

Einführung in die Kontinuumsbiomechanik

Skript

Laura Schwenkel

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Kontinuumsbiomechanik	3
1.1	Motivation und Einordnung	3
1.1.1	Sehne	3
1.1.2	Muskelgewebe	3
1.2	Der Begriff Kontinuum	3
1.2.1	Abgrenzung diskret vs. Kontinuum	3
1.2.2	Definition	4
1.2.3	Phänomenologisches Konzept	4
1.2.4	Zentrale Fragestellungen	4
1.2.5	Klassifizierung von Festkörper, Fluid oder Gas	4
1.3	Konfiguration und Deformation	5
1.3.1	Konfigurationen	5
1.3.2	Der Deformationsgradient	6
1.3.3	Dehnung/Verzerrung	8
1.4	Die Lagrangesche und Eulersche Beschreibung	10
1.4.1	Die materielle Zeitableitung	11
1.4.2	Materieller und räumlicher Geschwindigkeitsgradient	13
1.5	Querschnittsflächen	13
2	Bilanzgleichungen	14
2.1	Bilanzgleichungen für die Lagrangesche Betrachtungsweise	15
2.2	Bilanzgleichungen für die Eulersche Betrachtungsweise	16
2.3	Blutfluss durch die Arterie	17
2.4	Thermomechanische Bilanzgleichungen	19
2.4.1	Die Massenbilanz	19
2.4.2	Impulsbilanz	20
2.5	Das Konzept der Spannung	22
2.6	Thermodynamische Bilanzgleichungen	23
2.6.1	Energiebilanz	23
2.6.2	Entropieungleichung	25
2.7	Zusammenfassung der Bilanzgleichungen (lokal)	26

3	Konstitutivgesetze – Materialmodellierung	27
3.1	Prinzip des Determinismus	27
3.2	Prinzip der materiellen Objektivität	27
3.3	Prinzip der Dissipation	29
3.3.1	Clausius-Duhem-Ungleichung (lokal, Eulersche Betrachtungsweise)	29
3.4	Konstitutives Verhalten von Biomaterialien	30
3.4.1	Bindegewebe - als Basis für viele Weichgewebe	31
3.4.2	Skelettmuskelmodellierung	31
3.4.3	Modelleinschränkungen bei der F-l/F-v -Kurve	36
3.4.4	Thermo(visko)elastische Effekte in Skelettmuskeln	37

1 Grundlagen der Kontinuumsbiomechanik

1.1 Motivation und Einordnung

1.1.1 Sehne

- Aufgabe:
 - Verbindung zwischen Knochen- und Muskelgewebe
 - Speicherung und Freigabe von Energie → wichtig für Bewegung
- Geometrie: lang, dünn, gerade → Reduzierung auf 1D Objekt vertretbar
- Materialeigenschaften:

$$\sigma = k \cdot \epsilon \Leftrightarrow F = k \cdot d \quad (1)$$

mit Federkonstante d

1.1.2 Muskelgewebe

- Muskelaufbau ist eigentlich zu komplex um es in einem 1D-Modell zu modellieren
- Besonderheit: Muskel kann sich aktiv kontrahieren und Kraft generieren.
- kleinste kraftproduzierende Einheit: Sarkomer

1.2 Der Begriff Kontinuum

1.2.1 Abgrenzung diskret vs. Kontinuum

Es hängt von der Fragestellung ab, ob es sich um ein diskretes oder ein um ein Problem der Kontinuumsmechanik handelt.

Tabelle 1: Diskret oder Kontinuum?

eher diskret	eher Kontinuum
Federn mit endlicher Anzahl von Massepunkten und Komponenten ($N \in \mathbb{N}$)	Balken mit unendlicher Anzahl von betrachteten Massepunkten ($R \in \mathbb{R}$)
Feder aus dem Lehrbuch mit Gesamtmasse und Gesamtsteifigkeit → Deformationsgröße	3D-Feder mit verteilter Masse und Materialeigenschaften → Deformation an jedem Punkt
mikroskopischer Blickpunkt (Skala im nm-Bereich): Kollagen, Elastin, Proteoglykase → diskrete Menge an Punkten → Mikromechanik	makroskopischer Blickpunkt (Skala im cm-Bereich): Kontinuumskörper mit modelliertem Punkt (gemittelte Mikrostruktur) → kontinuierliche Betrachtung → Kontinuumsbiomechanik

1.2.2 Definition

Kontinuum = mathematische Idealisierung der real auftretenden (diskontinuierlichen) Mikrostruktur der Materie, die bei der Analyse von makroskopischen Problemen sinnvoll ist

1.2.3 Phänomenologisches Konzept

- Mathematische Beschreibung ($y = f(x)$) von physikalischen Betrachtungen basiert auf der Benutzung von makroskopischen Eigenschaften
- makroskopische Größen:
 - Temperatur
 - Energie
 - Entropie
 - Verzerrungen
 - Spannungen

1.2.4 Zentrale Fragestellungen

Deformation ist die zentrale Größe.

1. Wie beschreibt man die (endliche) Deformation eines Kontinuums mittels mathematischer Werkzeuge?
 - **Kinematik**: behandelt die Geometrie der Bewegung
2. Welche physikalischen Gesetze beschreiben das Verhalten des Kontinuums?
 - **Bilanzgleichung**: Grundaxiome der Mechanik (z.B. Newtonsche Grundgesetz) gelten für alle Körper
 - Bilanzsätze für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie
3. Wie verhalten sich verschiedene Materialien auf externe Einflüsse (Krafteinwirkung, Temperatur, ...)?
 - **Materialtheorie**: Charakterisiert oder konstituiert (makroskopisch) das individuelle Materialverhalten bestimmter Körper, z.B. elastisches Verhalten von Gummi, viskoelastisches Verhalten von Knorpel

1.2.5 Klassifizierung von Festkörper, Fluid oder Gas

Bilanzsätze und die allgemeinen Konzepte der Materialtheorie gelten für alle Materialien egal ob in festem, flüssigen oder gasförmigen Zustand.

- Festkörper: Referenzkonfiguration ist bekannt.
- Fluid: Referenzkonfiguration ist unbekannt.
- Gas: Referenzkonfiguration ist unbekannt, aber es existiert homogene Verteilung.

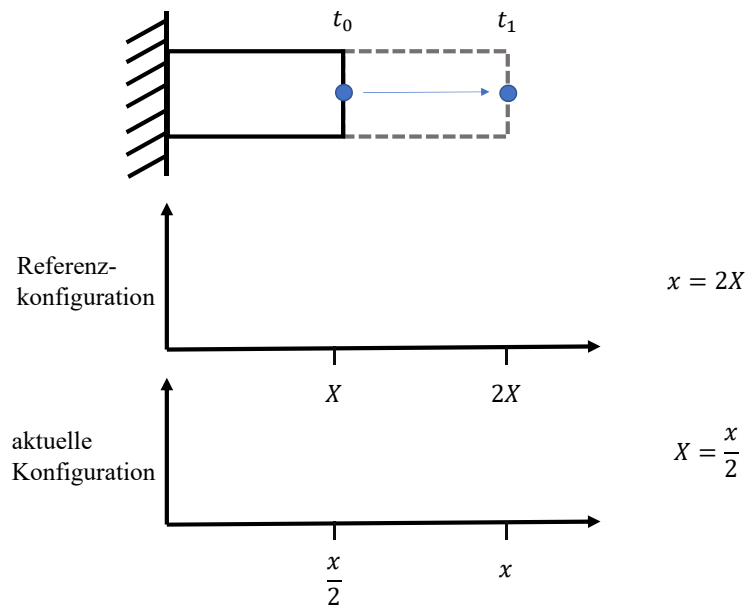


Abbildung 1: Veranschaulichung von verschiedenen Konfigurationen und welche Größen sich dabei entsprechen

1.3 Konfiguration und Deformation

1.3.1 Konfigurationen

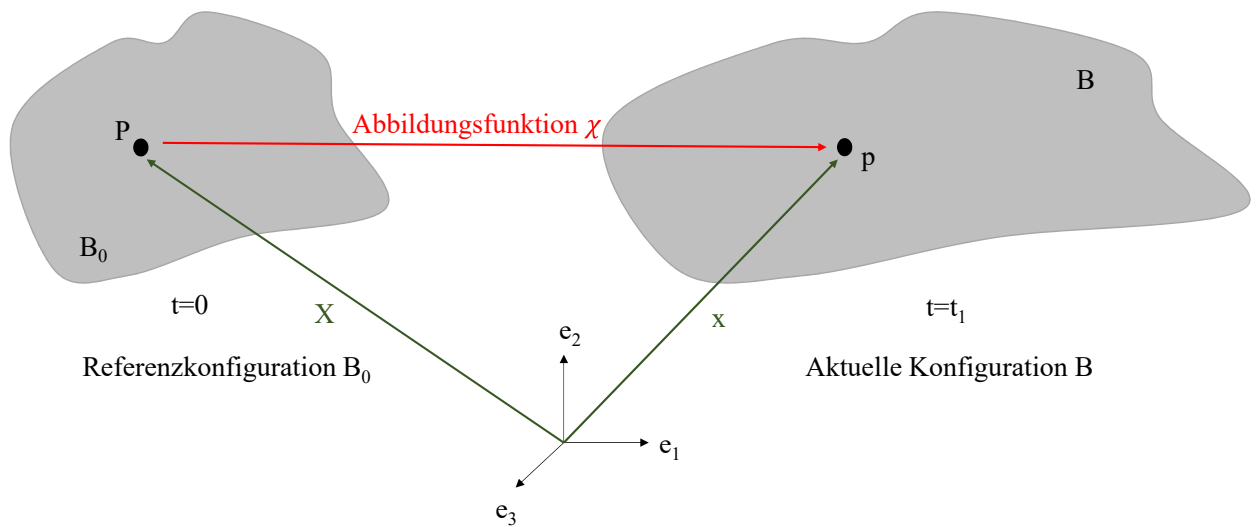
- Körper $B \in \mathbb{R}^3$
 - mit Ausgangslage B_0 (Referenzkonfiguration)
 - mit aktueller Lage B (aktuelle oder deformierte Konfiguration)
- materieller Punkt $P \in B_0$ oder $p \in B$
- Wenn der Körper zusammenhängend und undurchdringbar ist, dann existiert eine Abbildung:

$$\chi : B_0 \rightarrow B \quad \forall P \in B_0 \quad (2)$$

- Bemerkung: undurchdringbar und zusammenhängend bedeutet, dass 2 verschiedene Punkte in B_0 nicht den gleichen Punkt in B beschreiben können.
- Die Bewegungsfunktion (Platzierungsfunktion) χ ordnet jedem materiellen Punkt P mit Ausgangsposition X eine Position x im Raum in Abhängigkeit der Zeit t zu.

$$x = \chi(P, t) = \chi(X, t) = x(X, t) \quad (3)$$

- X : Ortsvektor von P in der Referenzkonfiguration
- x : Ortsvektor von p in der aktuellen Konfiguration



- Verschiebungsvektor $u = x - X$

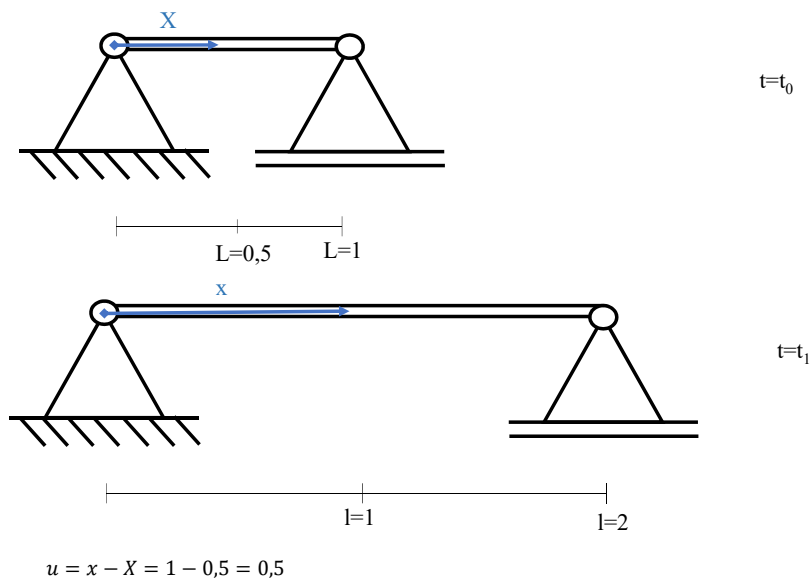


Abbildung 2: Beispiel: gedehnter Stab

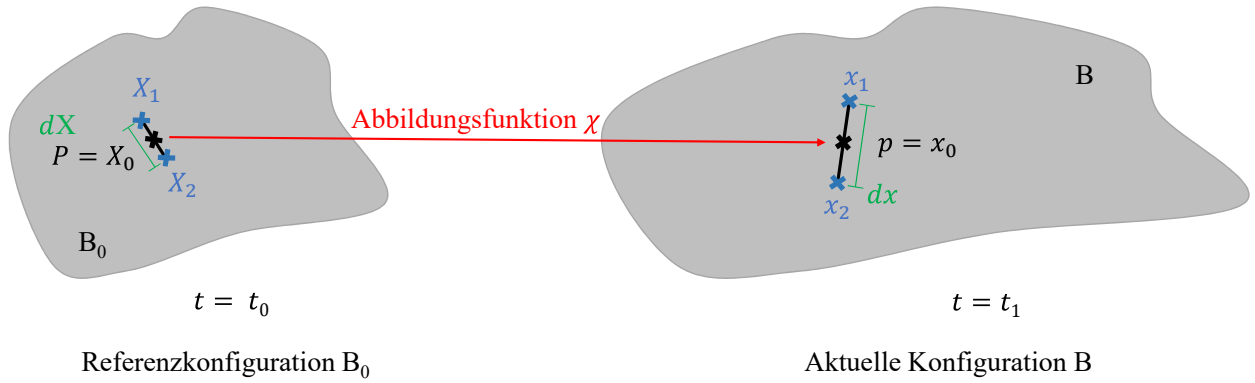
1.3.2 Der Deformationsgradient

Aus den Bedingungen an die Platzierungsfunktion ergibt sich:

