

II. Interpolation und Approximation von Funktionen am Beispiel des Aktionspotentials

Beispiel: Messdaten aus einem Experiment

$t(\text{ms})$	0	5	15	25	50	100	200	300
$V_m(\text{mV})$	-70,00	-31,65	12,436	28,44	15,510	-37,676	-67,694	-69,871

Ziel ist keine exakte Funktion, sondern approximativ

-> Messfehler wahrscheinlich da x, xx unwahrscheinlich genau zu wissen

Ziel: $f(t) = V_m(t)$, so dass an Stelle t_i ($i = 1 \dots N$)

die approximierte Funktion die Werte $f(t_i)$ erfüllt.

2.1. Polynomapproximation

Definition 2.1: Polynom n -ten Grades in der Variable t ist eine Linearkombination des ^{nur 1 Term} Monome $1, t, t^2, \dots$

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

n : Grad des Polynoms
 a : Koeffizient des Polynoms
 $a_n \neq 0$ Höchstkoeffizient

$$P_3(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 9 \cdot t^3, \text{ wenn } 9=0 \text{ ist es kein } P_3!$$

Definition 2.2: Die Menge aller Polynome von Höchstgrad n heißt Π_n .

$$[\Pi_n = \{1, 2, t, 3t, 5t + 6t^2, \dots\}]$$

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom kann eindeutig in Linearfaktoren zerlegt werden,

$$\text{d.h. } P_n(t) = a_n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $i = 1, \dots, n$

$$(t-2)(t+3) = t^2 - 2t + 3t - 6 = t^2 + t - 6$$

Bemerkung:

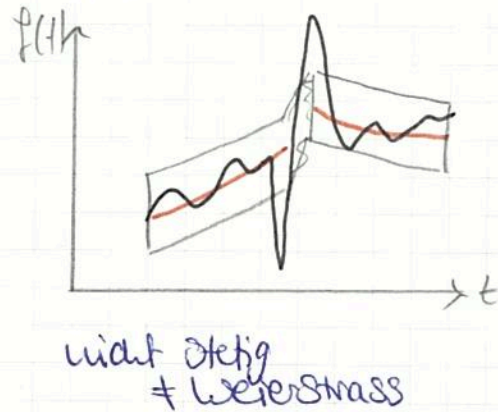
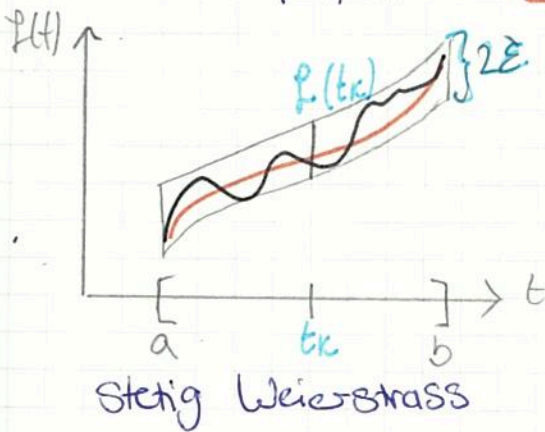
- t_i sind die Nullstellen von $P_n(t)$
- hat ein Polynom n -ten Grades insgesamt $n+1$ Nullstellen, dann handelt es sich bei dem Polynom um das Nullpolynom $P_n(t) \equiv 0$

Grundlage für die Polynominterpolation:

Approximationssatz von Weierstrass:

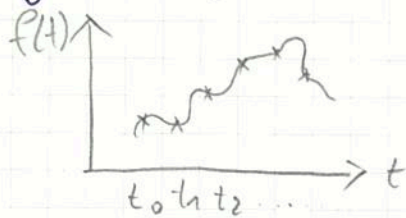
Für jede stetige Funktion $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und zu jeder Genauigkeit $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $P_n(t)$, so dass $\forall t \in [a, b]$ gilt:

$$|f(t) - P_n(t)| < \varepsilon$$



2.2. Interpolation mit Lagrange

Aufgabe: $P_n(t) \in \Pi_n$, so dass $P_n(t_i) \stackrel{!}{=} f_i$



oder Messwerte

t_i : Stützstelle

f_i : Stützwert

Lösung: LAGRANGE Interpolationspolynom

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot L_i(t)$$

$t_k \in$ Stützstelle, dann gilt: $P_n(t_k) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(t_k) \stackrel{!}{=} f_k$

