

## Aufgabe 5 Divergenz und Rotation Vektorfeld SS08

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{d}{dx} v_x + \frac{d}{dy} v_y$$

Divergenz von einem Vektor  $\mathbb{R}^2$   
 $\rightarrow \operatorname{div} f(x,y) = \frac{d}{dx}(x_1) + \frac{d}{dy}(y_1)$

$$\vec{v} : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow v_x \\ \searrow v_y \end{matrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} (2x-1)(y+1)^2 \\ (x-1)^2(y+1) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f(x,y) = \frac{d}{dx}((2x-1)(y+1)^2) + \frac{d}{dy}((x-1)^2(y+1))$$

$$\operatorname{div} f(x,y) = 2(y+1)^2 + (x-1)^2$$

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \frac{d}{dx} y_1 - \frac{d}{dy} x_1 = \frac{d}{dx}((x-1)^2(y+1)) - \frac{d}{dy}((2x-1)(y+1)^2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f(x,y) &= 2(x-1)(y+1) - 2(y+1)(2x-1) \\ &= 2(xy+x-y-1) - 2(2xy-y+2x-1) \\ &= 2xy+2x-2y-2 - 4xy+2y-4x+2 \\ &= -2xy-2x = -2x(y+1) \end{aligned}$$

in  $\mathbb{R}^2$   $\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{d}{dx} v_y - \frac{d}{dy} v_x$

## Potenzial eines Vektorfeldes berechnen

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \sin(xy) \\ -\cos(xy) + xy \sin(xy) - z^2 \sin(yz^2) \\ -2yz \sin(yz^2) + 2z \end{pmatrix}$$

$U(x,y,z)$  ist eine Stammfunktion eines Vektorfeldes

umgekehrt ergibt also die Ableitung von  $U(x,y,z)$  eine Zeile (je nach Ableitungsvariable) von  $g(x,y,z)$

Merke:

Die Ableitung des Potenzials nach x

1. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dx}(U(x,y,z))$

2. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dy}(U(x,y,z))$

3. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dz}(U(x,y,z))$

## Berechnung:

### Aufstellen des Potenzial U

Durch Integrieren der ersten Zeile von  $g(x,y,z)$  erhalten wir einen Teil des Potenzials + Integrationskonstante  $C$

$$U(x,y,z) = \int y^2 \sin(xy) dx = -y^2 \cos(xy) \cdot y = -y \cos(xy) + C_1(y,z)$$

Laut Bedingung soll:  $\frac{d}{dy} U(x,y,z) \hat{=} -\cos(xy) + xy \sin(xy) - z^2 \sin(yz^2)$  gelten

$U(x,y,z)$  nach y ableiten

$$\frac{d}{dy}(-y \cos(xy) + C_1(y,z)) \stackrel{!}{=} -\cos(xy) + xy \sin(xy) - z^2 \sin(yz^2)$$

$$-\cancel{\cos(xy)} + \cancel{\sin(xy)}xy + \frac{d}{dy} C_1(y,z) \stackrel{!}{=} -\cancel{\cos(xy)} + \cancel{\sin(xy)}xy - z^2 \sin(yz^2)$$

$$\frac{d}{dy} C_1(y,z) = -z^2 \sin(yz^2) \quad | \int \text{integrieren nach } y$$

$$\int \frac{d}{dy} C_1(y,z) dy = \int -z^2 \sin(yz^2) dy = \cos(yz^2) + C_2(z)$$

$$C_1(y,z) = \cos(yz^2) + C_2(z)$$

Kostenlos heruntergeladen von



$C_1$  in  $U(x,y,z)$  einsetzen und nach  $z$  ableiten

$$U(x,y,z) = -y \cos(xy) + C_1(y,z) = -y \cos(xy) + \cos(yz^2) + C_2(z)$$

$$\frac{d}{dz}(-y \cos(xy) + \cos(yz^2) + C_2(z)) \stackrel{!}{=} -2yz \sin(yz^2) + 2z$$
$$-\sin(yz^2) \cdot 2zy + \frac{d}{dz}(C_2(z)) = -2yz \sin(yz^2) + 2z$$

