

Aufgabe 3 Gradienten SS 07

a) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto e^{-x} \sin(2y)$ (Produkt aus x, y)

$$\text{grad } f(x, y) = (-e^{-x} \sin(2y), 2e^{-x} \cos(2y))^T$$

b) $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^3 \ln(y^3)$

$$\text{grad } g(x, y) = (3x^2 \ln(y^3), \frac{3x^3}{y})$$

Aufgabe 4 Funktion in x-y SS 07

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 9x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y + 5$$

Allgemein: $\text{grad } f(x, y) = \left[\frac{d}{dx}(f(x, y)), \frac{d}{dy}(f(x, y)) \right]$

$$\text{grad } f(x, y) = (x^3 - 18x + 2y - 2, -2y + 2x + 2)^T$$

$f_x(x, y) \qquad f_y(x, y)$

Bestimme alle kritischen Stellen der Funktion:

$$\begin{aligned} \text{I: } & x^3 - 18x + 2y - 2 = 0 \\ \text{II: } & -2y + 2x + 2 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} \text{ LGS lösen} \Rightarrow \text{aus II folgt } \boxed{y = x + 1}$$

Kritische Stellen:
 $(0, 1), (4, 5), (-4, -3)$

Punktprobe in I:

$$\begin{aligned} x^3 - 18x + 2(x+1) - 2 &= 0 \\ x^3 - 18x + 2x + 2 - 2 &= 0 \\ x^3 - 16x &= 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 16) \end{aligned}$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -4$

d.h. $x_1 = 0$
 $x_2 = 4$
 $x_3 = -4$

$\Rightarrow$ Punktprobe in II um y-Wert zu bekommen

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & -2y + 2(0) + 2 = 0 \quad y_1 = 1 \\ \textcircled{2} \quad & -2y + 2(4) + 2 = 0 \quad y_2 = 5 \\ \textcircled{3} \quad & -2y + 2(-4) + 2 = 0 \quad y_3 = -3 \end{aligned}$$

Bestimme die Hesse Matrix im Punkt $(0, 1)$:

• Allgemein Hesse Matrix bestimmen

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 18 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \left| f_{xy} = f_{yx} \right| \text{ Satz von Schwarz?}$$

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 3(0) - 18 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \left| H_f(4, 5) = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right| \quad H_f(-4, -3) = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Untersuche nach Extrema (lokale Maxima, lokale Minima, Sattelpunkte)

Bedingungen:

lok. Maximum $\rightarrow$ wenn gilt $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, $\text{Sp}(H_f(x_0, y_0)) < 0$

lok. Minimum $\rightarrow$ wenn gilt $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, $\text{Sp}(H_f(x_0, y_0)) > 0$

Sattelpunkt $\rightarrow$ wenn gilt $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$

$$\det 2 \times 2: \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$+xw - zy$$

$$\det 3 \times 3: \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & w & k \\ h & + & r \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ z \\ n \end{matrix}$$

Extremstellen überprüfen:

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -18 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(0, 1)) = 36 - 4 = 32 > 0 \quad \text{Sp}(H_f) = -20 < 0$$

$\rightarrow$ lokales Maximum

$$H_f(4, 5) = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f) = -60 - 4 = -64 < 0$$

$\rightarrow$ Sattelpunkt

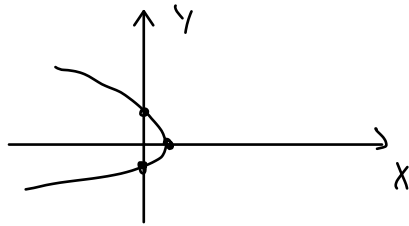
$$H_f(-4, -3) = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \uparrow$$

Keine Minima

Aufgabe 9 Gradienten / Tangentiallinie / NL SS07

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto y^2 - 2 + 3x$$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2y \end{pmatrix}$$



Niveaulinie für $f(x, y) = 0$

$$y^2 - 2 + 3x = 0$$

$$y^2 = 2 - 3x \Leftrightarrow y = \sqrt{2 - 3x}$$

$$x = \frac{2}{3} - \frac{y^2}{3}$$

Werte einsetzen: $x = 0: y = \sqrt{2}$

$y = 0: x = \frac{2}{3}$

Tangentialebene $\hat{=} T_1(f, (x, y, z), (2, 3, 13))$

$$z = f(2, 3, 13) + f_x(2, 3, 13)(x - 2) + f_y(2, 3, 13)(y - 3) + f_z(2, 3, 13)(z - 13)$$