Das ist erfüllt, wenn für $L_i(t)$ folgendes gilt:

$$L_i(t_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (*)$$

LAGRANGE Polynome sind definiert als:

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(t - t_j)}{(t_i - t_j)} \quad *$$

Für diese Polynome gilt: $L_i(t_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(t_k - t_j)}{(t_i - t_j)} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$

Bestimmung des Interpolationsfehlers:

$f \in C^{n+1}([a, b])$, $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ und $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}$

$P_n(t) \rightarrow$ LAGRANGE'SCHES Interpolationspolynom

Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$: $f(t) - P_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (t - t_k) \underbrace{f^{(n+1)}(\xi)}_{\leq M}$

Folgerung: (Fehlerschätzer)

$$| \text{Fehler} | = | f(t) - P_n(t) | \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (t - t_k) \quad \text{mit}$$

$$M = \max_{\xi \in [a, b]} | f^{(n+1)}(\xi) |$$

-8-

2.3. Interpolation mit Newton Polynom

Newton'sche Interpolationspolynom:

$$P_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} (t - t_j) \quad (**)$$

Aus (**): $P_n(t) = \underbrace{a_0}_{f_0} + \underbrace{a_1}_{f_{01}}(t - t_0) + \underbrace{a_{12}}_{f_{012}}(t - t_0)(t - t_1) + \dots + \underbrace{a_{12\dots n}}_{f_{012\dots n}}(t - t_0) \dots (t - t_{n-1})$

$f_0, f_{01}, f_{012}, \dots, f_{012\dots n}$ können aus dem folgenden Steigungsschema berechnet werden:

i	t_i	$k=0$ f_i	$k=1$ $f_{i-1,i}$	$k=2$ $f_{i-2,i-1,i}$	$\dots$ $k=3 \dots$
0	t_0	f_0			
1	t_1	f_1	f_{01}		
2	t_2	f_2	f_{12}	f_{012}	
3	t_3	f_3	f_{23}	f_{123}	f_{0123}
4	t_4	f_4	f_{34}	f_{234}	f_{1234}

→ im Vgl. zu Lagrange ist es einfacher einen Stützpunkt hinzuzunehmen (Bsp. $i=4$)

→ bei Lagrange muss komplett neu gerechnet werden, hier nur (blau)

Es folgt im einzelnen für die Dividierten Differenzen:

$$f_{i-k, \dots, i} = \frac{f_{i-(k-1), \dots, i} - f_{i-k, \dots, i-1}}{t_i - t_{i-k}}$$

Bsp: $f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} \quad ; \quad f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{t_2 - t_0}$

~ Approximation für eine Ableitung (Sekante)

Bemerkung: a_k entsprechen der Diagonalelemente des Steigungsschemas $a_k = f_{0\dots k}$ für $k=1, \dots, n$

Algorithmus für das Newtonsche Interpolationsverfahren

1) Eingangsdaten: $t_0, t_1, \dots, t_n$

2) Initialisieren: $a_0 = f_0$

3) Man berechne für $k=1, \dots, n$: $g_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$, $i=k, \dots, n$
 $f_i = g_i$ und $a_k = g_k \leftarrow$ gewachte Koeffizienten (Diagonale)

→ g_i 's repräsentieren die Spalten im Steigungsschema

2.4. Horner Schema & Neville Algorithmus

Ziel: Auswertung eines Polynoms an der Stelle $t = \hat{t}$

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n$$

Es können sowohl der Funktionswert als auch alle Ableitungen des Polynoms an dieser Stelle berechnet werden.

