

$$x_n = \frac{1}{r_{nn}} (b_n - 0) \quad \text{für } i=n$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}} (b_{n-1} - r_{nn}x_n) \quad \text{für } i=n-1$$

$$x_{n-2} = \frac{1}{r_{n-2,n-2}} (b_{n-2} - r_{nn}x_n - r_{n-1,n-1}x_{n-1})$$

für $i=n-2$

⋮

$$x_1 = \frac{1}{r_{11}} \left(b_1 - \sum_{k=2}^n r_{1k}x_k \right)$$

V. Lösen von linearen Gleichungssystemen

Ausgangspunkt, $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

A invertierbar $[x = A^{-1} \cdot b]$

wenn
nicht
invertierbar
0

Es gibt 2 Klassen von Methoden zum Lösen des linearen

Gleichungssystems: 1) direkte Löser 2) iterative Löser

5.1. Direkte Lösungsverfahren

5.1.1. Dreiecksmatrizen und gestaffelte Gleichungssysteme

Definition: Ein Gleichungssystem heißt gestaffelt, wenn $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist.

Fall obere Dreiecksmatrix ($A = R$)

$$\begin{bmatrix} \triangle \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow Rx = b$$

Das Lösen des Gleichungssystems "von unten" liefert:

$$x_i = \frac{1}{r_{ij}} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^n r_{ik} x_k \right) \quad \text{für } i = n, \dots, 1$$

Erklärung links

Fall untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} \triangle \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow Lx = b$$

$$\text{Lösen: } x_i = \frac{1}{l_{ij}} \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k \right] \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Bemerkungen:

- 1) Dreiecksmatrizen müssen erzeugt werden
→ Gauss Algorithmus
- 2) geringer Rechenaufwand, d.h. $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n+1) \cdot n$
Operationen der Form $d = a + b \cdot c$
- 3) geringer Speicheraufwand
- 4) die Inverse einer oberen/unteren Dreiecksmatrix ist wieder eine ober/untere Dreiecksmatrix
- 5) Die Determinante der Matrix ist das Produkt der Diagonalelemente

5.1.2. Gauß'sche Eliminationsverfahren

- auch Gauß Algorithmus der LR-Zerlegung -

Ziel: Transformation eines Gleichungssystems $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär
auf Dreieckform $Ry = c$, $R \in \mathbb{R}^{n,n}$, obere Dreiecksmatrix

Vorgehensweise:

Anwendungen von Äquivalenztransformationen:

- (i) Zeilenvertauschungen (Umnummerierung der Gleichungen)
- (ii) Spaltenvertauschungen (Umnummerierung der Unbekannten)
- (iii) Subtraktion von geeigneten Vielfachen der Zeile k von den Zeilen $k+1, \dots, n$

Achtung! Systematische Protokollierung aller Transformationen!

Modellierung und Simulation in der Biomechanik
Der GAUSS-Algorithmus

Beispiel: Seilen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b$$

Ziel:



gegeben. Dazu lässt sich folgendes Rechenschema aufstellen:

	1	2	3	
1	0 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	-3 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	3 = $\bar{b}_1^{(1)}$
2	1 = $\bar{a}_{21}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{22}^{(1)}$	3 = $\bar{a}_{23}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_2^{(1)}$
3	1 = $\bar{a}_{31}^{(1)}$	-1 = $\bar{a}_{32}^{(1)}$	3 = $\bar{a}_{33}^{(1)}$	5 = $\bar{b}_3^{(1)}$

Zeilen- und Spaltenvertauschung, so dass Element $\bar{a}_{22}^{(1)}$ an die Position (1,1) kommt, und Umbenennung der Elemente:größtes*
Element als
nächstes
Diagonalelement

	3	2	1	
2	3 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_1^{(1)}$
1	-3 = $\bar{a}_{21}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{22}^{(1)}$	0 = $\bar{a}_{23}^{(1)}$	3 = $\bar{b}_2^{(1)}$
3	3 = $\bar{a}_{31}^{(1)}$	-1 = $\bar{a}_{32}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{33}^{(1)}$	5 = $\bar{b}_3^{(1)}$

*Pivotstrategie
• max $|a_{ik}|$
 $i \geq k$
• max $|a_{ij}|$
 $ij \geq k$

Subtraktion des (-1)- bzw. 1-fachen der ersten Zeile von der zweiten bzw. der dritten Zeile:

	3	2	1	
2	3 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_1^{(1)}$
1	-1 = $\bar{a}_{21}^{(2)}$	2 = $\bar{a}_{22}^{(2)}$	1 = $\bar{a}_{23}^{(2)}$	-1 = $\bar{b}_2^{(2)}$
3	1 = $\bar{a}_{31}^{(2)}$	-2 = $\bar{a}_{32}^{(2)}$	0 = $\bar{a}_{33}^{(2)}$	9 = $\bar{b}_3^{(2)}$

Zeilentausch der zweiten mit der dritten Zeile (hier nicht notwendig, nur zur Illustration):

	3	2	1	
2	3 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_1^{(1)}$
3	1 = $\bar{a}_{21}^{(2)}$	-2 = $\bar{a}_{22}^{(2)}$	0 = $\bar{a}_{23}^{(2)}$	9 = $\bar{b}_2^{(2)}$
1	-1 = $\bar{a}_{31}^{(2)}$	2 = $\bar{a}_{32}^{(2)}$	1 = $\bar{a}_{33}^{(2)}$	-1 = $\bar{b}_3^{(2)}$

Subtraktion des (-1)-fachen der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

	3	2	1	
2	3 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_1^{(1)}$
3	1 = $\bar{a}_{21}^{(2)}$	-2 = $\bar{a}_{22}^{(2)}$	0 = $\bar{a}_{23}^{(2)}$	9 = $\bar{b}_2^{(2)}$
1	-1 = $\bar{a}_{31}^{(2)}$	-1 = $\bar{a}_{32}^{(2)}$	1 = $\bar{a}_{33}^{(2)}$	8 = $\bar{b}_3^{(2)}$

Umbenennung der Elemente der letzten Zeile:

	3	2	1	
2	3 = $\bar{a}_{11}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{12}^{(1)}$	1 = $\bar{a}_{13}^{(1)}$	-4 = $\bar{b}_1^{(1)}$
3	1 = $\bar{a}_{21}^{(2)}$	-2 = $\bar{a}_{22}^{(2)}$	0 = $\bar{a}_{23}^{(2)}$	9 = $\bar{b}_2^{(2)}$
1	-1 = $\bar{a}_{31}^{(2)}$	-1 = $\bar{a}_{32}^{(2)}$	1 = $\bar{a}_{33}^{(2)}$	8 = $\bar{b}_3^{(2)}$

Als Ergebnis erhält man das Gleichungssystem $Ry = z$ mit

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Nun ist nur noch ein gestaffeltes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} y_3 &= 8 \\ y_2 &= \frac{9}{-2} = -4.5 \\ y_1 &= \frac{1}{3}(-4 - (-4.5) - 8) = -2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_1 &= x_3 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

Der GAUSS-Algorithmus: Es soll das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

mit invertierbarer Matrix A auf Dreiecksgestalt gebracht werden. Dies leistet der

GAUSS-Algorithmus zur Lösung von $Ax = b$

1. Eingangsdaten: $\tilde{a}_{ij}^{(1)} := a_{ij}, \tilde{b}_i^{(1)} := b_i, i, j = 1, \dots, n.$

2. Für $k = 1, \dots, n-1$ führe man durch:

a) Geeignete Zeilen-/Spaltenvertauschung (Pivot-Strategie) unter den $\tilde{a}_{ij}^{(k)}, \tilde{b}_i^{(k)}$ für $i, j = k, \dots, n.$

Bezeichnung der vertauschten Elemente: $\tilde{a}_{ij}^{(k)}, \tilde{b}_i^{(k)}.$

Nun gilt: $\tilde{a}_{kk}^{(k)} \neq 0.$

b) Für $j = k+1, \dots, n$ berechne man (Erzeugen von Nullen in Spalte k):

$$(i) \quad m_{jk} := \frac{\tilde{a}_{jk}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}},$$

$$(ii) \quad \tilde{a}_{ij}^{(k+1)} := \tilde{a}_{ij}^{(k)} - m_{jk} \tilde{a}_{ik}^{(k)} \quad \text{für } j = k+1, \dots, n,$$

$$(iii) \quad \tilde{b}_i^{(k+1)} := \tilde{b}_i^{(k)} - m_{ik} \tilde{b}_k^{(k)}.$$

3. Man setze zur Vereinheitlichung $\tilde{a}_{nn}^{(n)} := \tilde{a}_{nn}^{(n)}, \tilde{b}_n^{(n)} := \tilde{b}_n^{(n)}.$

Das resultierende Gleichungssystem lautet dann $Ry = z$ mit

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \dots & \dots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \tilde{a}_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1^{(1)} \\ \tilde{b}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{b}_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Bezeichnet man die insgesamt durchgeführte Spaltenpermutation mit $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, dann gilt $y_i = x_{\sigma_i}$ ($i = 1, \dots, n$) für die Lösung des gestaffelten Systems $Ry = z$.

