



Kern- und Teilchenphysik

10. Konzepte für subatomare Untersuchungen

10.1 Wechselwirkung Teilchen mit Materie

Hans Rudolf Schmidt
Wintersemester 2018/2019

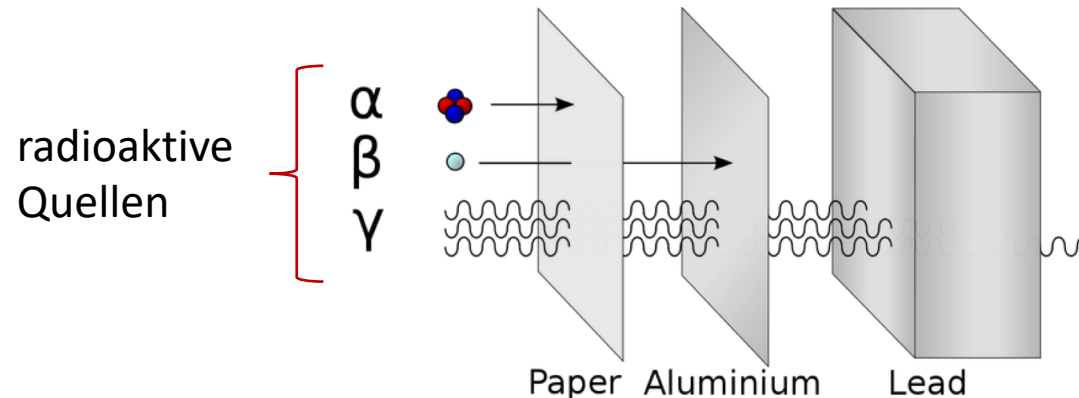


10. Konzepte für subatomare Untersuchungen

10.1 Wechselwirkung von Strahlung und Materie

- i. Ionisationsbremsung schwerer, geladener Teilchen (p, d, t, ...)
 - a. Bethe-Bloch-Gleichung
 - b. Reichweite
- ii. Elektronen
 - a. Ionisation, Bremsstrahlung, Strahlungslänge X_0
- iii. Cherenkov-Strahlung
- iv. Absorption von γ -Strahlung in Materie
 - a. Photoeffekt
 - b. Compton Effekt
 - c. Paarbildung
- v. Nachweis von Neutronen
- vi. Nachweis von Neutrinos

Energieverlust von geladenen und neutralen Teilchen in Materie



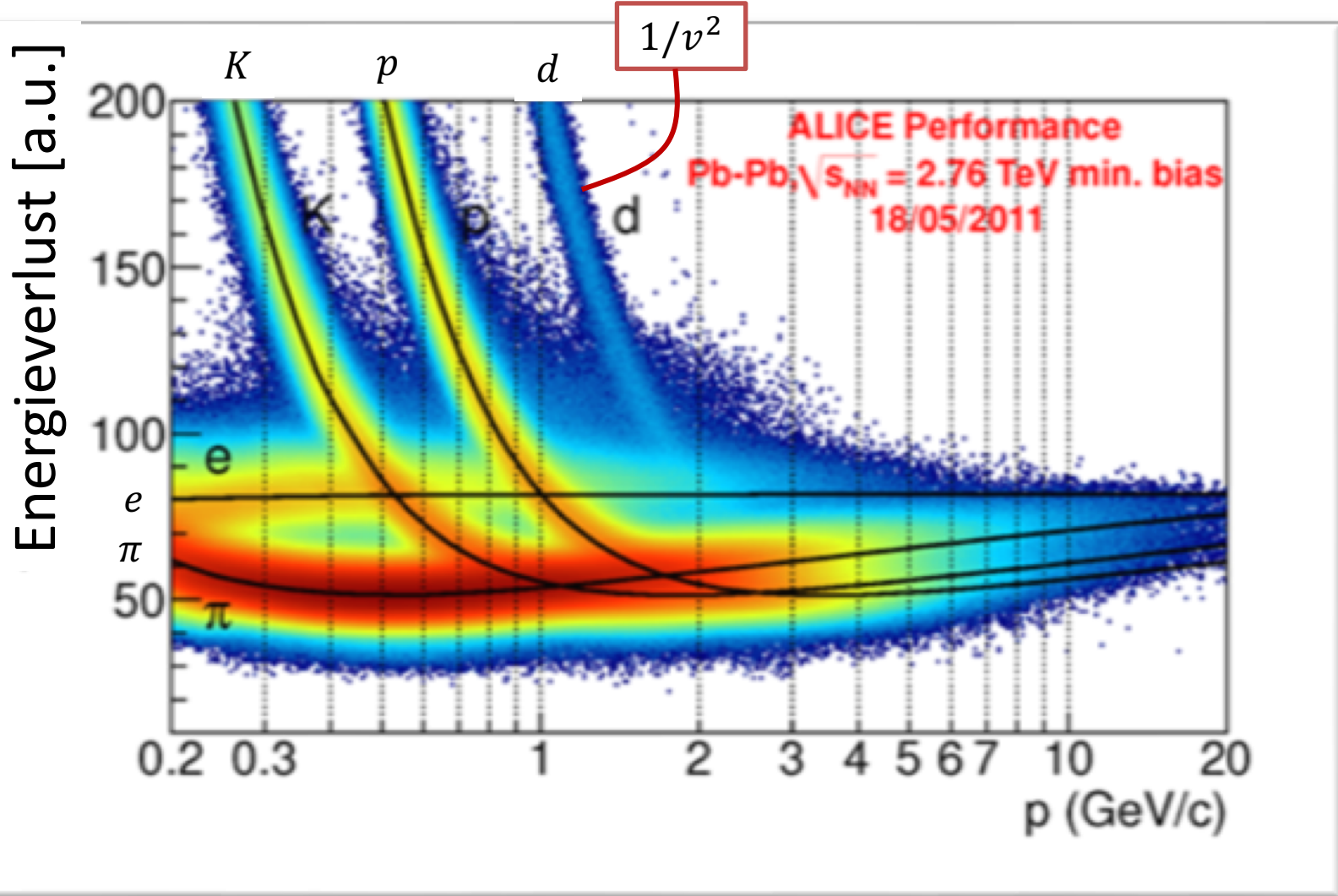
geladene Teilchen: $\pi, p, \dots, \alpha, \dots, e, \mu$

- Ionisation: dominanter Prozess bei kleinen und mittleren Energien
- Bremsstrahlung: nur bei Elektronen bedeutend
- hadronischer Schauer: Kernreaktion bei hohen Energien
- elektromagnetischer Schauer: Kaskade bei hohen Energien

neutrale Teilchen: n, γ, ν

- elastische Streuung: $n + p \rightarrow n' + p'$, Energieübertrag auf Proton
- Absorption, Streuung: Photoeffekt, Compton, Paarbildung
- hadronischer Schauer: Kernreaktion bei hohen Energien (Neutronen)
- elektromagnetischer Schauer: $\gamma \rightarrow e^+ e^-$

Bethe-Bloch in ALICE TPC



Bethe-Bloch Gleichung



mittlerer Energieverluste dE/dx eines geladenen Teilchens ($q = z$) und $\beta = \frac{v}{c}$

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi \cdot r_e^2 \cdot N_0 \cdot m_e c^2 \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2}{I \cdot (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

$$\frac{dE}{dX} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2} \right] = 0.307 \frac{\text{MeV}}{\text{g}} \text{cm}^2$$

A, Z :
Target

z, β :
Projektil

I : effektives Ionisations-
potenzial, experimentell
10-12 ZeV (große Z)

δ : Polarisation
des Mediums

Targetparameter: Kernladung Z , Kernmasse A , effektives Ionisationspotenzial I

Teilchenparameter: Geschwindigkeit β , Ladung z , unabhängig von m

Konstanten: klass. Elektronenradius $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$
Elektronenmass m_e , Avogadrozahl N_0



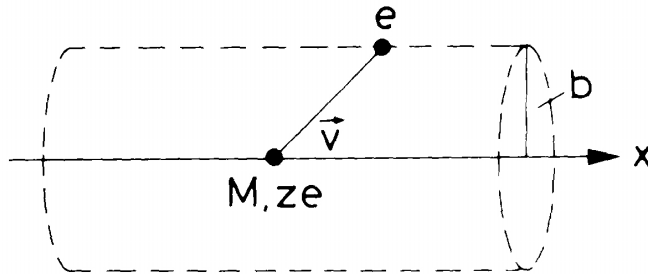
Hans Bethe

Felix Bloch

Abbremsung von schweren, geladenen Teilchen in Materie (1)



Der dominante Mechanismus der zur Abbremsung/Energieverlust von geladenen Teilchen führt ist die **Ionisation aufgrund elektromagnetischer Wechselwirkung** und wird beschrieben durch die **Bethe-Bloch Beziehung**. Ableitung:



Annahmen:

- a) ein schweres Teilchen (Ladung ze , $M \gg m_e$) passiert ein (freies) Elektron im Abstand b
- b) $\beta \gg Z\alpha$ ($v_{\text{Projektil}} \gg v_{\text{Hüllenelektronen}}$)
- c) das einfallende Teilchen wird nicht aus seiner Bahn abgelenkt (da schwer)

Berechnung des Impulsübertrag an das Elektron:

$$\Delta p_e = \int F dt = e \int E_{\perp} dt = \frac{e}{\beta c} \int E_{\perp} dx \quad \text{mit } dx = \beta c dt$$

Integration des elektr. Feldes über einen unendl. langen Zylinder mittels des Gausschen Gesetzes:

$$\begin{aligned} \int_A E_{\perp} dA &= \int E_{\perp} 2\pi b dx = 4\pi ze \Rightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{b} \\ \Rightarrow \Delta p_e &= \frac{2ze^2}{b\beta c} \Leftrightarrow \Delta E(b) = \frac{\Delta p_e^2}{2m_e} = \frac{2Z^2 e^4}{m_e \beta^2 c^2 b^2} \end{aligned}$$

Abbremsung von schweren Teilchen in Materie (2)



Elektronen/Weglänge dx im Intervall $[b, b + db]$ bei einer Elektronendicht n_e ist:

$$N_e = n_e 2\pi \cdot b db \cdot dx$$

Energieverlust/Strecke:

$$-\frac{dE}{dx} = n_e 2\pi \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} b \Delta E db = \frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$

Exakte quantenmechanische Behandlung ergibt die Bethe-Bloch-Beziehung:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

wobei $I = 10 - 12 Z eV$ das mittlere Ionisationspotential ist. Proportionalitäten:

$$-\frac{dE}{dx} \sim \frac{1}{\beta^2} \quad -\frac{dE}{dx} \sim z^2 \quad \text{und} \quad -\frac{dE}{dx} \sim n_e \sim \frac{Z}{A} \cdot \rho$$

Projektil-Abhängigkeit (z)



Im Niederenergiebereich ($E_{kin} < m_0 c^2$) gilt:

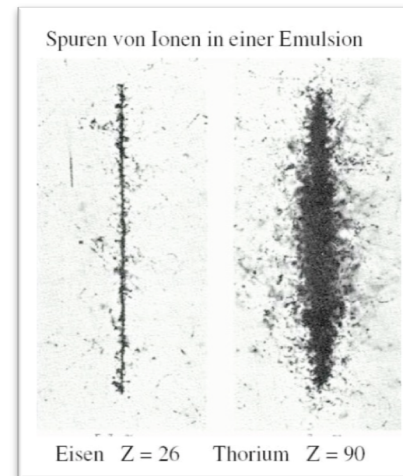
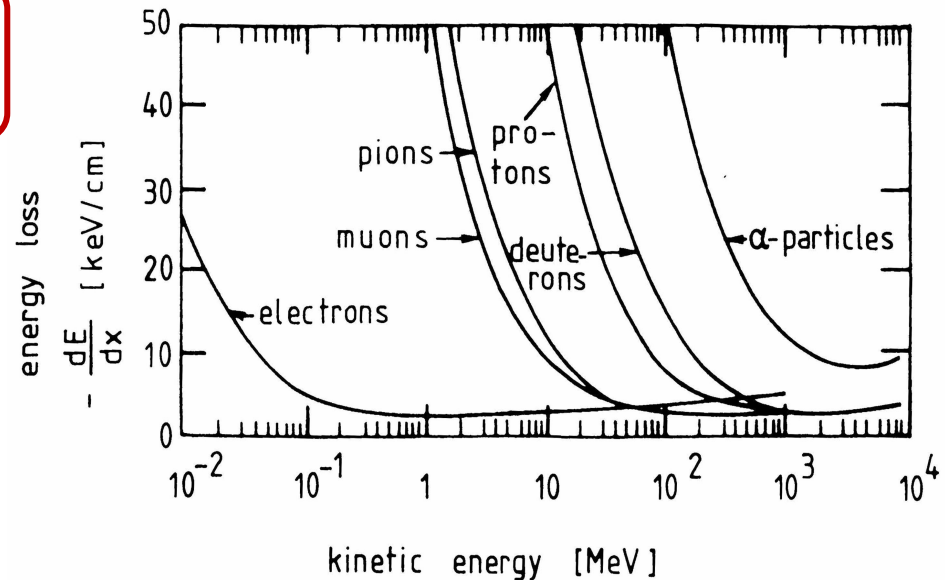
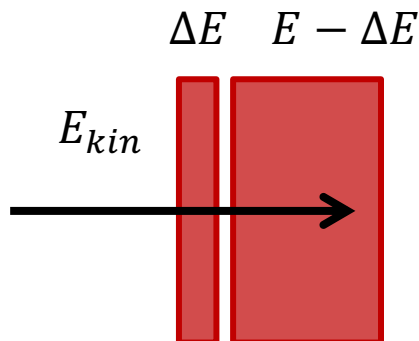
$$-\frac{dE}{dx} \sim \frac{z^2}{\beta^2} \sim m^2 z^2 \cdot \frac{1}{p^2} \sim m z^2 \cdot \frac{1}{E_{kin}}$$

für endl. Δx gilt:

$$\Delta E \cdot E \sim m z^2$$

Messung von diff. Energieverlust ΔE und gesamter Energie/Impuls identifiziert Teilchensorte.

Klassische Methode der Kernphysik zur **Teilchenidentifikation** im $\Delta E \cdot E$ Teleskop.





Massenbelegung X

Anstelle der Schichtdicke x [cm] eines Target wird bei Energieverlustprozessen oft die Massenbelegung

$$X := \rho \cdot x \text{ [g/cm}^2\text{]}$$

angegeben.

ρ = stoff-spezifische Dichte [g/cm³]

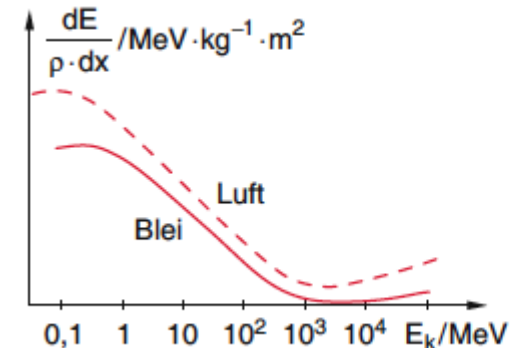
Bremsvermögen dE/dX

Mit der Relation $dX = \rho \cdot dx$ ergibt sich das Bremsvermögen

$$\frac{dE}{dX} \text{ [MeV g}^{-1}\text{cm}^2\text{]}$$

$$\frac{dE}{dX} := \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Das Bremsvermögen ist für alle Materialien wg. $Z/A \sim 0.5$ annähernd gleich!



Reichweite (1)



Die mittlere Reichweite von Teilchen erhält man durch Integration der Bethe-Bloch-Beziehung:

$$\langle R \rangle = \int_{E_{kin}}^0 \frac{dX}{dE} dE \sim f(v) \cdot \frac{E_{kin}^2}{mz^2} + R_\tau \quad \text{für } E_{kin} \ll mc^2$$

R_τ = Restreichweite (targetabhängig)

$f(v)$ = log. Term $\sim E_{kin}^{-1/2}$

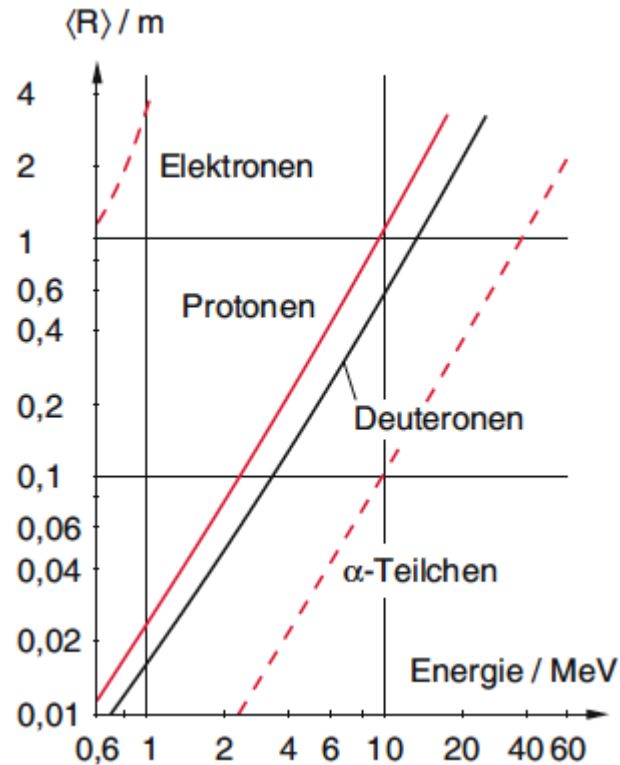
m, z = Masse und Ladung des Teilchens

$$\langle R \rangle \sim E_{kin}^{3/2} / (mz^2) + R_\tau$$

Reichweite (2)