$$f(2, 3) = 13$$

$$f_x(2, 3) = 3 \quad z = 13 + 3(x - 2) + 6(y - 3)$$

$$f_y(2, 3) = 6 \quad z = 13 + 3x - 6 + 6y - 18$$

$$f_z(\dots) = 0 \quad 0 = 3x + 6y - 11 - z$$

Aufgabe 4 Taylorpolynom Mehrdim. SS08

$$f^{(0)} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2) + 1 \quad \text{im Punkt } (0, 0)$$

$$f^{(1)} f_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

$$f^{(1)} f_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$f^{(2)} f_{xx}(x, y) = \frac{d}{dx}(\cos(x^2 + y^2)) \cdot 2x + \cos(x^2 + y^2) \frac{d}{dx}(2x) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 4x^2 + \cos(x^2 + y^2) \cdot 2$$

$$f^{(2)} f_{xy}(x, y) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 2x \cdot 2y$$

$$f^{(3)} f_{yy}(x, y) = \frac{d}{dy}(\cos(x^2 + y^2)) \cdot 2y + \cos(x^2 + y^2) \frac{d}{dy}(2y) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 4y^2 + \cos(x^2 + y^2) \cdot 2$$

$$f(0, 0) = 1$$

$$T_2(f, (x, y), (0, 0))$$

$$f_x(0, 0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = 2$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 2$$

$$= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f_x(0)}{1!}(x-0) + \frac{f_y(0)}{1!}(y-0) + \frac{f_{xx}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f_{xy}(0)}{2!}(x-0)(y-0) + \frac{f_{yy}(0)}{2!}(y-0)^2$$

$$= 1 + 0 + 0 + x^2 + 0 + y^2$$

$$= 1 + x^2 + y^2$$

Aufgabe 4 2 Dim alles SS09

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 y + 2(y-1)^2 + 5$$

1) Berechne grad f(x, y) und Hf(x, y)

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

→ nach x differenzieren
→ nach y

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

↔ gleich
↖ 2 mal nach x
↘ 2 mal nach y

$$\frac{d}{dx}(2xy) = \underline{\underline{2y}}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 4(y-1) \end{pmatrix} \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

2) Alle Kritischen Stellen

$$\begin{aligned} \text{I } 2xy &= 0 \\ \text{II } x^2 + 4y - 4 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{LGS lösen} \\ \text{aus I folgt } \overline{y=0} \end{array} \right\} \begin{aligned} \text{① } x^2 + 4(0) - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1/2} &= \pm 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{② } 4y - 4 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x=0 \mid y=1 \\ x=+2 \mid y=0 \\ x=-2 \mid y=0 \end{array}$$

Kritische Stellen $(0, 1), (2, 0), (-2, 0)$

3) Stellen untersuchen (Sattel, Hoch-, Tiefpunkt) → lok. Max → lok. Min

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen $(0, 1), (2, 0), (-2, 0)$ in $Hf(x, y)$ einsetzen und determinante berechnen

$$\det(Hf(0, 1)) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 \quad \det > 0 \text{ und } sp > 0 \text{ lok. Min}$$

$$\det(Hf(2, 0)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -16 \quad \det < 0 \text{ (Sattelpunkt)}$$

$$\det(Hf(-2, 0)) = \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = -16 \quad \det < 0 \text{ (Sattelpunkt)}$$

b) Taylorpolynom (2. Stufe)

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 5 \\ f'_x(0, 1) &= 0 \\ f'_y(0, 1) &= 0 \\ f''_{xx}(0, 1) &= 2 \\ f''_{xy}(0, 1) &= 0 \\ f''_{yy}(0, 1) &= 4 \end{aligned} \quad T_2(f, (x, y), (0, 1)) = \frac{f(0, 1)}{1} \cdot 1 + \frac{f''_{xx}(0, 1)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{f''_{yy}(0, 1)}{2!} \cdot (y-1)^2$$

$$= 5 + x^2 + 2(y-1)^2$$

Aufgabe 6 Gradient, Hf, Extrema SS10

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (y^2 - 4x)(x - 9) = y^2 x - 9y^2 - 4x^2 + 36x$$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - 8x + 36 \\ 2yx - 18y \end{pmatrix} \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2y \\ 2y & 2x - 18 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen $f(x, y) \rightarrow f_x = 0 / f_y = 0$

$$\text{I: } y^2 - 8x + 36 = 0$$

$$\text{II: } 2y(x - 9) = 0 \quad \begin{matrix} x=9, y=0 \\ \text{Punktprobe} \\ \text{in I} \end{matrix}$$

$$\text{I}_{x=9}: y^2 - 8(9) + 36 = 0 \\ y^2 - 36 = 0 \\ y_{1/2} = \pm 6$$

$$\text{I}_{y=0}: 0 - 8x + 36 = 0 \\ 8x = 36 \\ x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Kritische Stellen:

$$(9, 6), (9, -6), \left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

Untersuchen auf Art der Stelle: $\rightarrow \det(Hf(x, y))$

Bedingungen:

lok. Maximum $\rightarrow$ wenn gilt $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$, $\text{Sp}(Hf(x_0, y_0)) < 0$

lok. Minimum $\rightarrow$ wenn gilt $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$, $\text{Sp}(Hf(x_0, y_0)) > 0$