Das L-R - Theorem

Ziel: Alle im Gauß-Algorithmus erforderlichen Operationen in Matrixnotation

Vorgehensweise:

Für $k=1, \dots, n$

(a) Zeilenvertauschung von A und B durch Multiplikation mit einer Permutationsmatrix P von links, d. h.

$$Ax = b \Leftrightarrow P \cdot A \cdot x = Pb$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$P \quad A \quad x \quad P \quad b$

$$\text{wenn } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Vertauschung}$$

(b) Spaltenvertauschung von PA durch die Multiplikation mit einer Permutationsmatrix Q. Es ist eine Umnummerierung der Unbekannten x_i notwendig.

$$PAQ Q^T x = Pb$$

$$(PAQ) y = c$$

$$\text{mit } \begin{cases} y = Q^T x \\ c = Pb \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$PA \quad Q$

(c) die Erzeugung von Nullen in der Spalte k geschieht durch die Multiplikation von PAQ und Pb mit einer Eliminationsmatrix L_k^{-1} von links

$$Ax = b \Leftrightarrow L_k^{-1} (PAQ) y = L_k^{-1} Pb$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{k+1,k} \dots m_{n,k}$

$$\text{mit } m_{ik} = \frac{\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \text{ Multiplikatoren}$$

$$\text{und } L_k^{-1} = 2I - L_k$$

Permutationsmatrizen P, Q:

- P führt Zeilentausch durch, wenn die Zeilen i und j der Einheitsmatrix vertauscht werden
- Q Spaltentausch
- Eliminationsmatrix für Spalte k

→ Anwendung des Gauß-Algorithmus liefert eine Dreieckszerlegung der Form:

$$PAQ = LR$$

Im einzelnen gelten in Matrixform folgende Beziehungen:

$$LR = \left(\prod_{i=n-1}^1 L_i^{-1} P_i \right) A \left(\prod_{j=1}^{n-1} Q_j \right) = PAQ$$

$$L = \left(\prod_{i=n-2}^2 P_i \right) L_1 \left(\prod_{j=2}^{n-1} P_j L_j \right) Q$$

Die Zerlegung gestattet die einfache Berechnung der Determinante:

$$\det(PAQ) = \det(LR)$$

$$\det(A) = \det(P^{-1}LRQ^{-1})$$

$$= \det(P^{-1}) \cdot \det(L) \cdot \det(R) \cdot \det(Q^{-1})$$

$$\text{mit } \det(P^{-1}) = (-1)^{a_z}$$

a_z : # Zeilentauschungen

$$\det(Q^{-1}) = (-1)^{a_s}$$

a_s : # Spaltentauschungen

$$\det(L) = 1$$

$$\det(R) = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$$

$$\rightarrow \det(A) = (-1)^{a_s + a_z} \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$$

Lösungen zu verschiedenen rechten Seiten lassen sich bei bekannter Dreieckszerlegung relativ effizient berechnen:

(nächste Seite)

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{(PAQ)}_{LR} \underbrace{(Q^T x)}_{y} = \underbrace{Pb}_c$$

$$\rightarrow L \cdot z = c \quad \text{mit} \quad R y = z$$

Vorgehensweise:

setze: $c = Pb \rightarrow c$

löse: $Lz = c \rightarrow z$

löse: $Ry = z \rightarrow y$

setze: $Qy = x \rightarrow x$

Bemerkung:

Effizient $\sim 2n$ Permutationen und n^2 Operationen zur Lösung der Dreiecksmatrix

$\sim n^3$ für die LR-Zerlegung

$\rightarrow n^3 + mn^2$ mit m : # Zeitschritte

$\Rightarrow m$ groß $\Rightarrow m$ dominant

Spezialfälle:

1) für symmetrische, positive, definite Matrizen

$$A = LL^T$$

2) Gauß'sche Ausgleichsrechnungen:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \Leftrightarrow A^T A x = A^T b$$

$\rightarrow$ Cholesky-Zerlegung

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Wenden Sie den GAUSS Algorithmus mit Restmatrix-Pivotisierung an.
- Geben Sie die Zerlegung der Matrix in der Form $PAQ = LR$ an, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, R eine obere Dreiecksmatrix und P und Q zwei Permutationsmatrizen sind.
- Bestimmen Sie schließlich die gesuchte Lösung x , indem Sie
 - die rechte Seite mit Hilfe der Matrix P permutieren,
 - ein gestaffeltes Gleichungssystem mit der Matrix L lösen,
 - ein gestaffeltes Gleichungssystem mit der Matrix R lösen und
 - den Lösungsvektor mit der Matrix Q permutieren.

