

Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder

Datum: 28.02.2011

Hilfsmittel: Ausgegebenes Formelblatt, nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Prüfungsdauer: 60 min

Der im 1. Prüfungsteil aufgeführte Hinweis für Wiederholer gilt auch für diese Teilprüfung.
**Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Lösungswege werden
eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg wird mitbewertet!**

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Musterlösung zur Einsicht

Aufgabe 1:

Die in **Abbildung 1.1** dargestellte Welle aus dem Werkstoff S235JR kann durch die Zugkraft F , das Biegemoment M_b und das Torsionsmoment M_t belastet werden.

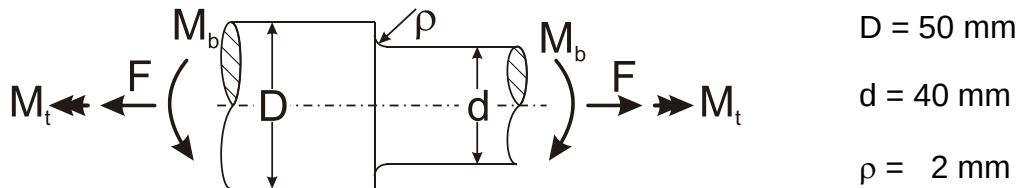


Abbildung 1.1: Welle

S235JR: $R_e = 260 \text{ MPa}$; $R_m = 420 \text{ MPa}$; $A_5 = 22 \%$; $E = 210000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,3$

a) Bestimmen Sie die Formzahlen für die Lastfälle Zug, Biegung und Torsion.

Platz für Nebenrechnungen

$$\alpha_{kzd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \frac{2\rho}{(D-d)} + 7 \frac{\rho}{d} \left(1 + 2 \frac{\rho}{d}\right)^2}}$$

$$\alpha_{kzd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \frac{2 \cdot 2\text{mm}}{(50\text{mm} - 40\text{mm})} + 7 \frac{2\text{mm}}{40\text{mm}} \left(1 + 2 \frac{2\text{mm}}{40\text{mm}}\right)^2}}$$

$$\alpha_{kb} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \frac{2\rho}{(D-d)} + 11,6 \frac{\rho}{d} \left(1 + 2 \frac{\rho}{d}\right)^2 + 0,2 \left(\frac{2\rho}{D-d}\right)^3 \frac{d}{D}}}$$

$$\alpha_{kb} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \frac{2 \cdot 2\text{mm}}{(50\text{mm} - 40\text{mm})} + 11,6 \frac{2\text{mm}}{40\text{mm}} \left(1 + 2 \frac{2\text{mm}}{40\text{mm}}\right)^2 + 0,2 \left(\frac{2 \cdot 2\text{mm}}{50\text{mm} - 40\text{mm}}\right)^3 \frac{40\text{mm}}{50\text{mm}}}}$$

$$\alpha_{kt} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3,4 \frac{2\rho}{(D-d)} + 38 \frac{\rho}{d} \left(1 + 2 \frac{\rho}{d}\right)^2 + \left(\frac{2\rho}{D-d}\right)^2 \frac{d}{D}}}$$

$$\alpha_{kt} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3,4 \frac{2 \cdot 2\text{mm}}{(50\text{mm} - 40\text{mm})} + 38 \frac{2 \cdot 2\text{mm}}{50\text{mm} - 40\text{mm}} \left(1 + 2 \frac{2\text{mm}}{40\text{mm}}\right)^2 + \left(\frac{2\text{mm}}{40\text{mm}}\right)^2 \frac{40\text{mm}}{50\text{mm}}}}$$

Ergebnis	$\underline{\underline{\alpha_{kz} = 2,22}}; \underline{\underline{\alpha_{kb} = 2,02}}; \underline{\underline{\alpha_{kt} = 1,51}}$
----------	--

- b) Welche zulässige statische Zugkraft F kann bei stillstehender Welle zusätzlich zum wirkenden Biegemoment $M_b = 200 \text{ Nm}$ überlagert werden, wenn übliche Sicherheitsfaktoren verwendet werden?

Hinweis: In Aufgabenteil b) wirkt keine Torsion.

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$ $\sigma_{\text{zul}} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_e}{S_F} = \frac{260 \text{ MPa}}{1,5} = 173,3 \text{ MPa} \\ \frac{R_m}{S_B} = \frac{420 \text{ MPa}}{2,0} = 210,0 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad (S_F = 1,2 - 2, S_B = 2 - 3)$ $\sigma_{\max} = \alpha_{kzd} \cdot \sigma_z + \alpha_{kb} \cdot \sigma_b$ $\sigma_{\max} = \alpha_{kzd} \cdot \frac{F}{A} + \alpha_{kb} \cdot \frac{M_b}{W_b}$ $W_b = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi (40 \text{ mm})^3}{32} = 6283,19 \text{ mm}^3$ $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (40 \text{ mm})^2}{4} = 1256,64 \text{ mm}^2$ $\Rightarrow F_{\text{zul}} = \frac{A}{\alpha_{kz}} \left(\sigma_{\text{zul}} - \alpha_{kb} \frac{M_b}{W_b} \right)$ $= \frac{1256,62 \text{ mm}^2}{2,22} \left(173,3 \text{ MPa} - 2,02 \frac{200 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{6283,18 \text{ mm}^3} \right) \text{ kN} = \underline{\underline{617 \text{ kN}}}$
Ergebnis	$F_{\text{zul}} = \underline{\underline{617 \text{ kN}}}$

