

Einschwingvorgänge

Wenn in einem elektrischen Netzwerk ein oder mehrere energiespeichernde Bauelemente (Spule mit der Induktivität L , Kondensator mit der Kapazität C) vorhanden sind, so kann das Netzwerk nicht mehr unendlich schnell auf äußere Änderungen reagieren. Unter Änderungen versteht man einerseits Änderungen in den treibenden Größen (z.B. die treibende Spannung ändert sich) und andererseits in der Topologie des Netzwerks (z.B. es werden Schalthandlungen durchgeführt). Die Ursache, dass sich unter solchen Umständen keine schlagartige stationäre Strom- und Spannungsverteilung einstellen kann liegt an den Grundgesetzen für die Bauelemente L und C :

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Man erkennt, dass an der Induktivität die Spannung unendlich groß wird, wenn der Strom einen Sprung ($\frac{di_L(t)}{dt} = \infty$) aufweist. Am Kondensator wird hingegen der Strom unendlich

groß, wenn die Spannung einen Sprung ($\frac{du_C(t)}{dt} = \infty$) aufweist. Beides hätte zur Folge,

dass die Quelle eine unendlich große Leistung liefern müsste. Da dies nicht sein kann, **können die Energie kennzeichnenden Größen (bei L der Strom i_L und bei C die Spannung u_C) nicht springen, d.h. es gilt:**

$$u_C(t=0_-) = u_C(t=0_+)$$

bzw.

$$i_L(t=0_-) = i_L(t=0_+)$$

Die Strom- und Spannungsverhältnisse einer Schaltung erreichen nach einer äußeren Änderung erst nach theoretisch unendlich langer Zeit wieder einen neuen stationären Zustand. Die Zeit nach der Änderung bis zum Erreichen des neuen stationären Zustandes wird als Einschwingzeit bezeichnet; in dieser Zeit läuft in der Schaltung ein sogenannter Einschwingvorgang ab. Während des Einschwingvorganges ändern sich die Werte der Ströme und Spannungen mit der Zeit! Es lassen sich somit drei Zustände unterscheiden:

- Zustand vor der Änderung
- Ausgleichsvorgang (Einschwingvorgang)
- Stationärer Endzustand

Für die Berechnung von Einschwingvorgängen müssen die Kirchhoffschen Gesetze und die Grundgesetze für R, L und C in ihrer allgemeinsten Form für die Zeitfunktionen verwendet werden, d.h.:

Knotenregel: $\sum_v i_v(t) = 0$ (1)

Maschenregel: $\sum_\mu u_\mu(t) = 0$ (2)

Grundgesetz für R: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$ (3)

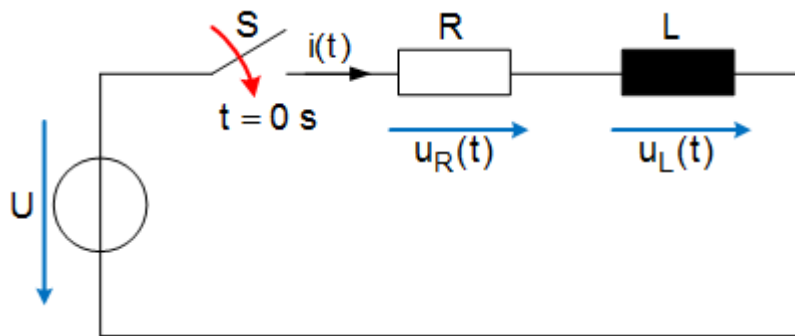
Grundgesetz für L: $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ (4)

Grundgesetz für C: $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$ (5)

Dies führt letztendlich auf lineare Differentialgleichungen für die Energie kennzeichnenden Größen $u_C(t)$ bzw. $i_L(t)$. Die Lösung der Differentialgleichungen geben den Verlauf der elektrischen Größen Strom und Spannung während des Einschwingvorgangs wieder. Für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich aus der Lösung der neue stationäre Zustand der Schaltung, d.h. die Amplituden bzw. Effektivwerte der Ströme und Spannungen.

Das prinzipielle Vorgehen zur Behandlung von Einschwingvorgängen soll nachfolgend anhand von zwei Beispielen verdeutlicht werden:

Beispiel 1: Zuschalten eines R-L-Gliedes an eine Gleichspannung



Zur Zeit $t = 0$ wird das R-L-Glied durch Schließen des Schalters S an die Spannungsquelle U geschaltet.