- χ ist differenzierbar und somit:
- $x = \chi(X, t)$ ist auch differenzierbar

Deformationsgradient ist definiert durch:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \Big|_{X=X_0} \quad (4)$$



Es gibt 2 benachbarte Punkte X_1 und X_2 in der Referenzkonfiguration

$$dX = X_1 - X_2 \quad (5)$$

und in der aktuellen Konfiguration

$$dx = \chi(X_1, t_1) - \chi(X_2, t_2) = x_1 - x_2 \quad (6)$$

Der Quotient aus dx und dX definiert eine Aussage über die Deformation:

$$\frac{dx}{dX} = \frac{x_1 - x_2}{X_1 - X_2} = \frac{x_1 - x_0 + x_0 - x_2}{X_1 - X_0 + X_0 - X_2} \quad (7)$$

Für $\lim X_1 \rightarrow X_0$ und $\lim X_2 \rightarrow X_0$ folgt die Gleichung 4 für den Deformationsgradienten.

Bemerkungen:

1. Wenn durch die Deformation die Orientierung des Koordinatensystems erhalten bleibt (was angenommen wird und auch physikalisch ist) dann gilt:

$$F > 0 \quad (8)$$

2. Der Deformationsgradient besitzt keine Einheit (dimensionlos).

3. Aus Gleichung 4 folgt:

$$\frac{dx}{dX} = F \Leftrightarrow dx = F dX \quad (9)$$

- $F = 1$ keine Deformation an einem Punkt ($\rightarrow$ Deformationsgradient ortsabhängig!)
- $F < 1$ Kompression
- $F > 1$ Extension

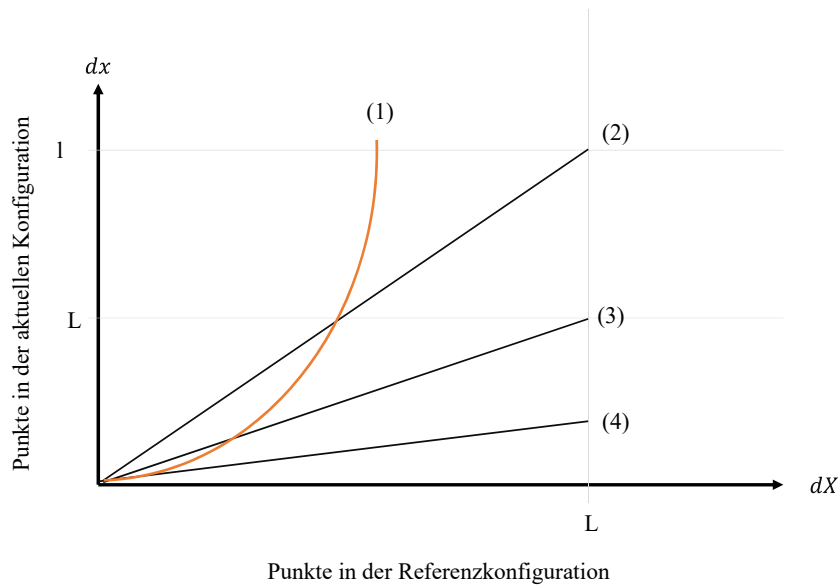


Abbildung 3: Beispiel mit Länge L in der Referenzkonfiguration und Länge l in der aktuellen Konfiguration

- (1) nichtlineare Deformation
- (2) lineare Deformation, Streckung, homogenes Material
- (3) keine Deformation
- (4) lineare Deformation, Kompression, homogenes Material

$\rightarrow$ Der Deformationsgradient ist die Ableitung dieser Funktionen!

1.3.3 Dehnung/Verzerrung

- Dehnung ist mit dem Deformationsgradient eng verbunden.
- Dehnung verschwindet, wenn ein Punkt sich nur durch eine Rotation oder Translation in der Lage verändert, aber keine Deformation aufweist.

- Dehnung e ist definiert als:

$$e = F - 1 = \frac{dx}{dX} - \frac{dX}{dX} = \frac{dx - dX}{dX} \quad (10)$$

→ Maß der relativen Elongation (= Längenzunahme)

→ $e \in (-1, \infty)$, da $F > 0$

Verschiedene Definitionen von Verzerrungsmaßen:

- a) Nominalverzerrung/ Cauchysches Verzerrungsmaß:

$$e = F - 1 \quad (11)$$

- b) Lagrangesches Verzerrungsmaß

– $C = F^2$ hat ähnliche Eigenschaften wie F : $C > 0, C = 1 \leftrightarrow F = 1$

– C ist das rechte Cauchy-Green Verzerrungsskalar:

$$E = \frac{1}{2}(C - 1) \quad (12)$$

- c) logarithmisches Verzerrungsmaß:

$$\bar{e} = \ln F \quad (13)$$

Kleine vs. große Deformationen:

- Für kleine Deformationen sind alle Verzerrungsmaße ähnlich ($\sim 2\%$)
- Für b) gilt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(C - 1) = \frac{1}{2}(F^2 - 1) = \frac{1}{2}(F - 1)(F + 1) \\ &= \frac{1}{2}(F - 1)(F - 1 + 2) = \frac{1}{2}(e)(e + 2) = e + \frac{1}{2}e^2 \end{aligned} \quad (14)$$

- Für c) gilt

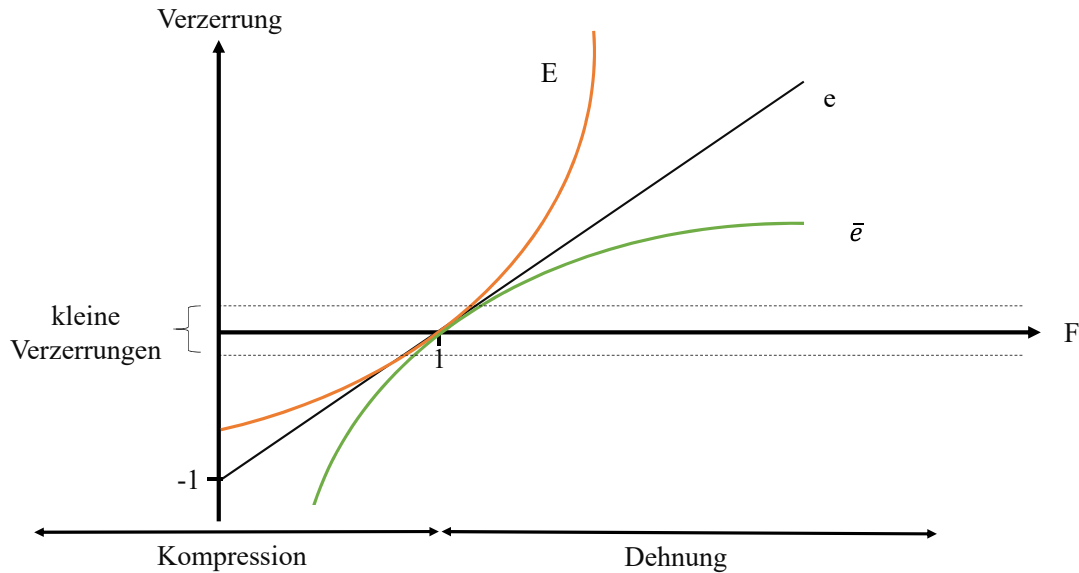
$$\bar{e} = \ln F = F - \frac{1}{2}F^2 + \sigma(F^3) \begin{cases} \approx e & \text{wenn } e \approx 0 \\ \neq e & \text{wenn } e \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Beispiel 1:

- $F = 1,5$ (50% Dehnung) → Weichgewebe
- $e = 0,5$
- $E = 0,625$
- $\bar{e} = 0,405$

Beispiel 2:

- $F = 1,02$ (2% Dehnung)



- $e = 0,02$
- $E = 0,0202$
- $\bar{e} = 0,0198$

Bemerkung: e kann auch über die Verschiebung definiert werden:

$$u(X, t) = x(X, t) - X \quad (16)$$

$$\nabla_X u = \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial(x(X, t) - X)}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial X} = F - 1 = e \quad (17)$$

$$E = \nabla_X u + \frac{1}{2}(\nabla_X u)^T(\nabla_X u) = (\nabla_X u) + \frac{1}{2}(\nabla_X u)^2 = e + \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(F^2 - 1) \quad (18)$$

1.4 Die Lagrangesche und Eulersche Beschreibung

- Knochen: Deformation kann bzgl. der Referenzkonfiguration erfolgen
- Blutfluss: Referenzkonfiguration ist nicht bekannt / sinnvoll zu benutzen
- Ψ bezeichnet im Folgenden eine physikalische Größe z.B. Ort, Temperatur, Druck...

→ Dann ist:

- $\Psi(X, t)$ eine Lagrangesche (oder referentielle) Feldgröße

- $\Psi(x, t)$ eine Eulersche (oder aktuelle) Feldgröße
- Unterschiedliche Betrachtungsweise:
 - Lagrangesche (bzw. materielle) Betrachtungsweise (Festkörper): Betrachtung der Bahn eines referentiellen Punktes
 - Eulersche (bzw. räumliche) Betrachtungsweise (Fluidmechanik): Betrachtet einen Punkt im Raum, an dem, materielle Punkte vorbeiwandern (Kontrollraum)

Zusammenhang zwischen den Betrachtungsweisen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial X} dX = F dX \quad (19)$$

oder:

$$dX = F^{-1} dx \quad (20)$$

mit räumlichen Deformationsgradient F^{-1} und materiellem Deformationsgradient F
 oder ganz allgemein:

$$\frac{\partial \Psi(X, t)}{\partial X} = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \cdot F(X, t) \quad (21)$$

$$\text{Grad} \Psi = \text{grad} \Psi \cdot F \quad (22)$$

$$\nabla_X \Psi = \nabla_x \Psi F \quad (23)$$

Bemerkung zu stationären Größen: Stationäre Feldgrößen hängen nicht von der Zeit t ab, d.h. $\Psi(X, t) = \Psi(X)$ bzw. $\Psi(x, t) = \Psi(x)$

1.4.1 Die materielle Zeitableitung

- Mathematisch: Materielle Zeitableitung entspricht der totalen Zeitableitung und ist unabhängig vom Betrachter.
- Physikalisch: Materielle Zeitableitung stellt die zeitliche Änderung einer Größe dar, die ein Beobachter feststellt, immer wenn er sich mit einem materiellen Punkt mitbewegt.

