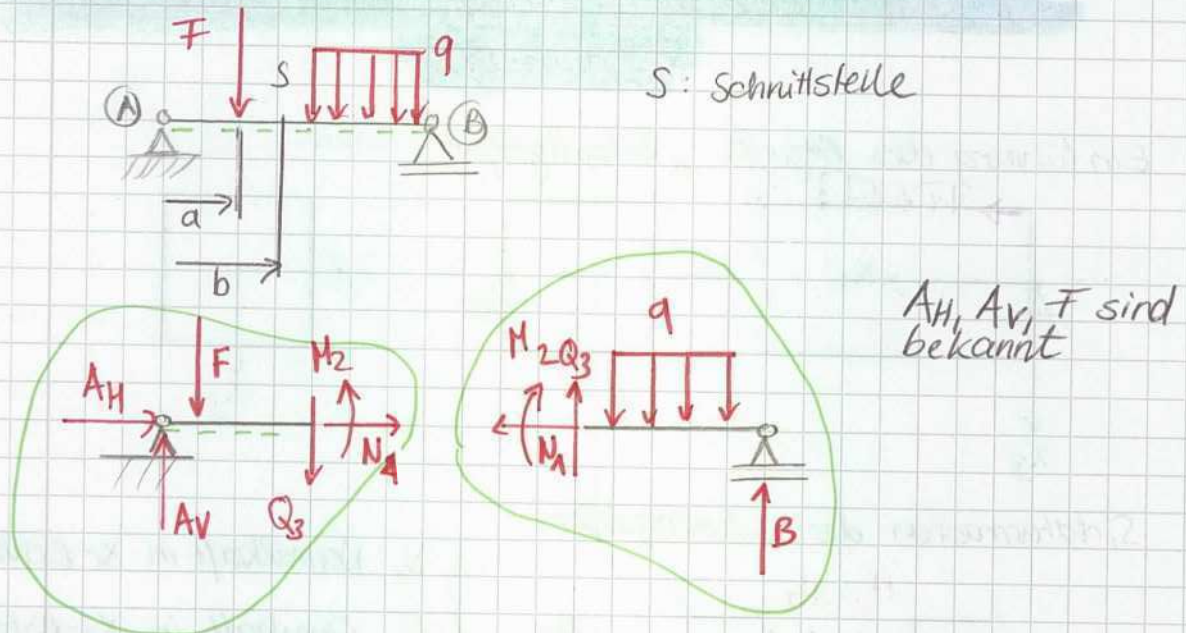
positive Schnittgrößen am rechten und linken Schnittufer

Bem.: bei gestrichelte Zone unterhalb des Balkens.

MERKE: Positive Größen wirken am positiven Schnittpfeil in positive Koordinatenrichtung und am negativen Schnittpfeil in negativer Koordinatenrichtung.

### Elementare Berechnung von Schnittgrößen

⇒ Satz: Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn sich jeder Teilkörper, der sich durch geschlossene Schnitte bilden lässt im Gleichgewicht befindet.



GG am TS I:

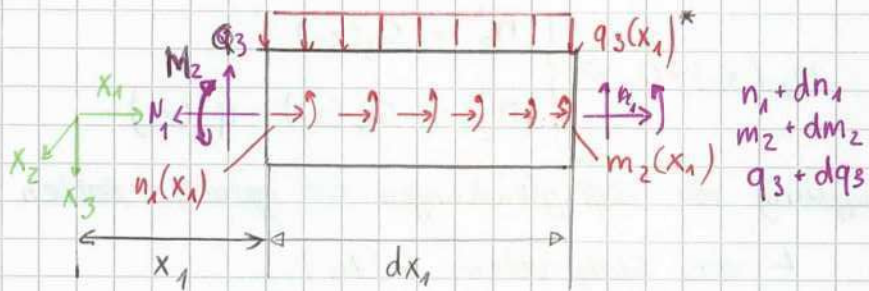
$$\rightarrow \sum H = 0 : N_1 = -A_H$$

$$\uparrow \sum V = 0 : Q_3 = A_V - F$$

$$\circlearrowleft \sum M_S = 0 : M_2 = b A_V - (b - a) F$$

# DIFFERENZIALGLEICHUNGEN FÜR SCHNITTGRÖßEN

hier: Behandlung des geraden Balkens



\* konstant über  $dx_1$

Zuwechsel der Schnittgrößen TAYLOR-Reihenentwicklung bei Entwicklung nach dem Anfangsglied an der Stelle  $x_1$ .

Es gilt z.B.:

$$N_{1R} = N_1 \Big|_{x_1=x_{1L}} + \frac{dN_1(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1L}}$$

bzw. kurz

$$N_{1R} = N_1 + dN_1 \quad \text{mit} \quad N_1 = N_{1L}$$

Gleichgewicht am Balkenelement

$$\rightarrow \sum H = 0: 0 = -N_1 + n_1(x_1)dx_1 + N_1 + dN_1$$

$$\uparrow \sum V = 0: 0 = Q_3 - q_3(x_1)dx_1 - Q_3 - dQ_3$$

$$\hookrightarrow \sum M_R = 0: 0 = -M_2 + m_2(x_1)dx_1 + M_2 + dM_2 - Q_3 dx_1 + \frac{1}{2} q_3(x_1) dx_1^2 \approx 0$$

Es folgt z.B. für den Normalkraftverlauf

$$n_1(x_1)dx_1 + dN_1 = 0$$

$$n_1(x_1) = - \frac{dN_1}{dx_1} = -N_1'$$

Differenzialbeziehungen für den geraden Balken

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dx_1} &= N_1' = -n_1(x_1) \\ \frac{dQ_3}{dx_1} &= Q_3' = -q_3(x_1) \\ \frac{dM_2}{dx_1} &= M_2' = -m_2(x_1) + Q_3(x_1) \end{aligned} \right\} \text{gekoppelt}$$

Bem.: • In fast allen Fällen gilt

$$m_2(x_1) = 0, \text{ d.h.}$$

$$m_2(x_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_2' = Q_3(x_1) \\ M_2'' = Q_3'(x_1) = -q_3(x_1) \end{cases}$$

• Entkopplung der Diff.gleichungen am geraden Balken

↳ das Stabproblem ( $N_1$ )

↳ das Balkenproblem ( $Q_3, m_2$ )

⇒ Schnittgrößen am geraden Balken

Integration der Diff.beziehungen für Schnittgrößen liefert

$$N_1(x_1) = N_1(x_{1,0}) = \int_{x_{1,0}}^{x_1} \tilde{n}_1(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$$

$$Q_3(x_1) = Q_3(x_{1,0}) - \int_{x_{1,0}}^{x_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$$

$$\begin{aligned} M_2(x_1) - M_2(x_{1,0}) &= \int_{x_{1,0}}^{x_1} Q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \\ &= M_2(x_{1,0}) + Q_3(x_{1,0})(x_1 - x_{1,0}) = \int_{x_{1,0}}^{x_1} \int_{x_{1,0}}^{\tilde{x}_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_1 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

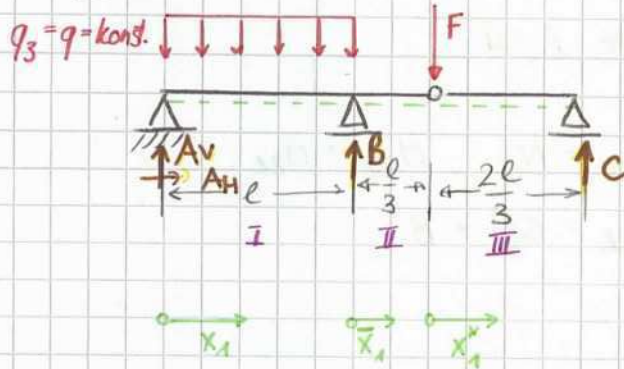
- Am geraden Balken sind das Stab- und das Balkenproblem entkoppelt
- Für  $Q_3 = 0$  tritt ein Extremwert für  $M_2$  auf  
Maximum für  $q_3 > 0$ , Minimum für  $q_3 < 0$
- Treten Unstetigkeiten in Geometrie und Belastung auf (z.B. Einzelelasten oder Einzelmomente, Knicke, ...), dann sind Integrationsbereiche entsprechend zu bilden.
- Für  $Q_3 = 0$  und  $M_2 = 0$  liegt ein reines Stabproblem vor.  
Gilt außerdem  $n_1(x_1) = 0$ , dann heißt der Stab Pendelstab oder Pendelstütze.



# BEISPIEL ZUR SCHNITTGRÖßENBERECHNUNG

geg.:  $F, q, l$

ges.: Verlauf der Schnittgrößen  $N_1(x_1), Q_3(x_1), M_2(x_1)$



Lösungsweg:

(1) Kontrolle der stat. Bestimmtheit

$$p=2, a=4 \quad z=2 \rightarrow f=3 \cdot 2 - (4+2) = 0 \checkmark$$

(2) Berechnung der Auflagerreaktionen

$$A_v = \frac{ql}{3} = \frac{F}{3}, \quad A_h = 0$$

$$B = \frac{ql}{3} + \frac{4F}{3}$$

$$C = 0$$

(3) Festlegung der Integrationsbereiche

→ Führung geschlossener Schnitte

(4) Berechnung der Schnittgrößen

$$N_1(x_1) \equiv 0$$

$$Q_3(x_1) = A_v - \int_0^{x_1} q d\bar{x}_1$$
$$= A_v - qx_1 = q\left(\frac{l}{2} - x_1\right) - \frac{F}{3}$$

$$\rightarrow Q_3(x_1 = \frac{l}{2}) = -q\frac{l}{2} - \frac{F}{3}$$

Nulldurchgang  $Q_3(x_1 = x_{1N}) = 0$

$$\rightarrow x_{1N} = \frac{1}{2}l - \frac{F}{3q}$$

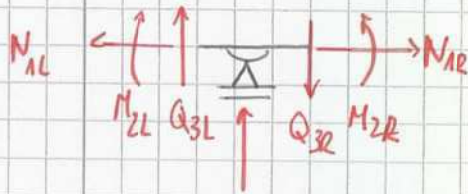
$$M_2(x_1) = \int_0^{x_1} q\left(\frac{l}{2} - \bar{x}_1\right) - \frac{F}{3} d\tilde{x}_1$$

$$= \frac{q}{2}(lx_1 - x_1^2) - \frac{F}{3}x_1$$

$$M_2(x_1 = \frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{8} - \frac{Fl}{6}$$

$$M_2(x_1=l) = -\frac{Fl}{3}, \quad \text{hat } M_1 = M_2(x_{1N})$$

Übergangsbedingungen Bereiche I-II



$$N_{1R} = N_{1L}, \quad M_{2R} = M_{2L}$$

$$Q_{3R} = Q_{3L} + B$$

Bereich II

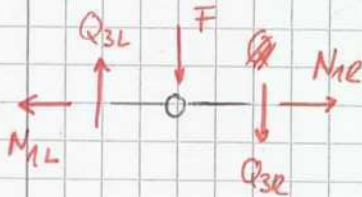
$$N_1(\bar{x}_1) = 0$$

$$Q_3(\bar{x}_1) = Q_3(x_1=l) + B = F = \text{konst.}$$

$$M_2(\bar{x}_1) = M_2(x_1=l) + Fx_1 = F\left(-\frac{l}{3} + \bar{x}_1\right)$$

$$M_2(\bar{x}_1 = \frac{l}{3}) = 0 \quad \checkmark$$

Übergangsbedingung Bereiche II-III



$$N_{1L} = N_{1R}, \quad M_{2L} = M_{2R} = 0$$

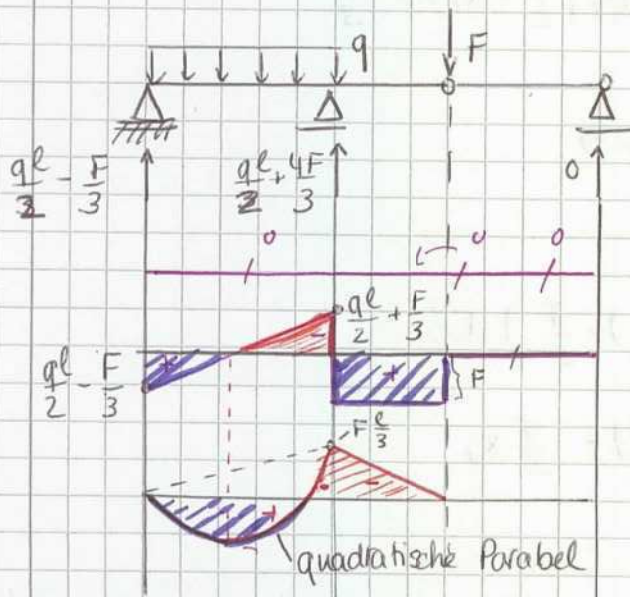
$$Q_{3R} = Q_{3L} - F = 0$$

Bereich III

$$N_1(x_1^*) = 0, \quad Q_3(x_1^*) = 0, \quad M_2(x_1^*) = 0$$

(5) Darstellung der Schnittgrößen

- graphische Darstellung der Funktionsverläufe von  $N_1(x_1)$ ,  $Q_3(x_1)$  und  $M_2(x_1)$  mit Angabe typischer Werte ausgewählter Stellen.



