

Aufgabe 1:

- a) **Zylinder:** Außenoberfläche $\Rightarrow \sigma_r = 0$ (lastfreie Oberfläche)

Wegen des beweglichen Kolbens gilt zusätzlich: $\sigma_l = 0$

Somit liegt 1 - achsiger Spannungszustand vor.

$$\sigma_u = \varepsilon_u \cdot E = 0,0003333 \cdot 210000 \text{ MPa} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s} \Rightarrow p = \frac{\sigma_u \cdot 2s}{d_i} = \frac{70 \cdot 2 \cdot 5}{140} \text{ MPa} = 5 \text{ MPa} \hat{=} 50 \text{ bar}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
wirkender Innendruck:	5	MPa

- b) **Druckausgleichsbehälter** (Innenseite):

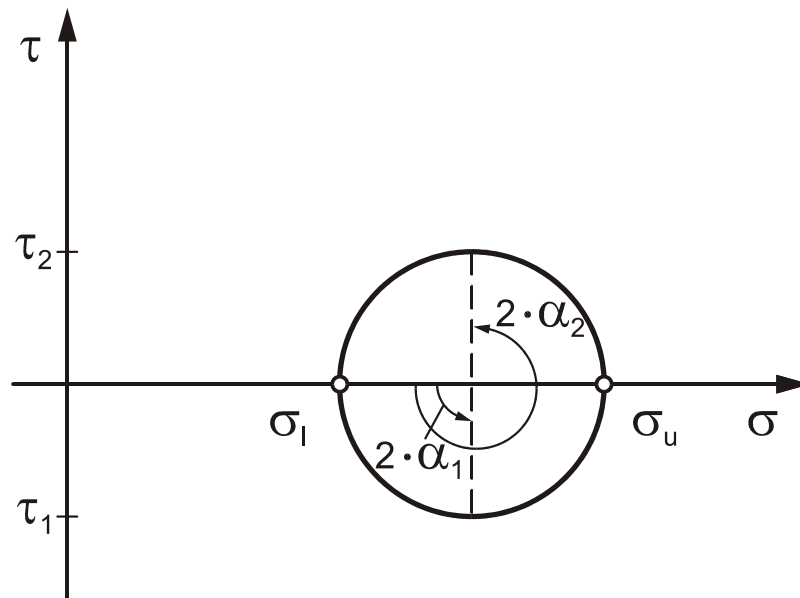
$$\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s} = \frac{5 \cdot 140}{2 \cdot 5} \text{ MPa} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_l = \frac{p \cdot d_i}{4s} = \frac{\sigma_u}{2} = \frac{70}{2} \text{ MPa} = 35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = -p = -5 \text{ MPa}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Umfangsspannung:	70	MPa
Längsspannung:	35	MPa
Radialspannung:	-5	MPa

c) Mohrscher Spannungskreis für die $\sigma_u - \sigma_l$ - Ebene



d) Maximale Schubspannungen plus zugehörige Winkel

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Winkel 1:	45	Grad
Winkel 2:	135	Grad
Schubspannung zu Winkel 1:	$ -17,5 $	MPa
Schubspannung zu Winkel 2:	17,5	MPa

e) Im Druckausgleichsbehälter liegt dreiachsiger Spannungszustand vor, s.o.

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_v(\text{GEH}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_u - \sigma_l)^2 + (\sigma_l - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_u)^2}$$

$$\sigma_v(\text{GEH}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(70 - 35)^2 + (35 - (-5))^2 + (-5 - 70)^2} \text{ MPa} = 65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v(\text{SH}) = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_u - \sigma_r = 70 - (-2,5) \text{ MPa} = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{zul}} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_e}{S_F} = \frac{260}{1,5} \text{ MPa} = 173,33 \text{ MPa} \\ \frac{R_m}{S_B} = \frac{420}{2} \text{ MPa} = 210,00 \text{ MPa} \end{array} \right\} = 173,33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} \text{ ist erfüllt} \Rightarrow \text{Sicherheit ist ausreichend}$$

alternativ:

$$\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \Rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} = 4 \text{ (GEH)}; 3,47 \text{ (SH)} \quad (S_F = 1,2 \div 2)$$

$$\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} \Rightarrow S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = 6,46 \text{ (GEH)}; 5,60 \text{ (SH)} \quad (S_B = 2 \div 3)$$