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(X, t) &= \frac{d\Psi(X, t)}{dt} = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \cdot v(X, t) \\ &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\text{grad}_x \Psi) \cdot v \end{aligned} \quad (24)$$

- **lokaler Anteil** = zeitliche Änderung von Ψ bei festgehaltenem Ort
- **konvektiver Anteil** = Änderung von Ψ auf Grund der Bewegung des materiellen Punktes

Dann gilt in der Lagrangeschen Darstellung für $X_0 = \frac{l}{2}$:

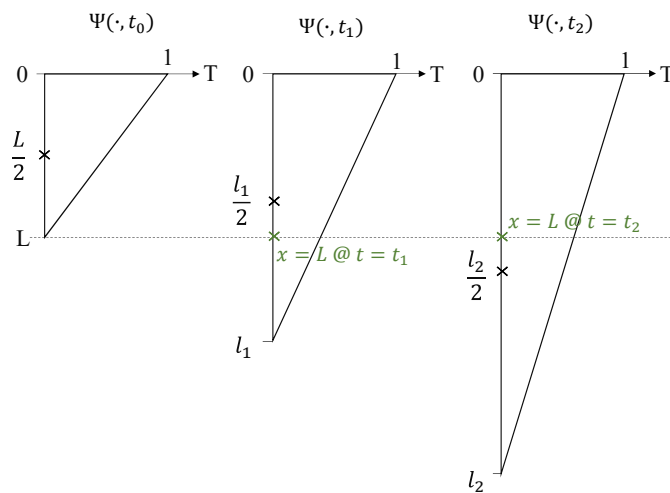
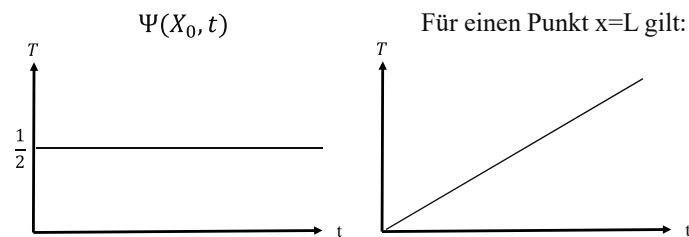
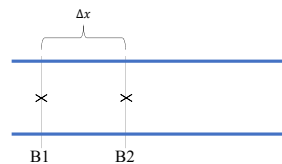


Abbildung 4: Beispiel Temperaturverteilung in einem Stab



Beispiel 2:

Es wird eine Arterie angenommen:



- Beobachter: B1, B2
- B1 und B2 messen ein bestimmtes Phänomen (Temperatur oder Geschwindigkeit)
- Wenn die physikalische Feldgröße stationär ist, dann sind die Messungen an den jeweiligen Beobachtungspunkten konstant.
- Ein Blutkörperchen passiert den ersten Beobachter zum Zeitpunkt t mit Geschwindigkeit v . Dann passiert dieser Partikel Beobachter 2 zum Zeitpunkt $t + \frac{\Delta x}{v}$ mit $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$.
- B1 misst Ψ und B2 misst $\Psi + \Delta\Psi$ dabei ist die Änderung $\Delta\Psi$.

- Die Änderungsrate von Ψ :

$$\left. \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right|_{\text{Partiell}} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{\Delta \Psi}{\frac{\Delta x}{v}} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \cdot v \quad (25)$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot v \quad (\text{konvektiver Anteil})$$

Beschleunigung: In Fluiden misst man oft die Geschwindigkeit an bestimmten örtlich fixierten Punkten (Eulersche Betrachtungsweise)

$$v(x, t) = v \quad (26)$$

$$\alpha(x, t) = \frac{d}{dt}v(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \cdot v = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad } v \cdot v \quad (27)$$

1.4.2 Materieller und räumlicher Geschwindigkeitsgradient

Die zeitliche Änderung des Linienelements dx kann bezüglich des referentiellen Linienelements dX bzw. bezüglich des räumlichen Linienelements dx dargestellt werden.

- materieller Geschwindigkeitsgradient $\dot{F}$:

$$d\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} dX = \dot{F} dX \quad (28)$$

- räumlicher Geschwindigkeitsgradient L :

$$d\dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx = L dx = d\dot{x} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx \quad (29)$$

- Zusammenhang zwischen L und F :

$$d\dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} \cdot dX = \dot{F} dX \quad (30)$$

$$= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} \cdot dX = L \cdot F dX$$

- daraus folgt:

$$\dot{F} = L \cdot F \quad \text{bzw.} \quad L = \dot{F} F^{-1} \quad (31)$$

1.5 Querschnittsflächen

Für viele Anwendungen kann man 3D-Geometrien auf 1D-Geometrien reduzieren, wenn man sich Querschnittsflächen definiert:

- $\hat{S}(X)$ ist der Querschnitt an einem materiellen Punkt X in der Referenzkonfiguration.
- $\hat{s}(x)$ ist der Querschnitt am Punkt x in der aktuellen Konfiguration.

Sollte das Material inkompressibel sein, also das Volumen des Objekts ändert sich nicht, dann gilt:

$$\hat{S}(X) \cdot dX = \hat{s}(x(X, t)) dx \quad (32)$$

$$\rightarrow \hat{S} = \hat{s}F \leftrightarrow \hat{S}F^{-1} = \hat{s} \quad (33)$$

2 Bilanzgleichungen

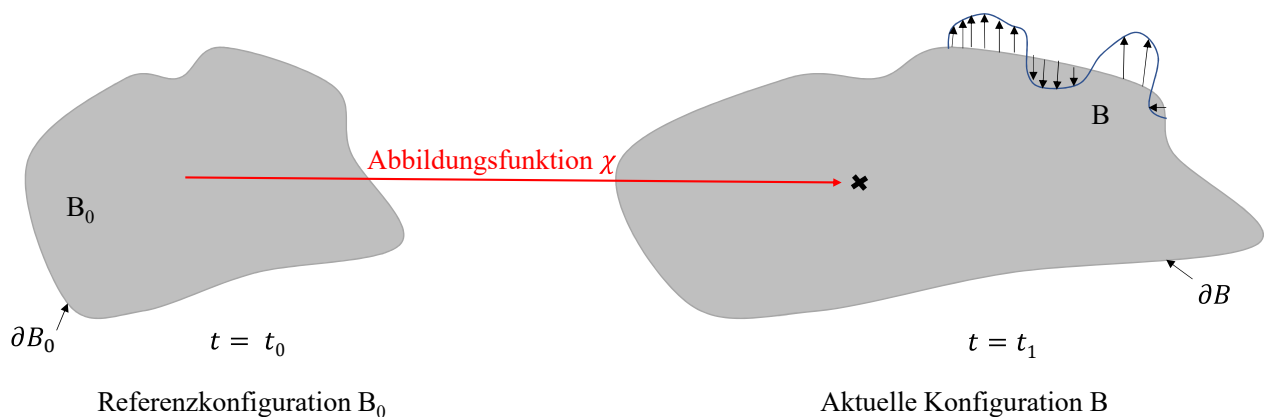
Bilanzgleichungen beschreiben ganz allgemein das Verhalten von extensiven physikalischen Größen (Masse, Impuls, Drall, Entropie, Energie).

Alle volumenspezifischen Größen können in der Form mit mechanischer Größe Ψ (z.B. Dichte, Impuls...) dargestellt werden:

$$\frac{d}{dt}(\text{Inhalt}) = \text{Produktion} + \text{Fluss} \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} \int_B \Psi dv = \int_B \Sigma dv + \int_{\partial B} (\Phi n) da \quad (35)$$

- Externe mechanische Größen, z.B. Gravitation (**Fernwirkungskräfte**)
- Größen, die über die Oberfläche in den Körper fließen (**Nahwirkungskräfte**)
- mit Volumen v und Fläche a



Definition:

- Ein positiver Fluss bedeutet, dass die physikalische Größe in das Objekt fließt. Ein negativer Fluss bedeutet einen Abfluß.
- Intensive Größen sind von der Größe des Systems unabhängig, z.B. Temperatur, Druck, Verschiebung, Verzerrung.
- Extensive Größen sind von der Größe des Systems abhängig, z.B. Volumen, Masse, Impuls...



2.1 Bilanzgleichungen für die Lagrangesche Betrachtungsweise

- Ausgangspunkt: Referenzkonfiguration
- Ganz allgemein gilt:

$$\frac{d}{dt}G(t) = P(t) + F(t) \quad (36)$$

mit

$$G(t) = \int_{X_0}^{X_1} G(X, t) dX \quad (37)$$

$$P(t) = \int_{X_0}^{X_1} P(X, t) dX \quad (38)$$

$$F(t) = H(X_0, t) - H(X_1, t) \quad (39)$$

→ für die allgemeine Form der Bilanzgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} G(X, t) dX = \int_{X_0}^{X_1} P(X, t) dX + H(X_0, t) - H(X_1, t) \quad (40)$$

- Dabei stellt Gleichung 40 (BG) die globale (Integral-)Form der Bilanzgleichung dar.
- Die Überführung von BG in eine lokale (differentielle) Form der Bilanzgleichung (BL) erhält man folgendermaßen:

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{\partial H(X, t)}{\partial X} dX = [H(X, t)]_{X_0}^{X_1} = H(X_1, t) - H(X_0, t) \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} G(X, t) dX = \int_{X_0}^{X_1} [P(X, t) - \frac{\partial H(X, t)}{\partial X}] dX \quad (42)$$

- Unter der Annahme, dass für Gleichung 42 für jede Teilmenge $[a, b] \subset [X_0, X]$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b G(X, t) dX = \int_a^b [P(X, t) - \frac{\partial H(X, t)}{\partial X}] dX \quad (43)$$

- Da die Endpunkte der Liniensegmente $[a, b]$ unabhängig von t sind kann die Zeitableitung und die Integration vertauscht werden:

$$\int_a^b [\frac{\partial G(X, t)}{\partial t} - P(X, t) + \frac{\partial H(X, t)}{\partial X}] dX = 0 \quad (44)$$

- Dies gilt für **alle** potentiellen Integrationsgrenzen. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0$ nur dann, wenn $f(x) = 0$.

- Daraus folgt:

$$\frac{\partial G(X, t)}{\partial t} - P(X, t) + \frac{\partial H(X, t)}{\partial X} = 0 \quad (45)$$

$\leftrightarrow$

$$\frac{\partial G(X, t)}{\partial t} = P(X, t) - \frac{\partial H(X, t)}{\partial X} \quad (46)$$

- Das ist dann die Bilanzgleichung lokal (BL)
- Notiz: Differentiation $\frac{d}{dt}$ und Integralzeichen $\int_{X_0}^{X_1}$ darf vertauscht werden, da die Intervallgrenzen nicht von der Zeit abhängig sind, da diese sich in der Referenzkonfiguration und nicht in der aktuellen Konfiguration befinden!

Bemerkungen:

- 1) BG ist allgemeiner als BL, da in der globalen Form keine Annahmen über die Differenzierbarkeit des Flusstermes getroffen werden musste
- 2) BG, in denen der Produktions- und Flussterm verschwinden, nennt man auch Erhaltungsgleichungen

2.2 Bilanzgleichungen für die Eulersche Betrachtungsweise

Für die Eulersche Betrachtungsweise gilt:

$$G(t) = \int_{x(X_0, t)}^{x(X, t)} g(x, t) dx \quad (47)$$

Bemerkung:

- Die Integrationsgrenzen sind nun abhängig von der Zeit.
- Aus dem Zusammenhang zwischen der Eulerschen und Lagrangeschen Betrachtungsweise ergibt sich:

$$G(X, t) dX = g(x(X, t), t) dx \quad (48)$$

- aus $dx = F dX$ ergibt sich

$$G(X, t) dX = g(x(X, t), t) F dX \quad (49)$$

$$G(X, t) = g(x(X, t), t) F \quad (50)$$

$$g(x(X, t), t) = G(X, t) \cdot F^{-1} \quad (51)$$

Das Gleiche gilt für:

$$P(t) = \int_{x(X_0, t)}^{x(X, t)} p(x, t) dx \quad (52)$$

mit $p = P \cdot F^{-1}$

Für 1D Probleme ist der Fluss nicht in Form eines Integrals gegeben (besteht nur aus 2 Punkten), daher gilt:

$$h(x(X, t), t) = H(X, t) \quad (53)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} g(x, t) dx = \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} p(x, t) dx + h(x(X_0, t), t) - h(x(X_1, t), t) \quad (54)$$

oder:

$$\frac{d}{dt} \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} g(x, t) dx = \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} [p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x}] dx \quad (55)$$

Durch Variablentausch, $dx = FdX$ erhält man für den **1.Term**:

$$\frac{d}{dt} \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} g(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} g(x(X, t), t) F dX = \int_{X_0}^{X_1} \frac{d[g(x(X, t), t) \cdot F]}{dt} dX \quad (56)$$

$$\frac{d[g(x, t) \cdot F]}{dt} = \frac{dg}{dt} \cdot F + g \cdot \frac{dF}{dt} \quad (57)$$

mit $\frac{dF}{dt} = F \cdot L$

Setzt man die **materielle Zeitableitung** oben wieder ein, dann erhält man:

$$\frac{d}{dt} \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} g(x, t) dx = \int_{X_0}^{X_1} \frac{dg}{dt} \cdot F + gL \cdot F dX = \int_{X_0}^{X_1} [\frac{dg}{dt} + gL] \cdot F dX \quad (58)$$

Durch die Umkehrung des Variablentaushes in eine Eulersche Betrachtungsweise, also $FdX = dx$, ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} g(x, t) dx = \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} \frac{dg}{dt} + gL dx \quad (59)$$

Globale Bilanzgleichung in der Eulerschen Betrachtungsweise (BEG):

$$\int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} [\frac{dg(x, t)}{dt} + gL] dx = \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} [p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x}] dx \quad (60)$$

Wenn man in der Lagrangeschen Betrachtungsweise argumentiert, erhält man aus der globalen Form die lokale Form (BEL):

$$\frac{dg(x, t)}{dt} + g(x, t) \cdot L = p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (61)$$

$$\dot{g}(x, t) + g(x, t) \cdot L = p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (62)$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (g(x, t) \cdot v)}{\partial x} = p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (63)$$

2.3 Blutfluss durch die Arterie

oder: Verkehrsflussproblem auf einer Landstraße mit Überholverbot

- Gegenstand der Betrachtung: Arterie evtl. mit Hindernissen (z.B. Plaque) bzw. Landstraße mit

Kurven

- Größe, die bilanziert werden soll: Anzahl der Blutkörperchen bzw. Anzahl der Autos
- In kontinuumsmechanischer Betrachtungsweise (Annahme):
 - Produktionsterme verschwinden, da wir keine Blutgefäßverzweigungen bzw. keine Auf- oder Abfahrten haben
 - Dichte: Zellen pro Einheit entlang der Arterie zum Zeitpunkt t : $g(x, t) = \rho(x, t)$
 - Arterie bewegt sich nicht im Raum $\rightarrow$ Eulersche Betrachtungsweise
- 1) Bilanzgleichungen:

$$\frac{dg(x, t)}{dt} + g(x, t) \cdot L = p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (64)$$

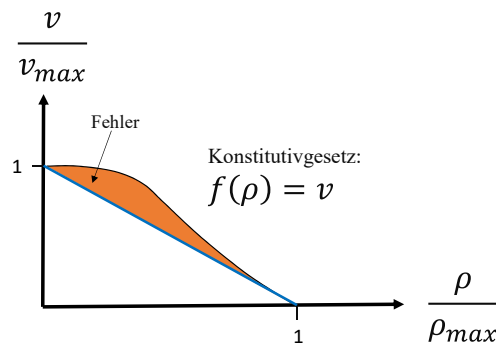
$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} + \rho(x, t) \cdot L = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \rho(x, t) \cdot \text{grad}(v(x, t)) = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$\rightarrow$ Diese partielle Differentialgleichung mit 2 Unbekannten muss gelöst werden. $\rightarrow$ Wir benötigen ein Konstitutivgesetz, das die beiden Größen zueinander in Beziehung setzt.