$N_1$ : Normalkraftlinie

$Q_3$ : Querkraftlinie

$M_2$ : Biegemomentenlinie

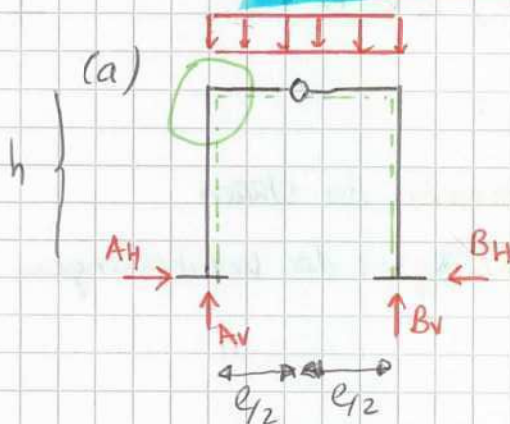
### Bem.: Darstellung von Schnittgrößen

- positiv (blau): auf dem Balkenbereich mit gestrichelter Zone
- negativ (rot): auf der gestrichelten Zone gegenüberliegenden Seite des Balkens

Zusammenhänge zwischen äußerer Belastung, Querkraft und dem Biegemoment beim Balkenproblem

| äußere Kraft | Querkraft      | Moment           |
|--------------|----------------|------------------|
| Einzelkraft  | Sprung         | Knick            |
| Rechtecklast | Gerade         | quadr. Parabel   |
| Dreiecklast  | quadr. Parabel | kubische Parabel |
| Einzelmoment | /              | Sprung           |

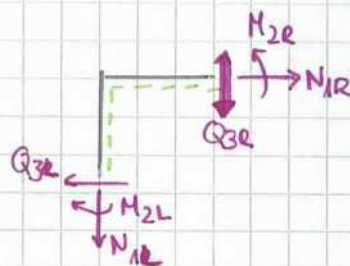
### 6.4. SCHNITTGRÖßEN AN RAHMENECKEN UND AN KNOTEN MIT MEHR ALS 2 STABANSCHLÜßEN



Rahmentragwerk

$$A_V = B_V = \frac{ql}{2}$$

$$A_H = B_H = \frac{l}{h} \cdot \frac{ql}{8}$$

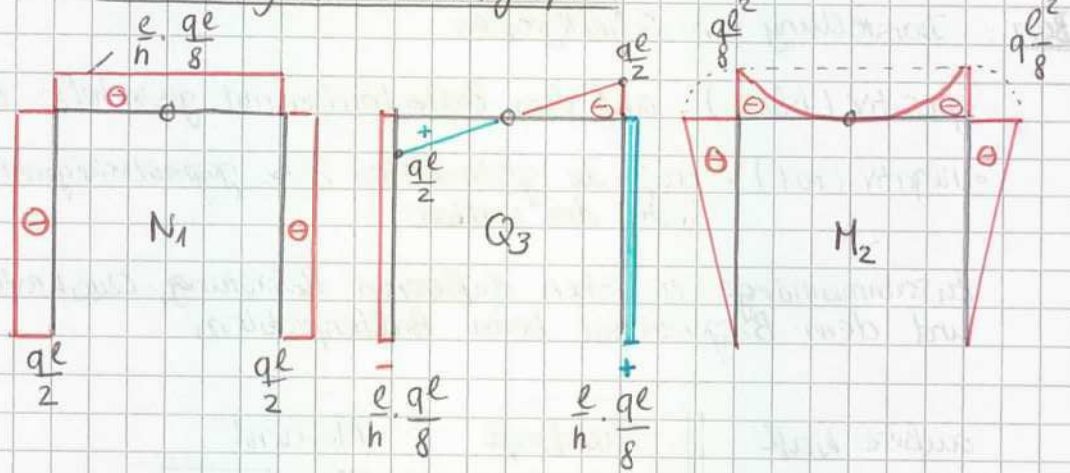


$$N_{1R} = Q_{3L}$$

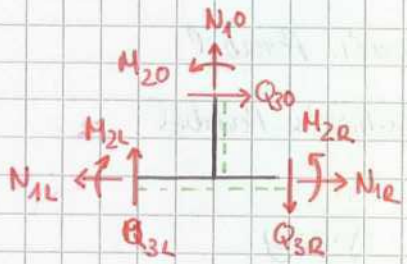
$$Q_{3R} = -N_{1L}$$

$$M_{2R} = M_{2L}$$

## Darstellung der Schnittgrößen



(b) Knoten mit mehr als 2 Stabanschlüssen



$$N_{1e} = N_{1L} - Q_{30}$$

$$Q_{3e} = Q_{3L} + N_{10}$$

$$M_{2e} = M_{2L} - M_{20}$$



Übergangsbed. aus

$$\sum H = 0, \sum V = 0$$

Anzahl der Zwischenreaktionen:

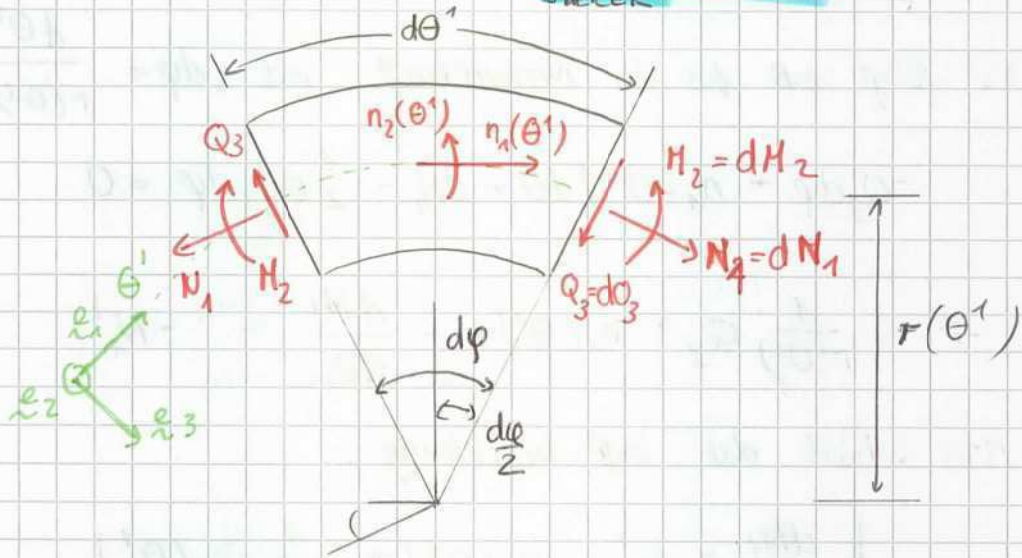
$$Z = (s-1)w$$

s: Anzahl der Stützen

w: Wertigkeit der Verbindungen

## 6.5. SCHNITTGRÖßEN AN EINEM IN DER EBENE GEKRÜMMTEN

### BALKEN UNTER EBENER BELASTUNG



Geometrie der in der Ebene gekrümmten Balkens

- $\theta^1$ : Bogenlänge (natürliche Koordinaten)
- $d\theta^1 = r \cdot (\theta^1)' d\varphi$

Gleichgewicht am Balkenelement

$$\rightarrow \sum H = 0 = -N_1 \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) - Q_3 \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) + n_1(\theta^1)d\theta^1 + (N_1 + dN_1)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + (Q_3 + dQ_3)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

$$\uparrow \sum V = 0 = Q_3 \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N_1 \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - q_3(\theta^1)d\theta^1 - (Q_3 + dQ_3)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (N_1 + dN_1)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \sum M_2 = -H_3 + m_2(\theta)d\theta^1 + H_2 + dH_2 - Q_3 \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)d\theta^1 + N_1 \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)d\theta - \frac{1}{2}q_3\theta^1 d\theta^2$$

Reihenentwicklung für Winkelfunktionen

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

so dass für kleine Winkel

$$\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2} \quad ; \quad \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx 1$$

Es folgt z.B. für die Normalkraft mit  $d\varphi = \frac{d\theta^2}{r(\theta^1)}$

$$-Q_3 d\varphi + n_1(\theta^1) d\theta + dN_1 - \underbrace{\frac{1}{2} d\theta_3 d\varphi}_{\approx 0} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{r(\theta^1)} Q_3 + n_1(\theta^1) = -\frac{dN_1}{d\theta} =: -N_1'$$

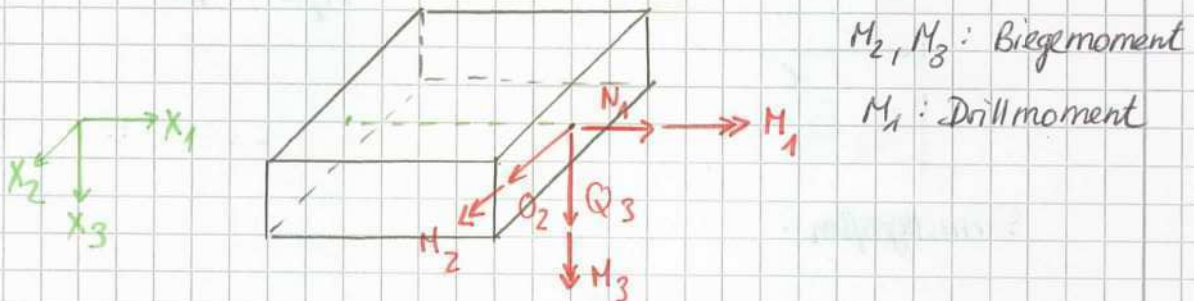
⇒ Man erhält die Diff. beziehung

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{d\theta^1} = N_1' = -n_1(\theta^1) + \frac{1}{r(\theta^1)} Q_3(\theta^1) \\ \frac{dQ_3}{d\theta^1} = Q_3' = -q_3(\theta^1) - \frac{1}{r(\theta^1)} N_1(\theta^1) \\ \frac{dM_2}{d\theta} = M_2' = -m_2(\theta^1) + Q_3(\theta^1) \end{cases}$$

- Bemerkungen:
- Normalkraft und Querkraft sind gekoppelt, d.h. es existiert keine Aufteilung in Stab- und Balkenproblem
  - $r(\theta^1) = \text{konst}$  : Kreisbogenträger
  - $r(\theta^1) = \infty$  : gerader Balken mit Entkopplung in Stab-/Balkenproblem

## 6.6. SCHNITTGRÖßEN AM GERADEN BALKEN UNTER RÄUM- LICHER BELASTUNG

Vorzeichendefinition



Analogieschluss: Positive Schnittgrößen können am positiven (neg.) Schnittufer positive (neg.) Koordinaten.