- c) Kann die folgende statische Belastung mit ausreichender Sicherheit ertragen werden?

$$M_b = 200 \text{ Nm}, M_t = 150 \text{ Nm}, F = 50 \text{ kN}$$

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{z,\max} = \alpha_{kz} \cdot \sigma_z = 2,22 \cdot 39,79 \text{ MPa} = 88,34 \text{ MPa}$ $\sigma_{b,\max} = \alpha_{kb} \cdot \sigma_b = 2,02 \cdot 31,83 \text{ MPa} = 64,32 \text{ MPa}$ $\tau_{\max} = \alpha_{kt} \cdot \tau = 1,51 \cdot 11,94 \text{ MPa} = 18,13 \text{ MPa}$ $\sigma_z = \frac{F_{\text{zug}}}{A} = \frac{50000 \text{ N}}{1256,63 \text{ mm}^2} = 39,79 \text{ MPa}$ $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{200000 \text{ Nmm}}{6283,18 \text{ mm}^3} = 31,83 \text{ MPa}$ $\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{150000 \text{ Nmm}}{12566,37 \text{ mm}^3} = 11,94 \text{ MPa}$ $W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi (40 \text{ mm})^3}{16} = 12566,37 \text{ mm}^3$ $\sigma_v = \sqrt{(\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2 + 3\tau_{\max}^2}$ $\sigma_v = \sqrt{(88,34 \text{ MPa} + 64,32 \text{ MPa})^2 + 3(18,13 \text{ MPa})^2}$ $\sigma_v = 155,86 \text{ MPa}$ $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$ $S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} = \frac{260 \text{ MPa}}{155,86 \text{ MPa}} = 1,67$ $S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = \frac{420 \text{ MPa}}{155,86 \text{ MPa}} = 2,69$
Ergebnis	Die Belastung kann mit ausreichender Sicherheit ertragen werden

Im Folgenden wird die nun umlaufende Welle ausschließlich durch Biegung beansprucht.

- d) Wie groß wäre das zulässige Biegemoment M_b , wenn die Welle auf Umlaufbiegung beansprucht wird (Oberfläche poliert)?

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{amax} \leq \sigma_{azul}$ $\sigma_{amax} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$ $\sigma_{an} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3}$ $\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{c}{\rho}}} = \frac{2,02}{1 + \frac{55}{260} \cdot \sqrt{\frac{2}{2}}} = \frac{2,02}{1,21} = 1,67$ Aus Diagramm $R_m = 420 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{bwpol} = 205 \text{ MPa}$ $\beta_k \cdot \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3} = \frac{\sigma_{bwpol}}{S_D}$ $S_D = 2$ $\Rightarrow M_{bzul} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \sigma_{bwpol}}{32 \cdot \beta_k \cdot S_D} = \frac{\pi \cdot 40^3 \cdot 205}{32 \cdot 1,67 \cdot 2} = \underline{\underline{386,15 \text{ Nm}}}$
Ergebnis	$M_{bzul} = \underline{\underline{386,15 \text{ Nm}}}$

Aufgabe 2:

Abbildung 2.1 zeigt einen Behälter aus S235. Der Behälter ist mit dem Innendruck p belastet. Die Abmessungen sind: $D = 1000 \text{ mm}$, $d = 996 \text{ mm}$.

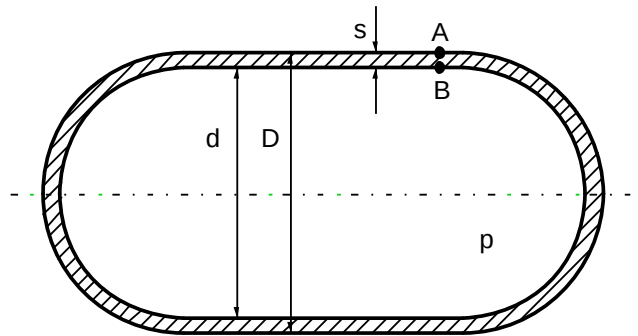


Abbildung 2.1: Dünnwandiger Behälter

S235: $R_e = 235 \text{ MPa}$; $R_m = 350 \text{ MPa}$; $A_5 = 30 \%$; $\mu = 0,3$; $E = 200000 \text{ MPa}$

- a) Welche Art von Spannungszustand (1-dimensional, 2-dimensional oder 3-dimensional) liegt am **Punkt A** vor?

Eintragung Endergebnis:	2-dimensional
-------------------------	---------------

- b) Welche Art von Spannungszustand (1-dimensional, 2-dimensional oder 3-dimensional) liegt am **Punkt B** vor?

