

Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder

Datum: 10.10.2011

Hilfsmittel: Ausgegebenes Formelblatt, nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Prüfungsdauer: 60 min

Der im 1. Prüfungsteil aufgeführte Hinweis für Wiederholer gilt auch für diese Teilprüfung.
**Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Lösungswege werden
eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg wird mitbewertet!**

Name:

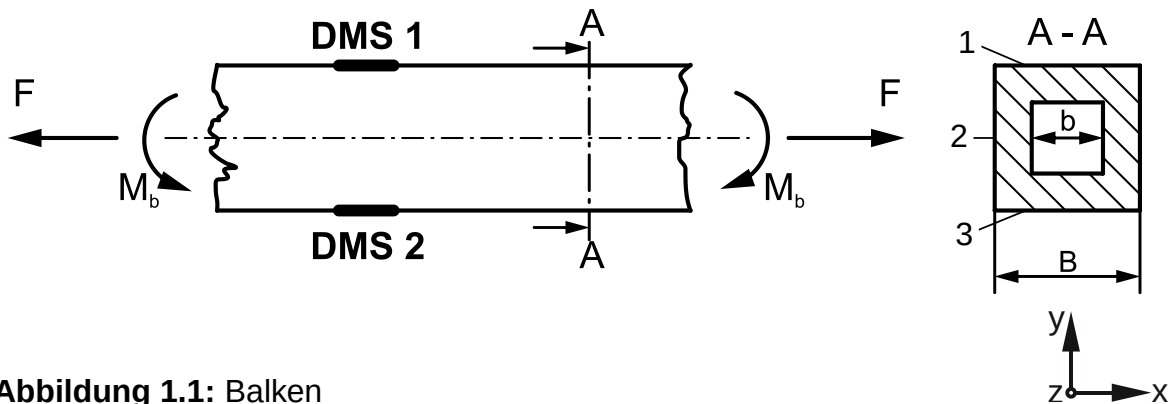
Matrikelnummer:

Studiengang:

Musterlösung

Aufgabe 1:**(30 Punkte)**

Auf den dargestellten Balken aus dem Werkstoff C55 mit **quadratischem Querschnitt** ($b = h = 10 \text{ mm}$, $B = H = 20 \text{ mm}$), siehe **Abbildung 1.1**, wirken eine Zugkraft F und ein Biegemoment M_b .

**Abbildung 1.1:** Balken**Werkstoffdaten C55:**

$R_e = 550 \text{ MPa}$; $R_m = 850 \text{ MPa}$; $E = 210000 \text{ MPa}$; $A_5 = 17\%$; $\mu = 0,29$

$$W_b = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$$

Hinweis:

- a) Die beiden Dehnmessstreifen (DMS 1 und DMS 2) messen am belasteten Balken folgende Maximal- und Minimalwerte:

$$\epsilon_{\text{DMS 1}} = 0,13095\%; \quad \epsilon_{\text{DMS 2}} = -0,07143\%$$

Zeigen Sie, dass hier das Hooke'sche Gesetz anwendbar ist. Bestimmen Sie die wirkenden Spannungen σ_{max} und σ_{min} für diese beiden Dehnungswerte.

Platz für Nebenrechnungen	Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E \cdot \epsilon$ $\epsilon_F = \frac{R_e}{E} = \frac{550 \text{ MPa}}{210000 \text{ MPa}} = 0,002619 = 0,2619\% > 0,13095\%$ (1 P Formel, 1P Ergebnis- diese 2 P auch bei Nachweis $\sigma_{\text{max}}, \sigma_{\text{min}} < R_e$) → Linearelastisches Werkstoffverhalten / Hooke anwendbar $\sigma_{\text{max}} = 210000 \text{ MPa} \cdot 0,0013095 = 275 \text{ MPa}$ $\sigma_{\text{min}} = 210000 \text{ MPa} \cdot (-0,0007143) = -150 \text{ MPa}$
---------------------------	--