Differentialbeziehungen für Schnittgrößen

• am Balkenelement der Länge  $x_1$  gelten folgende Belastungen

$$\left. \begin{array}{l} n_1(x_1), m_1(x_1) \\ q_2(x_1), u_2(x_1) \\ q_3(x_1), u_3(x_1) \end{array} \right\} \text{ in positive Koordinatenrichtung}$$

⇒ Diff. beziehung:

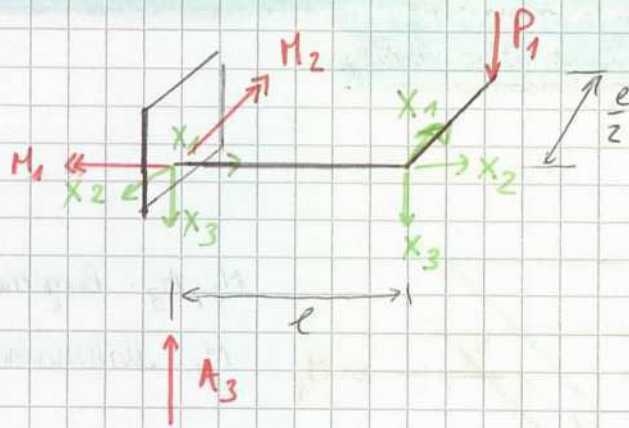
$$\frac{dN_1}{dx_1} = -n_1(x_1)$$

$$\frac{dQ_3}{dx_1} = -q_3(x_1); \quad \frac{dQ_2}{dx_1} = Q_2' = -q_2(x_1)$$

$$\frac{dM_2}{dx_1} = M_2' = -m_2(x_1) + Q_3(x_1)$$

$$\text{neu: } \begin{cases} \frac{dM_3}{dx_1} = M_3' = m_3(x_1) - Q_1(x_1) \\ \frac{dM_1}{dx_1} = M_1' = -m_1(x_1) \end{cases}$$

## Beispiel



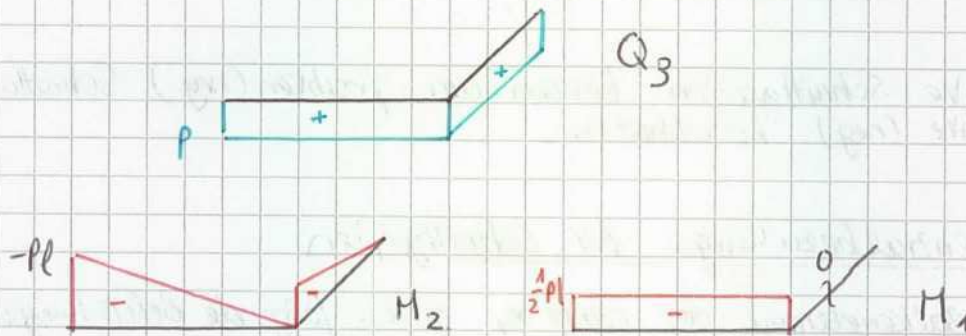
## Auflagerreaktion

$$A_3 = P$$

$$M_1 = -\frac{1}{2} P l$$

$$M_2 = -P l$$

Schnittgrößen:



## Abschließende Bemerkungen

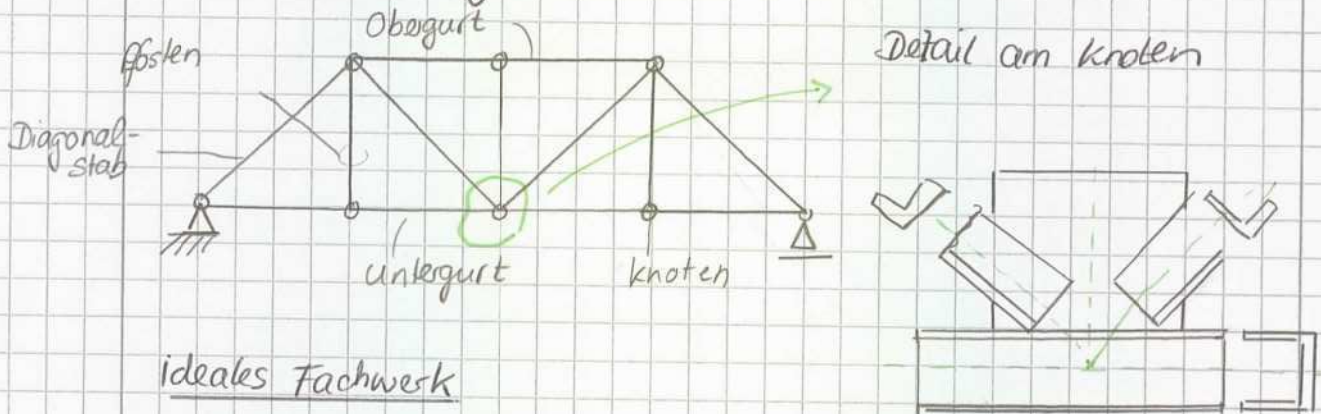
- Schnittgrößen (Zustandslinien) kennzeichnen den lokalen Beanspruchungsgrad eines Tragwerkes,
- sie sind erforderlich um Bauwerke und Fachwerke zu bemessen.

# 7. EBENE FACHWERKE

## 7.1. DEFINITIONEN UND BEGRIFFEN

Def.: Fachwerke sind aus geraden Stäben zusammengesetzte Systeme, für die einige idealisierende Annahmen getroffen werden.

Veranschaulichung:



### ideales Fachwerk

- Alle Fachwerkknoten (Gelenke) werden als reibungsfrei Momentengelenke idealisiert
- Äußere Lasten greifen nur in den Knoten an

Konsequenz: Alle Fachwerkstäbe sind Pendestäbe  
→ Zug- und Druckkräfte (Zug positiv)

### Ebene Fachwerke

- Alle Stabachsen und die äußeren Belastungen liegen in einer Ebene

Bem.: Bei idealen Fachwerken werden die wesentlichen Einflüsse der äußeren Belastungen erfasst.

- durchlaufende FW-stäbe (z.B. Untergurt) führen zu inneren stat. Unbestimmtheiten
- Belastungen aus Eigengewicht, Wind o.ä. führen zu Querkraften und Biegemomenten.

Diese Belastungen sind von untergeordnetem Einfluss.

## 7.2. VERSCHIEBLICHKEITSUNTERSUCHUNGEN UND BILDUNGSGESETZE

### GESETZE

Es gilt das allgemeine Abzählkriterium (siehe S. 2)

$$f = \begin{cases} 6p - (a+z) & : \text{räumliche Sys.} \\ 3p - (a+z) & : \text{ebene Sys.} \end{cases}$$

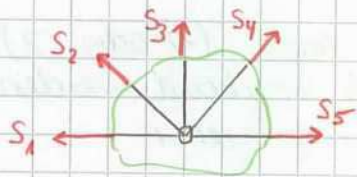
Beispiel von oben:

$$p = 13, a = 3 \rightarrow z = 36$$

$$\rightarrow f = 3 \cdot 13 - (3 + 36) = 0 \quad \checkmark$$

darin sind  $\begin{cases} 3p & : \text{Anzahl der Gleichungen} \\ a+z & : \text{Anzahl der Unbekannten} \end{cases}$

Vereinfachtes Abzählkriterium für Fachwerke



• 2 Gleichungen (z.B.  $\sum H = \sum V = 0$ )

• 5 Unbekannte  $S_i \quad i = 1, \dots, 5$

Man erkennt : Anzahl der Gleichungen :  $2k$

(  $k$  = Anzahl der Knoten )

Anzahl der Unbekannten :  $a + s$

(  $s$  = Anzahl der Stäbe )

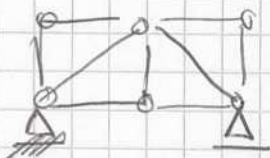
Es folgt 
$$f = \begin{cases} 3k - (a+s) & : \text{räumliche Sys.} \\ 2k - (a+s) & : \text{ebene Sys.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Bildungsgesetze zur Konstruktion unverschieblicher Fachwerke



(1) • ein aus 3 starren Körpern zusammengesetzter Körper ist ein starrer Körper

• ein aus Dreiecken zusammengesetztes System heißt "einfaches Fachwerk". Weitere Dreiecke können durch 2 "weitere Stäbe" generiert werden.

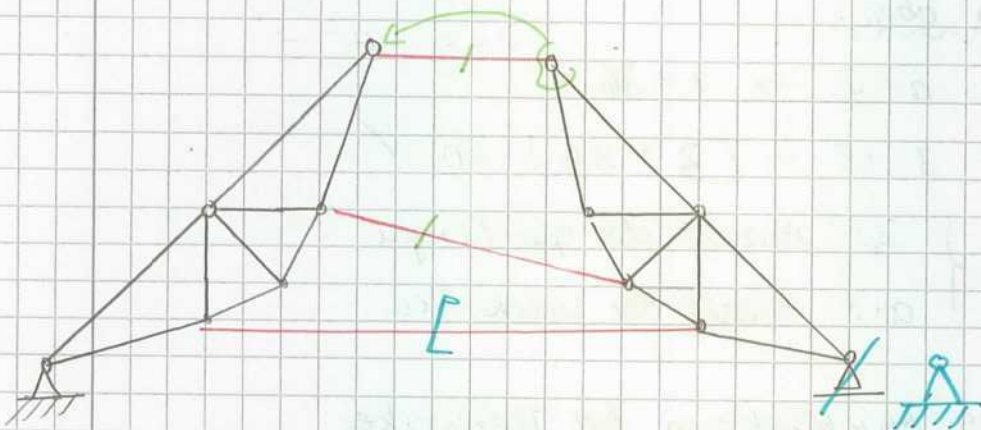


(2) Zwei nach dem ersten Bildungsgesetz konstruierte Fachwerke können miteinander verbunden werden

(a) 3 Stäbe die nicht alle zueinander parallel sind

(b) 2 dieser Stäbe können durch einen Knoten ersetzt werden, der zu beiden Fachwerken gehört

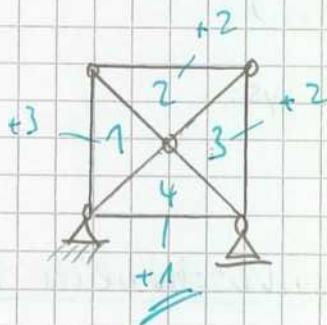
(c) der letzte Verbindungsstab kann durch eine entsprechende Lagerung ersetzt werden.