Reichweite verschiedener Teilchen in Luft als Funktion der Energie



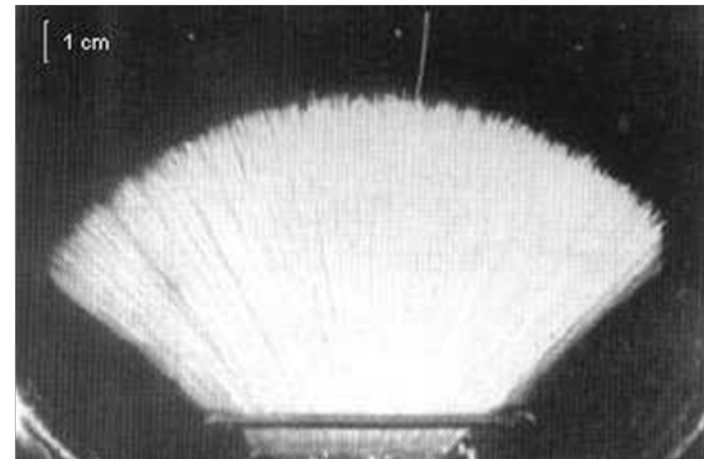
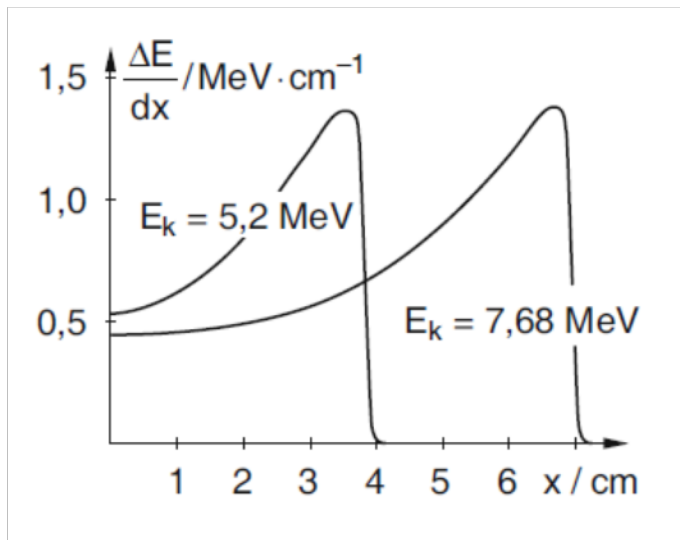
Beispiel für gebräuchliche radioaktive Quellen:

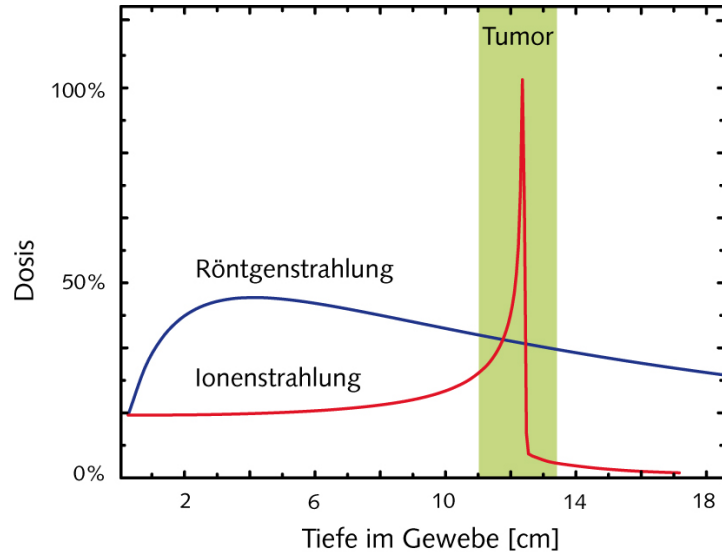
Strontium: $^{90}\text{Sr} \rightarrow ^{90}\text{Y} + \beta$, $E_{kin}^{\beta} = 0.546 \text{ MeV}$ (β -Strahler)

Americium: $^{243}\text{Am} \rightarrow ^{239}\text{Np} + \alpha$, $E_{kin}^{\alpha} = 5.438 \text{ MeV}$ (α -Strahler)

gefährlich bei
Inkorporation

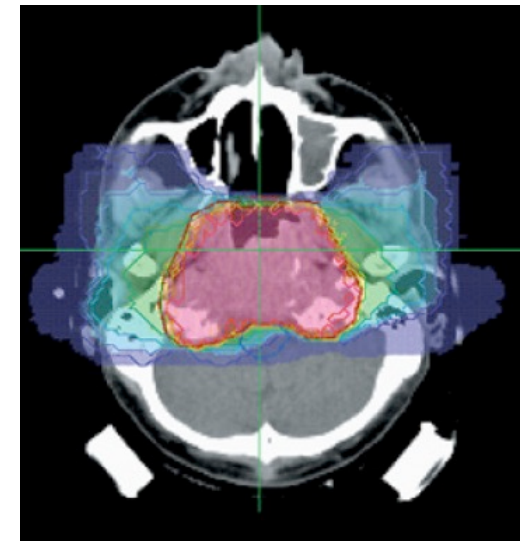
Der differentiell Energieverlust (Zunahme des Energieverlustes mit $\frac{1}{\beta^2}$) führt zur sog. **Bragg-Kurve**. Beispiel: Energieverlust von α -Teilchen in Luft:





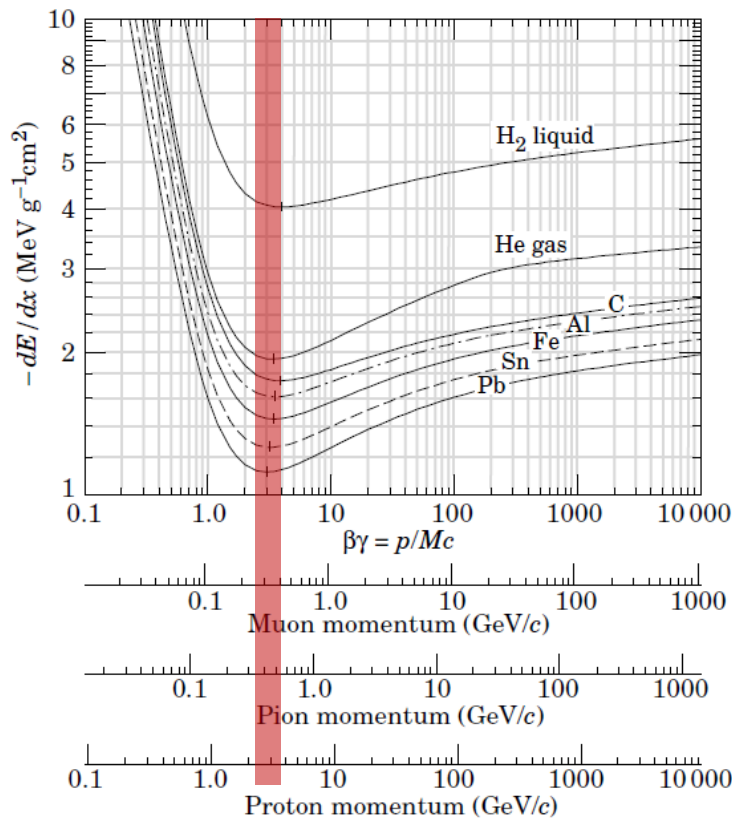
Durch den Bragg-Peak von schweren Ionen (^{12}C) kann die Dosisleistung gezielt im Tumor platziert werden, davor liegende Gewebe wird geschont.

Pilotanlage an der GSI in Darmstadt, klinische Anlage am DKFZ in Heidelberg.