Platz für Nebenrechnungen	Die Spannung resultierend aus der Zugkraft entspricht der Normalspannung dort, wo bei reiner Biegung die neutrale Faser wäre. $\sigma_{\text{zug}} = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2}$ $\sigma_{\text{zug}} = \frac{275\text{MPa} + (-150\text{MPa})}{2} = 62,5\text{MPa}$ Alternativwert: 37,5 MPa
Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{\text{zug}} = \frac{F}{S_0}$ $S_0 = B^2 - b^2 = (20\text{mm})^2 - (10\text{mm})^2 = 300\text{mm}^2$ $F = \sigma_{\text{zug}} \cdot S_0 = 62,5\text{MPa} \cdot 300\text{mm}^2 = 18750\text{N} = 18,8\text{kN}$ Alternativwert: 11,25 kN
Ergebnis	F = 18,8kN

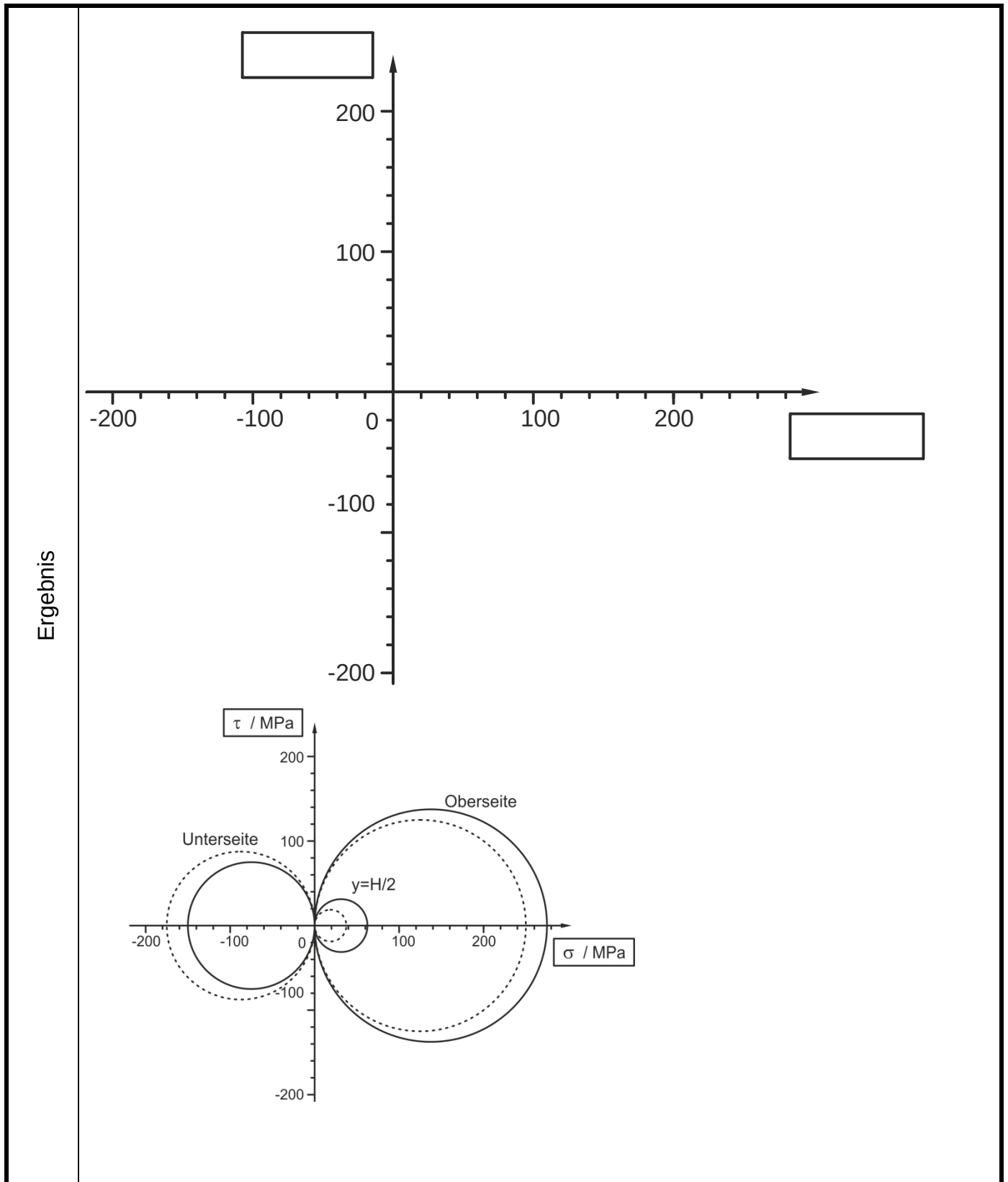
d) Wie groß ist das auf den Balken wirkende Biegemoment M_b ?