(3) Wird ein Stab entfernt, der nach (1) oder (2) aufgebaut ist, so muss ein anderer Stab eingebaut werden.  
Stelle ein geeigneter

### Abschließende Bemerkung

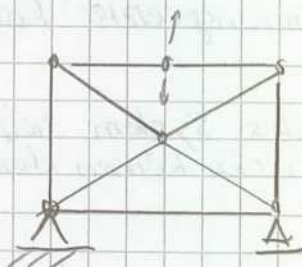
- Fachwerke, die nach (1)/(2)/(3) aufgebaut sind, sind statisch bestimmt.
- Sonderfälle bei Nutzung des Abzählkriteriums sind möglich



$$k=5, a=3, s=8$$

$$f = 2 \cdot 5 - (3 + 8) = -1$$

⇒ 1-fach unbestimmt  
↳ ein Stab kann entfernt werden



$$f = 0$$

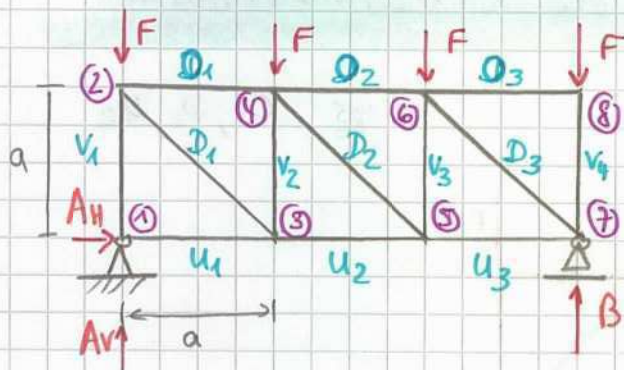
Achtung: Das System ist 1-fach unbestimmt und 1-fach verschieblich

## 7.3. BERECHNUNG VON FACHWERKEN MIT DEM KNOTENSCHNITTVERFAHREN

Vorteil: führt bei jedem Fachwerk zur Lösung

Nachteil: zur Ermittlung einzelner Stabkräfte ungünstig

Erläuterung des Verfahrens



$$k = 8 \quad a = 3 \quad s = 13$$

$$f = 2 \cdot 8 - (3 + 13) = 0 \quad \checkmark$$

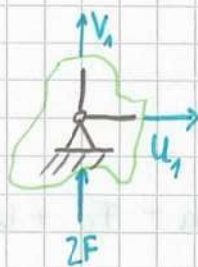
→ System statisch bestimmt

$$A_H = 0, \quad A_V = 2F, \quad B = 2F$$

Lösungsweg zum Knotenschnittverfahren

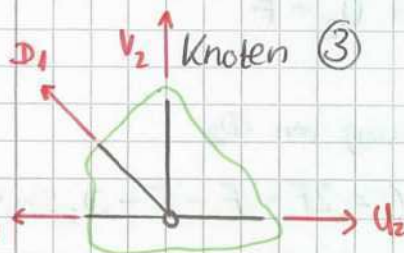
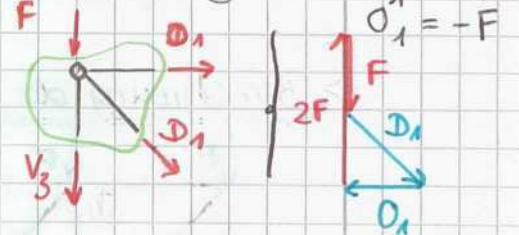
- (1) Überprüfung auf stat. Bestimmtheit
- (2) Bezeichnung von Knoten und Stäben
- (3) Freischneiden von  $k$  Knoten und  $k$  zentralen Kräftesystemen
- (4) Berechnung der Stabkräfte

Bsp.: Knoten ①



$$\begin{cases} \sum H = 0 \rightarrow u_1 = 0 \\ \sum V = 0 \rightarrow v_1 = -2F \end{cases}$$

Knoten ②



$$\begin{cases} \sum H = 0 \dots \\ \sum V = 0 \dots \end{cases}$$

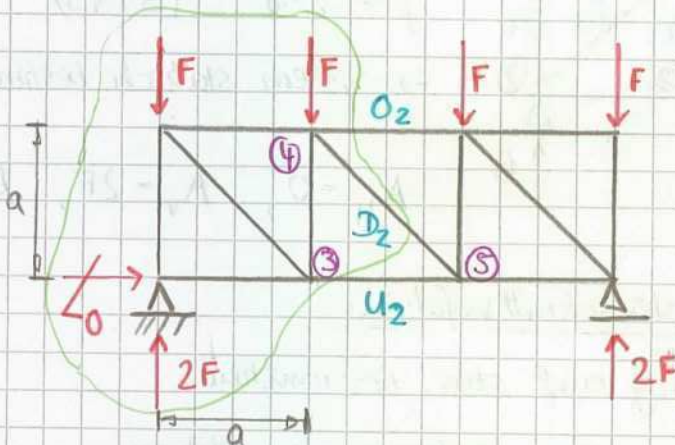
## Zusammenstellung des Ergebnisses

|       |       |       |       |       |       |              |       |               |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|
| $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $D_1$        | $D_2$ | $D_3$         | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ |
| $-F$  | $-F$  | $0$   | $0$   | $F$   | $F$   | $F/\sqrt{2}$ | $0$   | $-F/\sqrt{2}$ | $-2F$ | $F$   | $0$   | $-F$  |

## 7.4 Berechnung von Stabkräften mit dem Ritter'schen Schnittverfahren

Erläuterung des Verfahrens

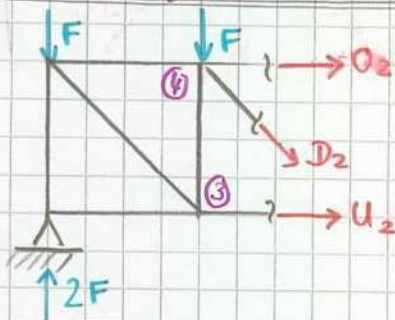
ges.:  $O_2, D_2, U_2$



### Lösungsweg beim Ritter'schen Schnittverfahren

- (1) Herausschneiden eines Teilsystems, so dass höchstens 3 unbekannte Stabkräfte freigeschnitten werden, die sich nicht alle in einem Punkt schneiden.
- (2) Berechnung der freigeschnittenen Stabkräfte (z.B. 2x Kräftegleichgewicht, 1x Momentengleichgewicht)

### → Berechnung der Stabkräfte $O_2, D_2, U_2$



1.) Berechnung von  $U_2$

$$\sum M_{(4)} = 0 : 0 = -2Fa + Fa + U_2 a$$

$$\rightarrow U_2 = F$$

2.) Berechnung von  $D_2$

$$\sum V = 0 : 0 = 2F - F - F - D_2 \sin 45^\circ$$

$$\rightarrow D_2 = 0$$

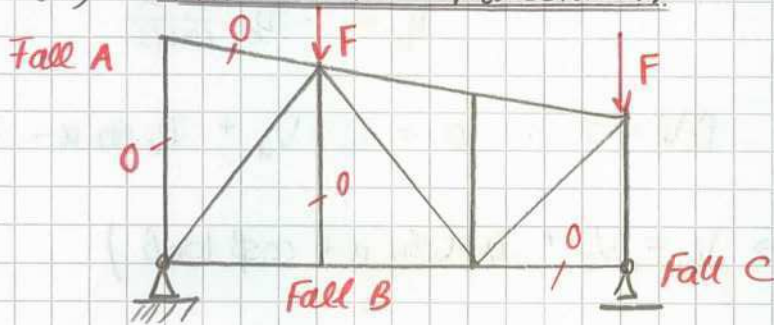
3.) Berechnung von  $O_2$

$$\sum H = 0 : 0 = U_2 - O_2$$

$$O_2 = -F$$

## 7.5 ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN

### (a) Erkennen von Nullstäben



Nullstäbe sind

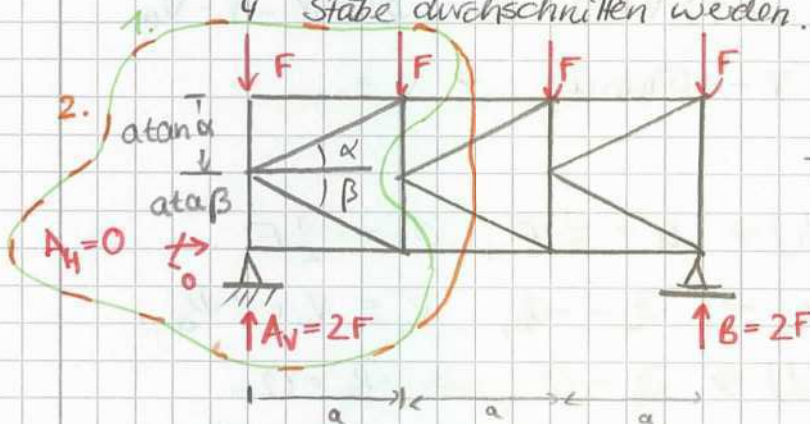
Fall A: nicht gleichgerichtete Stäbe eines unbelasteten Knotens mit 2 Stabanschlüssen

Fall B: der 3. Stab eines unbelasteten Knotens mit 3 Stabanschlüssen, von denen 2 die selbe Richtung haben.

Fall C: der 2. Stab eines belasteten Knotens, mit 2 Stabanschlüssen, von denen der 1. die Richtung der äußeren Kraft hat

### (b) Schnittverfahren beim K-Fachwerk

Bem.: Beim K-Fachwerk ist es nicht möglich mit dem Ritter'schen Schnittverfahren zu operieren, da immer 4 Stäbe durchgeschnitten werden.



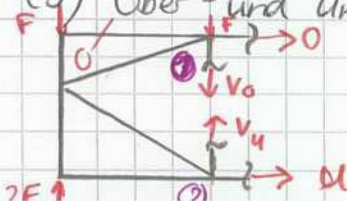
$$k = 1, a = 3, s = 19$$

$$\rightarrow f = 11 \cdot 2 + (3 + 19) - 0 \checkmark$$

### Lösungsweg zur Ermittlung der Stabkräfte

(a) Führung von 2 Schnitten mit 4 Unbekannten Stabkräften in Schnitt 1 und 2 weiteren unbekannten Stabkräften in Schnitt 2.

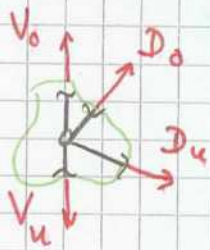
(b) Ober- und Untergurtkraft aus Schnitt 2



$$\rightarrow \sum M_{\text{①}} = 0 \rightarrow u = \dots$$

$$\rightarrow \sum M_{\text{②}} = 0 \rightarrow o = \dots$$

(c) Knotenschnitt am K-Knoten



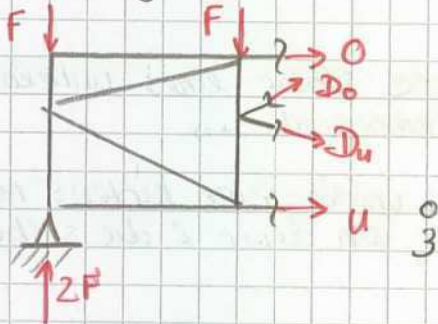
$$\rightarrow \sum H = 0 : 0 = D_0 \cos \alpha + D_u \cos \beta$$

$$D_u = -D_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : 0 = V_0 - V_u + D_0 \sin \alpha - D_u \sin \beta$$

$$\rightarrow V_u = V_0 + D_0 (\sin \alpha + \cos \beta \tan \beta)$$

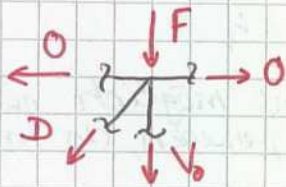
(d) Diagonalkräfte am Schnitt II



$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0 &= -2F \cdot 2a - F \cdot 2a \\ &+ Fa - D_0 (-\tan \alpha - \tan \beta) \\ &- D_0 \cos \alpha \cdot a \cdot \tan \beta \\ &- D_0 \sin \alpha \cdot a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_0 = \dots \rightarrow D_u = \dots$$

(e) Vertikalkraftschnitt aus Krafte Knotenschnitt (d)



$$\rightarrow \sum H = 0 : 0 = \sigma \cdot D \cos \alpha$$

$$\rightarrow D = \frac{\sigma}{\cos \alpha}$$

$$\uparrow \sum V = 0 : 0 = -D \sin \alpha - F - V_0$$

$$\rightarrow V_0 = F - \sigma \tan \alpha, \rightarrow V_u = \dots$$

Zahlenbeispiel

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

$$(b) \Rightarrow u = \frac{1}{2} F, \sigma = -\frac{1}{2} F$$

$$(c) \rightarrow D_u = -D_0, V_u = V_0 + 2D_0$$

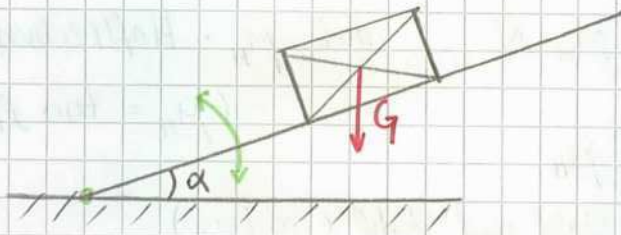
$$(d) \Rightarrow D_0 = 0 \rightarrow D_u = 0$$

$$(e) \rightarrow V_0 = -\frac{1}{2} F \rightarrow V_u = -\frac{1}{2} F$$

# 8. REIBUNG

## 8.1. HAFTREIBUNG UND GLEITREIBUNG

Veranschaulichung



Beobachtung des Reibungsphänomens zeigt folgende Zusammenhänge

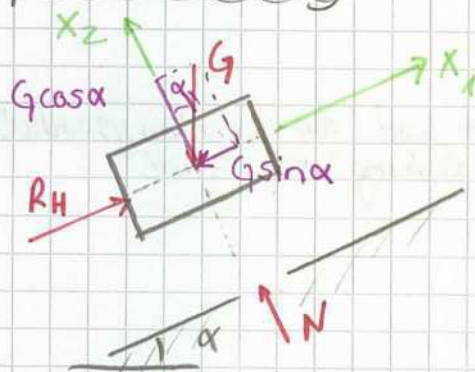
- die Steigung  $\alpha \geq 0$  führt auf einen Gleitwinkel  $\alpha = \rho_H$ , nach dessen Überschreitung sich die Kiste in Bewegung setzt
- Für  $0 \leq \alpha \leq \rho_H$  verhindert die Haftreibung ein Einsetzen der Bewegung
- Im Zustand  $\alpha \geq \rho_H$  (Bewegung) wird die Gleitreibung aktiviert. Die Gleitreibung bestimmt die Bewegung

⇒ Reibkräfte entstehen in Folge von Oberflächenrauigkeiten von Klotz und schiefer Ebene. Sie wirken tangential zur Reibungsebene.

