ZUG

FB $\sigma_{wirk} \leq \sigma_{zul}$

$\sigma_{wirk} = \frac{F}{A}$

Zugfestigkeit $R_m = \frac{F_{max}}{A}$

Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

Querdehn. $\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$

Längsdehn $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$

Umfangsdehn $\varepsilon_u = \frac{\Delta U}{U_0}$

Gesamtdehn. $\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{pl.} + \varepsilon_{elast.}$

elast. Dehn. $\varepsilon_{el} = \frac{R_e}{E}$

plast. Dehn. $\varepsilon_{pl} = \frac{R_m}{E}$

Hookesches G. $\sigma = E \cdot \varepsilon_l$

Poissonsch. G. $-N = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}$

Fließbeginn $\sigma_{max} = R_e = \sigma_{ZF}$

Bruchdehnung $A = \frac{\Delta l_B}{l_0} \cdot 100\ (\%)$

Brucheinschnürung $z = \frac{A_0 - A_B}{A_0} \cdot 100\ (\%)$

Rechnen gegen Versagen

zähl duktil	Fließen	$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$	$S_F = 1{,}2-2$	1,5
	Bruch	$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 2-3$	2
spröd	Bruch	$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 4-9$	4

DRUCK



FB $\sigma_d \leq \sigma_{dzue}$; $F \leq \frac{F_K}{S_K}$

Druckspannung $\sigma_d = -\frac{F}{A}$

Fließbeginn $\sigma_{dF} = -R_e$

Knickspannung $\sigma_K = -\frac{F_K}{A}$

Knicklast F_K nach Euler

Schlankheitsgrad $\lambda = L\sqrt{\frac{A}{I}}$

Verkürzung $-\Delta L = \frac{\sigma_d}{E} \cdot l_0$

Rechnen gegen Versagen

zähl duktile	Fließen	$\sigma_{zue} = -\frac{R_e}{S_F}$	$S_F = 1{,}2-2$	1,5
	Knicken	$\sigma_{Kzue} = -\frac{F_K}{A \cdot S_K}$	$S_K = 2{,}5-5$	3,5
spröd	Bruch	$\sigma_{zul} = -\frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 4-9$	4
	Knicken	$\sigma_{Kzue} = -\frac{F_K}{S_K \cdot A} = \frac{\sigma_K}{S_K}$	$S_K = 2{,}5-5$	3,5

BIEGUNG

M_b [Nmm]

W_b [mm^3]
W_t [mm^3]
I [mm^4]

FB $\sigma_b \leq \sigma_{bzue}$

Maximalspannung $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$

Fließbeginn Stahl: $\sigma_{bF} = R_e$

Dehnungsverteilung $\varepsilon = \frac{y}{R}$

Spannungsverteilung $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$

Spannung $\sigma(y) = \frac{M}{I_z} \cdot y$

Zugseite plast. Dehnung **Druckseite** pl. Stauchung

axiale Widerstandsm. $W_b = \frac{I_z}{y_{max}}$

zue. Durchbiegung $f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{\sigma_{b\,max} \cdot L^2}{6\,E\,D}$

neutr. Faser □: $y_1 = \frac{h}{2}$ △: $y_1 = \frac{2}{3}h$

Außenfaser $\sigma_A = \frac{E \cdot h}{2R}$

Innenfaser $\sigma_I = \frac{E \cdot h}{2R}$

} Querschnittsform symmetrisch zur Biegeachse

Rechnen gegen Versagen

zähl duktil	Fließen	$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$	$S_F = 1{,}2-2$	1,5
spröd	Bruch	$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 4-9$	4

SCHUB

Max. im Inneren am Rand 0

FB $\tau \leq \tau_{zul}$

Schubspannung $\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot h}$

Schub Gleitmodul $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Elastizitätsgesetz $\tau = G \cdot \gamma$

(Ab-) scherfestigkeit $\tau_{aB} = \frac{F_{max}}{A_0}$

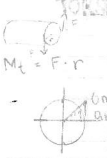
Schiebung: Winkeländ. γ

Normalspannung → Dehnung
Schubspannung → Schiebung

Rechnen gegen Versagen

zähl duktil	Bruch	$\tau_{zul} = \frac{\tau_{aB}}{S_B} \approx \frac{0{,}7 \cdot R_m}{S_B}$	$S_B = 2$	
spröd	/			