$$\frac{d}{dz}(C_2(z)) = 2z \quad | \int \dots dz$$

$$C_2(z) = \int 2z dz = z^2 + C_3 \quad C_3 \text{ darf beliebig gew\u00e4hlt werden } \boxed{C_3 = 0}$$

$$\underline{U(x,y,z) = -y \cos(xy) + \cos(yz^2) + z^2}$$

### Aufgabe 7 Vektorfeld und Potenzial SS10

1. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dx}(U(x,y,z))$

2. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dy}(U(x,y,z))$

3. Zeile von  $g(x,y,z) \hat{=} \frac{d}{dz}(U(x,y,z))$

$$U(x,y,z) \hat{=} \int g(x,y,z) \dots \text{ usw.}$$

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ wx + \cos(xyz)yz - e^{y-z} \\ wy + \cos(xyz)xz - xe^{y-z} \\ \cos(xyz)xy + xe^{y-z} \end{pmatrix}$$

Potenzial aufstellen

$$U(w,x,y,z) = \int xy dw = wxy + C_1(x,y,z) \quad \text{integrationskonstante noch abh\u00e4ngig von } (x,y,z)$$

Bedingung aufstellen

$$-e^{y-z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(U(w,x,y,z)) \hat{=} wy + \cos(xyz)yz - e^{y-z} \quad \text{2te - Zeile}$$

$$wy + \frac{\partial}{\partial x}(C_1(x,y,z)) \hat{=} wy + \cos(xyz)yz - e^{y-z}$$

$$C_1(x,y,z) \hat{=} \int \cos(xyz)yz - e^{y-z} dx = \sin(xyz) \frac{yz}{yz} + C_2(y,z)$$

$C_1$  in  $U(w, x, y, z)$  einsetzen und erneut Bedingung aufstellen

$$\frac{\partial}{\partial y} (u(w, x, y, z)) \stackrel{!}{=} wx + \cos(xyz) \cdot xz - xe^{y-z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (wx + \sin(xyz) + c_2(y, z)) = wx + \cos(xyz) \cdot xz - xe^{y-z}$$

einsetzen

$$wx + \cancel{\cos(xyz) \cdot xz} + \frac{\partial}{\partial y} (c_2(y, z)) = \cancel{wx} + \cancel{\cos(xyz) \cdot xz} - xe^{y-z}$$

$$c_2(y, z) = \int -xe^{y-z} dy = -xe^{y-z} + c_3(z)$$

$C_2$  in  $U(w, x, y, z)$  einsetzen und erneut Bedingung aufstellen

$$\frac{\partial}{\partial z} (wx + \sin(xyz) - xe^{y-z} + c_3(z)) \stackrel{!}{=} \cos(xyz) \cdot xy + xe^{y-z}$$

$$\cancel{\cos(xyz) \cdot xy} + \cancel{xe^{y-z}} + \frac{\partial}{\partial z} (c_3(z)) \stackrel{!}{=} \cancel{\cos(xyz) \cdot xy} + \cancel{xe^{y-z}}$$

$$c_3(z) \stackrel{!}{=} \int 0 dz = 0 + c_4 \rightarrow = 0, \text{ da frei wählbar}$$

$$\underline{\underline{U(w, x, y, z) = wx + \sin(xyz) - xe^{y-z}}}$$

b) Geben Sie ein Vektorfeld  $h$  an, das das Potenzial

$$V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y + x \ln(xy^3)$$

besitzt:

ableiten  $V: \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} [\dots] \\ \frac{d}{dy} [\dots] \end{pmatrix}$

Vektorfeld:  $\text{grad}(V) \stackrel{!}{=} \text{Vektorfeld } h$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y + x \ln(xy^3)) = 1 \cdot \ln(xy^3) + x \cdot \frac{y^3}{y^3 x} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (y + x \ln(xy^3)) = 1 + x \cdot 3 \frac{y^2}{y^3} = 1 + 3 \frac{x}{y}$$

## Aufgabe 8 Rotation und Divergenz und Jacobi SS10

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} (e^{x^2})y \\ \sin(xy) \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{z_1} \end{matrix}$$