Platz für Nebenrechnungen	Die Spannung resultierend aus dem Biegemoment entspricht der Normalspannung an der Oberfläche abzüglich der Zugspannung: $\sigma_{\text{biegung}} = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{zug}} = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2}$ $\sigma_{\text{biegung}} = \frac{275\text{MPa} - (-150\text{MPa})}{2} = 212,5\text{MPa}$ Alternativwert ebenfalls 212,5 MPa $\sigma_{\text{biegung}} = \frac{M_b}{W_b}$ $W_b = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H} = \frac{(20\text{mm})^4 - (10\text{mm})^4}{6 \cdot 20\text{mm}} = 1250,0\text{mm}^3$ $M_b = \sigma_{\text{biegung}} \cdot W_b = 212,5\text{MPa} \cdot 1250,0\text{mm}^3 = 265625\text{Nmm} = 265,6\text{Nm}$
Ergebnis	$M_b = 265,6\text{Nm}$

e) Ist die Beanspruchung mit Sicherheit ertragbar?

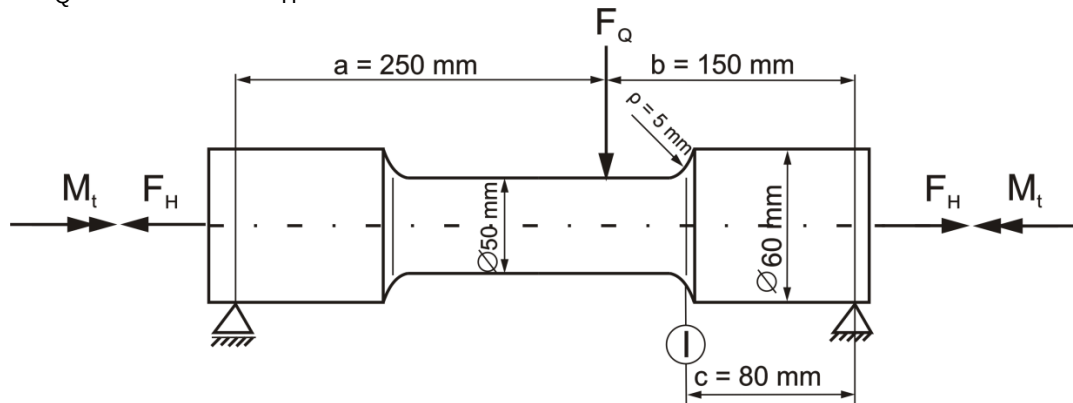
Platz für Nebenrechnungen	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_v = \sigma_{max} = 275 \text{ MPa}$ $\sigma_{zul} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_e}{S_F} = \frac{550 \text{ MPa}}{1,2} = 458,3 \text{ MPa} \\ \frac{R_m}{S_B} = \frac{850 \text{ MPa}}{2,0} = 425 \text{ MPa} \end{array} \right. = 425 \text{ MPa}$ Die Belastung ist mit Sicherheit ertragbar; Alternativ: Berechnung der Sicherheitsfaktoren: $S_F = 2,0$; $S_B = 3,09$
Ergebnis	Die Belastung ist mit Sicherheit ertragbar

- f) Zeichnen Sie die Mohr'schen Spannungskreise für die Unter- und Oberseite des Balkens sowie für die Stelle $y = H/2$ in untenstehendes Achsensystem. Beschriften Sie die Achsen.