Beispiel Aufgabe: Gauss Algorithmus (LR-Zerlegung)

(a) Gauss-Algorithmus $n=3, k=1,2$

Schritt 1: $k=1$

1	1	2	3	-4	(i) Zeilen/Spalten tauschen, so dass a_{23} zum Element $\tilde{a}_{11}^{(1)}$ wird
2	1	1	4	-1	
3	3	1	-1	6	

(ii)	2	3	2	1	-1	(ii) Nullen unter dem Pivotelement erzeugen → Speicherung der Multiplikatoren m_{ik} auf den jetzt mit Nullen belegten Plätzen
→	1	1/4	-9/4	3/4	-15/4	
	3	-1/4	5/4	13/4	23/4	$b_3^{(2)} = \tilde{b}_3^{(1)} - m_{31} \tilde{b}_1^{(1)} = 6 - (-1/4) \cdot (-1)$

$\tilde{a}_{32}^{(2)} = (3) - (-1/4)(1) = \tilde{a}_{32}^{(1)} - m_{31} \tilde{a}_{12}^{(1)} = 1 - (-1/4) \cdot 1 = 5/4$

Schritt 2: $k=2$

2	3	2	1	-1	(i) vgl. Schritt 1 Pivotelement diesmal $\tilde{a}_{33}^{(2)}$ → Multiplikator auch tauschen!
1	1/4	-9/4	3/4	-15/4	
3	-1/4	5/4	13/4	23/4	

(ii)	2	3	1	2	-1	* Spaltenpermutation (ii) vgl. oben hier: Subtraktion eines Vielfachen 2 von 3 → Speichern des Multiplikators m_{32}
→	2	4	1	1	-1	
	3	-1/4	13/4	5/4	23/4	
	1	1/4	3/4	-9/4	-15/4	

Beispiel Aufgabe Gauss-Algorithmus (LR-Zerlegung)

(b) Form $PAQ = LR$

mit L : untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen

R : obere Dreiecksmatrix

P, Q : Permutationsmatrizen

→ Matrizen L, R erhält man aus den Elementen $a_{ik}^{(2)}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/13 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 13/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & -33/13 \end{bmatrix}$$

→ Permutationsmatrizen P, Q dokumentieren die Zeilen bzw. Spaltenumtauschung:

$$P = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = [e_3, e_1, e_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Berechnung der Lösung x

Ausgangssystem: $Ax = b \rightarrow$ Zerlegung einer modifizierten Koeff. Matrix $\tilde{A}$ in L, R

$$PAQ = LR \Leftrightarrow A = P^{-1}LRQ^{-1} \Rightarrow P^{-1}LRQ^{-1}x = b$$

modifiziertes System: $Lz = c$

$$LRQ^{-1}x = \underbrace{Pb}_c$$

y
 z

(i) Permutation der rechten Seite (Zeilentausch):

$$c = Pb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(ii) Lösung des gestaffelten Systems $Lz = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

lösen von oben nach unten S. 44
 $z_1 = -1, z_2 = 6 + \frac{1}{4}z_1 = \frac{23}{4}$
...

(iii) Lösen des gestaffelten Systems: $Ry = z$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 13/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & -33/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 23/4 \\ -66/13 \end{bmatrix}$$

lösen von unten nach oben S. 44
 $y_3 = -66/13 : (-33/13) = 2$

(iv) Permutation des Lösungsvektors mit $Q (Q^{-1}x = y)$

$$x = Qy = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.2. Iterative Lösungsverfahren

Ziel: Anstatt eines direkten Lösungsverfahrens wird eine Iterationsvorschrift definiert, so dass ausgehend von einem (zufällig gewählten) Startwert $x^{(0)}$ eine Folge $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ liefert, die die Lösung von $Ax = b$ approximiert

Herausforderung: $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ mit $x = A^{-1}b$

Idee: Umformung von $Ax = b$ in eine Fixpunktgleichung $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$
→ Erzeugung eines Iterationsverfahrens

Allgemeine Umsetzung zur Bestimmung der Fixpunktgleichung

Ansatz: $A = N - P$ mit N regulär und möglichst einfach invertierbar

Mit $(N - P)x = b \Leftrightarrow Nx = b + Px$

$$\Leftrightarrow x = N^{-1}(b + Px) = N^{-1}b + N^{-1}Px$$

erhält man die Fixpunktgleichung: $x = Mx + d$

$$M = N^{-1}P; \quad d = N^{-1}b$$

→ x ist der Fixpunkt der Abbildung $f(x) = Mx + d$

Lösen der Fixpunktgleichung (Picard-Iteration):