Idee: Sukzessives Ausklammern

$$P_n(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + t(\dots + t(a_{n-1} + t a_n))))$$



Beispiel: $n=2$

$$P_2(t) = a_0 + t(a_1 + t a_2) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

Vorteil: Die Berechnung wird beschleunigt, da weniger Multiplikationen notwendig sind (Potenzen werden vermieden)

	Klassisch	HORNER	(Additionen bleiben gleich, aber sind numerisch weniger aufwändig)
"*" "+"	$2n-1$ n	n n	

Mit Koeffizienten: $C_0 := a_n$, $C_k = a_k + C_{k+1} \hat{t}$, $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$
 lässt sich ein Polynom

$$P_{n-1}(t) = \sum_{i=1}^n C_i t^{i-1} = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_n t^{n-1}$$

bilden, so dass gilt:

$$P_n(t) = C_0 + (t - \hat{t}) P_{n-1}(t)$$

$$P_n(t) = P_n(\hat{t}) + (t - \hat{t}) P_{n-1}(t)$$

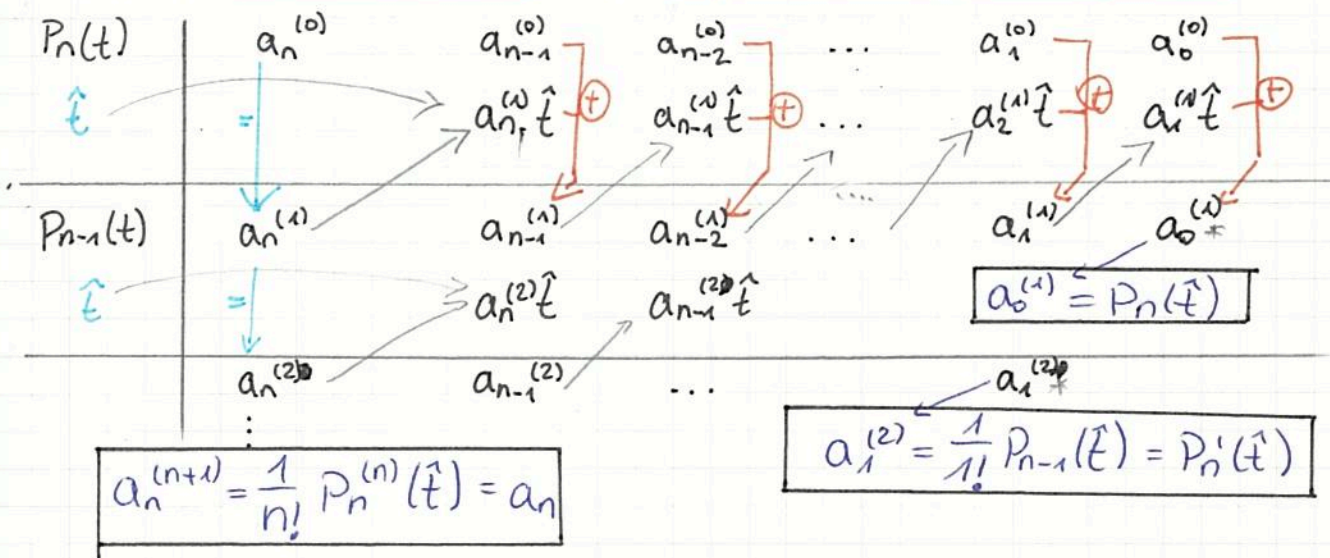
Damit folgt: $\rightarrow P_n(\hat{t}) = C_0$

$$\rightarrow P_{n-1}(t) = \frac{P_n(t) - P_n(\hat{t})}{t - \hat{t}} \xrightarrow{t \rightarrow \hat{t}} P'_n(\hat{t}) = P_{n-1}(\hat{t})$$

Man sieht: rekursiv können $P_n(\hat{t})$, $P'_n(\hat{t})$, $P''_n(\hat{t})$, ... berechnet werden

Anschauliche Darstellung des Horner Schemas

Rekursion: $a_n^{(m+1)} := a_n^{(m)}$, $a_k^{(m+1)} := a_k^{(m)} + a_{k+1}^{(m)} \hat{t}$



→ mit dem HORNER Schema kann man also das Polynom sowie alle Ableitungen effizient an einer Stelle $\hat{t}$ auswerten.