Aufgabe 2:

a) **Spannungsverlauf Querschnitt A – A:** ($F_1 = 1000 \text{ N}$, $F_2 = 0 \text{ N}$)

Nennspannung

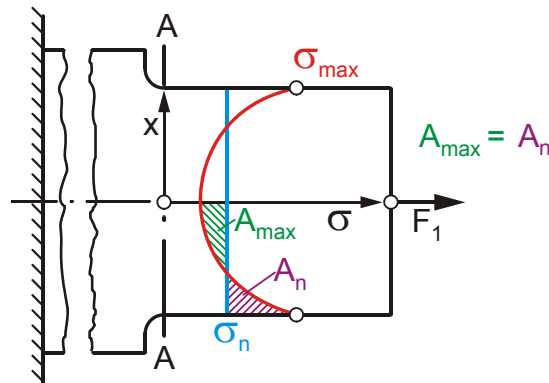
$$\sigma_n = \frac{F_1}{A_k} = \frac{F_1}{h \cdot b} = \frac{1000 \text{ N}}{30 \cdot 4 \text{ mm}^2} = 8,3 \text{ MPa}$$

Maximalspannung

$$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \sigma_n = 2,1 \cdot 8,3 \text{ MPa} = 17,5 \text{ MPa}$$

mit $\alpha_{k,zd}$ aus Formzahldiagramm, oder nach FKM

$$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(B-b)} + 5 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{b}\right)^2}} = 2,106$$



Spannungsverlauf Querschnitt B – B: ($F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$)

Zugspannung:

$$\sigma_z = \frac{F_1}{A_{C-C}} = \frac{1000 \text{ N}}{B \cdot h} = \frac{1000 \text{ N}}{40 \cdot 4 \text{ mm}^2} = 6,3 \text{ MPa}$$

Biegespannung:

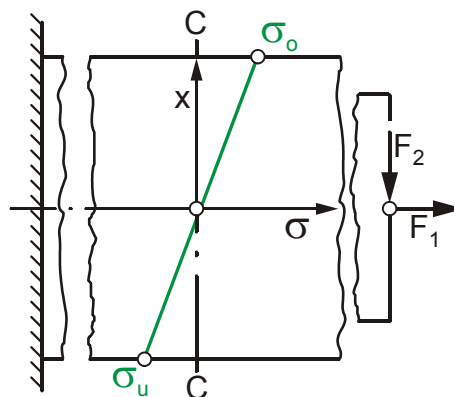
$$\sigma_B = \frac{F_2 \cdot L_C}{W_{b(B-B)}} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm}}{\frac{1}{6} B^2 \cdot h} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm} \cdot 6}{40^2 \cdot 4 \text{ mm}^3} = 75 \text{ MPa}$$

Gesamtspannung Oberseite:

$$\sigma_o = \sigma_z + \sigma_B = 6,25 \text{ MPa} + 75 \text{ MPa} = 81,3 \text{ MPa}$$

Gesamtspannung Unterseite:

$$\sigma_u = \sigma_z - \sigma_B = 6,3 \text{ MPa} - 75 \text{ MPa} = -68,7 \text{ MPa}$$



b) Beanspruchungen der Querschnitte A – A und C – C: ($F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$)

Kerbquerschnitt:

$$\sigma_{Z,\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \sigma_n = 2,1 \cdot 8,3 \text{ MPa} = 17,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{B,\max} = \alpha_{k,b} \cdot \frac{F_2 \cdot L_A}{W_{b(A-A)}} = 1,8 \cdot \frac{1000 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm}}{\frac{1}{6} b^2 \cdot h} = 1,8 \cdot \frac{1000 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm} \cdot 6}{30^2 \cdot 4 \text{ mm}^3} = 90 \text{ MPa}$$

mit $\alpha_{k,b}$ aus Formzahldiagramm, oder nach FKM

$$\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(B-b)} + 12 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{b}\right)^2}} = 1,787$$

