

Aufgabe 8 Potenzreihen SS07

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cdot x}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x e^x \quad \text{exp Reihe} \rightarrow f = \infty$$

ein geschlossener Ausdruck $\boxed{x e^x}$

Aufgabe 8 Integration von Potenzreihen SS09

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(-\frac{1}{9}\right)^n x^{2n-1}$$

a) **Gliedweise Integration:** (1) $\int x^{2n-1} = \left[\frac{x^{2n}}{2n} \right]$

$$\cancel{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{x^{2n}}{\cancel{2n}} = \left(-\frac{1}{9}\right)^n \cdot x^{2n}$$

b) Geschlossene Form $F(x)$

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^n \cdot x^{2n} = \left(\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot x^2\right)^n \stackrel{!}{=} \boxed{q^n < 1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}x^2\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{9}x^2} = \frac{9}{9+x^2} - 1$$

c) Geschlossene Form $f(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{9}{9+x^2} - 1 \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{9 \cdot 2x}{(9+x^2)^2}$$

Aufgabe 3 Grenzwerte SS11

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-3^{-1})^k = \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{7\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{7\pi}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{7\pi}{2}\right)^{2k+1}$$

(Sin(z) Form)

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$$

Allgemein gilt: (geschlossene Formen)

• geometrische Reihe: $|q| < 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

• Exp. Reihe: $\exp: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z$

• Sinus: $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

• Cosinus: $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$

Log/Ln: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$

Aufgabe 4 Potenzreihe umschreiben (geschlossene Form) SS11

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 \cos(5x) \Leftrightarrow \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$x^2 \cdot \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \cdot x^2 \quad \text{mit } \underline{z=5x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (5x)^{2n} \cdot x^2$$

$$(5x)^{2n} = \underline{5^{2n}} \cdot x^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n+2}$$

Aufgabe 7 Potenzreihe geschlossene Form SS12

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(n-1)!} x^{2n-1}$$

integrieren

$$\int x^{2n-1} dx = \frac{1}{2n} x^{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n(n-1)!} x^{2n} = \frac{(-4)^n}{2 \cdot n!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-4)^n}{n!} x^{2n}$$

Allgemein gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

beginnt bei 1 also muss $n=0$ abgezogen werden sodass gilt

Eine Geschlossene Form für $F(x)$:

$$\frac{1}{2} e^{(-4x^2)} - \frac{1}{2} \frac{(-4)^0}{0!} x^{2 \cdot 0} = \frac{1}{2} e^{(-4x^2)} - \frac{1}{2}$$

Eine Geschlossene Form für $f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{(-4x^2)} \right) = -\frac{1}{2} 8x e^{(-4x^2)} = -4x e^{(-4x^2)}$$

Aufgabe 7 geschlossene Form Potenzreihe WS18/19

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-9)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}$$

gliedweise Integration

$$\int x^{4n-1} = \frac{1}{4n} x^{4n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-9)^n}{(2n-1)! 4n} x^{4n}$$

$\uparrow$
 $\cancel{2} \cdot 2n$

$$(2n-1)! 2n = 2n! \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{(2n)!} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{(2n)!} x^{4n} - 1$$

beginnt bei 1, cos(x) bei 0 also 0-tes Summenglied abziehen

b) geschlossene Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{(2n)!} x^{4n} - 1 = \cos(3x^2)$$

$\underbrace{\quad}_{\cos(\dots)}$