Gleichzeitig erhält man eine Darstellung der TAYLOR-Reihenentwicklung um den Punkt $t = \hat{t}$:

$$P_n(t) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(t - \hat{t}) + a_2^{(3)}(t - \hat{t})^2 + \dots + a_n(t - \hat{t})^n$$

Beispiel Aufgabe:

Polynom $P_3(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6$
und Ableitung an Stelle $\hat{t} = 2$ mit HORNER-S. auswerten

$n=3$

$$P_3(t) \rightarrow a_3^{(0)} = 1 \quad a_2^{(0)} = -2 \quad a_1^{(0)} = -5 \quad a_0^{(0)} = 6$$

$$\hat{t}=2 \quad \downarrow \quad \hat{t}a_3^{(1)} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \hat{t}a_2^{(1)} = 2 \cdot 0 = 0 \quad \hat{t}a_1^{(1)} = 2 \cdot (-5) = -10$$

$$P_2(t) \rightarrow a_3^{(1)} = 1 \quad a_2^{(1)} = -2 + 2 = 0 \quad a_1^{(1)} = -5 \quad a_0^{(1)} = 6 - 10 = -4 = P_3(2)$$

$$\hat{t}=2 \quad \downarrow \quad \hat{t}a_3^{(2)} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \hat{t}a_2^{(2)} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P_1(t) \rightarrow a_3^{(2)} = 1 \quad a_2^{(2)} = 2 \quad a_1^{(2)} = 4 - 5 = -1 = P_3'(2)$$

$$\hat{t}=2 \quad \downarrow \quad \hat{t}a_3^{(3)} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$P_0(t) \rightarrow a_3^{(3)} = 1 \quad a_2^{(3)} = 2 = \frac{1}{2} P_3''(2) \Rightarrow P_3''(2) = 4$$

$$a_3^{(4)} = 1 = \frac{1}{6} P_3'''(2) = a_3 \Rightarrow P_3'''(2) = 6$$

$$\text{Lösung: } P_3(2) = -4; \quad P_3'(2) = -1; \quad P_3''(2) = 4; \quad P_3'''(2) = 6$$

TAYLOR-Reihenentwicklung:

$$P_3(t) = -4 + (-1)(t-2) + 2(t-2)^2 + 1(t-2)^3$$

NEVILLE Algorithmus:

Ziel: Auswertung eines Interpolationspolynoms zu gegebenen Stützstellen t_i und gegebenen Stützwerten f_i an einer Stelle $t = \hat{t}$ ohne aufstellen des Polynoms

gegeben: Eingangsdaten: $t_0, t_1, \dots, t_n$ Stützstellen
 $f_0, f_1, \dots, f_n$ Stützwerte
 $\hat{t}$ Auswertungsposition

Algorithmus: für $k=1, \dots, n$
für $i=0, \dots, n-k$ berechne man
(a) $g_i := f_i + (\hat{t} - t_i) \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+k} - t_i}$
(b) $f_i := g_i$ für nächstes k
end

end

→ es ist $P_n(\hat{t}) = f_0$

Beispiel Aufgabe

i	0	1	2	3
t_i	0,0	1,4	2,6	3,9
f_i	0,4	1,5	1,8	2,6

→ NEWTON-Interpolationspolynom ermitteln
an Stelle $t=2$ auswerten

→ direkt mit Werten mit NEVILLE-Algorithmus
interpolierten Wert an $t=2$ berechnen

I NEWTON:

geg.: Stützstellen t_i , Stützwerte $f_i \rightarrow$ ges.: Funktion durch konkrete Punkte

Stufungsschema

i t_i f_i $f_{i-1,i}$ $f_{i-2,i}$ $f_{i-3,i}$ $f_{i-4,i}$

0	0,0	0,4				
1	1,4	1,5	0,786			
2	2,6	1,8	0,25	-0,206		
3	3,9	2,6	0,615	0,146	0,0903	
k	—	0	1	2	3	

