

Gedächtnisprotokoll Modellierung und Simulation in der Biomechanik (SS20)

Dauer: 2h. Vor der Bearbeitungszeit konnte man die Fragen schnell durchlesen und vorab schon etwas nachfragen. Wir durften einen nicht-programmierfähigen Taschenrechner mitnehmen, sonst waren keine Hilfsmittel erlaubt. Wir hatten keine Altfragen/Gedächtnisprotokolle, daher weiß ich nicht, ob diese Fragen jedes Jahr drankommen. Insgesamt gab es 70 Punkte zu erreichen.

Teil 1. Wissensfragen:

Circa 10 Fragen (z.T mit Unterfragen a, b, ...) mit ca. 2 Punkten pro Frage, insgesamt 25 Punkte). Nur offene Fragen, kein Multiple Choice. Ich habe zur Bearbeitung des 1. Teils ca. 45 min gebraucht.

- Schreiben Sie den Ansatz zum Horner Schema für $P_n(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ mit $t = t^*$ auf und definieren Sie neue Koeffizienten.
- Warum ist die Darstellung nach dem Horner Schema numerisch besser geeignet als die Standard-Darstellung?
- Erklären Sie das Hodgkin-Huxley-Modell anhand einer Skizze
- Die LR-Zerlegung liefert $PAQ = LR$. Zeigen Sie, wie man daraus die Lösung für $Ax=b$ erhält.
- Gegeben ist die Bidomain-Gleichung (...). Leiten Sie daraus die Monodomain-Gleichung her. Welche Annahme muss dafür gelten?
- Geben Sie für die DGL $z'(t) = f(z(t), t) = a \cdot z(t)$ die implizite und die explizite Euler-Formel zur Berechnung der Lösung der DGL an. Einmal für die allgemeine Schreibweise (mit $f(z(t), t)$) und einmal für das Beispiel ($a \cdot z(t)$).
- Zeigen Sie, dass die implizite Methode für unabhängig von der Wahl des Zeitschritts h stabil ist.
- Zeichnen Sie die Ergebnisse der impliziten und der expliziten Methode in dieses Schaubild ein. (Die analytische Lösung war bereits eingezeichnet).
- Leiten Sie mit der Taylorreihe um x den Ausdruck für den zentralen Differenzenquotienten für die zweite Ableitung her.
- Wie wird ein LGS der Form $Ax=b$ umgeformt, um daraus eine Fixpunktgleichung zu bekommen? Was muss für die Matrix M gelten, damit das Fixpunktverfahren angewendet werden kann? Verwenden sie hierzu den Fehler für den $(k+1)$ -ten Zeitschritt. (Hier war keine Formel oder ähnliches gegeben, man musste alles herleiten).
- Gegeben ist die Nernst-Gleichung. Erklären Sie, was diese bedeutet, also was sich damit berechnen lässt.
- Wie wirkt sich ein großer Faserdurchmesser (großes Oberflächen-Volumen-Verhältnis A_m) auf die Geschwindigkeit eines Aktionspotentials aus?
- Welcher Fußballverein ist der geilste auf der ganzen Welt? (Antwort: FC Schalke 04).
- ...

Teil 2. Rechenteil:

4 große Aufgaben mit 3 bis 6 Unterfragen. Für jede Aufgabe zwischen 10 und 12 Punkten (insgesamt 45 Punkte). Obwohl es angekündigt wurde, wurden keine Zwischenergebnisse gegeben. Teilweise (meistens aber nicht) konnten die Aufgaben trotzdem unabhängig bearbeitet werden. Nachdem ich für den 1. Teil 45 min gebraucht hatte, konnte ich diesen Teil nicht zu 100% beantworten. Mir haben ca. eine halbe Aufgabe und ein oder zwei Teilfragen gefehlt.

- Gauß-Quadratur
 - Schreiben Sie die Formel zur Gauß-Quadratur auf (keine Herleitung).
 - Berechnen Sie das Integral analytisch. Gegeben war ein Polynom 3. Grades mit Integrationsgrenzen von -1 bis 1
 - Berechnen Sie die Gauß-Näherung des Integrals für $n=0$ ($w(x) = 1$ gegeben, $x_0 = 0$ und Gewichtung $p=2$ gegeben).
 - Berechnen Sie die Gauß-Näherung des Integrals für $n=1$ ($w(x) = 1$ gegeben, $x = [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ und Gewichtungen $p = [1, 1]$ gegeben)
 - Gegeben war eine Graph des Polynoms im Intervall $[-2,2]$. Zeichnen Sie die Funktionswerte, x-Werte und Gewichtungen, die für die Gauß-Näherungen verwendet wurden, ein. Zeichnen Sie die Ergebnisse der Näherungen für $n=0$ und $n=1$ ein.
 - Vergleichen Sie die Ergebnisse der Näherungen mit dem analytischen Integral. Erklären Sie, warum die Näherungen diese Ergebnisse liefern.
- Örtliche und zeitliche Diskretisierung
 - Gegeben ist eine Gleichung $du/dt = c*du/dx + g$. Anfangswerte $u(x=0)$ und $u(x=L)$ und $u(t=0)$ gegeben.
 - Führen Sie eine zentrale örtliche Diskretisierung durch für die Ortspunkte $i=1, 1 < i < N, i=N-1$.
 - Führen Sie eine zeitliche Diskretisierung nach der impliziten Methode durch für die Ortspunkte $i=0, i=1, 1 < i < N, i=N$
 - Bringen Sie ihr Ergebnis in die Form $A*u^{(k+1)} = u^k + g$ für $N=6$. (Wie gesagt, keine Zwischenergebnisse gegeben)
- System von DGLs
 - Gegeben waren 2 einfache DGLs mit Anfangswerten $V(t_0) = 0, r(t_0) = 0, t_0 = 0$ und Zeitschritten $t_{k+1} - t_k = 0,1$. Die DGLs sahen ungefähr so aus:
 - $dV/dt = -V(t)^3 + V(t) - r(t) + \exp(-at)$
 - $dr/dt = r(t) - V(t) + 1$
 - Berechnen Sie das DGL-System nach der expliziten Methode für die Zeitschritte t_1 und t_2 .
 - Schreiben Sie die Rechenvorschrift für die implizite Methode auf.
 - Wie kann ein nichtlineares Gleichungssystem der Form $F(x)=0$ mit mehreren Unbekannten gelöst werden?
 - Lösen sie das für die implizite Methode aufgestellte Gleichungssystem für den ersten Zeitschritt.
 - ...
- L2 – Approximation
 - Gegeben war der Ansatz der L2-Approximation: $\|f(t) - Q_n(t)\|_2^2 = \min$.
 - Leiten Sie her, wie dieser Ansatz zu einem LGS-Problem der Form $Ax=b$ führt.
 - Wieso sind für die L2-Approximation Orthogonalpolynome besonders geeignet? Zeigen Sie dies exemplarisch an den Legendre-Polynomen P_2 und P_3 . Gegeben waren die Legendre-Polynome P_0 und P_1 sowie die Rechenvorschrift für P_{n+1} .
 - ...