### (a) Haftreibung

→ Phänomen: Der Klotz bleibt in Ruhe. Es herrscht Gleichgewicht

Gleichgewichtsbetrachtung



$$\sum F_1 = 0 : 0 = R_H - G \sin \alpha$$

$$\sum F_2 = 0 : 0 = N - G \cos \alpha$$

$$\frac{R_H}{N} = \tan \alpha$$

$$\text{bzw. } R_H = N \cdot \tan \alpha$$

## Grenzfall der Haftreibung

$$\alpha \equiv \rho_H \rightarrow R_H^* = N \cdot \tan \rho_H$$

## Einführung der COULOMB'schen Reibung (Konstitutivgesetz)

$$R_H^* = \mu_H N \quad \text{mit } \mu_H: \text{Haftreibungswinkel} \\ (\mu_H = \tan \rho_H)$$

### Einige Werte für $\mu_H$

$$\mu_H = \begin{cases} 0,15 & \text{Stahl auf Stahl (trocken)} \\ 0,025 & \text{Stahl auf Eis} \\ 0,65 & \text{Stein auf Stein} \\ 0,577 & \text{Sand (trocken)} \end{cases} \quad \rho_H = 30^\circ$$

### Bremsweg aus 100 km/h in Abhängigkeit von $\mu_H$

| Asphalt       | $\mu_H$ [1] | $x_B$ [m] |
|---------------|-------------|-----------|
| rau + trocken | 1,2         | 32,8      |
| normal        | 0,9         | 43,7      |
| glatt         | 0,7         | 56,1      |
| Eis           | 0,08        | 491,3     |

Reibkräfte:  $R_H$ : Aus einer Gleichgewichtsbedingung  
 $\rightarrow$  Reaktionskraft

$R_H^*$ : Aus dem Konstitutivgesetz ( $R_H^* = \mu_H N$ )  
 $\rightarrow \mu_H$  muss experimentell bestimmt werden

Gleichsetzen von  $R_H^*$  aus dem Grenzfall der Haftreibung und aus dem Reibgesetz liefert:

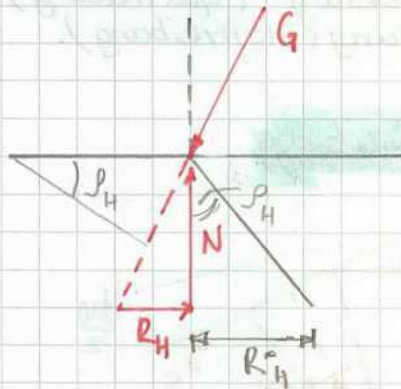
$$\mu_H = \tan \rho_H$$

Bem.: Bei Reibungsmaterialien wird der Böschungswinkel  $\rho_H$  als "Winkel der inneren Reibung" interpretiert.

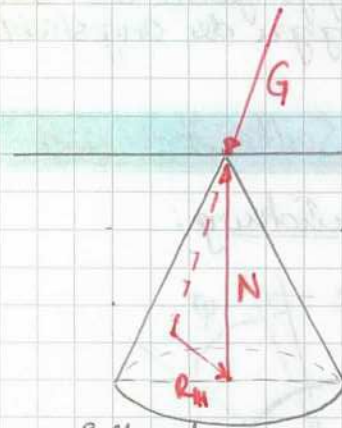
## (b) Haftreibung und Haftreibungskegel

Veranschaulichung:

• zentrales Kräftesystem



• allgemeines Kräftesystem

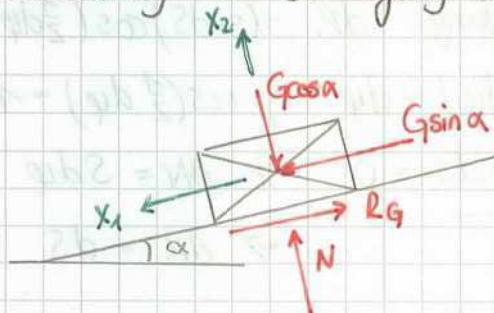


Bew.: Nach Überschreiten der Grenzfalls der Haftreibung tritt Gleitreibung ein.

Konstitutivgesetz für die Gleitreibungskraft

$$R_G = \mu_G \cdot N \quad \text{mit } \mu_G: \text{Gleitreibungskoeffizient}$$

Untersuchung der Bewegung aus Gleitreibung



$$\Sigma F_1 = 0 = G \sin \alpha - R_G = P_1 = m a_1$$

$$\Sigma F_2 = -G \cos \alpha + N$$

Bew.: Statisches Gleichgewicht in  $x_2$ -Richtung

→ Kräftegleichgewicht als Spezialfall des Impulssatzes

$$(k = m g, \quad q = \ddot{x}, \text{ in } x_1\text{-Richtung})$$

$$\text{d.h. } P_1 = m a_1, \quad G = m g, \quad g: \text{Gravitation}$$

(Untersuchung der Bewegung  $\Sigma_i F_i = m a_i \rightarrow \text{TM 3}$ )

Man erkennt:

$$P_1: \begin{cases} m a_1 > 0 & \text{beschleunigte Bewegung} \\ m a_1 = 0 & \text{gleichförmige} \\ m a_1 < 0 & \text{gebremste} \end{cases}$$



Es folgt für den Ausschlingungswinkel  $\alpha$

$$S_2 = S_1 e^{M_H \alpha}$$

Bem.: Durch die Richtung von  $dk$  wurde vorausgesetzt, dass  $S_2 > S_1$

→ Für den Fall  $S_1 > S_2$  folgt analog  $S_1 = S_2 e^{M_H \alpha}$

Für die Gleitreibung gilt durch Analogieschluss

$$S_2 = S_1 e^{M_H \alpha}, \text{ für Bewegungen in Richtung } S_2$$

Haftreibung bei Seilreibung

$$S_2 \geq S_1 : S_2 \leq S_1 e^{M_H \alpha}$$

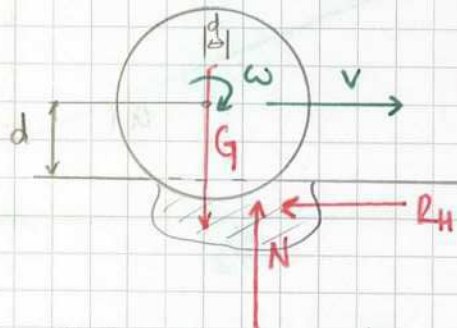
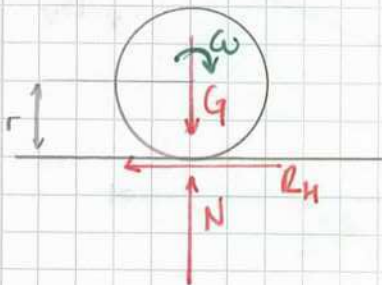
$$S_2 \leq S_1 : S_2 \geq S_1 e^{M_H \alpha}$$

Folgerung von KELLER und EYTELWEIN

$$e^{-M_H \alpha} \leq \frac{S_2}{S_1} \leq e^{M_H \alpha}$$

### §. 3 ROLLREIBUNG BZW. ROLLWIDERSTAND

Kraftwiderstand entsteht aus Deformation rollender Räder



Momentengleichgewicht bzgl. des Radmittelpunkts für gleichförmige Bewegung:

$$\sum M_0 = 0 : 0 = R_H r$$

$$\sum M = 0 : 0 = R_H r - N d$$

$$\rightarrow R_H = \frac{d}{r} \cdot N$$

Konsequenz:

$$R_H = \mu_r N \quad \text{mit} \quad \mu_r = \frac{d}{r}$$

Bem.:  $R_H$  hängt unmittelbar von  $r$  ab.

→ Große Rollen rollen leichter ( $R_H \sim \frac{1}{r}$ )

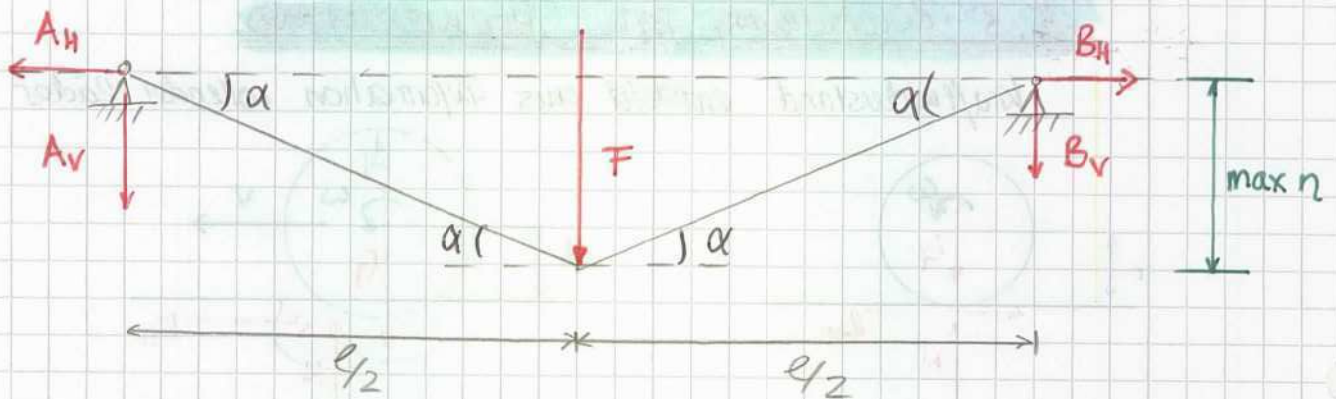
## 9. SEILSTATIK

### 9.1 VORAUSSETZUNGEN

Eigenschaften von Seilen

- Biegeschlaffheit: d.h. es können keine Querkraften aufgenommen werden.
- Druckschlaffheit: d.h. — " — Druckkräfte — " —
- Dehnsteifigkeit: d.h. es können nur Zugkräfte aufgenommen werden
- Drehfestigkeit: d.h. keine Deformation in Folge von Zugbelastung

Bsp: Seil unter Eigulast:

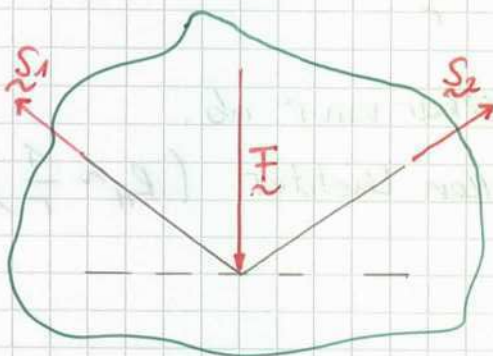


geg:  $F, l$

ges: Seilkräfte

Seildurchhang:  $\max \eta = \frac{1}{2} l \cdot \tan \alpha$

Seilkräfte:



$$\sum H = 0 : 0 = S_{1H} - S_{2H} \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\sum V = 0 : \dots \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{F}{2 \sin \alpha}$$

$$\text{mit } \tan \alpha = \frac{2 \max \eta}{l}$$

Bemerkungen:

• Für gegebene Werte von  $R$  und  $l$  hängen  $S_1$  und  $S_2$  nur vom größten Durchhang  $\max \eta$  ab.