TORSION



FB $\tau_t \leq \tau_{zul}$

Max. Schubsp. $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$

Schiebung $\gamma(r) = \frac{\varphi}{l} \cdot r$

Schubspannung $\tau(r) = \frac{G \cdot \varphi}{l} \cdot r = \frac{M}{I_p} \cdot r$

Verdrehwinkel $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$

Torsionsfließgrenze $\tau_{tF} = \frac{M_{tF}}{W_t}$

Torsionsfestigkeit $\tau_{tB} = \frac{M_{t\,max}}{W_t}$

Fließbeginn $\sqrt{3}\,\tau_t = R_e$

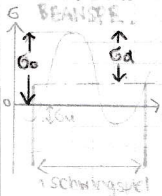
Bogenmaß von GM in BM: $\varphi \cdot \frac{180}{\pi}$

Gradmaß von GM in BM: $\varphi \cdot \frac{\pi}{180}$

Rechnen gegen Versagen

zähl duktil	Fließen	$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$	$S_F = 1{,}2-2$	1,5
		→ $\tau_{tF} = 0{,}58\,R_e$; 0,5 R_e; R_e		
	Bruch	$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 2-3$	2
spröd	Bruch	$\tau_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 4-9$	4

SCHWING. BEANSPR.



FB $\sigma_a \leq \sigma_{azul}$

Spannungsamplitude $\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} = \frac{M_b}{W_b}$

ertragb. Spannungsamplitude

zäh $\sigma_A = \sigma_w \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$

spröd $\sigma_A = \sigma_w \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$ (*)

→ $\sigma_w = f \cdot \sigma_{w\,poliert}$

Oberflächenfaktor $f = \frac{\sigma_w}{\sigma_{w\,poliert}}$

$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$

Schwingbreite $\Delta\sigma = 2\sigma_a$

Spannungsverhältnis $R = \sigma_u / \sigma_o$

Mittelspannung $\sigma_m = \frac{R_{m12}}{2} = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} = \frac{F_m}{A}$

Zugschwellbereich σ_o, σ_u positiv, $R = 0$

Wechselbereich σ_o, σ_u versch. VZ; $R = -1$

Druckschwellbereich σ_o, σ_u neg.; $R = -\infty$

rein wechselnd $\sigma_a \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bw} \cdot f}{S_D}$

Rechnen gegen Versagen

zähl duktile	Fließen	$\sigma_o \leq \sigma_{o\,zul} = \frac{R_e}{S_F}$	$S_F = 1{,}2-2$	1,5
	Bruch	$\sigma_o \leq \sigma_{o\,zul} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 2-3$	2
	SB	$\sigma_a \leq \sigma_{azue} = \frac{\sigma_A}{S_D}$	$S_D = 1{,}5-2{,}5$	2
spröd	Bruch	$\sigma_{zue} = \frac{R_m}{S_B}$	$S_B = 4-9$	4
	SB	$\sigma_a \leq \sigma_{azue} = \frac{\sigma_A}{S_D}$	$S_D = 1{,}5-2{,}5$	2

Gleichung: $F_m \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{h}{W_b}\right) + F_a \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{h}{W_b}\right) \leq \sigma_{zul}$

KERBWIRK.

Stat. Beanspruchung:

FB $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$; $\sigma_n \leq \sigma_{zul}$

Nennspannung $\sigma_n = \frac{F}{A_K} = \frac{R_e}{\alpha_K}$

Formzahl $\alpha_K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = f\left(\frac{r}{d}\right)$

Max. Spannung Kerbgrund $\sigma_{max} = \alpha_K \cdot \sigma_n$

Kerbzugfestigkeit $R_{m,K} = \frac{F_{max}}{A_K} = \sigma_n$

Schwing. Beanspruchung:

FB $\sigma_{amax} \leq \sigma_{a\,zul}$

Nennspannung $\sigma_{an} = \frac{F_a}{A_K}$

max. Spannungsamplit. $\sigma_{amax} = \beta_K \cdot \sigma_{an}$

Kerbwirkungszahl $\beta_K = \frac{\sigma_w}{\sigma_{wK}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_{AK}}$

Dietmann: $\beta_K = \frac{\alpha_K}{1 + \frac{55}{R_z}\sqrt{\frac{C}{\rho}}}$ (C: zug/druck/Biegung 2/1; C: Torsion 1)

