

Aufgabe 1:

$$a) \quad \sigma_a = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{10 \text{ MPa} \cdot 180 \text{ mm}}{4 \cdot 10 \text{ mm}} = 45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s} = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} = -5 \text{ MPa}$$

$$\text{SH: } \sigma_{v,SH} = \sigma_t - \sigma_r = 95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zul} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_e}{S_F} = \frac{300 \text{ MPa}}{1,5} = 200 \text{ MPa} \\ \frac{R_m}{S_B} = \frac{420 \text{ MPa}}{2} = 210 \text{ MPa} \end{array} \right\} = 200 \text{ MPa}$$

$$\text{FB: } \sigma_v < \sigma_{zul} \Rightarrow \text{ sicher}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Axialspannung:	45	MPa
Tangentialspannung:	90	MPa
Radialspannung:	-5	MPa
Sicherheit:	ausreichend	

b) in der Mitte der Rohrwand:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot (\sigma_t + \sigma_r)) = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} \cdot (45 - 0,3 \cdot (90 - 5)) \text{ MPa} = 0,00929\%$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_a + \sigma_r)) = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} \cdot (90 - 0,3 \cdot (45 - 5)) \text{ MPa} = 0,0371\%$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot (\sigma_a + \sigma_t)) = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} \cdot (-5 - 0,3 \cdot (45 + 90)) \text{ MPa} = -0,02170\%$$

Wanddickenänderung:

$$\Delta s = \varepsilon_r \cdot s = -0,0002170 \cdot 10 \text{ mm} = -0,00217 \text{ mm}$$

Vergrößerung des Außendurchmessers:

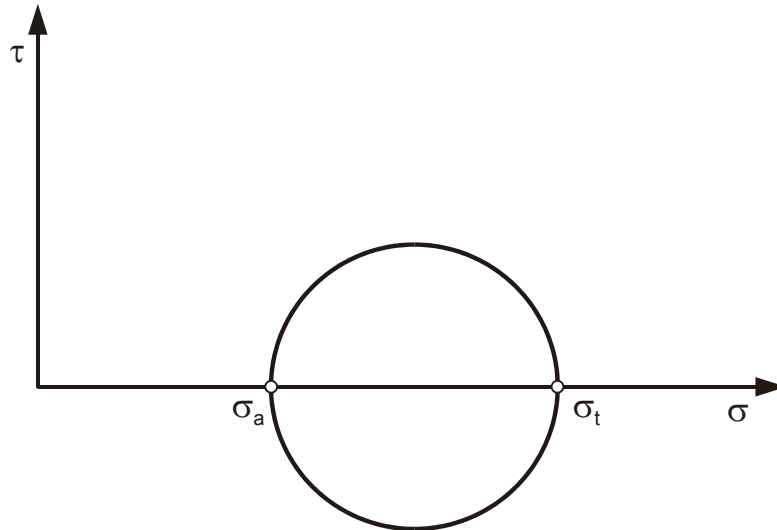
$$\varepsilon_t(\text{außen}) = \varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_a + \overset{=0}{\sigma_r})) = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} \cdot (90 - 0,3 \cdot 45) \text{ MPa} = 0,03640\%$$

$$\Delta D = \varepsilon_t(\text{außen}) \cdot D = 0,0003640 \cdot 200 \text{ mm} = 0,07286 \text{ mm}$$

Für max. Dehnungsmessung muss DMS in Umfangsrichtung (Tangentialrichtung) orientiert sein

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Axialdehnung:	0,0000929	
Tangentialdehnung:	0,000371	
Radialdehnung:	-0,0002170	
Wanddickenänderung:	-0,00217	mm
Durchmesseränderung:	0,07286	mm
Lage des DMS:	DMS in Tangentialrichtung orientiert	

c)



Die Spannungen sind:

$$\frac{\sigma_a + \sigma_t}{2} = 67,5 \text{ MPa} = \sigma_{45^\circ} = \sigma_{-45^\circ}$$

$$\tau_{\pm 45^\circ} = \pm \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} = \pm 22,5 \text{ MPa}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Normalspannung $\sigma_{n,\pm 45^\circ}$:	67,5	MPa
Schubspannung $\tau_{\pm 45^\circ}$:	$\mp 22,5$	MPa

$$d) \quad \varepsilon_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{45^\circ} - \mu \cdot (\sigma_{-45^\circ} + \sigma_r(\text{Mitte})))$$

$$\varepsilon_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} \cdot (67,5 - 0,3 \cdot (67,5 - 5)) = 0,02320\%$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Dehnung ε_{+45° :	0,0002320	
Dehnung ε_{-45° :	0,0002320	

$$e) \quad \sigma_{v,SH} = \sigma_{a,ges} - \sigma_r = R_e$$

$$\Rightarrow \sigma_{a,ges} = R_e + \sigma_r = 300 \text{ MPa} - 5 \text{ MPa} = 295 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \sigma_{a,ges} - \sigma_a = 295 \text{ MPa} - 45 \text{ MPa} = 250 \text{ MPa}$$

$$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{D^4 - d_i^4}{D} \right) = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{200^4 - 180^4}{200} \right) \text{ mm}^3 = 270098 \text{ mm}^3$$

$$M_b = \sigma_b \cdot W_b = 250 \text{ MPa} \cdot 270098 \text{ mm}^3 = 67,52 \text{ kNm}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Biegemoment:	67,52	kNm