MIP



- Energieverlust hängt nicht von der Masse der Teilchen ab, sondern nur von $\beta\gamma$
- bei $\beta\gamma \approx 3 - 4$ ($\sim 0.5 \text{ GeV}/c$ für Pionen) hat der Energieverlust ein Minimum, bei diesen Geschwindigkeiten sind die Teilchen minimal-ionisierend (MIP)
- $Z/A \approx 0.5$ für die meisten Materialien
- ein MIP hat den Energieverlust, d.h. mit in Gasen führen Polarisierungseffekte bei hohen Energien zu einem sog. **Relativistischen Wiederanstieg** des Energieverlustes

Energieverlust MIP:

$$\frac{dE}{dX} \sim 2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 2 \text{ MeV/cm}$$

für $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$

Energieverlust von Elektronen (1)



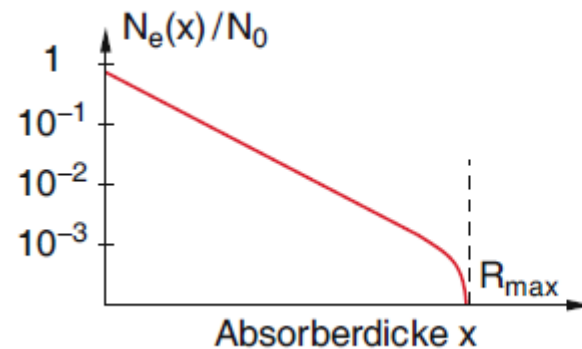
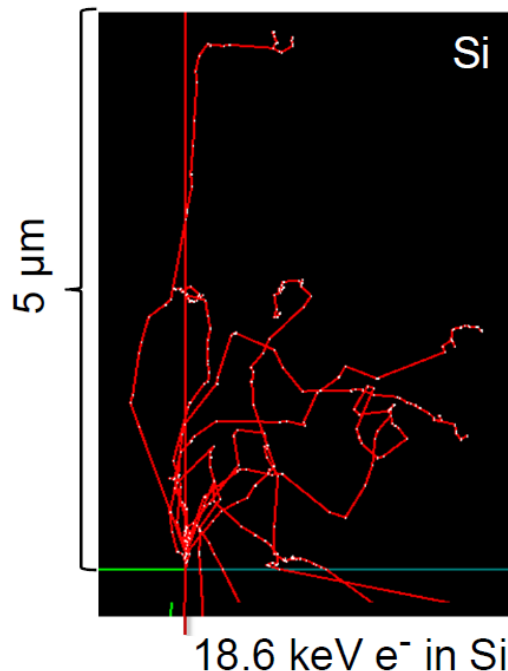
bei leichten, **langsamen** Teilchen (Elektron, Positron) kann die Richtungsablenkung bei Stößen mit der Elektronenhülle nicht mehr vernachlässigt werden → leichte Modifikation von Bethe-Bloch.

Vorsicht:

$$v_e = v_{Proton} \Rightarrow \left. \frac{dE}{dx} \right|_e \approx \left. \frac{dE}{dx} \right|_{Proton} \quad \text{aber } E_{kin}^e = E_{kin}^P \Rightarrow \left. \frac{dE}{dx} \right|_e \approx \underbrace{\frac{m_e}{m_P}}_{1/2000} \left. \frac{dE}{dx} \right|_P \quad \text{für } v \ll c$$

(für relativistische Teilchen ($v \sim c$) Unterschiede zwischen Elektronen und schweren Teilchen klein)

aber: auf Grund von Mehrfachstreuung („drunken man's walk“) Abbremsskurve von Elektronen verschieden von schweren Teilchen.



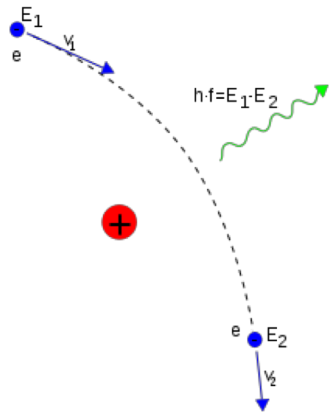
kein Bragg-Peak für Elektronen

W. Demtröder



Energieverlust von Elektronen (2)

bei **hohen** Elektronenergien zusätzlich Bremsstrahlverluste, so dass:



$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_{e^+, e^-} = \left[\frac{dE}{dx} \right]_{\text{Ionisation}} + \left[\frac{dE}{dx} \right]_{\text{Bremsstrahlung}}$$

$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_{\text{Brems}} = \frac{4\alpha^3 N_0}{m^2} \cdot \frac{Z^2}{A} \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \cdot E \Rightarrow (\text{Integration})$$

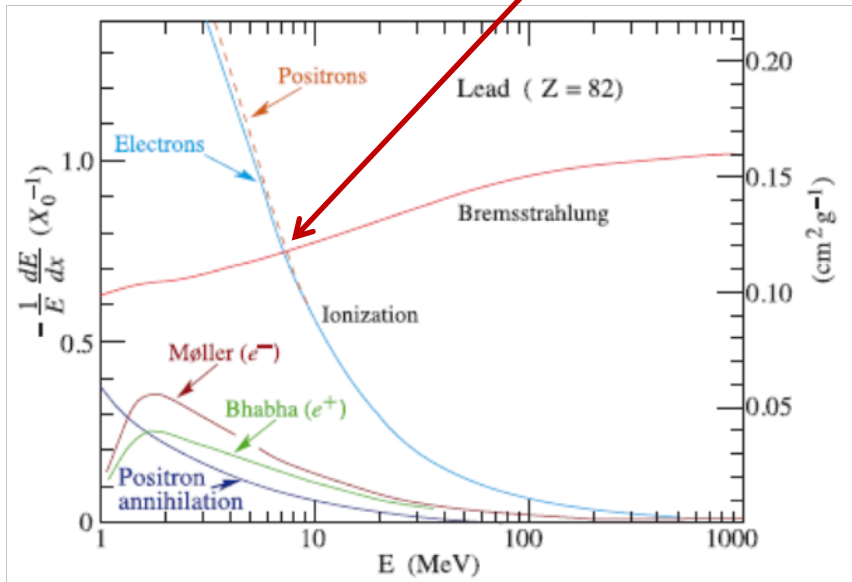
$$E = E_0 \cdot e^{-Ax}$$

mit

$$X_0 := \frac{1}{A} = \left(\frac{4\alpha^3 N_0}{m^2} \cdot \frac{Z^2}{A} \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \right)^{-1} \sim \frac{1}{Z^2}$$

kritische Energie:

$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_I = \left[\frac{dE}{dx} \right]_B$$



Strahlungslänge X_0 : Länge nach der die Elektronenenergie auf $\frac{1}{e}$ reduziert ist.

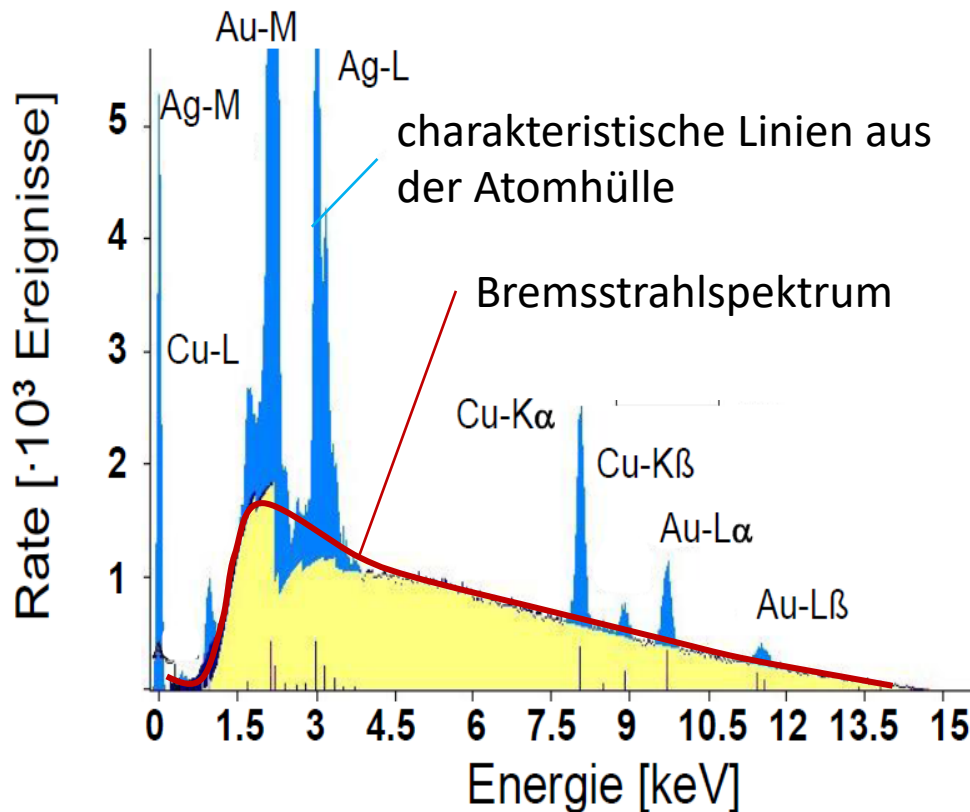
NB: wg. $1/m^2$ Bremsstrahlverluste nur für Elektronen wichtig, (nur im TeV-Bereich auch für Muonen), d.h. hohes Durchdringungsvermögen von kosmischen Muonen!!