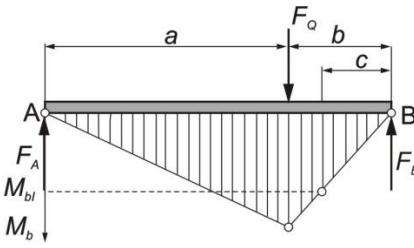
Aufgabe 2:**(30 Punkte)**

Eine Antriebswelle mit geschliffener Oberfläche aus dem legierten Vergütungsstahl 54CrV4 ist im Hinblick auf eine sichere Dimensionierung unter statischer und schwingender Beanspruchung an der Kerbstelle I zu überprüfen (vgl. **Abbildung 2.1**). Der Bauteilgrößeneinfluss auf die Schwingfestigkeit sowie die durch Querkkräfte verursachten (Schub-)Spannungen müssen im Folgenden nicht berücksichtigt werden. Die Welle steht zunächst still und wird durch die statisch wirkenden Kräfte $F_Q = 50 \text{ kN}$ und $F_H = 100 \text{ kN}$ belastet.

**Abbildung 2.1:** Antriebswelle**Werkstoffdaten 54CrV4:**

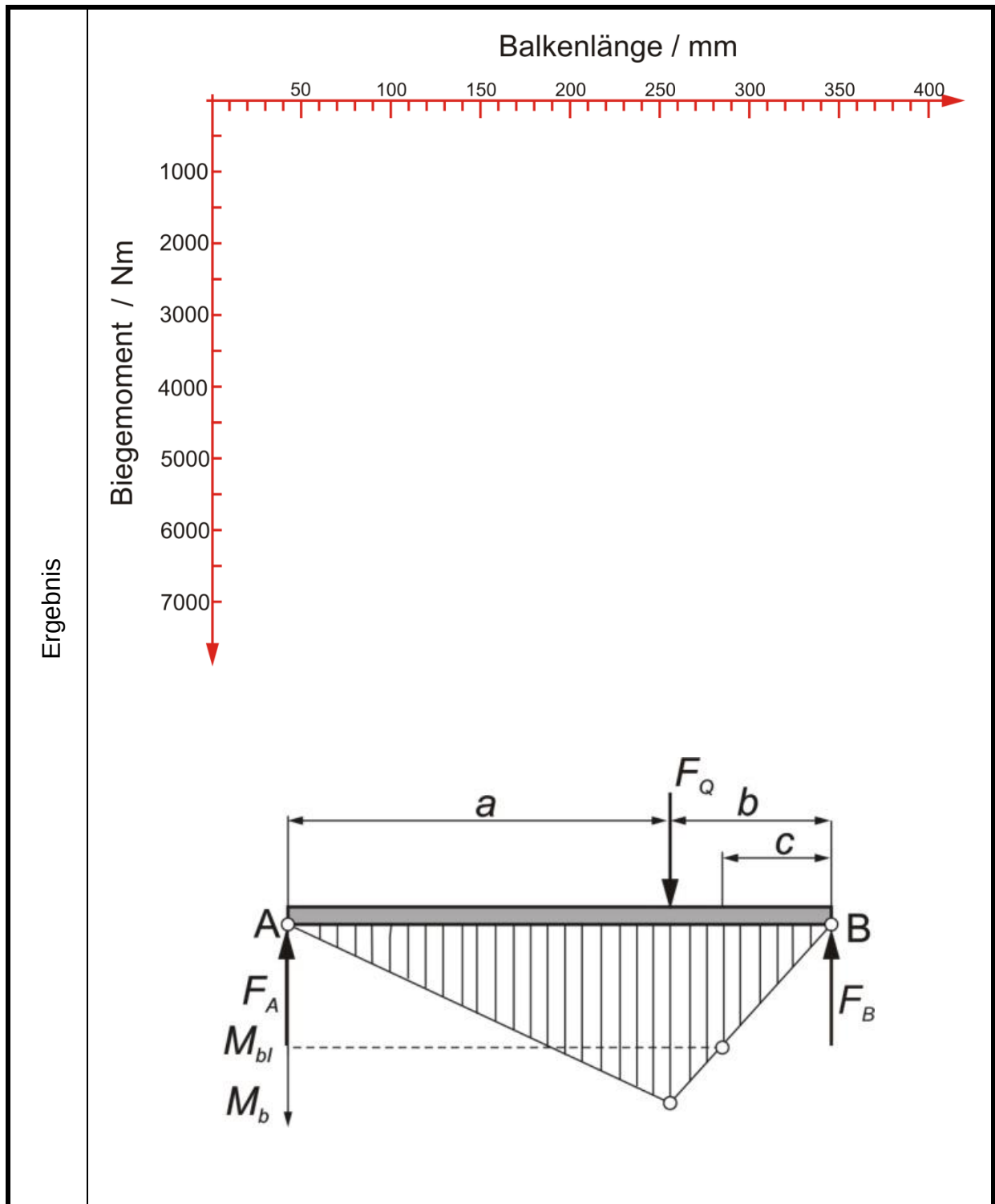
$R_{p0,2} = 930 \text{ MPa}$; $R_m = 1150 \text{ MPa}$; $\sigma_{bw} = 570 \text{ MPa}$