➤ Zustand vor dem Schaltvorgang:

$t < 0$: Schalter offen, d.h. $i_L(t = 0_-) = 0 \text{ A}$, d.h. die Spule ist stromlos!
(Anfangsbedingung, AB)

➤ Ausgleichsvorgang:

$t = 0$: Schalter wird geschlossen, der Strom $i(t)$ darf nicht springen, d.h.
 $i_L(t = 0_+) = 0 \text{ A}$

➤ Stationärer Endzustand:

$t = \infty$: Stationärer Wert von $i(t)$ ist erreicht.

Berechnung des Einschwingvorganges für $0 \leq t \leq \infty$:

Maschenregel: $U = u_R(t) + u_L(t)$ (1)

Grundgesetze: $u_R(t) = R \cdot i(t)$ und $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ (2)

(2) in (1): $U = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ (3)

Gleichung (3) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung.

Allgemeine Lösung von (3) ist:

$$i(t) = i_{fl}(t) + i_{st}(t) \quad (4)$$

$i_{fl}(t)$ flüchtiger Anteil, verschwindet für $t \rightarrow \infty$

$i_{st}(t)$ stationärer Anteil, bleibt für $t \rightarrow \infty$

a) $i_{fl}(t)$ aus homogener DGL:

$$0 = i_{fl}(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di_{fl}(t)}{dt} \quad (5)$$

Lösungsansatz für $i_{fl}(t)$: $i_{fl}(t) = k \cdot e^{p \cdot t} \quad (6)$

Die Konstanten k und p sind noch unbekannt!!

Aus (6): $\frac{di_{fl}(t)}{dt} = k \cdot p \cdot e^{p \cdot t} \quad (7)$

(6) und (7) in (5): $0 = k \cdot e^{p \cdot t} + \frac{L}{R} \cdot k \cdot p \cdot e^{p \cdot t}$

$$1 + p \cdot \frac{L}{R} = 0 \quad p = -\frac{R}{L} \quad (8)$$

b) stationäre Lösung für $t \rightarrow \infty$:

Zur Berechnung der stationären Lösung darf die komplexe Rechnung angewendet werden.

Mit WS-Rechnung: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ mit $\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L \quad (9)$

Hier: Gleichspannung U , d.h. $\omega = 0$ und somit:

$$\begin{aligned} \underline{U} &\rightarrow U \\ \underline{I} &\rightarrow I = i_{st} \quad \text{in (9) liefert} \quad i_{st} = I = \frac{U}{R} \quad (10) \\ \omega &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Oder kürzer:

Für $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ ist auch $X_L = 0 \Omega$, d.h. für Gleichstrom ist die Induktivität wirkungslos!

c) Gesamtlösung

(6), (8) und (10) in (4):
$$i(t) = k \cdot e^{\frac{-t \cdot R}{L}} + \frac{U}{R} \quad (11)$$

Bestimmung von k mit der Anfangsbedingung $i(t = 0_-) = 0 \text{ A}$:

$$k = -\frac{U}{R} \quad (12)$$

Gesamtlösung für $i(t)$:
$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{\frac{-t \cdot R}{L}}) \quad (13)$$

Zeitkonstante:
$$\tau = \frac{L}{R} \quad [\tau] = \text{s} \quad (14)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

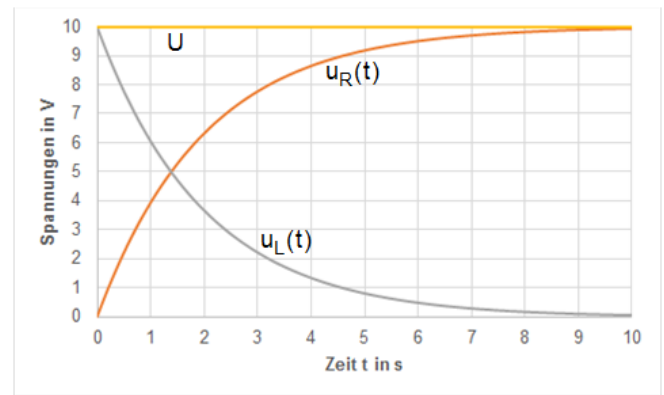
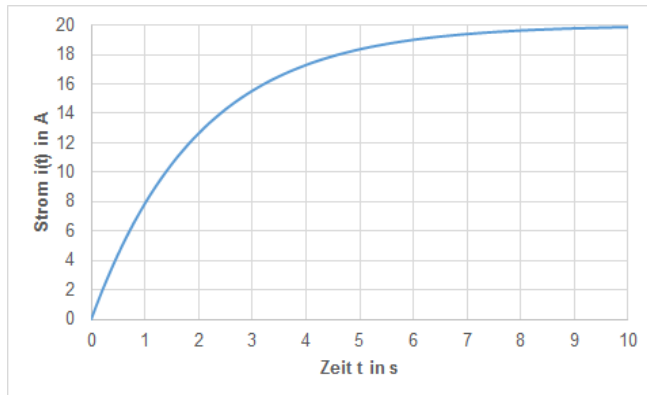
$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \quad (15)$$