$$\frac{dE}{dx} \Big|_{\mu}^{\text{Brems}} / \frac{dE}{dx} \Big|_e^{\text{Brems}} \sim \left(\frac{m_e}{m_{\mu}} \right)^2 \approx 2.3 \cdot 10^{-5} \quad (\beta_e \sim 1)$$

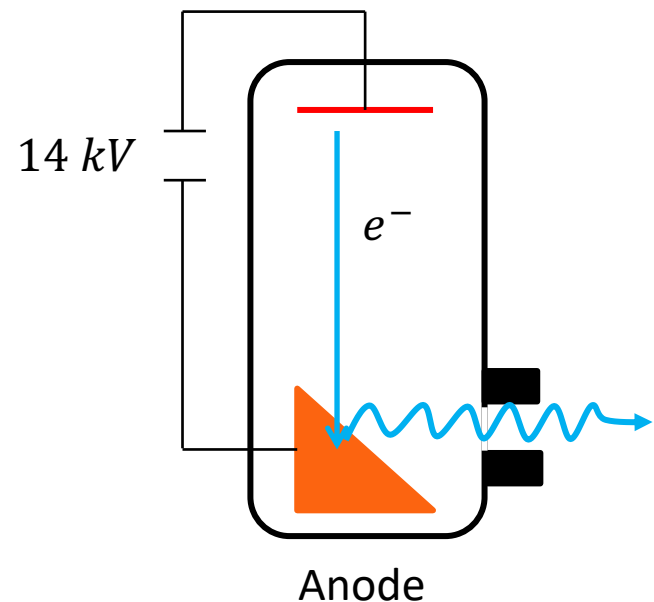
Hochenergetische Hadronen hingegen verlieren ihre Energie schnell durch Kernreaktionen.



Röntgenspektrum



Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre



Cherenkov-Strahlung (1)



Bewegen sich Teilchen mit

$$v_{Schwelle} = \beta \cdot c > c / n$$

(n = Brechungsindex)

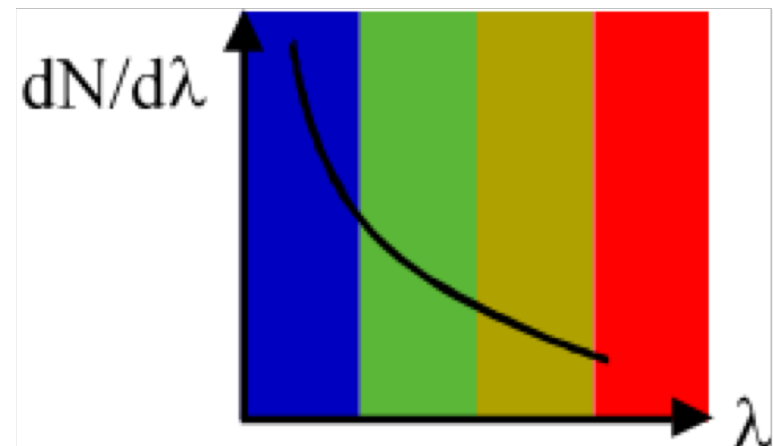
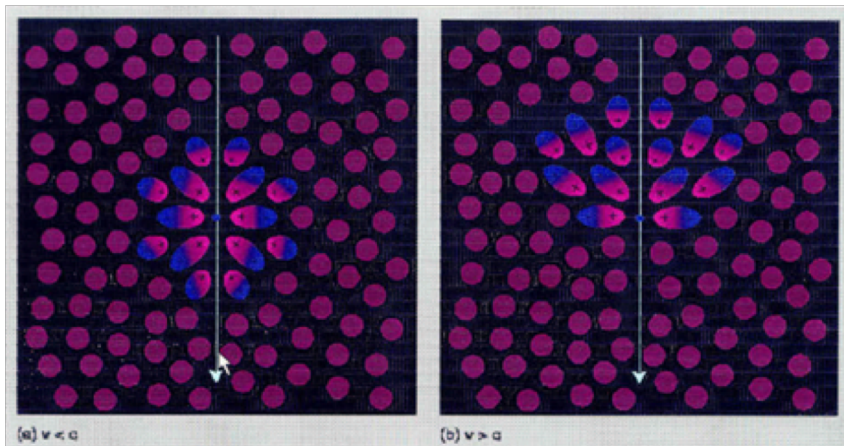
durch ein dielektrisches Medium, emittieren sie Cherenkov-Strahlung.

klassisch: asymmetrische Polarisierung des Mediums, führt zu einem kontinuierlichen Photonenspektrum mit

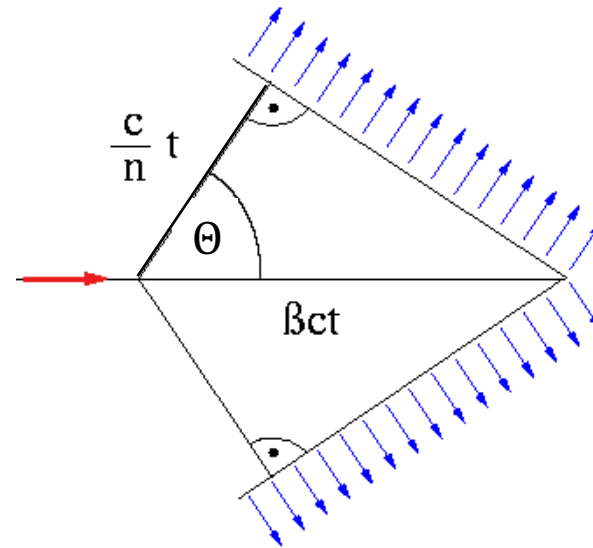
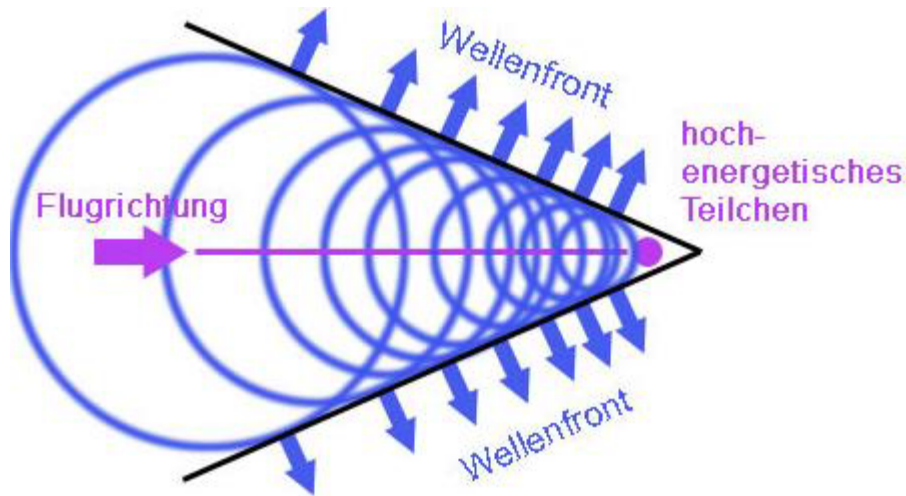
$$I(\lambda) \sim \lambda^{-2}$$

d.h. Cherenkov-Strahlung dominant im UV-Bereich (Nobelpreis 1958)

$$v_{Teilchen} \ll c/n \quad v_{Teilchen} > c/n$$



Cherenkov-Strahlung (2)



konstruktive Interferenz der vom Medium abstrahlten Wellen führt zu einem Lichtkegel mit:

$$\cos(\Theta) = \frac{ct/n}{\beta ct} = \frac{1}{\beta \cdot n}$$

Anwendung: Messung der Geschwindigkeit von Teilchen

Cherenkov-Strahlung (3)