- a) Berechnen Sie das Biegemoment an der Kerbstelle I.

Platz für Nebenrechnungen	Berechnung der Lagerkraft F_B:  Aus der Gleichgewichtsbedingung (Momentengleichgewicht um Punkt A) $\rightarrow F_B \cdot (a+b) = F_Q \cdot a$ $F_B = F_Q \cdot \frac{a}{(a+b)} = 50000 \text{ N} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{250 \text{ mm} + 150 \text{ mm}}$ $F_B = 31250 \text{ N}$ Biegemoment an der Kerbstelle I: $M_{bI} = F_B \cdot c = 31250 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm} = 2\,500\,000 \text{ Nmm} = 2\,500 \text{ Nm}$
---------------------------	---

Ergebnis	$M_{bl} = 2\,500\text{ Nm}$
----------	-----------------------------

- b) Skizzieren Sie maßstäblich den Verlauf des Biegemoments über die Balkenlänge in dem gegebenen Koordinatensystem.



c) Ermitteln Sie die Formzahlen für Zug-, Biege- und Torsionsbeanspruchung.

Platz für Nebenrechnungen	$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(D-d)} + 7 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{d}\right)^2}} = 1,78$ $\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(D-d)} + 116 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{d}\right)^2 + 0,2 \cdot \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{2 \cdot \rho}{(D-d)}\right)^3}} = 1,64$ $\alpha_{kt} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3,4 \frac{2\rho}{(D-d)} + 38 \frac{\rho}{d} \left(1 + 2 \frac{\rho}{d}\right)^2 + \left(\frac{2\rho}{(D-d)}\right)^2 \frac{d}{D}}} = 1,32$
Ergebnis	$\alpha_{kz} = 1,78 ; \alpha_{kb} = 1,64 ; \alpha_{kt} = 1,32$

d) Berechnen Sie die Nenn- und die Maximalspannungen für die Zug- und Biegebeanspruchung.

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $M_{B,I} = 2550 \text{ Nm}$

=Platz für Nebenrechnungen	Berechnung der Nennspannungen: $\sigma_{zn} = \frac{F_H}{A_n} = \frac{F_H}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{100\,000\text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50\text{ mm})^2} = 50,93 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 50,93\text{ MPa}$ $\sigma_{bn} = \frac{M_{bl}}{W_{bn}} = \frac{M_{bl}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{2\,500\,000\text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50\text{ mm})^3} = 203,72 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 203,72\text{ MPa}$ alternativ $\sigma_{bn} = 207,9\text{ MPa}$ Berechnung der maximalen Spannungen: $\sigma_{z\text{ max}} = \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = 50,93\text{ MPa} \cdot 1,78 = 90,65\text{ MPa}$ $\sigma_{b\text{ max}} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = 203,72\text{ MPa} \cdot 1,64 = 334,10\text{ MPa}$ alternativ $\sigma_{b\text{ max}} = 340,96\text{ MPa}$
Ergebnis	$\sigma_{zn} = 50,93\text{ MPa} ; \sigma_{bn} = 203,72\text{ MPa} / \sigma_{bn} = 207,9\text{ MPa}$ $\sigma_{z\text{ max}} = 90,65\text{ MPa} ; \sigma_{b\text{ max}} = 334,10\text{ MPa} / \sigma_{b\text{ max}} = 341,0\text{ MPa}$