- für den Verkehr:



- Die einfachste Art und Weise ein Konstitutivgesetz zu beschreiben ist durch eine [lineare Funktion](#) (Abhängigkeit)

$$v = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad (68)$$

- Lösung des Problems: Einsetzen des Konstitutivgesetzes in die Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_{max} \cdot (1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}))}{\partial x} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_{max} - \frac{\rho^2 \cdot v_{max}}{\rho_{max}})}{\partial x} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot v_{max} + \rho \frac{\partial v_{max}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot 2\rho \cdot \frac{v_{max}}{\rho_{max}} = 0 \quad (71)$$

- mit $\rho \frac{\partial v_{max}}{\partial x} = 0$ da $v_{max} = konst$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot (v_{max} \cdot (1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}})) = 0 \quad (72)$$

→ Die Gleichung kann für $\rho(x, t)$ gelöst werden

- Bemerkung: Das Ergebnis ist die Lösung einer quasi-linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die analytisch oder numerisch hergeleitet wird. Mit dem Ergebnis kann man dann die Auswirkung von Verengungen analysieren.

2.4 Thermomechanische Bilanzgleichungen

Mit den allgemein hergeleiteten Bilanzgleichungen (siehe Abschnitt 2.1 und 2.2) können jetzt alle thermomechanischen Prozesse (unabhängig von der Art des Mediums) beschrieben werden.

Bemerkung: Für die meisten Anwendungen in der Biomechanik spielen Adaptionsprozesse (Wachstum) eine große Rolle. Diese werden allerdings zunächst ignoriert.

Die fundamentalen Bilanzgleichungen der Kontinuumsbiomechanik sind:

- Bilanz der Masse
- Bilanz des Impuls
- ~~Bilanz des Drehimpuls~~
- Energiebilanz
- Entropiegleichung

Dabei gehören a), b) und c) zu den mechanischen Bilanzgleichungen und d) und e) zu den thermodynamischen Bilanzgleichungen. Dabei entsprechen die thermodynamischen Gesetze dem 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

2.4.1 Die Massenbilanz

Unter der Annahme, dass es keine Quellen oder Abflüsse gibt, bleibt die Massendichte ρ_0 pro Einheit konstant bzgl. der Zeit. Es gilt:

- Lagrangesche Darstellung:

$$\frac{\partial \rho_0(X, t)}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

- Eulersche Darstellung:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \rho(x, t) \cdot L = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho(x, t) \cdot v(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (75)$$

→ Diese Gleichungen nennt man auch Kontinuitätsgleichungen.

2.4.2 Impulsbilanz

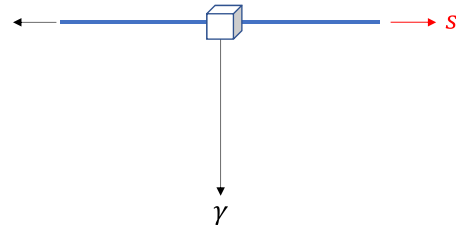
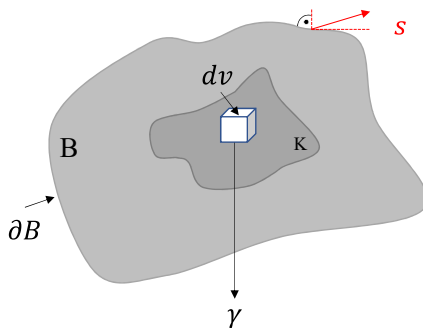
- Newtonsches Gesetz: Der Impuls eines materiellen Körpers ändert sich durch die Kräfte, die an dem Körper angreifen.
- Kräfte, die an einem Körper angreifen:

$$P(t) = \int_{B_0} \gamma(X, t) dV \quad (76)$$

$$\text{spezifisches Gewicht eines Körpers (Wichte)} \cdot \left[\frac{\text{Gewichtskraft}}{\text{Volumen}} \right] \quad (77)$$

$$F(t) = \frac{\text{Kontaktkräfte}}{\text{Oberflächenkräfte}} \quad (78)$$

$$\oint_{\partial B_0} t dA \quad (79)$$



- Impuls:

$$I(X, t) = \oint_{B_0} \rho v(X, t) dV \quad (80)$$

- mit $v(x, t)$ = instantane Geschwindigkeit

→ Die zeitliche Änderung des Impulses eines Teilkörpers $K \subset B_0$ ist gleich der auf K wirkenden Kräfte.

$$\frac{d}{dt} I(X, t) = P(t) + F \quad (81)$$

$$\frac{d}{dt} \int_K \rho_0 \cdot v dV = \int_K \gamma dV + \oint_K s dA \quad (82)$$

$$\frac{d}{dt} \int_K \rho_0 \cdot v dV = \int_K \dot{\rho}_0 v + \rho_0 \dot{v} dV \quad (83)$$

- da Massenbilanz: $\rho_0 = 0$
- weiter gilt: $s = \sigma \cdot n$ (1D: $s = \sigma_1$)

- Mit Hilfe des gaußschen Integralsatzes kann man aus dem Oberflächenintegral ein Volumenintegral erzeugen.

$$\oint_{\partial K} s dA = \oint_{\partial K} \sigma \cdot n dA = \int_K \operatorname{div} \sigma dV \quad (84)$$

$$\int_K \rho_0 \dot{v} dV = \int_K \gamma dV + \int_K \operatorname{div} \sigma dV \quad (85)$$

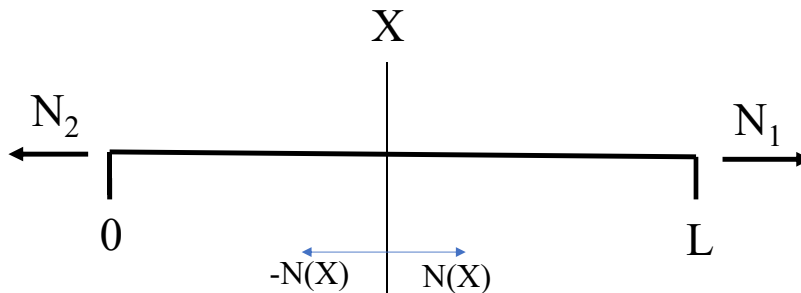
$$\int_K [\rho_0 \dot{v} - \gamma - \operatorname{div} \sigma] dV \quad (86)$$

- Durch den Grenzübergang von $K \rightarrow dV$ erhalten wir aus der globalen Form die lokale Form der Impulsbilanz in Lagrangescher Darstellung:

$$\boxed{\rho_0 \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + \gamma} \quad (87)$$

- mit Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$
- Dies ist die zentrale Gleichung der Mechanik, die lokal an der Stelle $X \in K \subset B_0$ gilt.

Für den 1D-Fall: Wenn der Stab an der Stelle X geschnitten wird, entstehen 2 neue Randbedingungen:



für die rechte Seite $N(X,t)$ und für die linke Seite $-N(X,t)$. Man kann $N(X,t)$ als interne Kraft bezeichnen, die den Körper zusammenhält. N agiert als Flussterm.

$$\frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial t} = P + \frac{\partial N}{\partial X} \quad (88)$$

$\Leftrightarrow$

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = P + \frac{\partial N(X,t)}{\partial X} \quad (89)$$

mit $\rho_0 \cdot \frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$

Bemerkung: Eulersche Betrachtungsweise:

$$\rho \cdot \frac{dv(x,t)}{dt} = p + \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} \quad (90)$$

↔

$$\rho \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \cdot v(x, t) = p + \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \quad (91)$$

- Limitierung durch 1D-Betrachtungsweisen, z.B. die Interaktionen (Reibungskräfte) zwischen Rohrwand und Fluid können nicht in Betracht gezogen werden.

2.5 Das Konzept der Spannung

- Spannung = Kraft / Fläche
- Durch den Spannungstensor/ -skalar können die internen Kräfte an einem Punkt beschrieben werden
- Der Spannungstensor/ -skalar muss durch Experimente bestimmt werden und beschreibt den Zusammenhang zwischen unseren Unbekannten, Verschiebung (Verzerrung) und der Spannung, also das zugrundeliegende Materialverhalten (Konstitutivgesetz)
- Der 1D-Fall kann als pseudo 3D-Fall betrachtet werden, indem wir den Querschnitt ($\hat{S}(X, t)$ oder $\hat{s}(x, t)$) zu Hilfe nehmen.

→ Cauchy-Spannung:

$$\sigma(x, t) = \frac{n(x, t)}{\hat{s}(x, t)} \quad (92)$$

→ 1. Piola Kirchhoff Spannungsgröße:

$$T(X, t) = \frac{n(x, t)}{\hat{S}(X, t)} \quad (93)$$

- relativ einfach experimentell zu bestimmen
- hybride Größe, die Größen aus der Referenz- und aktuellen Konfiguration vermischt

→ 2. Piola Kirchhoff Spannungsgröße:

$$S(X, t) = \frac{N(X, t)}{\hat{S}(X, t)} \quad (94)$$

- Wenn ein Material inkompressibel ist, dann gilt:

$$\hat{S} dX = \hat{s} dx \quad (95)$$

↔

$$\hat{S} = \hat{s} \cdot F \quad \text{mit} \quad dx = F dX \quad (96)$$

$$T(X, t) = \frac{n(x, t)}{\hat{S}(X, t)} = \frac{n(x, t)}{\hat{s}(x, t)} \cdot F^{-1} = \sigma \cdot F^{-1} \quad (97)$$

↔

$$\sigma = T \cdot F \quad (98)$$

Bemerkungen zu 2.5.:

- Die mechanischen Bilanzgleichungen fordern Konstitutivgesetze, um einen Zusammenhang zwischen internen Kräften und kinetischen Variablen herzustellen:
 - Elastisches Materialverhalten: $N(X, t) = f(E(X, t))$ mit E = Lagrangescher Verzerrungstensor
- Mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen lassen sich die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls erfüllen.