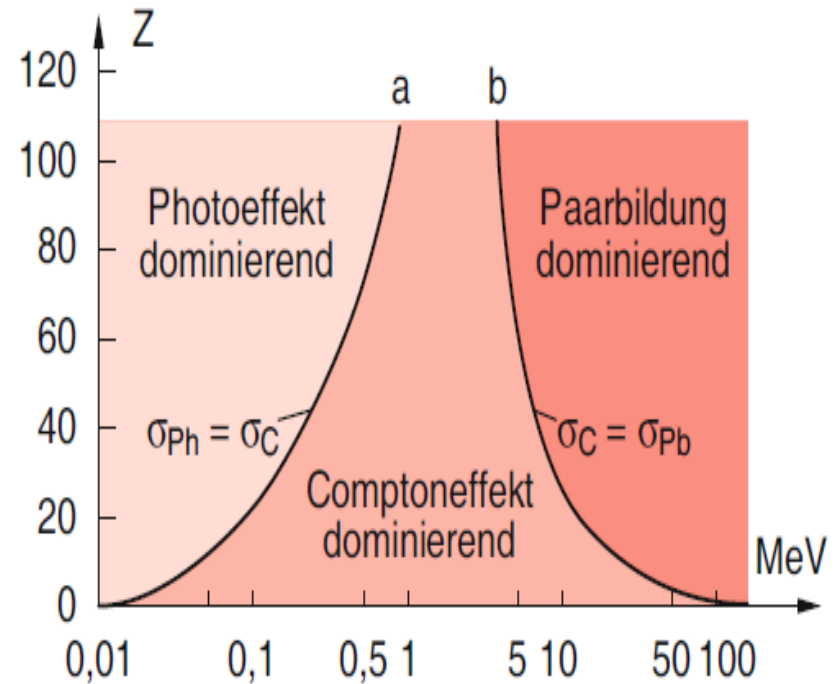
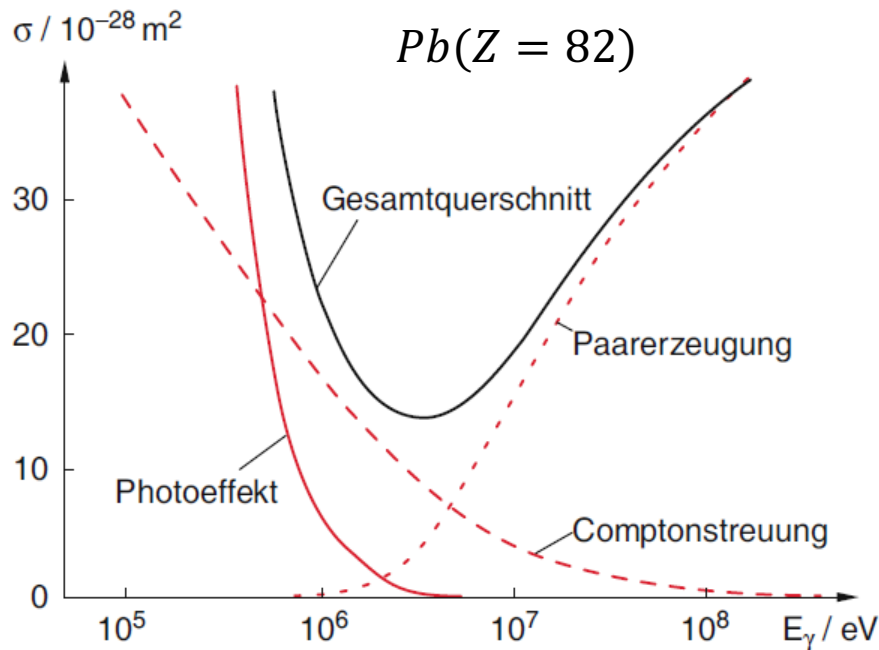
$$V_{\text{Jet}} > v_{\text{Schall}}$$



Wechselwirkung von γ -Strahlung mit Materie

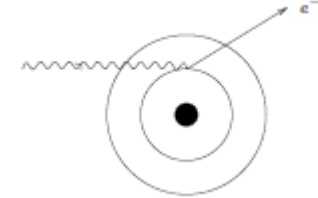
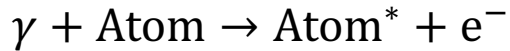
Wechselwirkung von Materie mit γ 's über drei fundamentale Prozesse:

- Photoeffekt dominiert bei kleinem E_γ und großen Z
 - Compton Effekt dominiert bei mittlerem E_γ und kleinem Z
 - Paarbildung dominiert bei grossem E_γ und großen Z
- unterschiedliche E_γ und Z -Abhängigkeit





Photoeffekt: Absorption eines γ 's ($E_\gamma = h\nu > E_b$) durch eine Hüllenelektron und dessen Emmision mit der kinetischen Energie $E_{kin} = h\nu - E_b$.



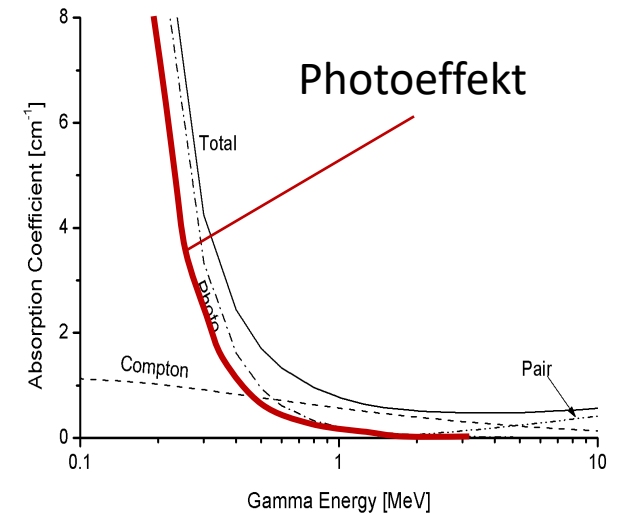
NB: Aus Energie- und Impulserhaltung kein Photoeffekt am freien Elektron, Atomkern muss Rückstoßimpuls aufnehmen!

Für niedere γ -Energien ($E_\gamma < 0.5 \text{ MeV}$) gilt annähernd:

$$\sigma_{\text{Photoeffekt}} \sim Z^5 \cdot E_\gamma^{-\frac{7}{2}}$$

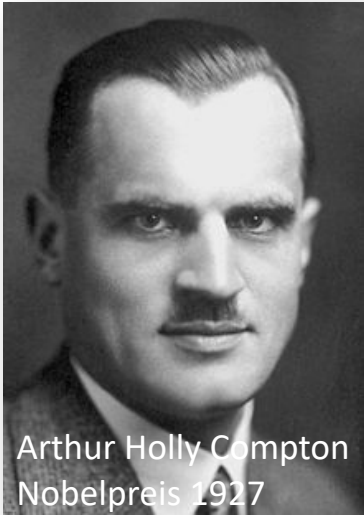
für höhere Energie ($E_\gamma \gg 0.5 \text{ MeV}$) gilt:

$$\sigma_{\text{Photoeffekt}} \sim Z^5 E_\gamma^{-1}$$



Photoeffekt wichtig bei niedrigen γ -Energien und hoher Kernladung Z .

NB: in organischen Szintillator zum Nachweis von Photonen praktische keine Photoeffekt (C_nH_{2n} $Z = 6$)



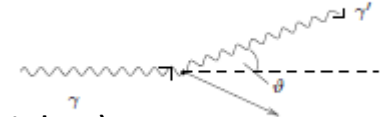
Arthur Holly Compton
Nobelpreis 1927

Comptonstreuung ist die unelastische Streuung eines γ 's an den quasifreien Hüllenelektronen.

Energiebereich: $E_\gamma \sim 1 \text{ MeV}$ (Bindungsenergien vernachlässigbar)

Aus Viererimpulserhaltung ergibt sich:

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos \theta) \leftrightarrow \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

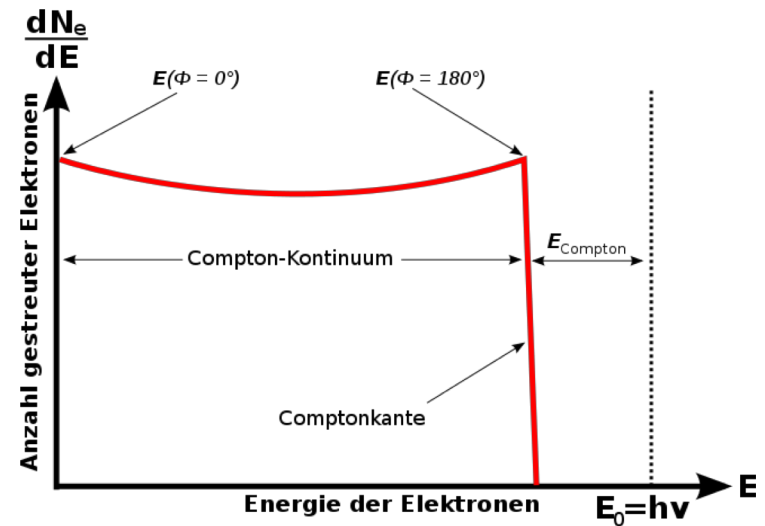


Kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß:

$$T_e = h(\nu - \nu') = E_\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos \theta)} \right)$$

$\Rightarrow$ maximale Energie $T_{e,max}$ bei $\theta = \pi$

$$T_{e,max} = E_\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2E_\gamma/m_e c^2} \right)$$