Sattelpunkt $\rightarrow$ wenn gilt $\det(Hf(x_0, y_0)) < 0$

$$\det(Hf(9, 6)) = \det \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = -144 \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\det(Hf(9, -6)) = \det \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = -144 \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\det(Hf(\frac{9}{2}, 0)) = \det \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 9 - 18 \end{pmatrix} = +72 \quad \left. \begin{matrix} \text{lok. Max} \\ \text{Sp} < 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Sp}(Hf(\frac{9}{2}, 0)) = -17$$

Aufgabe 8 Mehr Dim SS11

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 - 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen: $\nabla f(x, y, z) = 0$

$$\text{I: } x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\text{II: } 2y = 0 \quad \underline{y=0} \quad \text{SNP } x_1=0 \quad x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$(1, 0), (-2, 0), (0, 0)$$

$$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

Untersuchen der kritischen Stellen:

$$\det(Hf(1, 0)) = 6 \quad \text{Sp}(Hf) = 5 > 0 \quad \text{Min}$$

$$\det(Hf(-2, 0)) = 12 \quad \text{Sp}(Hf) = 8 > 0 \quad \text{Min}$$

$$\det(Hf(0, 0)) = -4 \quad \text{Sattelpunkt}$$

Aufgabe 9 Mehr Dim SS11

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{1}{2y^2+1} \cdot \ln(x^2+4)$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{(2y^2+1)(x^2+4)} \\ -\frac{4y}{(2y^2+1)^2} \ln(x^2+4) \end{pmatrix}$$

Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Bestimmung der Tangentialebene am Punkt $(1, 0, f(1, 0))$

$$T_1(f, (x, y, z), (1, 0, f(1, 0)))$$

$$T_1(f, x, a) = f(a) + (x-a) \cdot \text{grad } f(a)$$

$$= f(a) + (x-a) \cdot f_x(a) + (y-a) \cdot f_y(a) + [\dots]$$

Punkte einsetzen

$$\text{grad} \triangleq \nabla$$

$$z = f(1, 0, f(1, 0)) + f'_x(1, 0, f(1, 0))(x-1) + f'_y(1, 0, f(1, 0))(y-0)$$

$$\text{mit } f(1, 0) = \ln(5)$$

$$\Rightarrow z = \ln(5) + \frac{2}{5}(x-1)$$

$$f_x(1, 0, \ln(5)) = \frac{2}{5}$$

$$0 = \ln(5) - z + \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}$$

$$f_y(1, 0, \ln(5)) = 0$$

Aufgabe 6 Grad, kritische Stellen, Taylor SS12

$$-8 + 3 \cdot 4 - 4$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2(y+1) + y^3 + 3y^2 + 2y$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(y+1) \\ x^2 + 3y^2 + 6y + 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y+1) & 2x \\ 2x & 6y+6 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen

$$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{I: } 2x(y+1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = -1$$

$$\text{II: } x^2 + 3y^2 + 6y + 2 = 0$$

$$\text{II}_{x=0}: 0 + 3y^2 + 6y + 2 = 0 \Leftrightarrow y_{2/3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$y_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{II}_{y=-1}: x^2 + 3 - 6 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \quad x_{2/3} = \pm 1$$

$$y_3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Stellen: $(0, -1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$; $(0, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$; $(1, -1)$; $(-1, -1)$

$$\det Hf(0, -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \det \begin{pmatrix} 2(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1) & 0 \\ 0 & 6(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} > 0, \text{Sp}(\dots) > 0 \quad \text{lokales Minimum}$$

$$\det Hf(0, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \det \begin{pmatrix} 2(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1) & 0 \\ 0 & 6(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} > 0, \text{Sp}(\dots) < 0 \quad \text{lokales Maximum}$$

$$\det Hf(1, -1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\det Hf(-1, -1) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad \text{Sattelpunkt}$$