Eintragung Endergebnis:	3-dimensional
-------------------------	---------------

- c) Auf der Oberfläche wurden am **Punkt A** im Betrieb die Dehnungen in Behälterumfangsrichtung $\varepsilon_u = 0,01\%$ gemessen. Um wie viel vergrößert sich der Umfang des Behälters?

Platz für Nebenrechnungen	Behälterumfang: $U = \pi D$ Zunahme des Behälterumfangs: $\Delta U = \pi D \varepsilon_u$ Zahlenrechnung: $\Delta U = \pi 1000 \text{ mm } 0,0001 = 0,314 \text{ mm}$	
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Umfangszunahme	0,314	mm

- d) Berechnen Sie die Spannungen am **Punkt A** in Längs- und Querrichtung. Verwenden Sie dazu die in Aufgabenteil c) gegebene Dehnung in Umfangsrichtung. Für die Dehnung in Längsrichtung stehen keine Informationen zur Verfügung.

Platz für Nebenrechnungen

Aus den Formeln $\sigma_l = \frac{p d}{4 s}$ und $\sigma_u = \frac{p d}{2 s}$ folgt:

$$\sigma_u = 2 \sigma_l \quad (1)$$

Mit den umgeschriebenen Formeln für den 2-dimensionalen Spannungszustand gilt:

$$\sigma_l = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_l + \mu \varepsilon_u) \quad (2)$$

$$\sigma_u = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_u + \mu \varepsilon_l) \Rightarrow \varepsilon_l = \frac{\sigma_u(1-\mu^2)}{E \mu} - \frac{\varepsilon_u}{\mu} \quad (3)$$

Gleichung (1) und (3) in Gleichung (2) eingesetzt:

$$\sigma_l = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{2 \sigma_l (1-\mu^2)}{E \mu} - \frac{\varepsilon_u}{\mu} + \mu \varepsilon_u \right) = \frac{2 \sigma_l}{\mu} + \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_u \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right)$$

$$\sigma_l \left(1 - \frac{2}{\mu} \right) = \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_u \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \Rightarrow \sigma_l = \frac{\varepsilon_u E \mu}{(1-\mu^2)(\mu-2)} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{\varepsilon_u E}{(2-\mu)}$$

Zahlenrechnung:

$$\sigma_l = \frac{0,0001 \cdot 200000 \text{MPa}}{(2-0,3)} = 11,76 \text{MPa}$$

Mit Gleichung (1):

$$\sigma_u = 2 \sigma_l = 23,53 \text{MPa}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Längsspannung	11,76	MPa
Umfangsspannung	23,53	MPa

- e) Der Innendruck im Behälter wird kontinuierlich gesteigert. An welcher Stelle (A oder B) wird der Behälter zuerst versagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Platz für Nebenrechnungen	Da im Punkt A und B ein jeweils mehrachsiger Spannungszustand herrscht, wird der Behälter an demjenigen Punkt versagen an dem die Vergleichsspannung maximal wird. Nach der Schubspannungshypothese gilt am Punkt A: $\sigma_V = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_u - 0 = \sigma_u$ und am Punkt B: $\sigma_V = \sigma_u + p$ Da der Druck p positiv ist, versagt der Behälter zuerst im Punkt B	
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	
Versagenspunkt A oder B	B	
Begründung	Vergleichsspannung im Punkt B größer	

- f) Welcher maximale Druck p kann sicher ($S_F = S_B = 2$) ertragen werden? Geben Sie das Ergebnis in bar an.

Platz für Nebenrechnungen	Sicherheitsfaktor $S=2$ ist, Fließen stellt das kritische Ereignis dar: $\sigma_V = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_u + p \leq \frac{R_e}{S} \quad (1)$ Aus der Kesselformel ergibt sich für die Umfangsspannung: $\sigma_u = \frac{p d}{2 s} \quad (2)$ Daraus folgt für p (Gleichung (2) in (1)): $\frac{p d}{2 s} + p \leq \frac{R_e}{S} \Rightarrow p \leq \frac{R_e}{S} \frac{2 s}{d + 2 s}$ Zahlenrechnung: $p \leq \frac{235 \text{ MPa}}{2} \frac{2 \cdot 2 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} = 0,47 \text{ MPa} = 4,7 \text{ bar}$ (Bemerkung: Bei Rechnung ohne $\sigma_{\min} = p$ insgesamt (4,0P))		
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit	
Maximal ertragbarer Druck	4,7	Bar	

- g) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Längsspannung in einem Behälter her. Drücken Sie die Längsspannung σ_l in Abhängigkeit vom Innendurchmesser d , der Wandstärke s und des Druckes p aus.

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_l = \frac{F_l}{A} = \frac{\text{Kraft aus Innendruck auf den Deckel}}{\text{Ringfläche des Behältermantels}}$ mit: $F = \frac{p \pi d^2}{4}$ $A = \pi d s$ $\sigma_l = \frac{p \frac{\pi d^2}{4}}{\pi d s} = \frac{p d}{4 s}$
Eintragung Endergebnis	Ergebnis
Längsspannung	$\sigma_l = \frac{p d}{4 s}$

Guten Erfolg!