Relativistisch und quantenmechanisch korrekte Rechnung des Wirkungsquerschnitts ergibt die Klein-Nishina Gleichung:

$$\sigma_{Klein-Nishina} = \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \cdot \pi r_e^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right) + O\left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma}\right) \right]$$

$$\sigma_{Compton} \sim \frac{1}{E_\gamma}$$

$$\sigma_{compton} \sim Z$$

für Absorber mit
Kernladungszahl Z

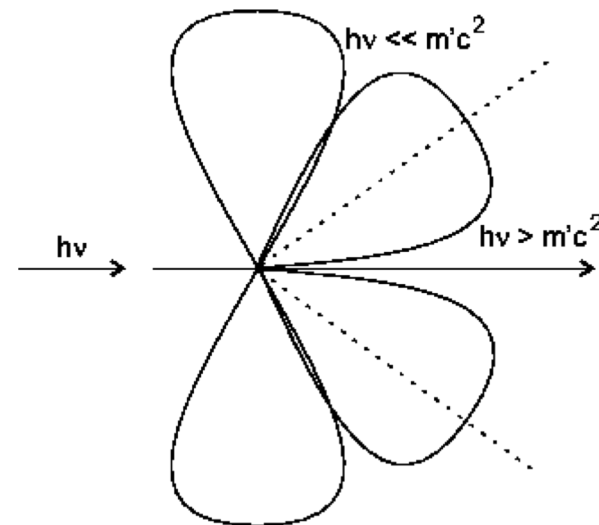
Die Compton-Streuung dominiert den Energieverlust von Photonen im Energiebereich $E_\gamma = 1 - 2 \text{ MeV}$

Winkelverteilung der Compton-gestreuten Photonen:

niedrige Energie – vorwärts/rückwärts

symmetrisch – Thomson-Streuung

hohen Energien – asymmetrische, nach
vorne gerichtete Streueung – Compton
Streuung



Paarerzeugung (1)

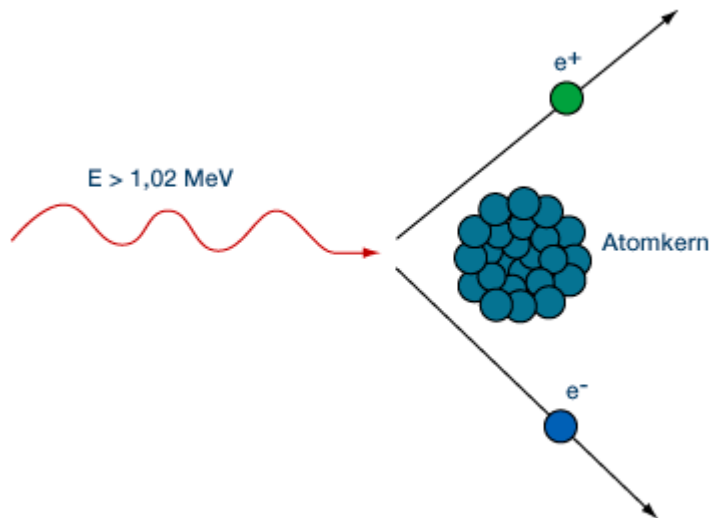


Paarbildung ist die Konversion $\gamma \rightarrow e^+ e^-$

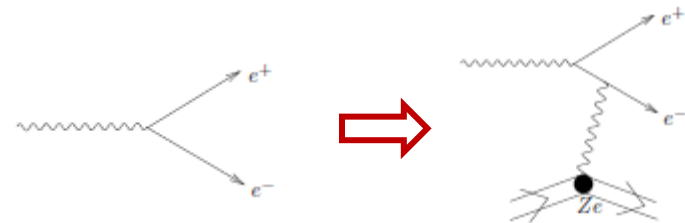
Die Paarbildung dominiert bei hohen γ -Energien, die Schwellenenergie ist

$$E > 2m_e = 1.022 \text{ MeV}$$

NB: hinzu kommt die Rückstoßenergie an den Kern, Paarbildung kann nur im Coulombfeld eines Kern passieren, der den Rückstoß absorbiert



Feynman-Diagramme





bei niederen Energien ($2m_e c^2 < E_\gamma < m_e c^2 \cdot 137/Z^{\frac{1}{3}}$ (berücksichtigt umgebendes Material) wächst der WQ logarithmisch mit der Photonenenergie an:

$$\sigma_{paar} = \frac{4 \cdot \alpha^3 Z^2}{m_e^2} * \left[\frac{7}{9} \cdot \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} - \frac{109}{54} \right]$$

für hohe Energies ($E_\gamma \gg m_e c^2 \cdot 137/Z^{\frac{1}{3}}$ strebt der WQ für Paarbildung gegen einen Grenzwert:

$$\sigma_{paar} = \frac{4 \cdot \alpha^3 Z^2}{m_e^2} * \left[\frac{7}{9} \cdot \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{54} \right]$$

Absorption von Photonen und Energieverlust von Elektronen hängen wg. der Paarbildung zusammen, es gilt für die Stahlungslänge X_0

$$X_0^\gamma = \frac{7}{9} X_0^{Elektron}$$



In Unterschied zu geladenen Teilchen mit endl. Reichweite in Materie wird γ -Strahlung exponentiell abgeschwächte:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

$\frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right]$ = Massenabschwächungskoeffizient

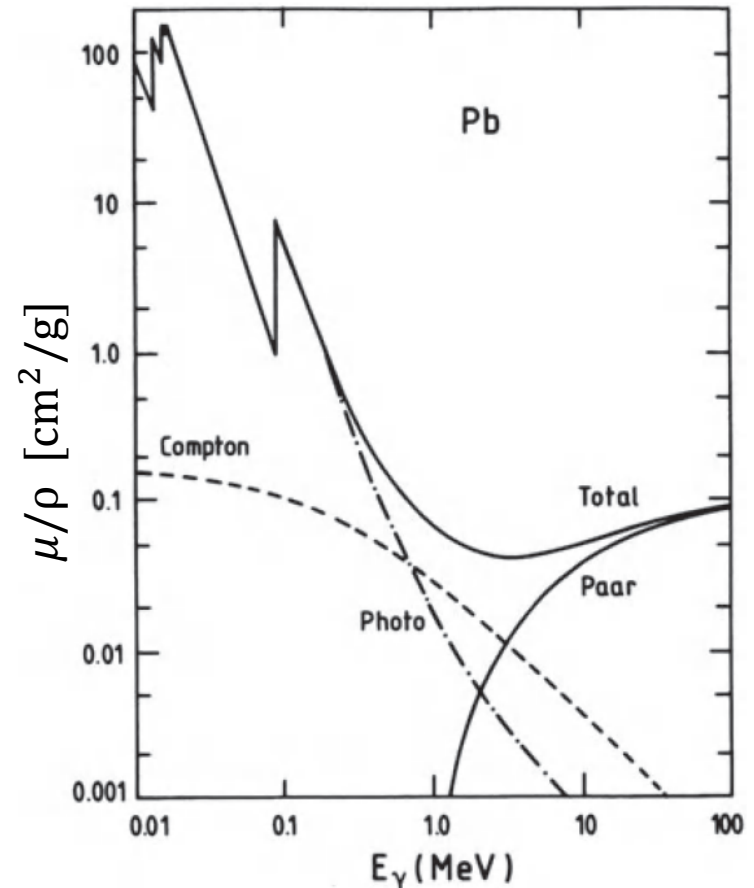
Massenabsorptionskoeffizient und Wirkungsquerschnitt hängen zusammen:

$$\mu = \sigma_{total}(E_\gamma, Z) \cdot \frac{N_0}{M_{mol}}$$

N_0 =Avogadro-Zahl

M_{mol} =Molmasse (z.B. .für ^{208}Pb 208 g)

$$\sigma_{total}(E_\gamma, Z) = \sigma_{Photo}(E_\gamma, Z) + Z\sigma_{Compton}(E_\gamma) + \sigma_{Paar}(E_\gamma, Z)$$



Wechselwirkung von Neutronen mit Materie ausschließlich über die **starke Wechselwirkung**.

hoch-energetische Neutronen

$$E_{\text{Neutron}} > 1 \text{ GeV}$$

- wie hoch-energetischen Protonen, unelastische Reaktionen mit $\sigma \approx 50 \text{ mb}$,
- Nachweis: hadronische Schauer

schnelle Neutronen

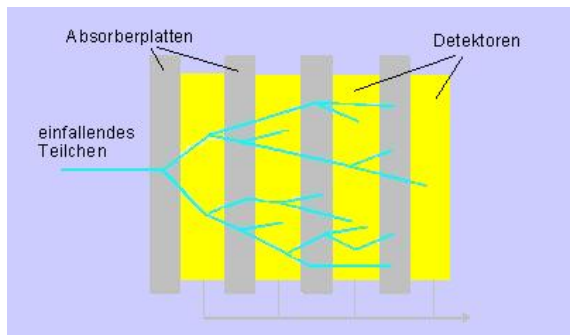
$$0.1 \text{ MeV} < E_{\text{Neutron}} < 10 \text{ MeV}$$