Berechnungsvorschrift
"dividierte Differenzen"

$$f_{i-k,i} = \frac{f_{i-(k-1),i} - f_{i-k,i-1}}{t_i - t_{i-k}}$$

Polynom:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= f_0 + f_{01}(t-t_0) + f_{012}(t-t_0)(t-t_1) \\ &\quad + f_{0123}(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \\ &= 0,4 + 0,786(t-0) + 0,206t(t-1,4) \\ &\quad + 0,0903t(t-1,4)(t-2,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=1, i=k, \dots, n=3 \quad i=1: f_{01} &= \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} = \frac{1,5 - 0,4}{1,4 - 0,0} = 0,786 \\ i=2: f_{12} &= \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = 0,25 \\ i=3: f_{23} &= \frac{f_3 - f_2}{t_3 - t_2} = 0,615 \\ k=2, i=2,3 \quad i=2: f_{012} &= \frac{f_{12} - f_{01}}{t_2 - t_0} = -0,206 \quad i=3: f_{123} = \frac{f_{23} - f_{12}}{t_3 - t_1} = 0,146 \\ k=3, i=3 \quad f_{0123} &= \frac{f_{123} - f_{012}}{t_3 - t_0} = 0,0903 \end{aligned}$$

Auswertung an der Stelle $t=2$: $P_3(2) \approx 1,6598$

II NEVILLE: $n=3$, Algorithmus vgl. rechts

$$\begin{aligned} k=1, i=0,1,2 \quad i=0: g_0 &= f_0 + (t-t_0) \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} = 0,4 + (2-0) \frac{1,5-0,4}{1,4-0,0} = 1,972 := f_0 \\ i=1: g_1 &= f_1 + (t-t_1) \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = 1,62 := f_1 \quad \text{für } k=2! \\ i=2: g_2 &= f_2 + (t-t_2) \frac{f_3 - f_2}{t_3 - t_2} = 1,431 := f_2 \\ k=2, i=0,1 \quad i=0: g_0 &= f_0 + (t-t_0) \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} = 1,724 := f_0 \\ i=1: g_1 &= f_1 + (t-t_1) \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = 1,597 := f_1 \quad \text{für } k=3!! \\ k=3, i=0: g_0 &= f_0 + (t-t_0) \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} = \underline{1,6598} := f_0 = P_3(2) \end{aligned}$$

2.5. L_2 -Approximation und Orthogonalpolynome

L_2 -Funktion: Menge der L_2 -Funktionen in $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch die Menge aller Funktionen $f(t)$, für die mit Wichtungsfunktionen $w(t) \geq 0$ und $\forall x \in (a,b)$
 $\int_a^b w(t) f(t) dt < \infty$ gilt.

Mit $w(t) \equiv 1$ ist der Ausdruck identisch mit $\|f(t)\|_{2,[a,b]}^2$
 $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$: $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$
 $= \langle x, x \rangle$

Inneres Produkt: Die Norm kann als gewichtetes inneres Produkt (Bilinearform) beschrieben werden.

→ Mit $\Omega = [a,b]$ und $\langle f(t), g(t) \rangle_{2,\Omega} = \int_a^b w(t) f(t) g(t) dt$
gilt: $\|f(t)\|_{2,\Omega}^2 = \langle f(t), f(t) \rangle_{2,\Omega} = \int_a^b w(t) f^2(t) dt$

L_2 -Approximation:

Man sucht ein Polynom $Q_n(t) \in \Pi_n$, das den Fehler im Sinne der L_2 -Norm minimiert.

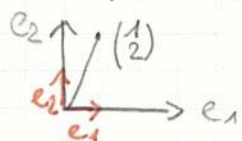
$$\|f(t) - Q_n(t)\|_2 \rightarrow \min_{Q_n(t) \in \Pi_n}$$

→ Ersetzt man das Integral $\int_a^b \dots dt$ mit der Summe über aller Stützstellen, nimmt an das $w(t) = 1$ ist, so erhält man die diskrete L_2 -Approximation (Fall 3)

2.5.2. Minimierungsproblem

Ansatz: $Q_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i p_i(t)$ mit $p_i(t)$: $n+1$ unabh. Basispolyn.
 c_i : $n+1$ unbek. Koeff.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$$



$$\|\underline{e}_1\| = \|\underline{e}_2\| = 1$$

orthonormale Basis

$$Q_n(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

Monome: $1, t, t^2, \dots, t^n \rightarrow$ Basisfunktionen

ORTHOGONAL: $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = 0$
 $\|\underline{e}_1\| = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle = 1 = \langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle$