2.6 Thermodynamische Bilanzgleichungen

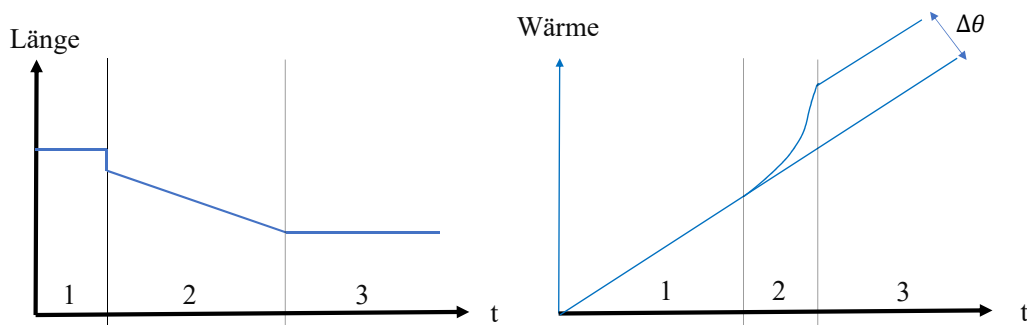


Abbildung 5: Beispiel Skelettmuskel: (1) Isometrische Kontraktion; (2) Muskel kann sich bei konstanter Kraft verkürzen (isotonische Kontraktion); (3) Isometrische Kontraktion

- Annahme: Der Muskel ist immer gleich maximal aktiviert
- Die isotonische Kontraktion erzeugt eine zusätzliche Wärme $\Delta\theta$.
- Um ein solches Verhalten zu beschreiben muss die Temperatur θ mit berücksichtigt werden.
- θ ist eine Feldgröße, die von Ort und Zeit abhängt $\theta(X, t)$.
- Interne Kräfte sind von Ort, Zeit und Temperatur abhängig: $N(X, \theta, t)$

2.6.1 Energiebilanz

Die allgemeingültige Formulierung der Kopplung zwischen der Kinematik und der Temperatur ist durch den 1. Hauptsatz der Thermodynamik gegeben.

$$\text{Totale Energie} = \text{kinetische Energie} + \text{innere Energie} \quad (99)$$

→ Der 1. Hauptsatz stellt die Änderungsrate der totalen Energie in Bezug zur Summe des mechanischen und nicht-mechanischen Anteils der Arbeit her.

$$\frac{d(k + u)}{dt} = W_{ext} + W_{therm} \quad (100)$$

k: kinetische Energie u: innere Energie W_{ext} : mechanische Arbeit W_{therm} : nicht-mechanische Arbeit

Wiederholung Mechanische Arbeit:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{2} \rho_0 v(X, t)^2 dX \quad (101)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) \rho_0 \frac{\partial v(X, t)}{\partial t} dX \quad (102)$$

nach der Impulsbilanz gilt...

$$= \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) \left(P + \frac{\partial N(X, t)}{\partial X} \right) dX \quad (103)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) P dX + \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) \frac{\partial N(X, t)}{\partial X} dX \quad (104)$$

partielle Integration

$$= \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) P dX + [v(X, t) N(X, t)]_{X_0}^{X_1} - \int_{X_0}^{X_1} N(X, t) \frac{\partial v(X, t)}{\partial X} dX \quad (105)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} v(X, t) P dX + (v(X, t) N(X, t) - v(X_0, t) N(X_0, t) - \int_{X_0}^{X_1} N(X, t) \frac{\partial v(X, t)}{\partial X} dX) \quad (106)$$

- Arbeit der externen Arbeitskräfte ($W_{ext}^{Körper}$)
- Arbeit der externen Randkräfte (W_{ext}^{Rand})
- interne Arbeit (W_{int})

Mit

$$W_{int} = - \int_{X_0}^{X_1} N(X, t) \frac{\partial v(X, t)}{\partial X} dX \quad (107)$$

$$W_{int} = - \int_{X_0}^{X_1} N(X, t) \frac{\partial e(X, t)}{\partial t} dX \quad (108)$$

mit engineering strain ϵ (Dehnung)

$$= - \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} n(x, t) L(x, t) dx \quad (109)$$

$$\frac{dK}{dt} = W_{ext} + W_{int} \quad (110)$$

$$\frac{dK + u}{dt} = W_{ext} + W_{therm} \quad (111)$$

$$\frac{du}{dt} = W_{ext} + W_{therm} - \frac{dK}{dt} = W_{therm} - W_{int} \quad (112)$$

Bemerkung: Bei rigiden Körpern ist $W_{int} = 0$ Ziel: Eine lokale differentielle Form der langrageschen Betrachtungsweise.

Für die innere Energie gilt:

$$U = \int_{X_0}^{X_1} \rho_0 \cdot \bar{u} \cdot dX \quad (113)$$

mit $\bar{u}$ die interne Energiedichte pro Einheitsmasse.

Für die Wärme (thermal power/ nicht-mechanische Arbeit) kann ein Ausdruck aus Produktions und Flusstermen aufgestellt werden.

$$W_{therm} = \int_{X_0}^{X_1} \rho_0 r dX + Q(X_0, t) - Q(X_1, t) \quad (114)$$

r: Wärmeproduktion/Wärmestrahlung (radiation) $Q(X, t)$: Wärmezufuhr

$$\int_{X_0}^{X_1} \rho_0 \cdot \bar{u} \cdot dX = \int_{X_0}^{X_1} \rho_0 r dX + Q(X_0, t) - Q(X_1, t) + \int_{X_0}^{X_1} N(X, t) \frac{\partial e(X, t)}{\partial X} dX \quad (115)$$

$\leftrightarrow$ mit der lokalen Form in lagranger Betrachtungsweise:

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \bar{u}(X, t)}{\partial t} = \rho_0 r - \frac{\partial Q(X, t)}{\partial X} + N(X, t) \cdot \frac{\partial e(X, t)}{\partial t} \quad (116)$$

oder in Eulerscher Form:

$$\rho \frac{\bar{u}}{dt} = \rho r - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + n(x, t) L(x, t) \quad (117)$$

Bemerkung: in 1D: $g(x, t) = Q(X, t)$

2.6.2 Entropiegleichung

- Massenerhaltungsbilanz, Impulsbilanz und Energiebilanz gemeinsam mit kompatiblen Anfangs- und Randbedingungen sowie Konstitutivgesetzen genügen um Materialeigenschaften vollständig zu beschreiben
- Um gewisse nicht physikalische Eigenschaften auszuschließen, gibt es den 2. Hauptsatz der Thermodynamik.
 - nicht-physikalisch: z.B. negative Flüssigkeitsviskosität, die Energie produziert statt zu dissipieren
- Für biologische Materialien ist die Anwendung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik oft schwierig, da die Materialien oft offen für Massenfluss und externe Mechanismen sind, z.B. die chemoelektrische Aktivierung von Skelettmuskeln durch das ZNS.
- Der 2. Hauptsatz beschreibt die Existenz der Entropie S:

$$\frac{dS}{dt} \geq P + F \quad (118)$$

Wenn die Gleichung gilt, dann spricht man von einem reversiblen Prozess, ansonsten von einem irreversiblen Prozess (z.B. Reibung, Mikrorisse,...)

- P und F hängen von θ (absolute Temperatur >0) ab

$$P = \int_{X_0}^{X_1} \frac{\rho_0 r}{\theta} dX = \int_{x(X_0,t)}^{x(X_1,t)} \frac{\rho r}{\theta} dx \quad (119)$$

und

$$F = \frac{Q(X_0,t)}{\theta(X_0,t)} - \frac{Q(X_1,t)}{\theta(X_1,t)} = \frac{q(x(X_0,t))}{\theta(x(X_0,t))} - \frac{q(x(X_1,t))}{\theta(x(X_1,t))} \quad (120)$$

→ Clausius Duhem Ungleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} \rho_0 S dX \geq \int_{X_0}^{X_1} \frac{\rho_0 r}{\theta} dX + \frac{Q(X_0,t)}{\theta(X_0,t)} - \frac{Q(X_1,t)}{\theta(X_1,t)} \quad (121)$$

→

$$\rho_0 \frac{\partial S(X,t)}{\partial t} \geq \frac{\rho_0 r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q}{\theta} \right) \quad (122)$$

oder in Eulerscher Form

$$\rho \cdot \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{q}{\theta} \right) \quad (123)$$

2.7 Zusammenfassung der Bilanzgleichungen (lokal)

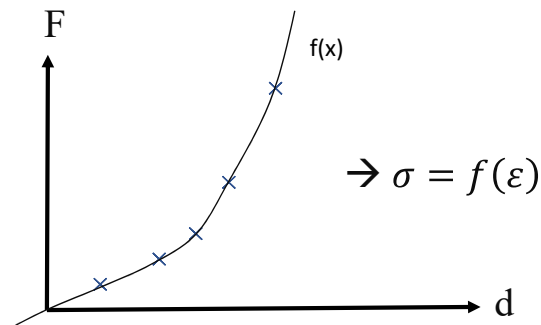
Tabelle 2: Zusammenfassung

Name	Lagrange'sche Betrachtungsweise	Eulersche Betrachtungsweise
Massenerhaltung	$\frac{\partial \rho_0(X,t)}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0$
Impulsbilanz	$\rho_0 \frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = B + \frac{\partial N(X,t)}{\partial X}$	$\rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} v(x,t) = b + \frac{\partial n(x,t)}{\partial x}$
Energiebilanz	$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial t} = \rho_0 r - \frac{\partial Q(X,t)}{\partial X} + N \frac{\partial e(X,t)}{\partial t}$	$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho r - \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + n \cdot L$
Entropieungleichung	$\rho_0 \frac{\partial S(X,t)}{\partial t} \geq \frac{\rho_0 r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{Q(X,t)}{\theta(X,t)} \right]$	$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q(x,t)}{\theta(x,t)} \right]$

3 Konstitutivgesetze – Materialmodellierung

Konstitutivgesetze werden benötigt um:

- die zugrundeliegenden Bilanzgleichungen zu vervollständigen
- das zugrundeliegende Material phänomenologisch zu beschreiben



3.1 Prinzip des Determinismus

Alle konstitutiven Größen eines Körpers B zum Zeitpunkt t können mit Hilfe der bisherigen Bewegung und Körpertemperaturen komplett bestimmt werden.

Konstitutive Größen sind:

- innere Kräfte n
- Wärmefluss q
- interne Energiedichte $\bar{u}$
- Entropiedichte s

Bemerkung:

- 1) Pfad- oder zeitunabhängiges Verhalten: hyperelastisches Materialverhalten: $\sigma(\epsilon)$
- 2) In biologischen Materialien spielt der Pfad oder die Zeit oft eine wichtige Rolle: $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$. Außerdem spielen oft Remodellierungsprozesse eine wichtige Rolle $\rightarrow$ Modellierung über eine Zustandsvariable $\frac{\partial z}{\partial t} = f(z, t)$ (gewöhnliche Differentialgleichung)

3.2 Prinzip der materiellen Objektivität

Für jeden Betrachter kann man ein Koordinatensystem und eine Zeitachse festlegen. Die allgemeinen Bewegungsunterschiede zwischen Betrachtern sind im Allgemeinen Verschiebungen und Rotationen (im 1D-Fall nur Verschiebungen). Das Prinzip der materiellen Objektivität erfordert, dass die Beschreibung des Materialverhaltens invariant gegenüber jeglicher Transformation des Beobachters ist.

Bemerkung: Die Bewegung, die Geschwindigkeit, der Deformationsgradient, der Wärmeflussvektor und andere konstitutive Größen sind nicht unbedingt invariant gegenüber eines Betrachters. Konstitutivgleichungen allerdings schon.

- Betrachter 1: x, t

- Betrachter 2:

$$x^* = x + c(t) \text{ mit beliebiger zeitabhängiger Funktion } c(t)$$

$$t^* = t + b \text{ mit allgemeiner Konstante } b$$

Bei der Betrachtung eines Partikels:

$$\frac{dx^*}{dt} = v^* + \frac{dc(t)}{dt}$$

$$a^* = a + \frac{d^2c(t)}{dt^2}$$

$$F^* = F$$

$$\theta^* = \theta$$

$$N^* = N \quad (\text{Material invariant})$$

Dann gilt:

- für Beobachter 1: $N = g(F, \theta, v, a, t)$
- für Beobachter 2: $N^* = g(F^*, \theta^*, v^*, a^*, t^*)$

Mit der gleichen Konstitutivgleichung $g(\cdot)$ und $\forall c(t), b$ gilt:

$$N^* = g\left(F, \theta, v + \frac{dc}{dt}, a + \frac{d^2c}{dt^2}, t + b\right) = N = g(F, \theta, v, a, t) \quad (124)$$

Mit der Annahme $c(t) \equiv 0$ (Sonderfall)

$$g(F, \theta, v, a, t + b) = g(F, \theta, v, a, t) \quad (\text{weil dies gültig sein muss für alle } b \in \mathbb{R})$$

Das kann nur erfüllt werden, wenn die Konstitutivgleichungen ($g(\cdot)$) nicht von t abhängig ist.

$$\rightarrow g(F, \theta, v, a)$$

Annahme: $c(t) = k \cdot t$ mit k beliebig

$$\rightarrow g(F, \theta, v + k, a) = g(F, \theta, v, a)$$

$$\rightarrow g(F, \theta, a) \text{ v ist keine Größe in der Konstitutivgleichung, da } N^* = N \quad \forall k \text{ gelten müsste.}$$

Annahme: $c(t) = kt^2$

$$\rightarrow \text{Kann keine konstitutive Größe sein. Keine weiteren Bedingungen können eingeführt werden.}$$

$$\rightarrow \text{Konstitutivgleichungen hängen von } F \text{ und } \theta \text{ ab}$$

$$N = g(F, \theta) \quad (125)$$

$$\rightarrow \text{rein mechanische Betrachtung: } N = g(F) \text{ (Impulsbilanz)}$$

3.3 Prinzip der Dissipation

Das Prinzip der Dissipation beschreibt mit Hilfe der Clausius-Duhem-Ungleichung die Konsistenz eines Konstitutivgesetzes (thermodynamische Konsistenz). Kein Material kann diese Ungleichung ignorieren.