- elastische Streuung
- Nachweis: Rückstoß-Protonen

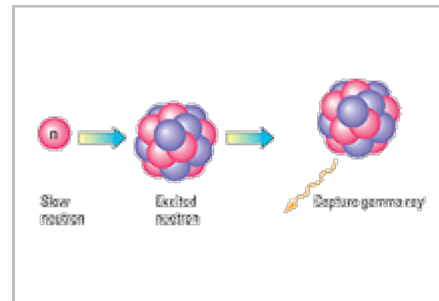
langsame, thermische Neutronen

$$E_{\text{Neutron}} < 0.5 \text{ eV}$$

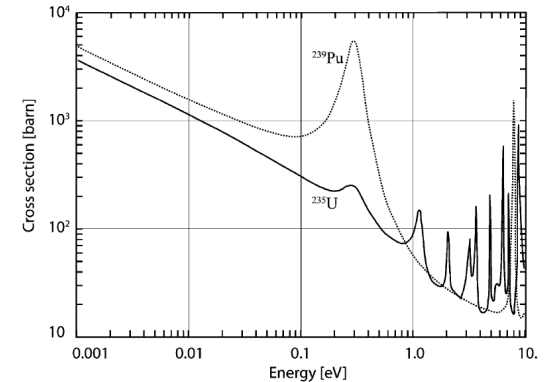
- elastische Streuung mit Resonanzen, $\sigma_{\text{elastisch}} \sim \frac{1}{v}$, Neutroneneinfangreaktionen,
- Nachweis: Kernspaltung, Photonen-Emission



hadronischer Schauer



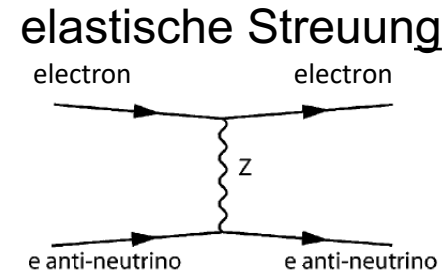
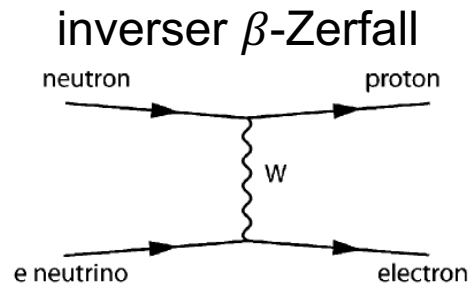
Neutroneneinfang und γ -Emission



Neutroneneinfang und Spaltung



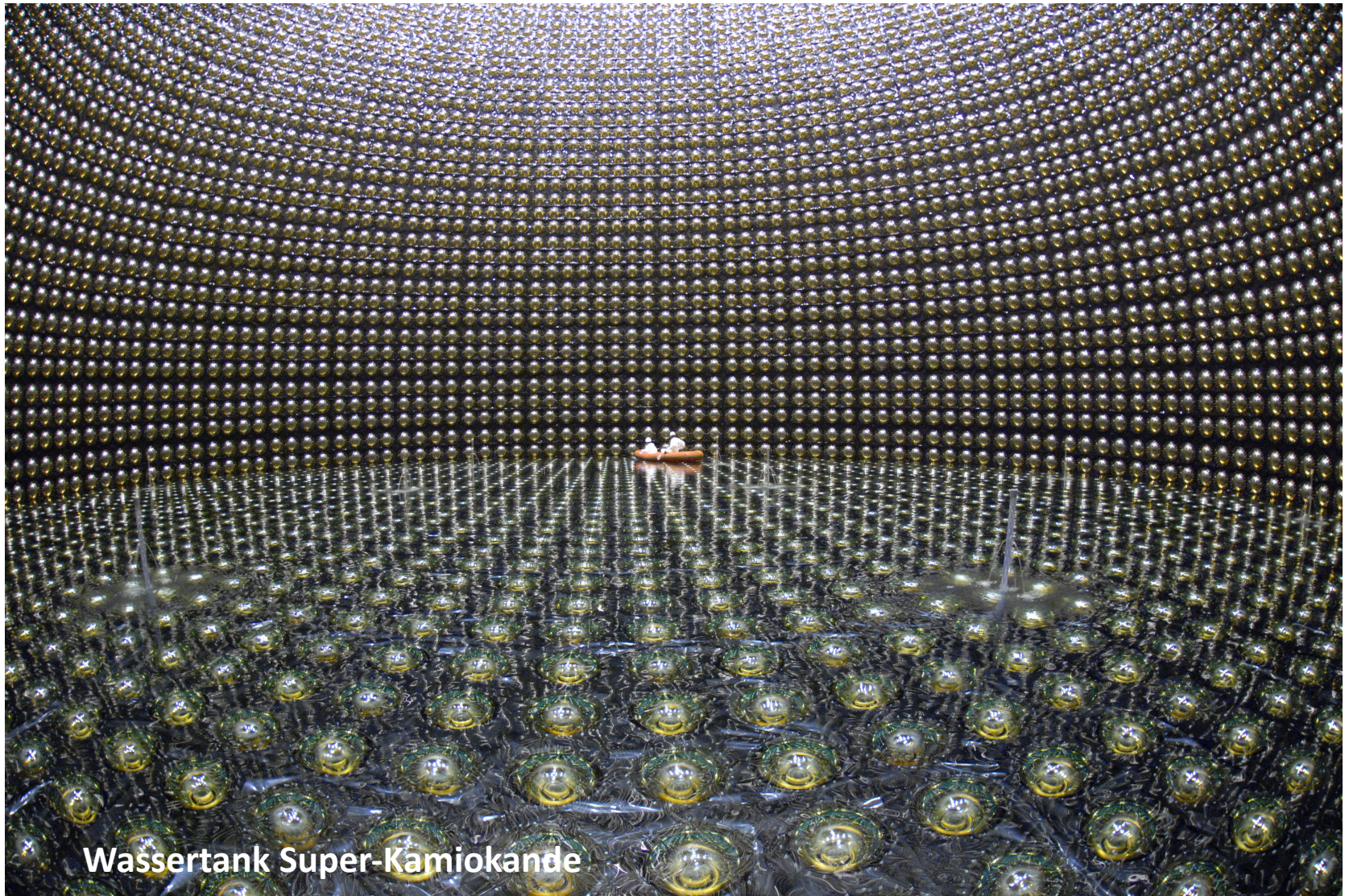
Neutrinos haben keine starke oder elektromagnetische Wechselwirkung; Nachweis ausschließlich über schwache Wechselwirkung, z.B.:



Wirkungsquerschnitt extrem klein: $\sigma_\nu \approx 6.7 E_\nu [\text{MeV}] 10^{-42} \text{cm}^2 \leftrightarrow \lambda_{\text{frei}} \sim \text{Lichtjahre}$
 $\Rightarrow$ große Detektorvolumina (kosm. Neutrinos) oder hohe Flüsse (Reaktor-Neutrinos)

Beispiele:

- $^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow ^{37}\text{Ar}^* + e^- \Rightarrow$ radio-chemischer Nachweis von $^{37}\text{Ar}^*$ (Homestake)
- $\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^- \Rightarrow$ Cerencov-Strahlung der e^- in Wasser (Super-Kamiokande)
- $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \Rightarrow$ Szintillations-Licht e^+ (Double Chooz, Daya Bay,...)



Wassertank Super-Kamiokande



- Die wichtigste Beziehung für den Energieverlust von geladenen Teilchen in Materien ist die **Bethe-Bloch Gleichung**:

$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{Z_T}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot Z_P^2$$

- Der Energieverlust nimmt mit abnehmender Teilchengeschwindigkeit zu, daraus ergibt sich die sog. **Bragg-Kurve** (Krebstherapie mit schweren Ionen).
- Für Elektronen ist zusätzlich **Bremsstrahlung** (ab krit. Energie: $\sim 10 \text{ MeV}$ in Pb) wichtig.
- Photon wechselwirken mit Materie durch **Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarbildung**:

	Energiebereich (MeV)	Energieabhängigkeit	Z-dependence
Photoeffekt	< 10	$\epsilon^{-1} - \epsilon^{-3}$	Z^5
Compton	$1 - 10$	$\exp(-\epsilon)$	Z (# Elektronen)
Paarbildung	> 1	$\log(\epsilon) - \textit{konstant}$	Z^2