2. Polynome sind orthogonal zueinander, wenn

$$\langle P_i(t), P_j(t) \rangle_{2,2} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

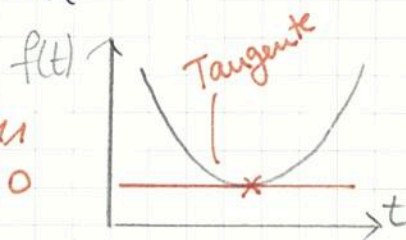
Dann gilt für die Minimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} \|f(t) - Q_n(t)\|_{2,2}^2 &= \langle f(t) - Q_n(t), f(t) - Q_n(t) \rangle_{2,2} \\ &= \langle f, f \rangle_{2,2} - \langle f, Q_n \rangle_{2,2} - \langle Q_n, f \rangle_{2,2} + \langle Q_n, Q_n \rangle_{2,2} \\ &= \langle f, f \rangle_{2,2} - 2 \langle f, Q_n \rangle_{2,2} + \langle Q_n, Q_n \rangle_{2,2} \\ &= \langle f, f \rangle_{2,2} - 2 \langle f, \sum_{i=0}^n c_i P_i \rangle_{2,2} + \langle \sum_{i=0}^n c_i P_i, \sum_{j=0}^n c_j P_j \rangle_{2,2} \\ &= \|f\|_{2,2}^2 - 2 \sum_{i=0}^n c_i \langle f, P_i \rangle_{2,2} + \sum_{i,j=0}^n c_i c_j \langle P_i, P_j \rangle_{2,2} \\ &= \Phi(\underline{c}_0, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n) \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_j} = 2 \left[\sum_{i=0}^n c_i \langle P_i(t), P_j(t) \rangle_{2,2} - \langle f, P_j(t) \rangle_{2,2} \right]$$

Termin 3
 Unbekannte

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 + 2 \\ &= x^2 - 6x + 11 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 6 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\rightarrow x = 3 \end{aligned}$$



Mit: $A = [\langle P_i(t), P_j(t) \rangle_{2,2}]_{i,j=0}^n$

$$\underline{x} = [c_0, c_1, \dots, c_n] \quad \text{und} \quad \underline{b} = [\langle f(t), P_0(t) \rangle_{2,2}, \dots, \langle f(t), P_n(t) \rangle_{2,2}]$$

→ Lösung des Minimierungsproblems ist die Lösung des linearen Gleichungssystems: $A \underline{x} = \underline{b}$

* c_i kann rausgezogen werden, da unabh. von t

$$\begin{aligned}\langle Q_n(t), f(t) \rangle_{2,n} &= \int_a^b w(t) Q_n(t) f(t) dt \\ &= \int_a^b w(t) \left(\sum_{i=0}^n c_i P_i(t) \right) f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b w(t) P_i(t) f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \langle P_i(t), f(t) \rangle_{2,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle Q_n(t), Q_n(t) \rangle_{2,n} &= \langle \sum_{i=0}^n c_i P_i(t), \sum_{i=0}^n c_i P_i(t) \rangle_{2,n} \\ &= \int_a^b w(t) \left(\sum_{i=0}^n c_i P_i(t) \right) \left(\sum_{i=0}^n c_i P_i(t) \right) dt \\ &= \int_a^b w(t) [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n] \cdot [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n] dt\end{aligned}$$

Beispiel:

$$[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3] [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3]$$

$$\begin{aligned}&= c_0^2 + c_0 c_1 + c_0 c_2 t^2 + c_0 c_3 t^3 + c_1 c_0 t + c_1^2 t^2 + c_1 c_2 t^3 + c_1 c_3 t^4 \\ &\quad + c_2 c_0 t^2 + c_2 c_1 t^3 + c_2^2 t^4 + c_2 c_3 t^5 + c_3 c_0 t^3 + c_3 c_1 t^4 + c_3 c_2 t^5 \\ &\quad + c_3^2 t^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= c_0^2 + 2c_0 c_1 t + (2c_0 c_2 + c_1^2) t^2 + (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) t^3 \\ &\quad + (2c_1 c_3 + c_2^2) t^4 + 2c_2 c_3 t^5 + c_3^2 t^6\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=0}^3 c_i c_j t^i t^j$$