ρ: Kerbradius

$1 \leq \beta_K \leq \alpha_K$

Ende elast. Zustand
- ungekerbt $\sigma = R_e$; $F_e = R_e \cdot A$
- gekerbt $\sigma_{max} = R_e = \alpha_K \cdot \sigma_n = \alpha_K \cdot \frac{F}{A}$

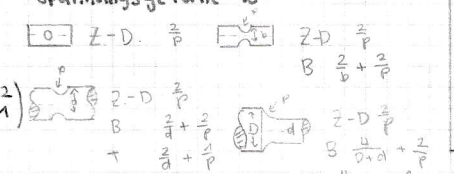
$F_F = \frac{R_e \cdot A}{\alpha_K}$; $\varepsilon_{max} = \varepsilon_F = \frac{R_e}{E}$

Teilplast. Zustand
- mögl. Laststeigerung $\eta_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}}$
- $F_{pl} = \eta_{pl} \cdot R_e \cdot \frac{A}{\alpha_K}$ $\quad \eta_{pl} \leq \alpha_K$

$\varepsilon_F = \frac{R_e}{E}$

Vollplast. Zustand
- Last $F_{vpl.} = R_e \cdot A$

Kerbwirk.zahl nach Siebel
- dyn. Stützziffer $n_x = \frac{\alpha_K}{\beta_K}$
- Spannungsgefälle χ



Versagen

statisch zäh	Fließen	$\sigma_{max} \leq \sigma_{zue}$	$\sigma_{max} = \alpha_K \cdot \sigma_n$	$\sigma_{zul} = \eta_{pl} \cdot R_e / S_F$
	Bruch	$\sigma_n \leq \sigma_{zue}$		$\sigma_{zul} = R_m / S_B$
spröd	Bruch	$\frac{\sigma_{max}}{\alpha_K \cdot \sigma_n} \leq \sigma_{zul}$		R_m / S_B
schwingend zäh spröd	schwingungsbruch	$\sigma_{amax} \leq \sigma_{azul}$	$\beta_K \sigma_{an}$	σ_A / S_D

σ_w: Diagramm und dann in Formel (*)

DRUCKBEHÄLTER

innen σ_i, p_i, d_i
außen σ_a, p_a, d_a

Umfangsspannung $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s}$; $p = \frac{\sigma_u \cdot 2s}{d_i}$; $p \cdot d_i \cdot b = \sigma_u \cdot 2 \cdot s \cdot b$; $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s}$

Längsspannung $\sigma_l = \frac{p \cdot d_i}{4s}$ – Axialspannung

Radialspannung innen: $\sigma_r = -p$; Mitte: $\sigma_r = -\frac{p}{2}$; außen: $\sigma_r = 0$

Kesselformel $\sigma_v(SH) = \frac{p \cdot d_m^*}{2s}$; $s = \frac{p \cdot d_m}{2\sigma_{zul}}$

Dehnung außen $\varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu\sigma_u)$

$\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \nu\sigma_l)$ → p bestimmen

Spannung $\sigma_l = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_l + \nu\varepsilon_u)$

$\sigma_u = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_u + \nu\varepsilon_l)$

0,1 MPa = 5 bar

in MPa → $p = \frac{bar}{10}$

* $\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$

bewegl. Kolben => $\sigma_l = 0$ ⇒ einachs. Spannungszustand

Dehnung innen $\varepsilon_l = -\frac{\nu}{E}(\sigma_u + \sigma_r)$ $\quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_u)$

$\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \nu\sigma_r)$

Kraft auf Kolben $F = p_i \cdot \frac{1}{4}\pi d_i^2$ → neg. wenn Druckkraft

Mitte (Rohrwand/Kolben) → Wanddickenänderung: $\Delta s = \varepsilon_r \cdot s$

Bedingung dünnw. Hohlzyl. $\frac{d_a}{d_i} < 1{,}2$

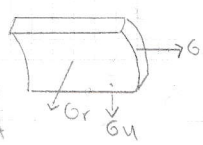
Höchstbeanspruchte Stelle: Innenseite

σ_v, σ_u, σ_r = Hauptsp im rotationssymm. Kreis

$\varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu(\sigma_u + \sigma_r))$ Druckspannung: $\frac{F}{A}$

$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_l + \sigma_u))$

$\varepsilon_u = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_u - \nu(\sigma_l + \sigma_r))$

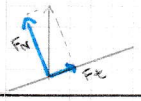


$p = \frac{F}{A}$

Druck sicherheit gegen Fließen UND BRUCH rechnen!