• Veränderungen von  $\max \eta$  bewirken

\*  $\max \eta$  wird größer  $\rightarrow$  Seilkräfte werden kleiner

Grenzfall:

$$\text{für } \max \eta \rightarrow \infty : S_1 = S_2 \rightarrow \frac{1}{2} F$$

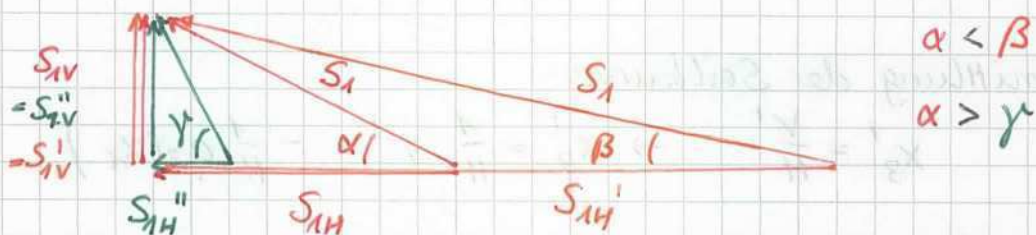
\*  $\max \eta$  wird kleiner  $\rightarrow$  Seilkräfte werden größer

Grenzfall:

$$\text{für } \max \eta \rightarrow 0 : S_1 \rightarrow \infty \wedge S_2 \rightarrow \infty$$

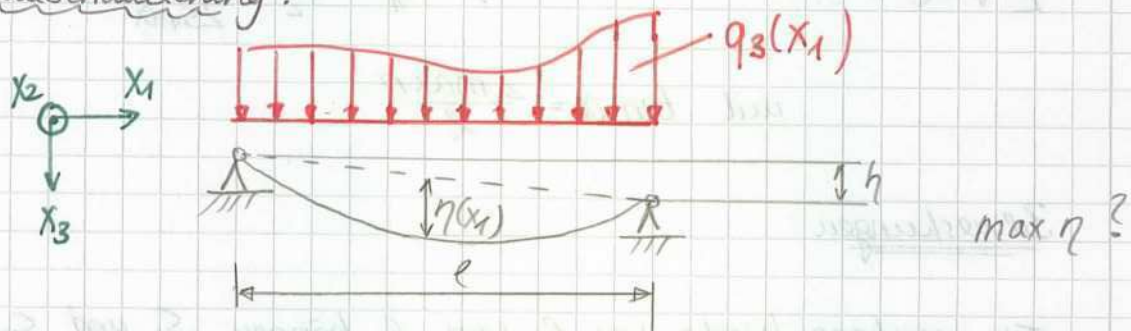
Konsequenz:

Ohne Durchhang können Seile keine Kräfte übertragen.



## 9.2 Seil unter kontinuierlicher Belastung

Versuchsplanung:



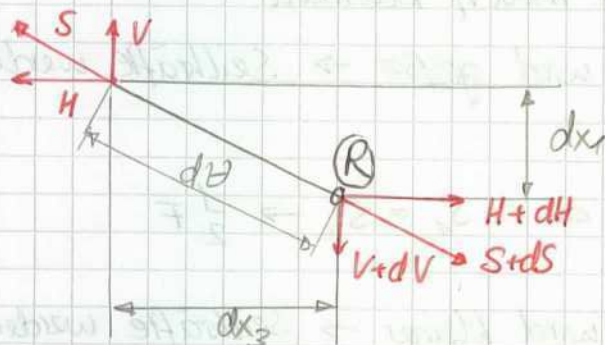
Gleichgewichtsbedingung am Seilschnitt

$$\sum F_1 = 0 \rightarrow dH = 0$$

$$\sum F_3 = 0 \rightarrow dV = -q_3(x_1) dx_1$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = H dx_3 - V dx_1 + \underbrace{\frac{1}{2} q_3(x_1) dx_1^2}_{\approx 0}$$



Differenzialbeziehungen für Schnittgrößen:

$$H' = \frac{dH}{dx_1} = 0 \rightarrow H = \text{konst.}$$

$$V' = \frac{dV}{dx_1} = -q_3(x_1), \quad M = H x_3' = H \frac{dx_3}{dx_1}$$

⇒ Ermittlung der Seilkräfte:

$$S = \sqrt{H^2 + M^2} = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{H^2 + (H x_3')^2} = H \sqrt{1 + x_3'^2}$$

⇒ Ermittlung der Seilkurve

$$x_3' = \frac{V}{H} \rightarrow x_3' = \frac{1}{H} V' = -\frac{1}{H} q_3(x_1)$$

Zweifache Integration liefert

$$x_3(x_1) = \frac{1}{H} \int_0^{x_1} \int_0^{\tilde{x}_1} q_3(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_1 + C_1 x_1 + C_2$$

$$\text{Randbedingungen: } \begin{cases} x_3(x_1=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ x_3(x_1=l) = h \rightarrow C_1 = \dots \end{cases}$$

## Gleichungssystem der Seilstatik

2 Gleichungen:  $x_3(x_1)$  bzw.  $\eta(x_1)$   
 $V(H, x_3)$  bzw.  $S(H, x_3)$

• 3 Unbekannte  $x_3$  bzw.  $\eta$ ,  $V$  bzw.  $S$ ,  $H$

→ Konsequenz: Eine zusätzliche Gleichung ist erforderlich  
Möglichkeiten sind:

- (1)  $\eta^*$  ist vorgeschrieben (Max. Durchhang)
- (2) max. Seilkraft  $S^*$  ist vorgeschrieben
- (3) max. Seillänge  $l^*$  ist vorgegeben.

### 9.3. Seile unter konstanter Vertikalbelastung

Bem.: Es werden 2 Fälle untersucht

- (a)  $q_3$  ist konstant bezüglich der Horizontallänge
- (b)  $q_3$  — " — " — " — " Seillänge

(a) Bestimmung der Seilkurve für  $q_3(x_1) = q = \text{konst}$

$$x_3(x_1) = -\frac{1}{2H} q x_1^2 + c_1 x_1 + c_2$$

$$\text{Randbedingungen: } \begin{cases} x_3(x_1=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ x_3(x_1=l) = h \rightarrow c_1 = \frac{h}{l} + \frac{q l}{2H} \end{cases}$$

$$x_3(x_1) = \left( \frac{h}{l} + \frac{q l}{2H} \right) x_1 - \frac{q}{2H} x_1^2$$

$$x_3'(x_1) = \frac{h}{l} + \frac{q l}{2H} - \frac{q}{H} x_1$$

Ermittlungen der Durchhangkurve  $\eta(x_1)$ :

$$\begin{aligned} \eta(x_1) &= x_3(x_1) - \frac{h}{l} x_1 \\ &= -\frac{q}{2H} (l x_1 - x_1^2) \end{aligned}$$

Bem.: Seilkurve  $x_3(x_1)$  und Durchhängekurve  $\eta(x_1)$  sind quadratische Parabeln

Bestimmung des Horizontalzugs

(1)  $\max(\eta) = \eta^*$  ist vorgeschrieben

• Lage  $x_{1\eta}$  von  $\eta^*$

$$\eta'(x_1) = 0 = \frac{q}{2H} (l - 2x_{1\eta}) \rightarrow x_{1\eta} = \frac{l}{2}$$

• Durchhang  $\eta^*$  für  $x_{1\eta} = \frac{l}{2}$

$$\eta\left(x_1 = \frac{l}{2}\right) = \eta^* = \frac{q}{2H} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{q l^2}{8H}$$

$$H = \frac{q l^2}{8 \eta^*}$$

(2)  $\max(S) = S^*$  ist vorgeschrieben

• Lage  $x_{1S}$  von  $S^*$

$$S = H \sqrt{1 + (x_3')^2}$$

$\max(S)$  für  $\max |x_3'|$

• Lage  $x_{1S}$  für  $\max |x_3'|$

$$x_3'' = -\frac{q}{H} \neq 0$$

→ kein Extremwert für  $|x_3'|$  im Bereich  $0 \leq x_1 \leq l$

→ Untersuchung der Randwerte für  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l$

$$x_1 = 0 \rightarrow |x_3'| = \left| \frac{h}{l} + \frac{q l}{2H} \right|$$

$$x_1 = l \rightarrow |x_3'| = \left| \frac{h}{l} - \frac{q l}{2H} \right|$$

Konsequenz  $\begin{cases} h \geq 0 : \max S \text{ für } x_1 = 0 \\ h < 0 : \max S \text{ für } x_1 = l \end{cases}$

Bem.:  $\max S$  tritt am jeweils höheren Seilenden -  
lager auf.

•  $\max S = S^*$  für  $\max |x_3'|$ :

$$\max (x_3') = \frac{h l}{l} + \frac{q l}{2H}$$

Es folgt:  $S^* = H \sqrt{\left(1 + \frac{|h|}{\ell} + \frac{q\ell}{2H}\right)^2}$

$\rightarrow H = H(S^*)$

(3)  $\max S^* = S$  ist vorgeschrieben

• Ermittlung der Seillänge  $\mathcal{L}$ :

Es gilt für ein Element  $d\theta$  der Seillänge

$$d\theta = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2} dx_1 = \sqrt{1 + (x_3')^2} dx_1$$

so dass

$$\mathcal{L} = \int_0^{\mathcal{L}} d\theta = \int_0^{\mathcal{L}} \sqrt{1 + (x_3')^2} dx_1$$

Auswertung des Integrals durch Substitution:

$$x_3' := \begin{cases} \frac{dz}{dx_1} = -\frac{q}{H} \rightarrow dx_1 = -\frac{H}{q} dz \\ x_1 = 0 \rightarrow z = z_1 = \frac{q}{\ell} + \frac{q\ell}{2H} \\ x_1 = \ell \rightarrow z = z_2 = \frac{q}{\ell} - \frac{q\ell}{2H} \end{cases}$$

Einsetzen liefert:

$$\mathcal{L} = \frac{H}{q} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+z^2} dz = \frac{H}{2q} \left( z \sqrt{1+z^2} \operatorname{arsinh} z \right) \Big|_{z_1}^{z_2}$$

mit  $\operatorname{arsinh}(\cdot) \rightarrow$  Inverse Hyperbelfunktion ( $\sinh^{-1}$ )

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Es folgt  $H = H(\mathcal{L}^*)$  für  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$

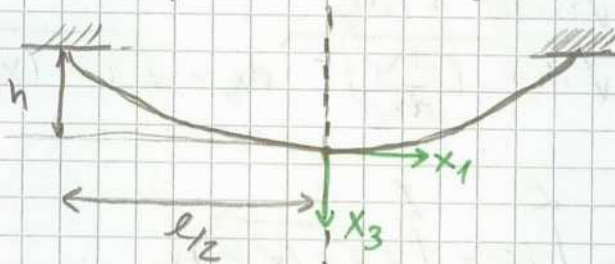
(b)  $q_3(\theta) = \text{konst.}$

Bemerkung: Der Fall Seil unter Eigengewicht

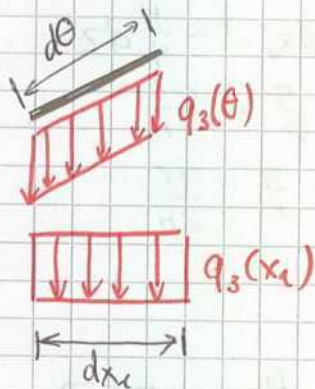
$$q_3(\theta) = \gamma g \quad \text{mit } \begin{cases} \gamma: \text{Masse pro Längenelement} \\ g: \text{Erdbeschleunigung} \end{cases}$$