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d \quad k = 1, 2, \dots$$

Konvergenzverhalten der iterierten Lösung: $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \rightarrow x$ mit x Lsg von $Ax = b$

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\|_2 = \|x^{(k+1)} - x\|_2$$

Fehler in
 L_2 -Norm

$$= \|Mx^{(k)} + d - (Mx + d)\|_2$$

$$= \|M(x^{(k)} - x)\|_2 \leq \|M\|_2 \cdot \|x^{(k)} - x\|_2$$

$$\leq \|M\|_2^2 \cdot \|x^{(k-1)} - x\|_2$$

$$\leq \|M\|_2 \cdot \|x^{(k-1)} - x\|_2$$

$$\dots \leq \|M\|_2^{k+1} \cdot \|x^{(0)} - x\|_2$$

und gegen Null, damit alles gegen Null geht

- Der Fehler der Folge $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ geht gegen Null, wenn $\|M\|_2 < 1$
- $\|M\|_2$ Matrix Norm ist assoziiert mit dem Spektralradius $\rho(M)$ - max. Eigenwerte von M -
 → die Iteration konvergiert global, wenn $\rho(M) < 1$ gilt.

Wandelswert:

- leicht invertierbares N
- Iterationsverfahren mit möglichst kleinem Spektralradius $\rho(M) \ll 1$ → Schnellere Konvergenz

Bemerkungen:

Konvergenzmaß $R := -\log_{10} [\rho(M)]$ mit $m \in \mathbb{N}$

gilt für $k > m/R$ folgendes

$$\frac{\|x^{(k)} - x\|_2}{\|x^{(0)} - x\|_2} \leq 10^{-m}$$

Fehler im k -Schritt

Fehler des Startwertes

Bsp. $m=6$ Schnell konvergierend

$m > 6$ Langsamer konvergierend, es werden mehr Schritte k benötigt

5.2.1. Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

Voraussetzung: $A = N - P$

D : Diagonale

L : linke Seite

R : rechte Seite

Annahme: $A = D - L - R$

Dann gilt für $N = D$ und $P = L + R$

Iterationsmatrix $H_J = M = N^{-1}P = D^{-1}(L + R)$

Iterationsvorschrift $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{n_{ij}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

für $i = 1, \dots, n$

5.2.2. Das Gauß-Seidel Verfahren (Einzelschrittverfahren)

Voraussetzung: $A = N - P$

Annahme: $A = D - L - R$

Dann gilt für $N = D - L$ und $P = R$

Iterationsmatrix $H_{GS} = M = N^{-1}P = (D - L)^{-1}R$

Iterationsvorschrift $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ij}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

für $i = 1, \dots, n$

Beispiel

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{aligned}$$

Jakobi

$$\begin{aligned} x_1^{12} &= (b_1 - a_{12}x_2^{01} - a_{13}x_3^{01}) / a_{11} \\ x_2^{12} &= (b_2 - a_{21}x_1^{01} - a_{23}x_3^{01}) / a_{22} \\ x_3^{12} &= (b_3 - a_{31}x_1^{01} - a_{32}x_2^{01}) / a_{33} \end{aligned}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{12} &= (b_1 - a_{12}x_2^{01} - a_{13}x_3^{01}) / a_{11} \\ x_2^{12} &= (b_2 - a_{21}x_1^{12} - a_{23}x_3^{01}) / a_{22} \\ x_3^{12} &= (b_3 - a_{31}x_1^{12} - a_{32}x_2^{12}) / a_{33} \end{aligned}$$

Iteration Nr. 1
Iteration Nr. 2

Algorithmus:

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $a_{ii} \neq 0$. Die Aufspaltung $A = N - P$ mit regulärer Matrix N liefert ein Iterationsverfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)}$:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{mit} \quad M := N^{-1}P, \quad d := N^{-1}b.$$

JACOBI-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

Matrizen	$A = D - L - R = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$ $N = D \Rightarrow P = L + R, \quad M = D^{-1}(L + R) =: H_J$
Iteration	$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n$
Konvergenz	A strikt oder irreduzibel diagonaldominant

GAUSS-SEIDEL-Verfahren (Einzelschrittverfahren)

Matrizen	$N = D - L \Rightarrow P = R, \quad M = (D - L)^{-1}R =: H_{GS}$
Iteration	$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n$
Konvergenz	A strikt oder irreduzibel diagonaldominant oder A symmetrisch und positiv definit oder A M-Matrix mit Bedingung der Stieltjes-Matrix