3.3.1 Clausius-Duhem-Ungleichung (lokal, Eulersche Betrachtungsweise)

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{\theta} \right) \quad (\text{Entropieungleichung}) \quad (126)$$

Bei einer bestimmten Wahl von r , das von außen bestimmt wird, könnte man meinen, dass es ein r gibt, so dass die Ungleichung nicht erfüllt werden würde. Da der erste Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt sein muss!!:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho r - \frac{\partial q}{\partial x} + nL \quad (\text{Energiebilanz}) \quad (127)$$

Einsetzen von Gleichung 126 in Gleichung 127 liefert (Elimination der Wärmequelle):

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{1}{\theta} \cdot \left(\rho \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x} - nL \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{\theta} \right) \quad (128)$$

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} - \rho \frac{ds}{dt} - \frac{1}{\theta} nL + \frac{1}{\theta} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\frac{\partial q}{\partial x} \cdot \theta + q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}}{\theta^2} \leq 0 \quad (129)$$

mit $\frac{1}{\theta} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} \cdot \theta}{\theta^2}$ und $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g + g'f}{g^2}$ folgt:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} - \rho \frac{ds}{dt} - \frac{1}{\theta} nL - \frac{1}{\theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (130)$$

→ reduzierte Form der Clausius-Duhem-Ungleichung

Nun bietet sich an (obwohl nicht unbedingt notwendig) eine neue konstante Größe einzuführen: die Helmholtz'sche Freie Energiedichte Ψ (Helmholtz-Energiedichte oder freie Energiedichte) pro Einheitsmasse. Die Helmholtz'sche freie Energiedichte ist definiert durch:

$$\Psi = \bar{u} - \theta s \quad (131)$$

$$\rightarrow \rho \frac{d\Psi}{dt} + \rho s \frac{d\theta}{dt} - nL + \frac{1}{\theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (132)$$

Check:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(\bar{u} - \theta s)}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{d(\theta s)}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{d\theta}{dt} s - \frac{ds}{dt} \theta \quad (133)$$

$$\rho \left(\frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{d\theta}{dt} s - \frac{ds}{dt} \theta \right) + \rho s \frac{d\theta}{dt} - nL - \frac{1}{\theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (134)$$

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} - \rho \frac{ds}{dt} - \frac{1}{\theta} nL - \frac{1}{\theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (135)$$

Gleichung 135 entspricht Gleichung 130.

Annahme: Isothermische Bedingungen: $\theta = \theta_0$

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} - nL \leq 0 \quad (136)$$

nL ist die Arbeit der inneren Kräfte, die positiv ist, wenn es Arbeit gegen das System ist. Das Wachstum der freien Energie ist durch nL limitiert:

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} \leq nL \quad (137)$$

Wird $nL - \frac{d\Psi}{dt} (\geq 0)$ über die Zeit integriert, so repräsentiert dieser Ausdruck die Energie, die aus dem System dissipiert ist. Der Verlust ist irreversibel.

Meine Notizen:

- n beschreibt den Zusammenhang von Spannung σ und Dehnung(?) ϵ : $n = g(\epsilon)$
- Für Klausur muss man nicht die Clausius-Duhem-Gleichung oder die Entropieungleichung oder die Energiebilanz auswendig können.

In reversiblen Prozessen (also keine Energie geht verloren) gilt das Gleichheitszeichen:

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} - nL = 0 \quad (138)$$

→ Direkte Verbindung zwischen der freien Energie und der Arbeit

→ Die Helmholtz'sche freie Energie kann als die maximale mechanische Arbeit betrachtet werden, die unter isothermischen Bedingungen aus dem System entnommen werden kann.

Bemerkung: Oft ist es auch sinnvoll, die Clausius-Duhem-Ungleichung auch in Form der Dissipation pro Einheitsvolumen zu beschreiben:

$$\delta = nL - \rho \frac{d\Psi}{dt} - \rho s \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{Dissipation}) \quad (139)$$

Dann gilt aufgrund der Clausius-Duhem-Ungleichung, dass die Dissipation immer positiv sein muss:

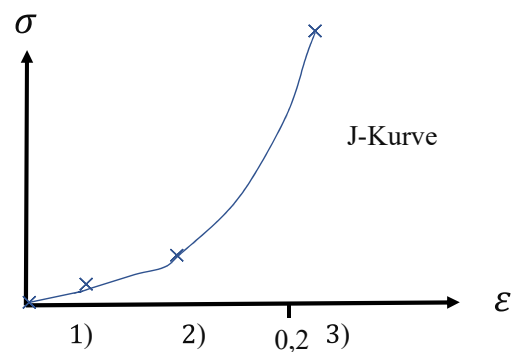
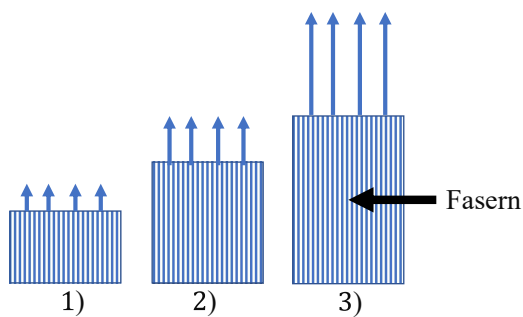
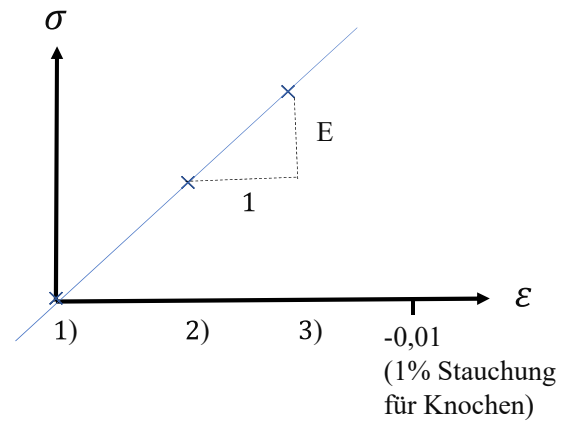
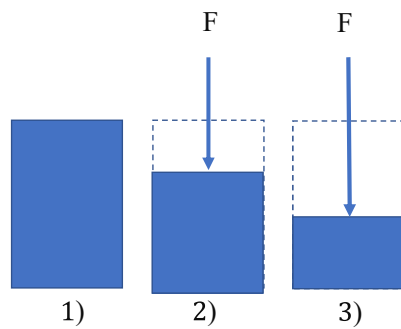
$$\delta \geq 0 \quad (140)$$

3.4 Konstitutives Verhalten von Biomaterialien

- Struktur und Funktion hängen eng miteinander zusammen.
 - Mikrostruktur ist gut auf die jeweiligen Einflussgrößen durch ständige Umbauprozesse angepasst (Beispiel: Knochen).
- Biologisches Material sollte nach Möglichkeit in seiner natürlichen Umgebung, also in vivo, analysiert werden. Veränderungen der Umgebung (z.B. Temperatur, Feuchtigkeit, Vorspannung) können große Auswirkungen auf das Materialverhalten haben.
- Zusammenhänge von intrinsischen Größen, hier z.B. Spannung und Dehnung beschreiben die konstitutiven Eigenschaften eines Materials.
 - z.B. Kompressionsversuche

$$\rightarrow \frac{n}{s} = \sigma = E \cdot \epsilon = g(\epsilon) \quad (141)$$

→ lineares elastisches Materialverhalten



- z.B. Zugversuch für Skelettmuskeln (passiv)
 - Konstitutivgesetz für Muskelgewebe: $\sigma = \gamma \cdot \epsilon^\beta$
 - mit γ und β : Materialparameter, die so bestimmt werden müssen, dass die Funktion $\sigma(\epsilon)$ den experimentellen Daten entspricht.
 - J-Kurve ist sehr typisch für Biomaterialien

3.4.1 Bindegewebe - als Basis für viele Weichgewebe

Zwei Grundbausteine:

- Elastin: nahezu linear elastisches Verhalten
- Kollagen: hierarchische Struktur mit Faserverstärkungscharakter

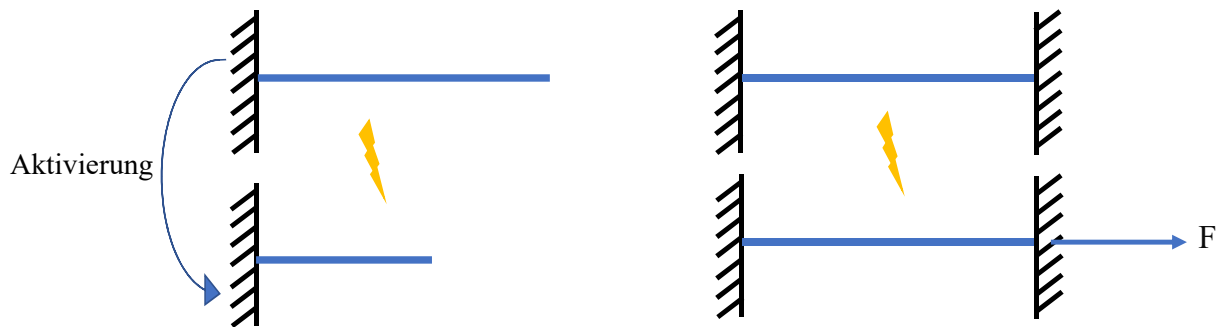
3.4.2 Skelettmuskelmodellierung

- Klassifizierung in gestreifte (Skelett, Myokardium), glatte (hohle Organe wie Blase oder Magen) Muskeln

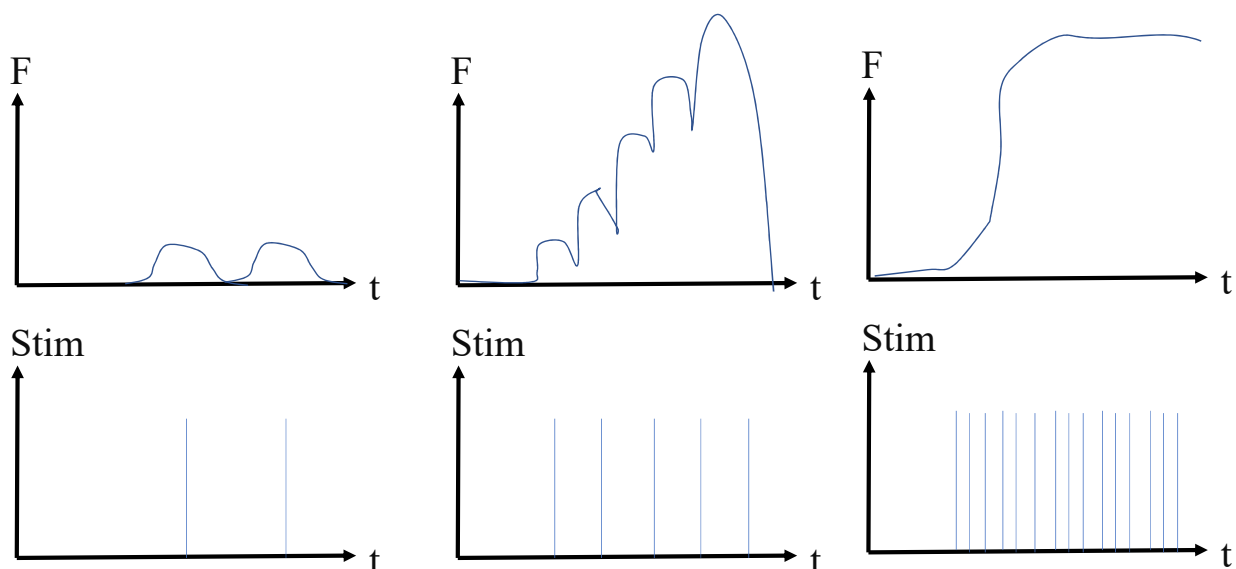
- Die kleinste Einheit ist ein Sarkomer. Für makroskopische Materialeigenschaften ist das mechanische Verhalten einer Faser/Sarkomer von großer Bedeutung

Aktives Verhalten:

- Sarkomer/Fasern können elektrisch aktiviert werden. Als Folge kontrahiert sich das Sarkomer und verlängert sich, wenn die Enden frei sind und produziert Kraft, wenn die Enden fixiert sind.