Spannung schräger Schnitt

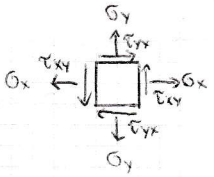
$F_n = F \cdot \cos\varphi$ (Senkr. zur Schnittfläche)
$F_t = F \cdot \sin\varphi$ (tangent. z. S.)



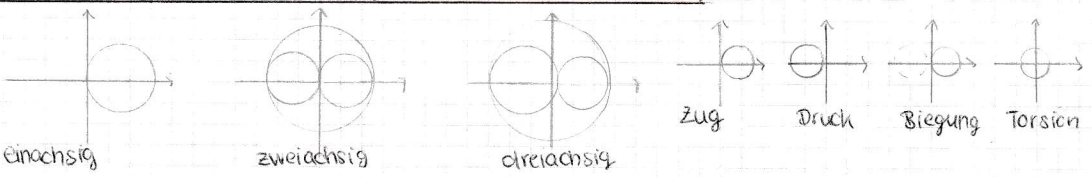
Schnittfläche $A = \frac{A_0}{\cos\varphi}$

Normalspan. (aus F_N): $\sigma(\varphi) = \frac{F}{A_0}\cos^2\varphi = \sigma_0 \cos^2\varphi$

Schubspan. (aus F_t): $\tau(\varphi) = \frac{F}{A_0}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\varphi$



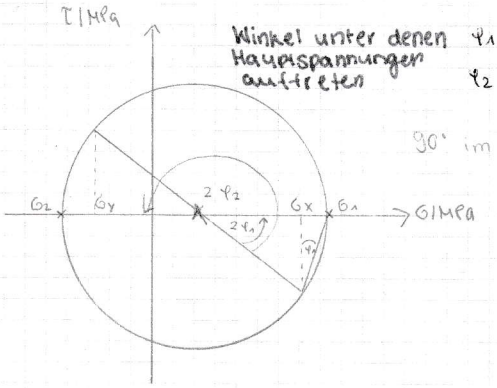
Mohrscher Spannungskreis



Hauptspannungen $\sigma_{max} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$ $\sigma_{min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$

größte Schubspan. $\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

Radius $r = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ Mittelpunkt $\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$



Winkel unter denen Hauptspannungen auftreten $\varphi_1 = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y})]$

$\varphi_2 = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}) + 180°]$

90° im M.kreis ≙ 45° in echt

2achsig: $\sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2_{xy}}$

$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2_{xy}}$

3achsig: $\sigma_{max} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau^2_{xy}}$

$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau^2_{xy}}$

Schwellende Last

FB $\sigma_{sch} \leq \sigma_{sch\,zul} = \frac{b_{sch}\cdot f}{SD}$

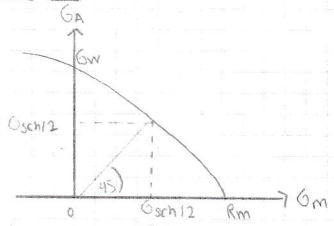
$\sigma_{sch} = \frac{F_{sch}\cdot l}{W_b}$

$F_a = \frac{1}{2} F_{sch\,max}$

$\sigma_A = \frac{1}{2}\sigma_{sch}$

Dauerfestigkeits-Schaubilder

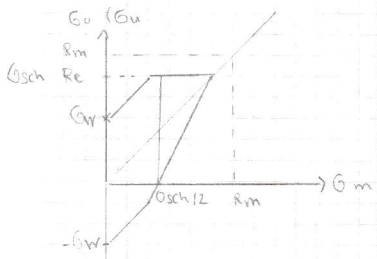
Haigh



Druck ← → Zug

$\sigma_m = \sigma_A = \sigma_{sch}/2$

Smith



Prüfung:

- Druckbelastung bestimmen ⇒ F → kleinere von beiden ist es
- Stat. Vorsp.kraft + überlagerte wechs. Kraft → $\sigma_o \leq \sigma_{o\,zul}$

$\sigma_o = \frac{F_m+F_a}{A} + \frac{(F_m+F_a)\cdot e}{W_b} \leq \frac{R_e}{S_F} / \frac{R_m}{S_B}$ } stat.