$$u_R(t) = U \cdot (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \quad (16)$$

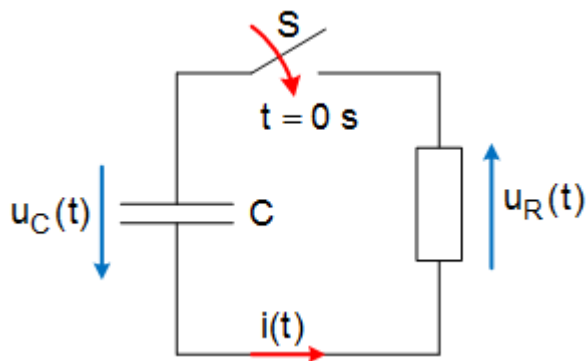
$$u_L(t) = U \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (17)$$

Darstellung der zeitlichen Strom- und Spannungsverläufe:

Beispiel mit: $U = 10 \text{ V}$, $R = 0,5 \Omega$ und $L = 1 \text{ H}$



Beispiel 2: Entladen eines Kondensators über einen Widerstand



Der geladene Kondensator wird über den Widerstand R entladen. Dazu wird der Schalter S zur Zeit $t = 0$ geschlossen.

➤ Zustand vor dem Schaltvorgang:

$t \leq 0$ Kondensator geladen, d.h. $u_C(t = 0_-) = U_{C0}$, (Anfangsbedingung, AB)

➤ Ausgleichsvorgang:

$t = 0$ Schalter wird geschlossen, die Spannung an C darf nicht springen, d.h.
 $u_C(t = 0_+) = U_{C0}$!

➤ Stationärer Endzustand:

$t \rightarrow \infty$: Kondensator ist entladen, d.h. $i(t \rightarrow \infty) = 0 \text{ A}$

Berechnung des Einschwingvorganges für $0 \leq t \leq \infty$:

Für $t \geq 0$ gilt:

Maschengleichung: $u_C(t) + R \cdot i(t) = 0$ (1)

Grundgesetz für R und C: $u_R(t) = R \cdot i(t)$ $i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$ (2)

(1) mit (2): $0 = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$ (3)

Gleichung (3) ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung.

Allgemeine Lösung von (3) ist:

$$u_C(t) = u_{C,fl}(t) + u_{C,st}(t) \quad (4)$$

$u_{C,fl}(t)$ flüchtiger Anteil, verschwindet für $t \rightarrow \infty$

$u_{C,st}(t)$ stationärer Anteil, bleibt für $t \rightarrow \infty$

a) $u_{C,fl}(t)$ aus homogener DGL:

Lösungsansatz für den flüchtigen Anteil: $u_{C,fl}(t) = k \cdot e^{p \cdot t}$ (5)

Die Konstanten k und p sind noch unbekannt!

(4) in (3): $0 = R \cdot C \cdot k \cdot p \cdot e^{p \cdot t} + k \cdot e^{p \cdot t}$ $0 = 1 + R \cdot C \cdot p$

$$p = -\frac{1}{R \cdot C} \quad (6)$$

b) stationäre Lösung für $t \rightarrow \infty$:

Stationäre Lösung: $u_C(t \rightarrow \infty) = 0$ Kondensator entladen! (7)

c) Gesamtlösung

(7) und (5) in (4) mit der AB $u_C(t=0) = U_{C0}$ ergibt: $k = U$ (8)

Die Lösung lautet: $u_C(t) = U \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} = U \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ (9)

Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$ $[\tau] = s$ (10)

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$u_C(t) = U \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} = U \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ (11)

$i(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ (12)

$u_R(t) = -U \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ (13)

Darstellung der zeitlichen Strom- und Spannungsverläufe:

Beispiel mit: $U = 10 \text{ V}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$ und $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$