Maximale Gesamtspannung in A – A:

$$\sigma_{\text{ges,max}} = \sigma_{Z,\max} + \sigma_{B,\max} = 17,5 \text{ MPa} + 90 \text{ MPa} = 107,5 \text{ MPa}$$

Sicherheit gegen Fließen bzw. Bruch:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\text{ges,max}}} = \frac{185}{107,5} = 1,72 \quad \checkmark$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{\text{ges,max}}} = \frac{310}{107,5} = 2,88 \quad \checkmark$$

Querschnitt C – C:

$$\sigma_o = 81,3 \text{ MPa (s.o.)}$$

Sicherheit gegen Fließen bzw. Bruch:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_o} = \frac{185}{81,3} = 2,27 \quad \checkmark$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_o} = \frac{310}{81,3} = 3,81 \quad \checkmark$$

- c) **Schwingende Beanspruchung:** ($F_1 = 1000 \text{ N stat.}$, $F_2 = 1000 \text{ N rein wechselnd}$)

Ertragbare Spannungsamplitude:

$$\sigma_A = f \cdot \sigma_W \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_{m,\max}}{R_m}} = 0,6 \cdot 155 \text{ MPa} \cdot \sqrt{1 - \frac{17,5}{310}} = 90,3 \text{ MPa}$$

mit $\sigma_{m,\max} = \sigma_{\max,A-A}$ aus Aufgabenteil a) und $f = 0,6$ da geschmiedetes Bauteil.

Wirkende Spannungsamplitude:

$$\sigma_a = \beta_{k,b} \cdot \frac{F_2 \cdot L_A}{W_{b,A-A}} = 1,41 \cdot \frac{1000 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm}}{\frac{1}{6} \cdot b^2 \cdot h} = 1,41 \cdot \frac{1000 \text{ N} \cdot 30 \text{ mm}}{\frac{1}{6} \cdot 30^2 \cdot 4 \text{ mm}^3} = 71 \text{ MPa}$$

$$\text{mit: } \beta_{k,b} = \frac{\alpha_{k,b}}{1 + \frac{55}{R_e} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}} = \frac{1,787}{1 + \frac{55}{185} \cdot \sqrt{\frac{2}{2,5}}} = 1,412$$

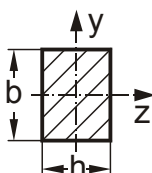
Sicherheit gegen Dauerbruch:

$$S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} = \frac{90,3}{71} = 1,27 \quad (\checkmark) \text{ ertragbar, aber nicht sicher!}$$

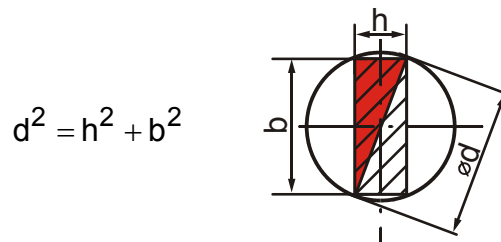
Statische Überprüfung entfällt, siehe b)

- d) **Optimierung des Querschnitts:**

Widerstandsmoment gegen Biegung:

$$W_b = \frac{1}{6} b^2 \cdot h$$


Geometrische Beziehung:



$$d^2 = h^2 + b^2$$

$$b^2 = d^2 - h^2 \text{ in } W_b$$

$$W_b(h) = \frac{1}{6} \cdot (d^2 - h^2) \cdot h = \frac{1}{6} (d^2 h - h^3)$$

$$W'_b(h) = \frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{6} = \frac{h^2}{2}$$

Extremwertsuche:

$$W'_b(h) = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} d^2 = h^2$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} d \text{ in geometrische Beziehung liefert}$$

$$b^2 = d^2 - \frac{1}{3} d^2 = \frac{2}{3} d^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{3}} d$$

$$h \approx 57 \% d \text{ und } b \approx 81 \% d \text{ mit } d = 30 \text{ mm}$$

$$h_{\text{opt}} = 17,3 \text{ mm und } b_{\text{opt}} = 24,5 \text{ mm}$$