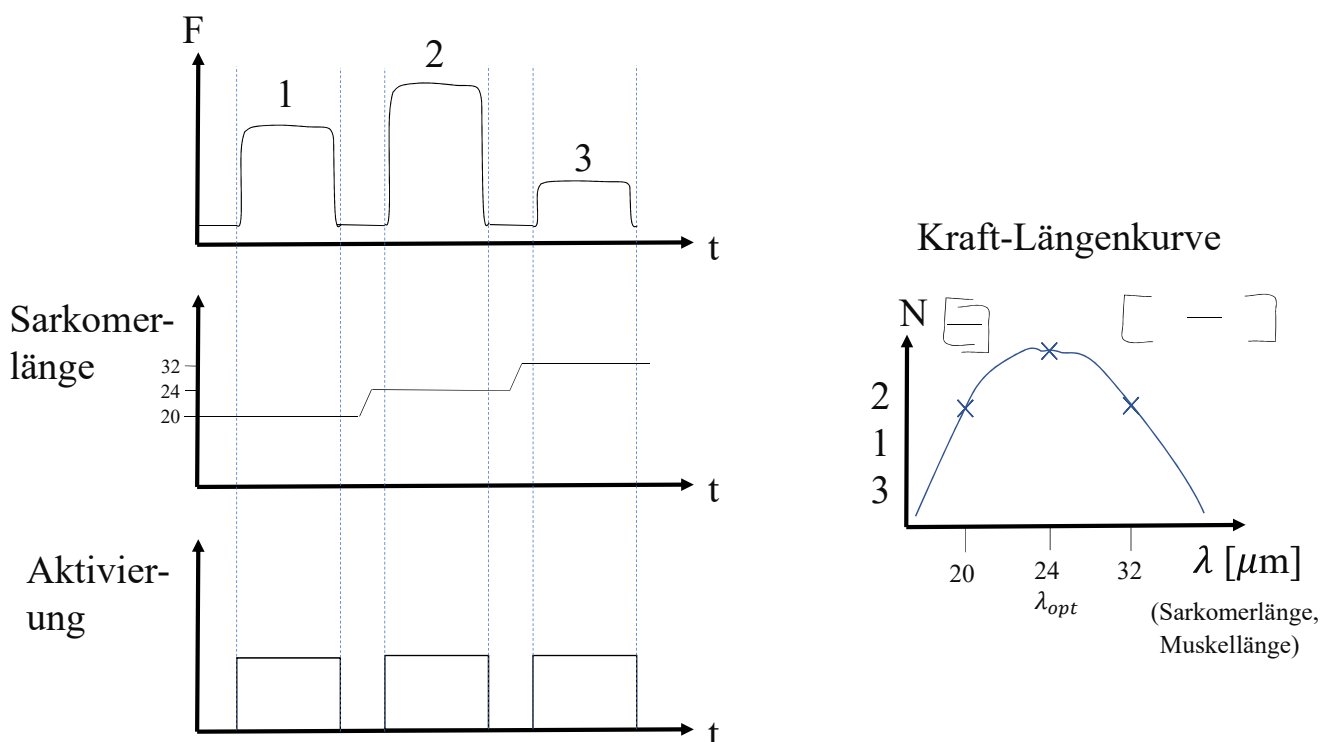
- Sarkomere können mit unterschiedlichen Frequenzen stimuliert werden und erreicht einen Maximalwert bei tetanischen Kontraktionen.



- Ohne Aktivierung kann ein Sarkomer passiv ohne große Krafteinwirkung auf eine gewisse Länge gezogen werden.

Kraft-Längen-Eigenschaft: Experimentelles Setup:

- Ein Sarkomer wird auf die Länge l gezogen (im passiven Zustand)
- Das Sarkomer wird in dieser Länge fixiert und maximal aktiv stimuliert.
- Die Zugkraft, die das Sarkomer entwickelt, wird gemessen
- Die Aktivierung wird wieder aufgehoben
- die eben genannten 4 Schritte werden bei einer anderen Sarkomerlänge wiederholt.

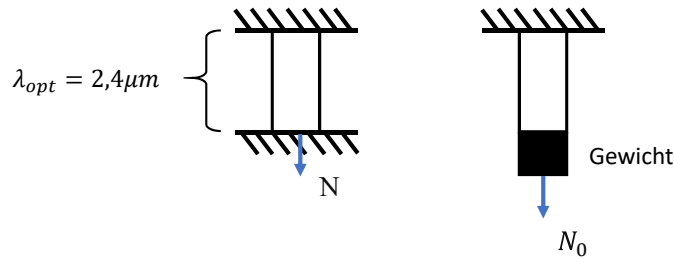


- der mathematische Ausdruck $N = N_l(l)$ nennt man die Kraft-Längen (F-L) Kurve eines Herstellers.
- N_l ist ein (Teil eines) Konstitutivgesetzes und kann als Stoffgesetze in die Impulsbilanz eingesetzt werden ($\sigma = \frac{N}{s}$)
- In der Mitte des Plateaus kann der Muskel die maximale Kraft entwickeln. Diese Länge wird als optimale Sarkomerlänge λ_{opt} bezeichnet

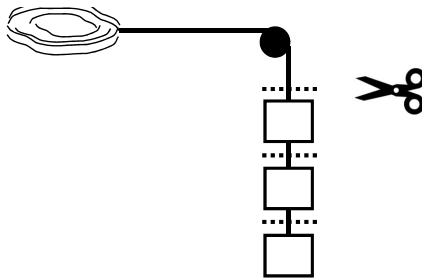
Kraft-Geschwindigkeitseigenschaften

Um den Zusammenhang zwischen der Kontraktionsgeschwindigkeit und der generierten Kraft zu bestimmen können folgende Experimente durchgeführt werden:

1. Ein Sarkomer (oder Muskelgewebe) wird bei optimaler Länge voll aktiviert, um anschließend die Längenfixation durch ein entsprechendes Gewicht zu ersetzen.



2. Das Gewicht wird plötzlich auf ein geringeres Gewicht reduziert.



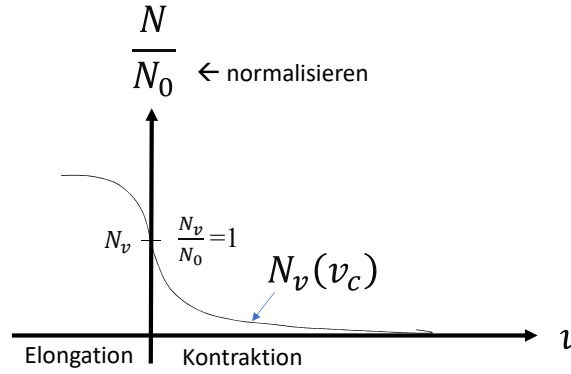
3. Die sich ergebende Kontraktion wird bezüglich der Zeit aufgetragen (bis keine Bewegung mehr registriert wird).
4. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kontraktion wird berechnet (typischerweise stabilisiert sich die Geschwindigkeit recht schnell und bleibt für einen gewissen Zeitraum konstant). → isotonische Kontraktion
5. 1) - 4) werden für verschiedene Gewichtsreduktionszenarien wiederholt, um somit die Kraft-Geschwindigkeitskurve $N_v(v_c)$ zu bestimmen.

Kontinuumsmechanisches Konstitutivgesetz

1. Die innere Kraft des Skelettmuskels kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$N = N(l, v_c) = N_l(l) \cdot \frac{N_v(v_c)}{N_0} = \frac{N_l(l) \cdot N_v(v_c)}{N_0} \quad (142)$$

$$\sigma = \frac{n(l, v_c)}{\hat{s}(x)} \quad (143)$$



2. Um das Aktivierungsverhalten (keine, geringe, hohe Stimulationsfrequenz) mit zu berücksichtigen, wird typischerweise eine zusätzliche interne Variable $\alpha \in [0, 1]$ eingeführt. Hierfür gilt:

- $\alpha = 0 \rightarrow$ keine Aktivierung (passiver Zustand)
- $\alpha = 1 \rightarrow$ volle Aktivierung (titanische Kontraktion)

Die innere Kraft des Skelettmuskels auf Grund von Kontraktion (aktives Verhalten) ist gegeben durch:

$$N = \hat{N}(l, v_c, \alpha) = \alpha \cdot \frac{N_l(l) \cdot N_v(v_c)}{N_0} \quad (144)$$

$$\sigma = \frac{n(l, v_c, \alpha)}{\hat{s}(x)} \quad (145)$$

Bemerkungen:

1. Da dieses Materialverhalten auch für Fasern gilt und da die aktive Kraftkomponente (fast) ausschließlich in den Fasern generiert wird, dient diese Formulierung auch als Grundlage für den 3D Fall:

$$\sigma_{aktiv} = \begin{pmatrix} \frac{n(l, v_c, \alpha)}{\hat{s}(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (146)$$

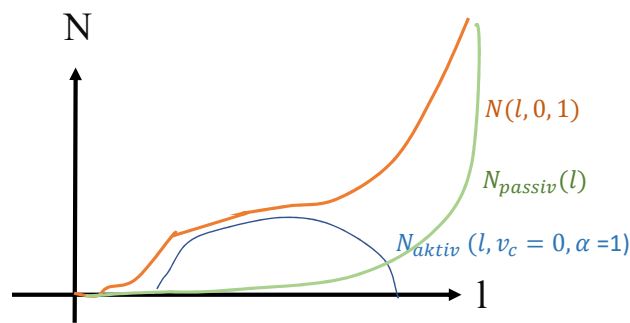
Die Komponente für die entlang der Faserrichtung (ff) ist.

2. Die inneren Gesamtkraft eines Skelettmuskels (die passive und aktive Komponente) ergibt sich dann durch:

$$\begin{aligned} N_{Gesamt}(l, v_c, \alpha) &= N_{passiv}(l) + \alpha \frac{N_l(l) \cdot N_v(v_c)}{N_0} \\ &= N_{passiv}(l) + N_{aktiv}(l, v_c, \alpha) \end{aligned} \quad (147)$$

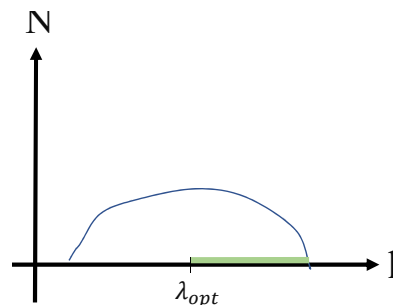
Beispiel: Für $v_c = 0$ (isometrische Kontraktion) und voller Aktivierung $\alpha = 1$:

$$\sigma = \sigma_{passiv} + \sigma_{aktiv} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (148)$$



3.4.3 Modelleinschränkungen bei der F-l/F-v -Kurve

A) Absteigender Ast der F-l-Kurve



Ausgangspunkt:

- voll aktiviertes Sarkomer unter isometrischen Bedingungen jenseits der optimalen Länge ($\lambda > \lambda_{opt}$)
- Ein angehängtes Gewicht sorgt für Kraftgleichgewicht bei konstanter Länge
→ Das System befindet sich im Gleichgewicht

Modellexperiment:

- Das angehängte Gewicht wird erhöht.

Modellaussage:

- Die Sarkomerlänge müsste sich verkürzen.
- Eine Gewichtsreduzierung würde im isometrischen Fall die Sarkomerlänge (anstatt zu verkürzen) verlängern.

Problem:

- Instabilität der Equilibriums für Punkte/Längen auf dem absteigenden Ast der F-l-Kurve.

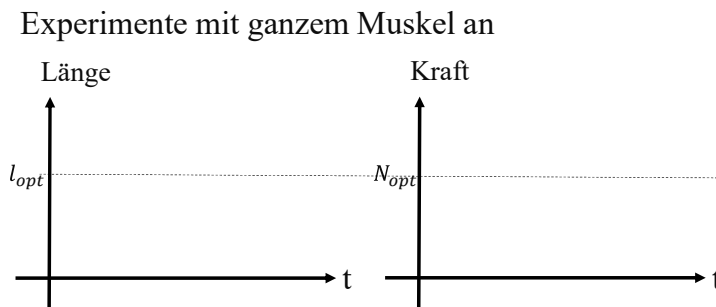
Realität:

- Die kann experimentell nicht beobachtet werden. Das Equilibrium erweist sich als stabil und eine Erhöhung der Gewichts hat eine Erhöhung der Sarkomerlänge zur Folge.

Erkenntnis:

- Muskeln verhalten sich nicht nur nach der F-l-Kurve, die durch einzelne unabhängige Experimente bestimmt wurden. Das Material merkt sich bei welcher Länge es aktiviert wurde (z.B. durch das Titin)
→ Es werden Materialgesetze mit Gedächtniseffekten benötigt.

B) Experimente für Kraftverminderung und Kraftsteigerung



Phänomen:

Ein Muskel erinnert sich an die Länge, in welcher der Muskel aktiviert wurde und erreicht daher nach einer Verkürzung oder Dehnung ein anderes Kraftniveau als wenn er bei der finalen Länge aktiviert worden wäre.

(Memory Effekt, Materialverhalten auch von vorherigen Zuständen abhängig, Konstitutivgesetze nur Approximation, da keine Abbildung dieses Effektes)

→ Diese Effekte sind auf einzelnen Sarkomere betrachtbar und tragen zur Stabilität auf dem absteigenden Ast bei. Grundbaustein verantwortlich für ein solches Verhalten ist höchstwahrscheinlich das Molekül Titin, das aktivierungsabhängige Materialeigenschaften aufweist.

3.4.4 Thermo(visko)elastische Effekte in Skelettmuskeln

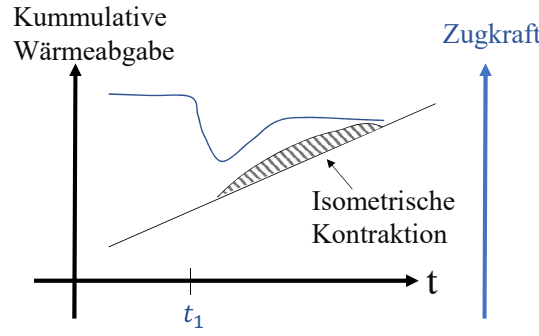
Hill's Experiment zur Wärmebestimmung:

- Während einer isometrisch tetanischen Kontraktion wird die Wärmeabgabe gemessen. Zu einem Zeitpunkt t_1 wird der Muskel plötzlich verkürzt (Gewichtsreduzierung → Verringerung des angehängten Gewichts).