$\sigma_a \leq \sigma_{a\,zul}$

$\sigma_a = \frac{F_a}{A} + \frac{F_a\cdot e}{W_b}$

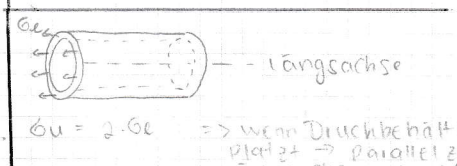
$\sigma_{azul} = \sigma_w\sqrt{1 - \frac{\frac{F_m}{A} + \frac{F_m\cdot e}{W_b}}{R_m}}$ } schw.

- rein schwellend $\xrightarrow{SD}$ $\sigma_m = \sigma_a$ (Mb/Wb)
- Schwingende Beanspr.:
  Ertragb. Spannungsamplit. $\sigma_A = f\cdot\sigma_w\cdot\sqrt{1-\frac{\sigma_m}{R_m}}$ ($\sigma_m \Rightarrow \sigma_u$)
  Wirk. Spannungsamplit. $\sigma_a = \beta_k\cdot\sigma_n$ (σ_n ohne σ_u)
- Äußere Kraft auf Druckbehälter: $\sigma_u = \frac{p\cdot d}{2s}$ σ_r wie immer

$\sigma_\ell = \frac{-F_{res}}{\pi(r_a^2 - r_i^2)}$; wobei $F_{res} = p_i\cdot\pi\cdot r_i^2 +$ Foeckel

- Radiusvergrößerung:

$\Delta r = \frac{\Delta V}{2\pi} = \frac{\varepsilon_u\, 2\pi r}{2\pi} = \frac{(\sigma_u - \nu(\sigma_a+\sigma_r))r}{E}$



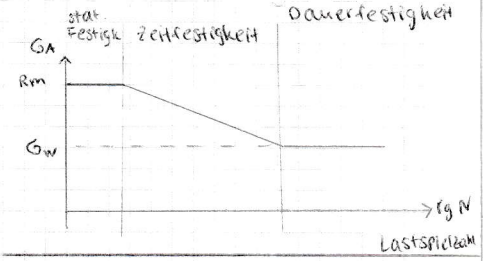
Längsachse

$\sigma_u = 2\cdot\sigma_\ell$ ⇒ wenn Druckbehälter platzt → parallel zur Längsachse entstehend

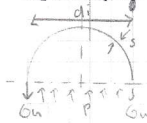
→ Grund σ_u doppelt so groß wie σ_ℓ

DMS 45° zur Längsachse aufbringen (90° im M.kreis) um max Dehnung zu messen → um Dehnung zu berechnen → σ_u

Wöhler



Herleitung σ_u, σ_ℓ



$p\cdot d_i\cdot b = \sigma_u\cdot 2s\cdot b$

$\Rightarrow \sigma_u = \frac{p\cdot d_i}{2s}$



$p\cdot\pi\cdot d_i^2/4 = \sigma_\ell\cdot\pi\, d_m\cdot s$ ($d_m \approx d_i$)

$\sigma_\ell = \frac{p\cdot d_i}{4s}$

- 2 Dehnungen geg. → Hookesch σ nachweisen

$\varepsilon_F < \frac{R_e}{E} = ____ < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$



Wie groß ist wirk. Zugkraft ggeg. $\sigma_{max} = 275$ $\sigma_{min} = -130$?

→ Die Spannung resultierend aus der Zugkraft ≙ Normalspannung, wo bei reiner Biegung die neutr. F. wäre

$\sigma_z = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$ → $\sigma_z = \frac{F}{A}$ (bei Quadrat)

→ Die Spannung result. aus Biegemoment ≙ Normalspannung am Oberfläche Minus Zugspannung

$\sigma_b = \sigma_{max} - \sigma_{zug}$

Vergleichspannung

NH → spröde (kein Fließen!)
SH → konservativ, duktil
GEH → duktil

$\sigma_v(SH) \geq \sigma_v(GEH)$ → bis +15,5%

$W_b = \frac{\text{Kreis} - \text{Quadrat}}{D/2}$

Kreis: $U = 2\pi r = \pi d$ $A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}d^2$

Kreisring $U = 2\pi(r_1+r_2)$ $A = \pi(R^2-r^2) = \frac{\pi\cdot(D^2-d^2)}{4}$

$m = \rho\cdot V$