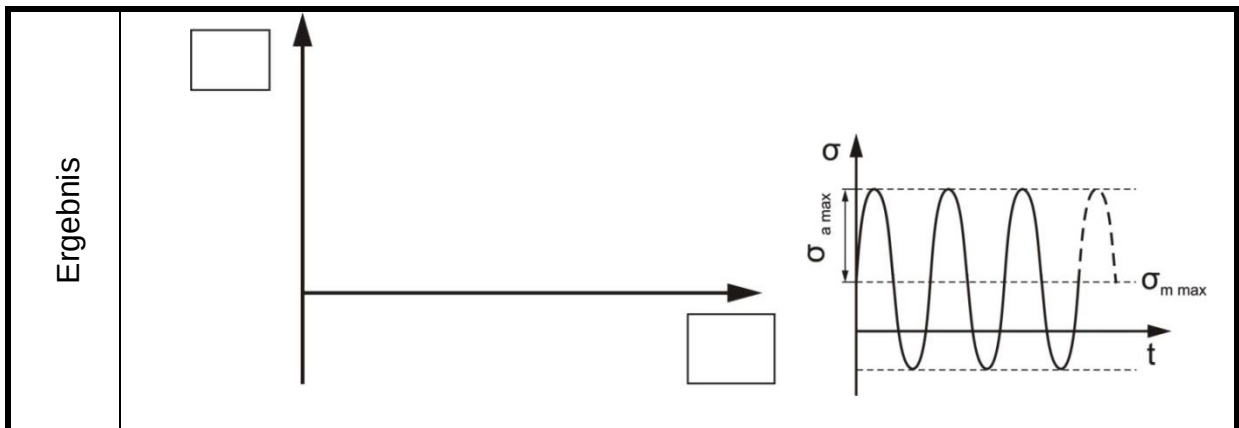
- e) Berechnen Sie das zusätzlich übertragbare Torsionsmoment $M_{t\text{ zul}}$ (bei gleichzeitiger Einwirkung der beiden Kräfte F_Q und F_H), damit Fließen im Kerbquerschnitt I mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.

Hinweis: Eine konservative Auslegung der Antriebswelle wird vorausgesetzt!

Platz für Nebenrechnungen	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ mehrachsiger Spannungszustand → Vergleichsspannung $\sigma_v \rightarrow$ SH verwendet (konservative Auslegung) $\sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S} = \frac{930 \text{ MPa}}{1,5} = 620 \text{ MPa}$ $\sigma_{v\text{ SH}} = \sqrt{(\sigma_{z\text{ max}} + \sigma_{b\text{ max}})^2 + 4 \cdot \tau_{t\text{ max}}^2}$ Nach Einsetzen der Ausdrücke für die zulässige Spannung für die Vergleichsspannung in der Festigkeitsbedingung folgt: $\tau_{t\text{ max}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_{zul}^2 - (\sigma_{z\text{ max}} + \sigma_{b\text{ max}})^2}$ $\tau_{t\text{ max}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{620^2 - (89,53 + 334,10)^2} = 226,35 \text{ MPa}$ alternativ $\tau_{t\text{ max}} = 223,07 \text{ MPa}$ Damit folgt für das zulässige Torsionsmoment M_t: $M_{t\text{ zul}} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{\tau_{t\text{ max}}}{\alpha_{kt}} = \frac{\pi}{16} \cdot (50 \text{ mm})^3 \cdot \frac{226,35 \text{ MPa}}{1,32} \Rightarrow$ $M_{t\text{ zul}} = 4208685 \text{ Nmm} = 4208,7 \text{ Nm}$ alternativ $M_{t\text{ zul}} = 4147,7 \text{ Nm}$
Ergebnis	$M_{t\text{ zul}} = 4208,7 \text{ Nm} / M_{t\text{ zul}} = 4147,7 \text{ Nm}$