Aufgabe 2

$$a) \quad \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{1000 \text{ Nm}}{12566 \text{ mm}^3} = 79,6 \text{ MPa}$$

$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} \cdot (40 \text{ mm})^3 = 12566 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{1000 \text{ Nm}}{6283 \text{ mm}^3} = 159,0 \text{ MPa}$$

$$W_b = \frac{\pi}{32} d^3 = 6283 \text{ mm}^3$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Torsionsspannung τ_t :	79,58	MPa
Biegespannung σ_b :	159	MPa

$$b) \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\tau_t^2 + (0,5\sigma_b)^2} = \frac{159 \text{ MPa}}{2} + \sqrt{(79,58 \text{ MPa})^2 + \left(\frac{159 \text{ MPa}}{2}\right)^2} = 192 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_b}{2} - \sqrt{\tau_t^2 + (0,5\sigma_b)^2} = \frac{159 \text{ MPa}}{2} - \sqrt{(79,58 \text{ MPa})^2 + \left(\frac{159 \text{ MPa}}{2}\right)^2} = -33 \text{ MPa}$$

Eintragung Endergebnis		
Gleichung σ_1 :	$\sigma_1 = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\tau_t^2 + (0,5\sigma_b)^2}$	
Gleichung σ_2 :	$\sigma_2 = \sigma_r = 0$	
Gleichung σ_3 :	$\sigma_3 = \frac{\sigma_b}{2} - \sqrt{\tau_t^2 + (0,5\sigma_b)^2}$	
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
1. Hauptspannung σ_1 :	192	MPa
2. Hauptspannung σ_2 :	0	MPa
3. Hauptspannung σ_3 :	-33	MPa

$$c) \quad \tau_{\max} = \alpha_{k,t} \cdot \tau_t = 1,6 \cdot 79,58 \text{ MPa} = 127,3 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{k,t} \left(\frac{D}{d} = 1,25, \frac{\rho}{d} = 0,05 \right) = 1,6$$

$$\alpha_{k,b} \left(\frac{D}{d} = 1,25, \frac{\rho}{d} = 0,05 \right) = 1,95$$

$$\sigma_v(\text{SH}) = \sqrt{\sigma_{b,\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \equiv \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_v(\text{GEH}) = \sqrt{\sigma_{b,\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} \equiv \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_{\text{zul}} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_m}{S_B} = \frac{800 \text{ MPa}}{2} = 400 \text{ MPa} \\ \frac{R_e}{S_F} = \frac{720 \text{ MPa}}{1,5} = 480 \text{ MPa} \end{array} \right\} = 400 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b,\max}(\text{SH}) = \sqrt{\sigma_{\text{zul}}^2 - 4\tau_{\max}^2} = 308,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b,\max}(\text{GEH}) = \sqrt{\sigma_{\text{zul}}^2 - 3\tau_{\max}^2} = 333,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b(\text{SH}) = \frac{\sigma_{b,\max}}{\alpha_{k,b}} = \frac{308,5 \text{ MPa}}{1,95} = 158,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b(\text{GEH}) = \frac{\sigma_{b,\max}}{\alpha_{k,b}} = \frac{333,7 \text{ MPa}}{1,95} = 171,2 \text{ MPa}$$

SH: $\sigma_b < 159 \text{ MPa}$ aus a) $\Rightarrow$ kein weiterer Anstieg erlaubt

GEH: $M_{\text{zul}} = (\sigma_b(\text{GEH}) - 159 \text{ MPa}) \cdot W_b = 76,6 \text{ Nm}$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Maximales Biegemoment:	(GEH) 1076,6	Nm

d)

$$\beta_{k,b} = \frac{\alpha_{k,b}}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{c}{\rho}}} = \frac{1,95}{1 + \frac{55}{720} \sqrt{\frac{2}{2}}} = 1,81$$

$$f = 0,92$$

$$\sigma_{b,w} = 400 \text{ MPa}$$

$$S_D = 2$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{b,max} = \beta_k \cdot \sigma_{b,n} \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{b,w}}{S_D} \cdot f$$

$$\sigma_{b,n} = \frac{1200 \text{ Nm}}{6283 \text{ mm}^3} = 191 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b,max} = 1,81 \cdot 191 \text{ MPa} = 345,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{400 \text{ MPa}}{2} \cdot 0,92 = 184 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zul} < \sigma_{max} \Rightarrow \text{nicht sicher}$$

statisch:

$$\sigma_{b,n} \cdot \alpha_{k,b} = 191 \text{ MPa} \cdot 1,95 = 372,5 \text{ MPa} < \sigma_{zul} = 400 \text{ MPa} \Rightarrow \text{sicher}$$