Erklärung: Der kumulative Anstieg der Wärmeabgabe lässt sich beschreiben durch:

1. Wärmeproduktion durch chemische Reaktionen (ATP-Zersetzung)
2. thermoelastischer Effekt ← Fokus

Um den thermoelastischen Effekt zu modellieren, wird ein geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten angenommen (zuerst geschwindigkeitsunabhängiger Fall, dann der geschwindigkeitsabhängige).



A) Geschwindigkeitsunabhängiger Fall

Annahmen:

- keine Wärmeableitung/-zuführung $\rightarrow$ keine Abhängigkeiten vom Temperaturgradienten
 $\rightarrow \text{grad } \theta = 0$
- thermoelastischer Isolator: $q = 0$

Konstitutivgleichungen:

- $n = n(F, \theta)$
- $q = q(F, \theta)$
- $\Psi = \Psi(F, \theta)$
- $s = s(F, \theta)$

Clausius Duhem Ungleichung:

$$\rho \cdot \frac{d\Psi}{dt} + \rho \cdot s \cdot \frac{d\theta}{dt} - nL + \frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (149)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \rho \cdot s \cdot \frac{d\theta}{dt} - nL + \frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \quad (150)$$

mit $L = \dot{F} \cdot F^{-1} = \frac{\partial F}{\partial t} \cdot F^{-1}$
und mit $\frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} - n \cdot F^{-1} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \rho \cdot s \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \leq 0 \quad (151)$$

Da $(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} - n \cdot F^{-1})$ unabhängig von $\frac{\partial F}{\partial t}$ und $(\rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \rho \cdot s)$ unabhängig von $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ gilt:

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} - n \cdot F^{-1} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \rho \cdot s \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad \forall \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (152)$$

Somit ergibt sich:

$$1. (\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} - n \cdot F^{-1}) = 0$$

$$2. (\rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \rho \cdot s) = 0$$

oder:

$$1. \frac{\partial \Psi}{\partial F}(F, \theta) = \frac{1}{\rho} n \cdot F^{-1} = \frac{1}{\rho F} \cdot n = \frac{1}{\rho_0} \cdot n$$

ρ_0 : Dichte in der Referenzkonfiguration

$$2. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(F, \theta) = -s$$

Aus der Symmetrie der partiellen Ableitungen ergibt sich mit:

$$\bullet \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial \Psi}{\partial F}) = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{1}{\rho_0} n) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial F}(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta}$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial F}(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) = \frac{\partial}{\partial F}(-s) \leftrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial F}(-s) = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta}$$

Aus der Entropie(un)gleichung wissen wir: $\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho r}{\theta}$ (durch $q = 0$ ergeben sich keine dissipativen Effekte $\rightarrow$ Gleichheit)

$$\rightarrow \rho \cdot \frac{ds}{dt} = (\frac{\partial s}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t}) \cdot \rho = \frac{\rho \cdot r}{\theta} \quad (153)$$

Wenn sich ein Muskel unter isothermischen ($\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$) Verhältnissen verkürzt erhält man:

$$\rho(\frac{\partial s}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}) = \frac{\rho r}{\theta} \quad (154)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{r}{\theta} \quad (155)$$

mit Wärmeabgabe r

$$\rightarrow r = -\frac{\theta}{\rho_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \quad (156)$$

$$= -\frac{\theta}{\rho_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} \cdot L \cdot F$$

$$= -\frac{\theta}{\frac{\rho_0}{F}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} \cdot L$$

$$= -\theta \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} \cdot L$$

$$= \theta \cdot \alpha \cdot L$$

mit thermoelastischem Koeffizienten: $\alpha = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta}$

Daraus folgt: Wenn die innere Kraft bei steigender Temperatur abnimmt ($\frac{\partial u}{\partial \theta} < 0$), also eine Verkürzung des Materials durch Energiezufuhr, dann ist: $\alpha = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial n}{\partial \theta} > 0$ positiv.

Schlussfolgerung:

- $\alpha > 0$ und L positiv (Verlängerung des Muskels)

→ r positiv (Muskel nimmt Wärme auf)

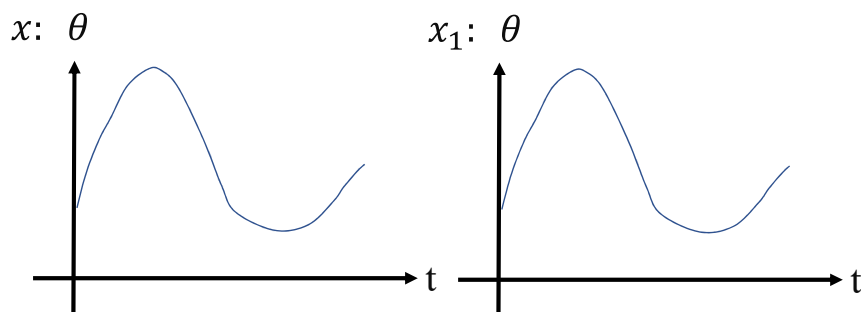
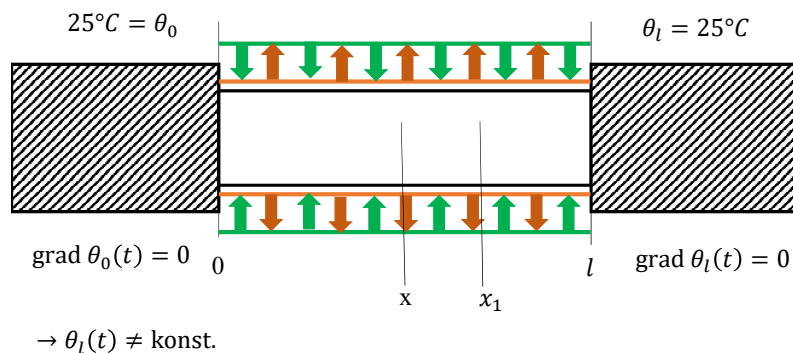
- $\alpha > 0$ und L negativ (Verkürzung des Muskels)

→ r negativ (Muskel gibt Wärme ab)

Bemerkungen über zu restriktive Annahmen:

- Thermoelastischer Effekt ist in Experimenten nicht symmetrisch.
→ Wenn die Verkürzung und Verlängerung eines Muskels bei gleicher Geschwindigkeit durchgeführt wird, so ist die absorbierte Wärme bei der Verlängerung des Muskels kleiner als bei seiner Verkürzung.
- Experimente werden bei relativ hohen Geschwindigkeiten durchgeführt, so dass man erwarten kann, dass die F-v-Kurve keine große Rolle spielt.
- Die Kraft mindernden und kraftsteigernden Eigenschaften eines Muskels wurden nicht berücksichtigt.
→ Die Deformationsgeschwindigkeit muss in die Liste der Argumente für die Konstitutivgleichungen mit aufgenommen werden.

$n(F, \theta, L, \text{grad}\theta) \rightarrow$ Einschränkungen folgen daraus



→ homogenes Materialverhalten auf $[0, l]$

$$\rightarrow \text{grad } \theta(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, l]$$

$\rightarrow$ keine Ortsabhängigkeit von θ und Deformationsgradient

B) Geschwindigkeitsabhängiger Fall

1. Annahme: Konstitutive Größe nur abhängig von F, θ

2. Wenn die Annahme gilt, dann nutzen wir die Clausius-Duhem-Ungleichung um weitere Eigenschaften von Konstitutivgleichungen einzuschränken

$$\rightarrow \alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial n}{\partial \theta} > 0$$

3. Reflektion:

- aus $r = \theta \cdot \alpha \cdot L$ ergibt sich die symmetrische Wärmeauf- und abnahme bei Verkürzung bzw. Verlängerung (Experiment!)
- $\rightarrow \theta$ und F genügen nicht als Variablen für die Konstitutivgrößen n, s, q, Ψ
- L muss mit als Variable aufgenommen werden
 - $\rightarrow n = n(F, \theta, L)$
 - $\rightarrow s = s(F, \theta, L)$
 - $\rightarrow q = q(F, \theta, L)$
 - $\rightarrow \Psi = \Psi(F, \theta, L)$

Mit Hilfe der Clausius Duhem Ungleichung ergibt sich folgendes:

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} - n \cdot F^{-1}\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \rho \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + s\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \leq 0 \quad (157)$$

Aus $\dot{F} = L \cdot F$ folgt:

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot F - n\right) \cdot L + \rho \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + s\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \leq 0 \quad \forall F, \theta, L \quad (158)$$

- $\rho \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + s\right) = 0$ für $s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
- $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$ für $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$
- $\frac{1}{\theta} \cdot q \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$ für $q = 0$

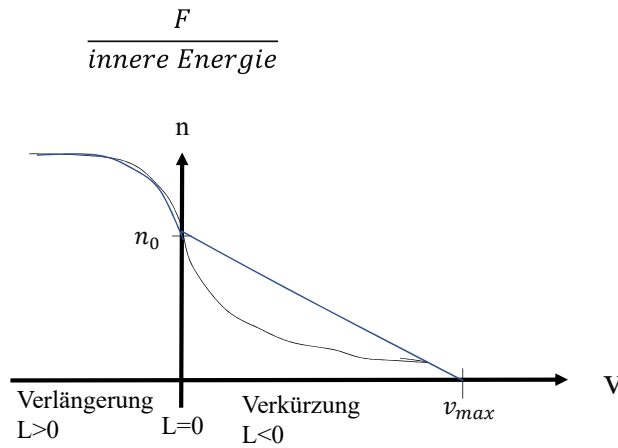
$\rightarrow n(F, \theta, L)$ kann nicht mehr aus der freien Energie abgeleitet werden, aber $\left(\rho \frac{\partial \Psi(F, \theta, L)}{\partial F} \cdot F - n(F, \theta, L)\right) \cdot L$ besitzt für ein festes aber beliebiges vorbestimmtes F und θ für $L = 0$ ein Maximum, da dieser Term für $L = 0$ verschwindet.

D.h. für $\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot F > n_0(F, \theta, 0)$, wobei n_0 die innere Kraft für sehr langsame Bewegungen (quasi-statische) ist. Dann gilt: $\rho_0 \cdot \frac{\partial s}{\partial F} = -\frac{\partial n_0}{\partial \theta}$ und $\alpha = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \theta}$ (vgl. geschwindigkeitsunabhängiger Fall).

$$\begin{aligned}
\rho r &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot F \cdot L + \rho \frac{\partial s}{\partial F} \cdot L \cdot F \cdot \theta - nL \\
&= \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot F + \rho \frac{\partial s}{\partial F} \cdot F \cdot \theta - n \right) \cdot L \\
&= \left(n_0(F, \theta, 0) + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial F} \cdot \theta - n \right) \cdot L \\
&= \left(n_0(F, \theta, 0) - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial n_0}{\partial \theta} \cdot \theta - n \right) \cdot L \\
&= \left(n_0(F, \theta, 0) + \rho \cdot \alpha \cdot \theta - n \right) \cdot L \\
&= \left(\rho \cdot \alpha \cdot \theta - (n - n_0) \right) \cdot L
\end{aligned} \tag{159}$$

Interpretation von Skelettmuskeln:

→ Vergleich zwischen thermoviskoelastischer und thermoelastischer (geschwindigkeitsabhängige vs. geschwindigkeitsunabhängige) Modellierung



Im thermoviskoelastischen Fall:

1. $v \neq 0, L < 0$ (Verkürzung)
 - $(n - n_0) < 0$
 - $(n - n_0) \cdot L > 0$
2. $v \neq 0, L > 0$ (Verlängerung)
 - $(n - n_0) > 0$
 - $(n - n_0) \cdot L > 0$

Im thermoelastischen + thermoviskoelastischen Fall gilt:

$$\rho \cdot \alpha \cdot \theta \cdot L = \theta \cdot \left(-\frac{\partial n_0(F, \theta, L)}{\partial \theta} \right) \cdot L \tag{160}$$

1. Verkürzung: $\alpha > 0, L < 0, \theta = \theta_c, \rho > 0$
2. Verlängerung: $\alpha > 0, L > 0, \theta = \theta_c, \rho > 0$

	geschwindigkeitsunabhängiger Fall	geschwindigkeitsabhängiger Fall
$L > 0$	positiver Wert für $r \rightarrow$ Wärmeaufnahme	positiv - positiv $\rightarrow$ weniger Wärmeaufnahme als im geschwindigkeitsunabhängigen Fall
$L < 0$	negativer Wert für $r \rightarrow$ Wärmeabgabe	negativ - positiv $\rightarrow$ mehr Wärmeaufnahme als im geschwindigkeitsunabhängigen Fall

Die Deformationsgeschwindigkeit ist als Variable bei der Modellierung des thermomechanischen Verhaltens von Muskeln essentiell.