Taylorpolynom 2. Stufe ($\varepsilon_P: (0, -2)$)

$$f(0, -2) = 0$$

$$f_x(0, -2) = 0$$

$$f_y(0, -2) = 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) + 2 = 2$$

$$f_{xx}(0, -2) = -2$$

$$f_{xy}(0, -2) = 0$$

$$f_{yy}(0, -2) = -6$$

$$T_2(f, (x, y), (0, -2)) = 0 + 0 + 2(y+2) - \frac{2}{2}x^2 + 0 - \frac{6}{2}(y+2)^2$$

$$= 2(y+2) - x^2 - 3(y+2)^2$$

einsetzen

Kostenlos heruntergeladen von



Aufgabe 6 Grad, Hesse, Kritische Stellen, Taylor SS 13

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x(y^2 - 9) - 6y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - 9 \\ 2yx - 12y \end{pmatrix} \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x - 12 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen $\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

$$I: y^2 - 9 = 0 \quad y_{1/2} = \pm 3 \quad \boxed{\text{KS}} \quad (6, 3); (6, -3)$$

$$II: 2yx - 12y = 0$$

$$II_{y=3}: 6x - 36 = 0 \quad x_1 = 6$$

$$II_{y=-3}: -6x + 36 = 0 \quad x_2 = 6$$

$$\det(Hf(6, 3)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\det(Hf(6, -3)) = \det \begin{pmatrix} * \end{pmatrix} < 0 \quad \text{Sattelpunkt}$$

Taylorpolynom 2. Stufe EP(1, 1)

0

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= -14 \\ f_x(1, 1) &= -8 \\ f_y(1, 1) &= -10 \\ f_{xx}(1, 1) &= 0 \\ f_{xy}(1, 1) &= 2 \\ f_{yy}(1, 1) &= -10 \end{aligned} \quad \begin{aligned} T_2 &= f(a) + f_x(a)(x-a) + f_y(a)(y-a) + \frac{f_{xx}(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f_{xy}(a)(x-a)(y-a)}{2} + \frac{f_{yy}(a)(y-a)^2}{2} \\ T_2 &= -14 - 8(x-1) - 10(y-1) + \frac{2(x-1)(y-1)}{2} - \frac{5(y-1)^2}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Kritische Stellen SS 18

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x + 3y$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 4 \\ -x + 2y + 3 \end{pmatrix} \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{da Hesse f\"ur alle Stellen } \det(Hf(*)) > 0 \text{ und } f_{xx} > 0 \text{ lokales Min.}$$

Stellen $\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

$$I: 2x - y - 4 = 0 \quad I \Rightarrow y = 2x - 4 \quad (\text{in II einsetzen})$$

$$II: -x + 2y + 3 = 0 \quad II^*: -x + 2(2x - 4) + 3 = 0$$

$$-x + 4x - 8 + 3 = 0$$

$$I^*: 2\left(\frac{5}{3}\right) - y - 4 = 0$$

$$3x = 5 \\ \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}} \quad (\text{in I})$$

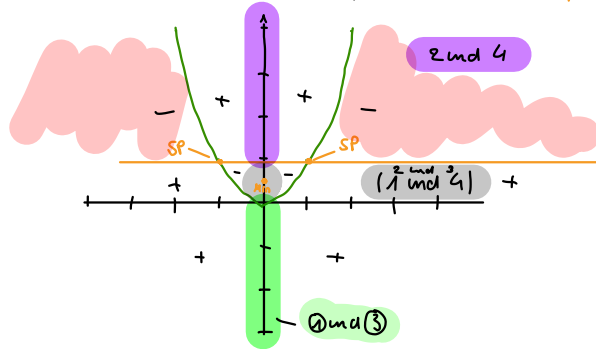
$$\frac{10}{3} - 4 = y$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{10 - 12}{3} = y$$

Aufgabe 8 Nullstellenmenge SS14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (3-3y)(x^2-y) \quad x^2=y$$

Skizzieren im Bereich $-4, 4; -4, 4$



$$(3-3y)(x^2-y)$$

$$\textcircled{1} \quad 3-3y < 0 \quad \textcircled{2} \quad x^2-y < 0$$

$$3y > 3 \quad x^2 < y$$

$$y > 1$$

$$\textcircled{2} \quad 3-3y > 0 \quad \textcircled{3} \quad x^2-y > 0$$

$$y < 1 \quad x^2 > y$$

$$b) \quad \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} (3-3y)(2x) \\ -3-3x^2+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6xy \\ -3x^2+6y-3 \end{pmatrix}$$

c) Kritische Stellen

$$\text{I: } 6x-6xy=0 \quad 6x(1-y)=0 \quad x_1=0 \quad y_2=1$$

$$\text{II: } -3x^2+6y-3=0 \quad \text{II}_{x=0}: 6y-3=0$$

$$y_1=\frac{1}{2}$$

$$\text{II}_{y=1}: -3x^2+3=0$$

$$x=\pm 1$$

Siehe Koordinatensystem Funktion

Stellen: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$

SP SP lok Min