$j \setminus i$	0	1	2	3
0	$c_0^2 t^0$	$c_0 c_1 t^1$	$c_0 c_2 t^2$	$c_0 c_3 t^3$
1	$c_1 c_0 t^1$	$c_1^2 t^2$	$c_1 c_2 t^3$	$c_1 c_3 t^4$
2	$c_2 c_0 t^2$	$c_2 c_1 t^3$	$c_2^2 t^4$	$c_2 c_3 t^5$
3	$c_3 c_0 t^3$	$c_3 c_1 t^4$	$c_3 c_2 t^5$	$c_3^2 t^6$

Aufgabe

$$\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = \int_a^b w(t) P_i(t) P_j(t) dt = \begin{cases} p_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_n \end{bmatrix} ; A^{-1} \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Wenn $P_i(t)$ keine Funktion wäre, sondern ein Vektor?

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} a_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

für $a_i=1$ wäre dies der Fall, wenn x_i mit $x=1, \dots, n$ eine Orthonormalbasis bilden würde

2.5.3 Orthogonalpolynome

Orthogonalpolynome mit $\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$ werden durch die Wahl der Gewichtungsfunktion charakterisiert.

Berechnet werden können diese mit Hilfe einer Rekursionsformel:

Beispiel:

$w(t)$ vgl. S.13

1) Legendre Polynome

$$w(t)=1, [a,b]=[-1,1], P_0(t)=1, P_1(t)=t$$

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} t \cdot P_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t) \quad \frac{3}{2} t \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$\text{Bsp: } P_2(t) \stackrel{n=1}{=} \frac{3}{2} t \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \overbrace{\left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right)}^{P_2(t)} \overbrace{t}^{P_1(t)} dt = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} t^3 - \frac{1}{2} t dt = \left[\frac{3}{8} t^4 - \frac{1}{4} t^2 \right]_{-1}^1 = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 \overbrace{\left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right)}^{P_2(t)} \overbrace{1}^{P_0(t)} dt = \left[\frac{3}{6} t^3 - \frac{1}{2} t \right]_{-1}^1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{6} + \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \overbrace{\left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right)}^{P_2(t)} \overbrace{\left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right)}^{P_2(t)} dt &= \int_{-1}^1 \frac{9}{4} t^4 - \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{4} dt \\ &= \left[\frac{9}{20} t^5 - \frac{3}{6} t^3 + \frac{1}{4} t \right]_{-1}^1 = \frac{9}{20} - \frac{3}{6} + \frac{1}{4} + \frac{9}{20} - \frac{3}{6} + \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \langle P_0, P_2 \rangle = 0; \langle P_1, P_2 \rangle = 0; \langle P_2, P_2 \rangle \neq 0$$

$$? w(t) = P_0 - P_n$$

$\hookrightarrow$ für orthogonal Polynom

Orthogonalpolynome

Besonders geeignet für die Approximation von Funktionen sind Basispolynome, die bezüglich des L_2 -Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

paarweise senkrecht aufeinander stehen, also:

$$\langle P_i, P_k \rangle \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq k, \\ > 0 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Zu jeder Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ entsteht durch diese Forderung ein Polynomsystem (Orthogonalpolynome). Die gebräuchlichsten Orthogonalpolynome sind in der folgenden Tabelle mittels Rekursionsformeln ausgehend von den ersten beiden Polynomen angegeben.

$w(x)$	$[a, b]$	Rekursionsformel (Name)
1	$[-1, 1]$	$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$ $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x)$ (LEGENDRE-Polynome)
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$ $T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$ (TSCHEBYSCHEFF-Polynome 1. Art)
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x,$ $U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x)$ (TSCHEBYSCHEFF-Polynome 2. Art)
e^{-x^2}	$(-\infty, +\infty)$	$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x,$ $H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x)$ (HERMITE-Polynome)
e^{-x}	$[0, \infty)$	$L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1,$ $L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \cdot [(2n+1-x) \cdot L_n(x) - n \cdot L_{n-1}(x)]$ (LAGUERRE-Polynome)