Der Fall "Seil unter Eigengewicht"

Hier: Beide Seillagerpunkte sind gleichhoch



Ermittlung der Belastung  $q'_3(x_1)$



Es gilt

$$q_3(\theta) d\theta = q_3(x_1) dx_1$$

$$\rightarrow q_3(x_1) = \frac{q_3(\theta) d\theta}{dx_1}$$

$$d\theta = \sqrt{1 + (x'_3)^2} dx_1$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx_1} = \sqrt{(x'_3)^2 + 1}$$

Für homogene Seile mit  $\gamma$ -konst. gilt

$$\begin{aligned} q_3(x_1) &= q_3(\theta) \cdot \theta' = q_3(\theta) \sqrt{1 + (x'_3)^2} \\ &= \gamma g \sqrt{1 + (x'_3)^2} \end{aligned}$$

Seilkurve  $x_3(x_1)$

Es gilt bei beliebiger Belastung

$$x_3'' = -\frac{1}{H} q_3(x_1)$$

so dass:  $x_3'' = -\frac{vg}{H} \sqrt{1 + (x_3')^2}$

Bem.: Man erhält eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$x_3'' = f(x_3') \Rightarrow \text{für die Seilkurve}$$

Behandlung durch Substitution

$$z_1(x_1) := x_3'(x_1)$$

→ Überführung der DGL 2. Ordnung in eine DGL 1. Ordnung in  $z(x_1)$

Es folgt:  $\frac{dz}{dx_1} = -\frac{vg}{H} \sqrt{1 + z^2}$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{vg}{H} dx_1 \quad | \int$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{vg}{H} \int dx_1$$

$$\operatorname{arsinh} z = -\frac{vg}{H} x_1 + C$$

Randbed.:

Resub:  $z(x_1=0) = x_3'(x_1=0) = 0 \quad (\dots)$

Es folgt mit dem  $\ln$

$$\operatorname{arsinh}(z) = \ln(z + \sqrt{1+z^2}) = -\frac{vg}{H} x_1 + C$$

$$\operatorname{arsinh} z \Big|_{z(x_1=0)=0} \rightarrow C=0$$

Es folgt  $z = x_3' = \sinh\left(-\frac{vg}{H} x_1\right)$

$$\Rightarrow x_3(x_1) = -\int \sinh\left(\frac{vg}{H} x_1\right) dx_1$$

liefert:  $x_3 = -\frac{H}{vg} \cosh\left(\frac{vg}{H} x_1\right) + C_1$

Randbed.:  $x_3(x_1=0) = 0 \rightarrow C = \frac{H}{vg}$  mit  $\cosh(0) = 1$

Man erhält die Seilkurve

$$x_3(x_1) = \frac{H}{v_g} \left( 1 - \cosh \left( \frac{v_g x_1}{H} \right) \right)$$

Bemerkung: • Die Seilkurve stellt die Kettenlinie dar.  
Anwendung z.B. bei Hochspannungsleitungen.

• Seilkraft  $S = H \sqrt{1 + x_3'^2}$

• Horizontalzug aus einer der 3 Zusatzbedingungen  
vgl. 9.2.

Es gilt

$$V = H x_3' = -H \sinh \left( \frac{v_g x_1}{H} \right)$$

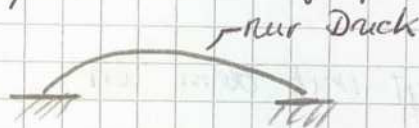
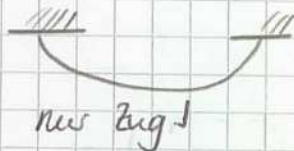
$$S = H \sqrt{1 + (x_3')^2} = H \cosh \left( \frac{v_g x_1}{H} \right)$$

$$L = \int_{-l_2}^{+l_2} \sqrt{1 + (x_3')^2} dx_1 - \frac{2H}{v_g} \sinh \left( \frac{v_g l}{2H} \right)$$

$$n_2(x_1) = x_3(x_1) + h \quad \text{mit} \quad h = -x_3 \left( x = \frac{l}{2} \right)$$

Analogie zur Seilstatik

Umkehrung der Seilkurve, d.h. unter Eigengewicht:



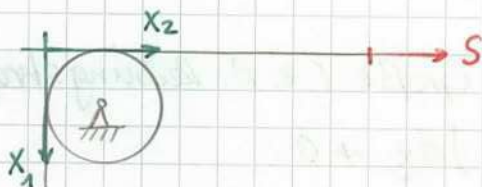
Anwendung: Mauerwerksbögen, Gewölbe, ...

# 10. DAS PRINZIP DER VIRTUELLEN ARBEIT

## 10.1 DER ARBEITSBEGRIFF IN DER MECHANIK STarrer KÖRPER

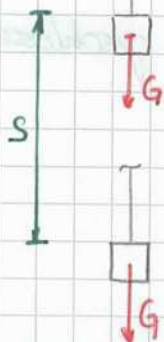
→ Einführung des Arbeitsbegriff

Bsp: Hebung eines Gewichts. Beim Absenken von  $G$  um den Betrag  $s$  wird Arbeit geleistet



$$A = G \cdot s$$

$$[A] = J = Nm$$



Physikalische Erfahrung:

- { Heben eines Gewicht: System verbraucht Arbeit
- { Senken — " — : — " — leistet — " —

→ Allgemein gilt:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} G dx = G(x_2 - x_1)$$

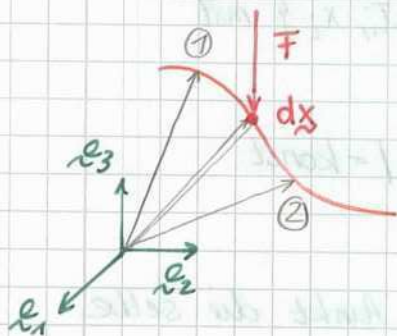
• Heben von  $G$  mit  $x_1 = s, x_2 = 0$   $A_{12} = -G \cdot s < 0$

• Senken von  $G$  mit  $x_1 = 0, x_2 = s$   $A_{21} = +G \cdot s > 0$

Konsequenz: Wird in einem System zwischen zwei Systemen Zuständen ① und ② Arbeit geleistet, dann gilt

$$A_{12} > 0$$

Arbeit einer Kraft entlang eines beliebigen Wegs



→ differentielles Element der Arbeit:

$$dA = \vec{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

→ Arbeit zwischen den Zuständen ① und ②

$$A_{12} = \int_{\text{①}}^{\text{②}} dA = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

## Konservative Kräfte (Potenzialkräfte)

Def: Eine Kraft heißt konservativ, wenn die Arbeit  $A_{12}$  nicht vom Weg abhängt, auf dem sie zwischen den Zuständen ① und ② geleistet wird

Bsp: - konservative Größe (z.B. Gravitationskraft)

$$\oint \vec{G}(\underline{x}) d\underline{x} = 0$$

- nicht-konservative Größe (z.B. Reibungskraft  $\vec{R}(\underline{x}, \dots)$ )

$$\oint \vec{R}(\underline{x}, \dots) d\underline{x} \neq 0$$

Die Arbeit konservativer Kräfte verschwindet längs eines geschlossenen Weges.

## Arbeit und Potential konservativer Kräfte

Für konservative Kräfte entsteht ein Potenzial

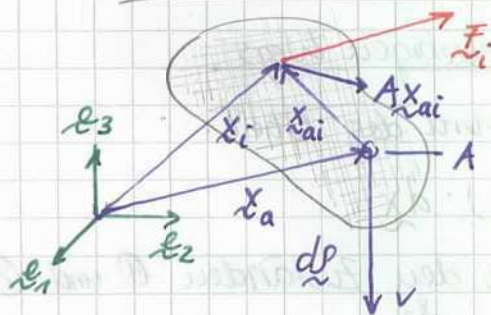
$$U_a = -A = -\int \vec{F}(\underline{x}) d\underline{x}$$

Bem:  $U_a$  und die Arbeit  $A$  haben entgegengesetzte Vorzeichen.  $U_a$  kann nur auf einen konstanten Faktor angegeben werden (Integrationskonst.)  
Es folgt:

$$\vec{F}(\underline{x}) = -\frac{dU_a}{d\underline{x}} = : \text{Gradient von } U_a \quad \text{mit } \text{grad}(\dots) := \frac{d(\dots)}{d\underline{x}}$$

$$U_a(t) = \frac{dU_a}{d\underline{x}} \cdot d\underline{x} = -\vec{F}_a(\underline{x}) d\underline{x}$$

## Die Arbeit eines Kräftesystems am starren Körper



- differentielles Element des Kräftesystems  $\vec{F} = \{\vec{F}_i, \underline{x}_i\}$  mit  $i = 1, \dots, n$

Es gilt mit  $|\underline{x}_{ai}| = \text{konst}$

$$d\underline{x}_{ai} = d\underline{\rho} \times \underline{x}_{ai}$$

Bem: Am starren Körper erfährt jeder Punkt die selbe Drehung.

$$dA = \sum_i \vec{F}_i \cdot (d\underline{x}_a + d\underline{x}_{ai})$$

$$= \sum_i \vec{F}_i d\underline{x}_a + \sum_i \vec{F}_i \cdot (d\underline{\rho} \times \underline{x}_{ai})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sum_i \vec{F}_i) d\vec{x}_a + (\sum_i \dot{\vec{x}}_{ai} \times \vec{F}_i) d\varphi \\
 &= \vec{R} d\vec{x}_a + \vec{M}_a d\varphi
 \end{aligned}$$

⇒ Arbeit eines Systems konservativer Kräfte zwischen ① und ②

$$A = \int_{①}^{②} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{x}_i = \int_{①}^{②} \vec{R} d\vec{x}_a + \int_{①}^{②} \vec{M}_a d\varphi$$

## 10.2. DAS PRINZIP DER VIRTUELLEN VERRÜCKUNGEN

Bem.: Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PdVA) in der Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen (PdVV) hat in der analytischen Mechanik den selben Stellenwert wie das Gleichgewichtsaxiom in der Eulerschen Mechanik.

Es geht zurück auf Johann (I) Bernoulli und Joseph Louis Lagrange.