In einem anderen Betriebszustand ist die Schwingfestigkeit der nun umlaufenden Antriebswelle zu überprüfen. Das Torsionsmoment soll hierbei vernachlässigt werden ($M_t = 0$). Die beiden Kräfte $F_Q = 50 \text{ kN}$ und $F_H = 100 \text{ kN}$ bleiben hingegen unverändert.

- f) Skizzieren Sie qualitativ in dem gegebenen Koordinatensystem den Spannungsverlauf in Abhängigkeit der Zeit im Kerbgrund (I) bei umlaufender Welle. Beschriften Sie die Achsen des Diagramms.



- g) Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_k für die Biegebeanspruchung sowie die Biegewechselfestigkeit der Antriebswelle

Platz für Nebenrechnungen	Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} für Biegebeanspruchung: Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} $\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{c}{\rho}}} \Rightarrow 1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{c}{\rho}} = 1037$
---------------------------	---

Platz für Nebenrechnungen	$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_{\chi}} = \frac{1,64}{1,037} = 1,58$ Ermittlung des Oberflächenfaktors $f = 0,9$ für $R_m = 1150 \text{ MPa}$ aus Diagramm (Formelblatt) Ermittlung der Biegeweichselfestigkeit $\sigma_{bw} = 550 \text{ MPa}$ für $R_m = 1150 \text{ MPa}$ aus Diagramm (Formelblatt) Berechnung der korrigierten Biegeweichselfestigkeit $\sigma_{bw}^* = f \cdot \sigma_{bw} = 0,9 \cdot 550 \text{ MPa} = 495 \text{ MPa}$
Ergebnis	$\beta_{kb} = 1,56, \quad f = 0,9; \quad \sigma_{bw}^* = 495 \text{ MPa}$

- h) Berechnen Sie die die Sicherheit S_D gegen Dauerbruch durch die statisch wirkenden Kräfte $F_Q = 50 \text{ kN}$ und $F_H = 100 \text{ kN}$ bei umlaufender Welle. Ist diese Sicherheit ausreichend?

Hinweis 1: Die Zugbeanspruchung F_H wirkt als statische Mittelspannung, die Spannung aus F_Q als schwingender Anteil.

Hinweis 2: Falls Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht lösen konnten, verwenden Sie:

$$\sigma_{zn} = 50 \text{ MPa}, \sigma_{bn} = 200 \text{ MPa}, \alpha_{kz} = 1,80, \alpha_{kb} = 1,60, \beta_{kz} = 1,50, \beta_{kb} = 1,50.$$

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{zn} = 50,93 \text{ MPa}; \sigma_{bn} = 203,72 \text{ MPa}$ statisch wirkende Mittelspannung aus 2d: $\sigma_m = \sigma_{z,\max} = 90,65 \text{ MPa}$ schwingend wirkende Ausschlagsspannung nach 2g und 2d: $\sigma_{a \max} = \beta_{k,b} \cdot \sigma_{b,n} = 1,58 \cdot 203,72 \text{ MPa} = 321,9 \text{ MPa}$ zulässige Amplitude, zäher Werkstoff: $\sigma_A = \sigma_{bW} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = 495 \cdot \sqrt{1 - \frac{90,65}{1150}} \text{ MPa}$ $\sigma_A = 475,1 \text{ MPa}$ $S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_{a,\max}} = \frac{475,1 \text{ MPa}}{321,9 \text{ MPa}} = 1,476$ $S_D < 1,5$ nicht ausreichend! (wahlweise $S_D = 1,5$ ausreichend)
Ergebnis	$S_D = 1,476$

Guten Erfolg!