Divergenz:  $\text{div } \vec{v} = \frac{d}{dx} (e^{x^2})y + \frac{d}{dy} (\sin(xy)) + \frac{d}{dz} (x^2)$   
 $\text{div } \vec{v} = ye^{x^2} \cdot 2x + x \cos(xy) + 0$

$\text{Div } \vec{v}$  ergibt sich auch aus der Spur der Jacobi Matrix

$$\text{Jacobi } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_{x_1}^T \\ \text{grad } f_{y_1}^T \\ \text{grad } f_{z_1}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2xe^{x^2})y & e^{x^2} & 0 \\ \cos(xy)y & \cos(xy)x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotation bei 3 veränderlichen Variablen:

$$\text{rot } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dy} f_{z_1} - \frac{d}{dz} f_{y_1} \\ \frac{d}{dz} f_{x_1} - \frac{d}{dx} f_{z_1} \\ \frac{d}{dx} f_{y_1} - \frac{d}{dy} f_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 2x \\ \cos(xy)y - e^{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ \cos(xy)y - e^{x^2} \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 10 Vektorfeld - Potential SS11

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y^3 - 2xy^2 + 3x^2y \\ \alpha xy^2 - 2x^2y + x^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

ein Potential existiert wenn  $\text{rot} f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

$$\boxed{\text{rot} f(x, y) \text{ in } \mathbb{R}^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1} \quad \text{rot} f(x, y) = (\alpha y^2 - 4xy + 3x^2) - (3y^2 - 4xy + 3x^2)$$

$$\alpha y^2 - \cancel{4xy} + \cancel{3x^2} - 3y^2 + \cancel{4xy} - \cancel{3x^2}$$

$$\alpha y^2 - 3y^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\alpha y^2 = 3y^2 \quad \boxed{\alpha = 3}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y^3 - 2xy^2 + 3x^2y \\ 3xy^2 - 2x^2y + x^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

$$u(x, y, z) = \int y^3 - 2xy^2 + 3x^2y \, dx$$

$$\underline{u(x, y, z) = y^3x - x^2y^2 + x^3y + c_1(y)}$$

$$\frac{d}{dy}(u(x, y)) = 2. \text{ Zeile} - \boxed{f_2}$$

$$\frac{d}{dy}(y^3x - x^2y^2 + x^3y + c_1(y)) = 3xy^2 - 2x^2y + x^3$$

$$\cancel{3y^2x} - \cancel{2x^2y} + \cancel{x^3} + \frac{d}{dy}(c_1(y)) = \cancel{3xy^2} - \cancel{2x^2y} + \cancel{x^3} \quad \underline{\underline{c_1(y) = 0}}$$

## Aufgabe 8 Parameter abhängiges Vektorfeld SS12

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{xy}(3xy + 7y^2 + 3) \\ e^{xy}(3x^2 + \alpha xy + 7) \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

$$\mathbb{R} \quad \text{rot} f = f_{2x} - f_{1y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = e^{xy}(3x + 14y) + x e^{xy}(3xy + 7y^2 + 3) = e^{xy}(3x + 14y + 3x^2y + 7xy^2 + 3x) = e^{xy}(6x + 14y + 3x^2y + 7xy^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2 = e^{xy}(6x + \alpha y) + y e^{xy}(3x^2 + \alpha xy + 7) = e^{xy}(6x + \alpha y + 3x^2y + \alpha xy^2 + 7y)$$

Potential wenn  $\text{rot} f(x, y) = 0$

$$\text{rot} \vec{f} = e^{xy}(6x + \alpha y + 3x^2y + \alpha xy^2 + 7y) - e^{xy}(6x + 14y + 3x^2y + 7xy^2)$$

$$e^{xy}(\cancel{6x} + \alpha y + \cancel{3x^2y} + \alpha xy^2 + 7y - \cancel{6x} - 14y - \cancel{3x^2y} - 7xy^2)$$

$$e^{xy}(\alpha y - 7y + \alpha xy^2 - 7xy^2)$$

$$y(\alpha - 7) + y^2x(\alpha - 7) = 0$$

$$\alpha = 7$$

## Aufgabe 9 Parameter abhängiges Vektorfeld SS13

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \cos(x^2 y) + y^2 \\ x^2 \cos(x^2 y) - 4\alpha xy \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

### Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = 2x \cos(x^2 y) + 2xy (-\sin(x^2 y) x^2) + 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2 = 2x \cos(x^2 y) + x^2 (-\sin(x^2 y) 2xy) - 4\alpha y$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 = \cancel{2x \cos(x^2 y) - \sin(x^2 y) 2x^3 y - 4\alpha y} - \cancel{2x \cos(x^2 y) + \sin(x^2 y) 2x^3 y - 2y} = -4\alpha y - 2y$$

$f$  besitzt ein Potential wenn  $\operatorname{rot} \vec{f} \stackrel{!}{=} 0$

$$-4\alpha y - 2y = 0$$

$$-2y(2\alpha + 1) = 0$$

SVP  $\stackrel{!}{=} 0$  wenn  $2\alpha + 1 = 0$   
 $\alpha = -\frac{1}{2}$

## Aufgabe 7 Jacobi SS15

$$f: \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad g: \begin{pmatrix} \sin(y_1 y_2) \\ \sin(y_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
  
 und  $h: g \circ f = g(f(x_1, x_2, x_3))$   
 $h = \begin{pmatrix} \sin(x_1 x_2 x_3) \\ \sin(x_3) \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}$

$$Jh(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \cos(x_1 x_2 x_3) & x_1 x_3 \cos(x_1 x_2 x_3) & x_2 x_3 \cos(x_1 x_2 x_3) \\ 0 & 0 & \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2 Jacobi SS16

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\pi y_2) \\ e^{-y_1^2} \end{pmatrix}$$

Algem  $g'(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \overbrace{g_x}^{\operatorname{grad} g_1(\vec{y})} & \overbrace{g_y}^{\operatorname{grad} g_2(\vec{y})} \end{pmatrix}$

a) Berechne  $Jh$  mit  $h := g \circ f$

$$h = g(f(x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_2 x_3) \\ e^{-x_1^2} \end{pmatrix} \quad Jh \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi x_2 x_3 \cos(\pi x_2 x_3) & 0 & 0 \\ 0 & -2x_1 x_3 e^{-x_1^2} & -2x_1^2 x_3 e^{-x_1^2} \end{pmatrix}$$

b) Linear Approx. im Punkt  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  von  $g$ :

$$T_1 = g(a) + g'(a) \begin{pmatrix} y_1 - a_1 \\ y_2 - a_2 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| \right)$$

$$g'(a) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \cos(\pi y_2) \\ -2y_1 e^{-y_1^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -2e^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - a_1 \\ y_2 - a_2 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| \right)$$

## Aufgabe 5 Potential mit Bedingung SS16

Bedingung:  $U(0,0) = 5$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 \sin(y^2 + 3x) e^y \\ -2y \sin(y^2 + 3x) e^y + \cos(y^2 + 3x) e^y \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad U(x,y) = \int -3 \sin(y^2 + 3x) e^y dx = \cos(y^2 + 3x) e^y + c_1(y)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dy} (\cos(y^2 + 3x) e^y + c_1(y)) = -2y \sin(y^2 + 3x) e^y + \cos(y^2 + 3x) e^y$$

$$\cancel{-2y \sin(y^2 + 3x) e^y} + \cancel{\cos(y^2 + 3x) e^y} + \frac{d}{dy} c_1(y) = \cancel{-2y \sin(y^2 + 3x) e^y} + \cancel{\cos(y^2 + 3x) e^y}$$

$$\underline{c_1 = 0 + c_2}$$

Bedingung:  $U(0,0) = 5$

$$\cos(0) + c_2 = 5$$

$$\underline{\underline{c_2 = 4}}$$

$$U(x,y) = \cos(y^2 + 3x) e^y + 4$$

## Aufgabe 8 Jacobi mit Parameter SS17

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + e^{2y} + \cos(z^2) \\ \alpha x e^{2y} \\ -\alpha x z \sin(z^2) \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 2e^{2y} & -2z \sin(z^2) \\ \alpha e^{2y} & \alpha 2x e^{2y} & 0 \\ -\alpha z \sin(z^2) & 0 & \alpha x (\sin(z^2) + 2z^2 \cos(z^2)) \end{pmatrix}$$

$\alpha$  muss 2 sein