Die virtuellen Verrückungen (Verschiebungen, Verdrehungen) haben folgende Eigenschaften:

- gedacht (virtuell)
- unendlich klein
- mit kinetischen Zwangsbedingungen des Systems verträglich

Einführung der Verrückungssymbole

$$\text{virtuelle Verrückungen} \begin{cases} \delta \vec{x} : \text{virtuelle Verschiebung} \\ \delta \varphi : \text{virtuelle Verdrehung} \end{cases}$$

mit  $\delta(\cdot)$ : Variationssymbol

$$\text{PdVV: } \delta A = 0$$

→ virtuelle Arbeit eines Kräftesystems  $\vec{F} = \{\vec{F}_i, \vec{x}_i\}$  am starren Körper

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i$$

bzw. bei der Reduktion auf ①

$$\begin{aligned}
 \delta A &= (\sum_i \vec{F}_i) \delta \vec{x}_a + (\sum_i \dot{\vec{x}}_{ai} \times \vec{F}_i) \delta \varphi \\
 &= \vec{R} \delta \vec{x}_a + \vec{M}_a \delta \varphi
 \end{aligned}$$

## PdV und Gleichgewichtsaxiom

(1) Es gilt das Gleichgewichtsaxiom (Euler'sche Mechanik)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{R} = 0 \\ \underline{M}_a = 0 \end{array} \right\} \text{PdV (} \delta A = 0 \text{) ist erfüllt für beliebige } \delta x_a \text{ und } \delta \underline{R}$$

(2) Es gilt das PdV (analyt. Mechanik)

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = 0 \\ \delta x_a, \delta p_i \text{ beliebig} \end{array} \right\} \text{Gleichgewicht (} \underline{R} = 0, \underline{M}_a = 0 \text{) ist erfüllt}$$

Bem. zum PdV:

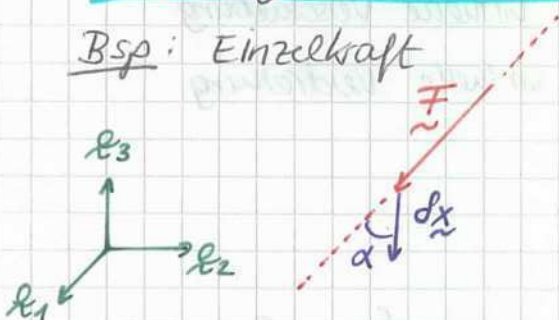
- $\delta A$  kennzeichnet einen virtuellen Zustand
- $\delta(\cdot)$ -Variation wird formal behandelt wie das Differential  $d(\cdot)$

## Wo leistet virtuelle Arbeit?

- eingeprägte Kräfte
- Reaktionskräfte (Statik) und Führungskräfte (Dynamik) leisten keine virtuelle Arbeit
- ...

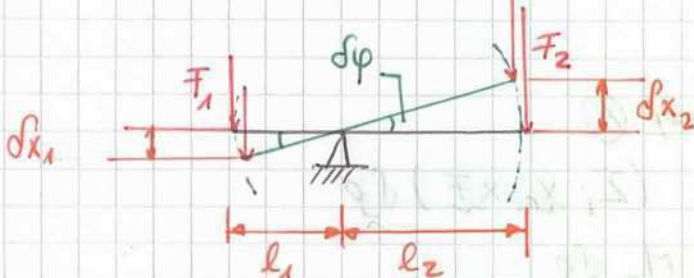
## Berechnung der virtuellen Arbeit:

Bsp: Einzelkraft



$$\begin{aligned} \delta A(\underline{F}) &= \underline{F} \delta \underline{x} \\ &= |\underline{F}| \cdot |\delta \underline{x}| \cdot \cos \varphi \quad (\underline{F}, \delta \underline{x}) \\ &= F \cos \alpha \delta x \end{aligned}$$

Bsp: System mit 1 kinetischem Freiheitsgrad



Geometrie:

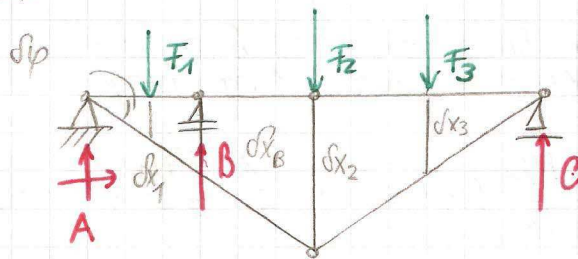
$$\tan \delta \varphi = \frac{\sin \delta \varphi}{\cos \delta \varphi} \approx d\varphi$$

$$\delta \varphi = \frac{\delta x_1}{l_1} = \frac{\delta x_2}{l_2}$$

PdV:  $\delta A = 0$

$$\begin{aligned} &= F_1 \delta x_1 - F_2 \delta x_2 = (F_1 - F_2 \cdot \frac{l_2}{l_1}) \delta x_1 \\ &\Rightarrow 0 = F_1 l_1 - F_2 l_2 \end{aligned}$$

Bsp: statisch und kinematisch bestimmtes Tragwerk



geg: Geberträger

ges: Lagerreaktion in C mit PdV

Vorgehensweise

- Lösen der kinematischen Bindung in C, d.h. die Reaktionskraft wird eine eingeprägte Kraft
- System erhält einen kinematischen Freiheitsgrad
- Anwendung des PdV

⇒ Geometrie  $\delta x_1 = l \delta \varphi$ ,  $\delta x_2 = 3l \delta \varphi$

$\delta x_B = 2l \delta \varphi$ ,  $\delta x_3 = \frac{3}{2} l \delta \varphi$

PdV:  $\delta A = 0 = F_1 \delta x_1 - B \delta x_B + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3$

→  $B = \frac{1}{2} (F_1 + 3F_2 + \frac{3}{2} F_3)$  (\*)

Bem: (\*) entspricht der Gleichgewichtsbedingung  $\sum \mathcal{M}_A = 0$ , wenn zuvor C berechnet wurde.

### 10.3 STABILITÄT DES GLEICHGEWICHTS

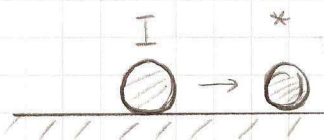
Bew. zur Stabilität am Bsp. einer Walze

Ausgangszustand (I), Nachbarzustand (\*)



(a)

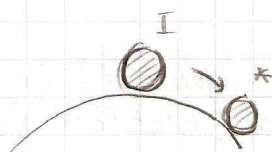
Fallunterscheidung von Gleichgewichtslagen



(b)

(a) Stabiles Gleichgewicht:

Die Walze kehrt nach Auslenkung in die Ruhelage zurück



(c)

(b) Indifferentes / Neutrales GG

Die Walze verbleibt in der Nachbarlage.

(c) labiles Gleichgewicht

Die Walze entfernt sich nach Auslenkung von der Gleichgewichtslage.

## Charakterisierung des Gleichgewichtszustand

- Entwicklung des potentiellen Energie des Nachbarzustands in eine TAYLOR-Reihe nach dem Anfangszustand ( $\hat{=}$  Ausgangslage)

$$U_a^* = U_a + \frac{dU_a}{dx} (x^* - x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 U_a}{dx^2} (x^* - x)^2 + \dots$$

bzw. in Schreibweise der Variationsrechnung

$$U_a^* = U_a + \underbrace{\frac{dU_a}{dx} \delta x}_{\delta U_a} + \underbrace{\frac{d^2 U_a}{2! dx^2} (\delta x)^2}_{\frac{1}{2} \delta^2 U_a} + \dots$$

$$= U_a + \delta U_a + \frac{1}{2!} \delta^2 U_a$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta x = x^* - x \\ \delta U_a = \frac{dU_a}{dx} \delta x \end{cases}$$

Es folgt für den Potenzialunterschied:

$$\delta U_a = U_a^* - U_a$$

Konsequenz:

$$\delta U_a^* \begin{cases} > 0 : \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 : \text{neutrales Gleichgewicht} \\ < 0 : \text{labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

- Umformung von  $U_a^*$  in einen Arbeitsausdruck

$$U_a^* = -A^*$$

$$\text{mit } A^* = A + \delta A + \frac{1}{2!} \delta^2 A + \dots$$

$$\Delta = 0 \text{ (PdV)}$$

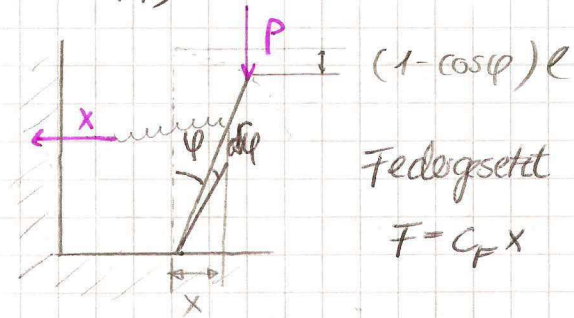
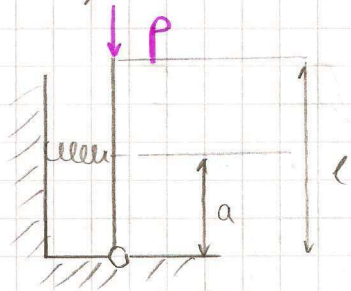
$\Rightarrow$  Charakterisierung des Gleichgewichts durch die 2. Variation der Arbeit

$$\delta^2 A \begin{cases} < 0 : \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 : \text{indifferentes} \\ > 0 : \text{labiles} \end{cases}$$

Bem.: Für  $\delta^2 A = 0$  (indifferentes Gleichgewicht) kennzeichnet die nächstkleinere, nicht verschwindende Variation die Art der Indifferenz.

Neutralität ex. nur für  $\Delta A = 0$ .

Bsp.: Untersuchung der Stabilität des Gleichgewichts  
(System mit einem kinemat. GG)



Federgesetz

$$F = c_F x$$

Bestimmung der Arbeit A

mit  $x = a \tan(\varphi)$

Bem.: Maßgebend ist die Arbeit die zwischen Grundzustand ( $\varphi = 0$ ) und Ausgangszustand ( $\varphi$ ) geleistet wird

$$\begin{aligned} A &= P l (1 - \cos \varphi) - \int_0^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= P l (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} c_F (a^2 \tan^2(\varphi)) \end{aligned}$$

Ermittlung von Gleichgewichtssituation

$$\delta A = \frac{dA}{d\varphi} \delta\varphi = \left( P l \sin \varphi - c_F a^2 \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \delta\varphi$$

Mögliche Gleichgewichtslagen sind:

$$\sin \varphi = 0 \quad \vee \quad \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{c_F a^2}{P l}}$$

Die folgt aus  $0 = \sin \varphi \left( P l - \frac{c_F a^2 P l}{\cos^3 \varphi} \right)$

Stabilität des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned} \delta^2 A &= \frac{d^2 A}{d\varphi^2} (\delta\varphi)^2 \quad \text{mit} \quad \frac{d^2 A}{d\varphi^2} = \cos \varphi \left( P l - \frac{c_F a^2}{\cos^3 \varphi} \right) - 3 c_F a^2 \dots \\ &= \dots \\ &= P l \cos \varphi - c_F a^2 \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

(1)  $\sin \varphi = 0 \rightarrow \cos \varphi = 1$

$$\frac{d^2 A}{d\varphi^2} = P l - c_F a^2 \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & \text{stabil} \\ = 0 & \text{indifferent} \\ > 0 & \text{labil} \end{array} \right.$$

Zusammenhang der äußeren Last mit dem Gleichgewichtszustand

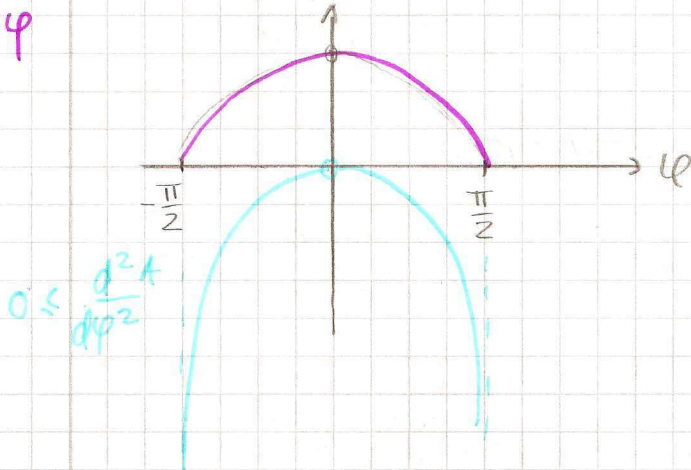
$$\frac{C_F a^2}{l} \Rightarrow \begin{cases} > P & \text{stabil} \\ = P & \text{indiff.} \rightarrow P_{\text{krit.}} = \frac{C_F a^2}{l} \\ < P & \text{labil} \end{cases}$$

$$(2) \quad \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{C_F a^2}{P l}} \rightarrow C_F a^2 = P l \cos^3 \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\varphi} &= P l \cos \varphi - P l \cos^3 \varphi \cdot \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \\ &= 3 P l \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) < 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \text{stabil} \\ \text{indifferent} \end{cases}$$

Untersuchung für Winkel  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$\cos \varphi$



Lastfunktion

