



Übungsblatt 10

Ausgabe am 7.1.2015

Besprechung am 14/15.1.2015, 15:15-16:00

Kurzreferat (15 min): Kollektive Anregungen von Kernen: die Dipol-Riesenresonanz

Literatur:

[Kapitel 7.5.1](#) aus Jörn Bleck-Neuhaus – Elementare Teilchen

und zur Vertiefung

[Original-Veröffentlichung](#): BERMAN BL und SC FULTZ: Measurements of the giant dipole resonance with monoenergetic photons. Rev. Modern Phys. 47(3):713–761, 1975

Gruppe 1:

Gruppe 2: Markus Schreyöck

Gruppe 3: Timo Störzer

Gruppe 4: Tobias Winkler

Aufgabe 1: Fermigasmodell – Massendichte im Kern

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Fermionen im Fermigasmodell eine durchschnittliche kinetische Energie von

$$E_{kin} = \langle E_f \rangle = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_f^2}{2m}$$

haben, wobei p_f der Fermiimpuls ist.

Weiter wurde gezeigt, dass die Gesamtzahl der Nukleonen im Kern mit Volumen

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r_0^3 A$$

gegeben ist durch

$$N = N_Z + N_N = 2 \cdot \frac{4r_0^3 A}{9\pi \hbar^3} \cdot p_f^3 = 2 \cdot \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_f^3$$

Berechnen Sie den Gasdruck, der aus dem Fermiimpuls entsteht (Fermi-Druck) in

Abhängigkeit von der Kerndichte ρ . Wie groß ist dieser Druck (in bar) für

$$\rho_0 = 0.17 \text{ Nukleonen/fm}^3?$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Thermodynamik und benutzen sie die kalorische Zustandsgleichung. Hier ist die innere Energie die kinetische Energie der Nukleonen.

Lösung 1:

Den Druck der Nukleonen erhält man aus der Inneren Energie, U :

$$P = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_s$$

Für den Kern ist die innere Energie durch die kinetische Energie der Nukleonen gegeben, wobei sich die mittlere kinetische Energie pro Nukleon durch die mittlere Fermienergie des Nukleons ausdrücken lässt

$$E_{kin} = \langle E_f \rangle = \frac{3}{5} E_f = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_f^2}{2m}$$

Damit erhält man für die gesamte innere Energie

$$U = N \cdot E_{kin} = N \cdot \frac{3}{5} E_f$$

mit N , der Anzahl der Nukleonen.



Kern- und Teilchenphysik

WiSe 2013/14

Den Zusammenhang von E_f und V erhält man, indem man aus den Relationen für den Fermi-Impuls

$$N = N_Z + N_N = 2 \cdot \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_f^3$$

$$E_f = \frac{p_f^2}{2m}$$

zu

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \cdot \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

und

$$U = \frac{3}{5} N \cdot E_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{5}{3}} \cdot V^{-\frac{2}{3}}$$

Damit wird

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(\hbar c)^2}{2mc^2} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \rho^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{197^2}{2 \cdot 938} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \rho^{\frac{5}{3}}$$

Das ist der gewünschte Zusammenhang. Mit $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ ergibt sich

$$P = 2.6 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3} = 4.25 \cdot 10^{27} \text{ bar}$$

Oft wird der Übersichtlichkeit halber E_F wieder eingesetzt, d.h.

$$P = \frac{2}{5} \cdot \left[\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \frac{N}{V} = \frac{2}{5} \cdot E_F \cdot \rho$$

Mit dem "Literaturwert" $E_F^0 = 33 \text{ MeV}$ und $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ erhält man das (fast) gleiche Ergebnis.

Aufgabe 2: Fermigasmodel - Neutronensterne

Wir betrachten einen Neutronenstern als eine homogene Kugel bestehend aus einem Fermigas aus Neutronen mit konstanter Dichte. Berechnen Sie den Radius eines Neutronensterns mit Masse $M = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (d.h. etwa 1.5 Sonnenmassen).

Hinweis: Minimieren Sie die Summe aus mittlerer Fermienergie und mittlerer Gravitationsenergie (einer homogenen Kugel) bzgl. des Radiuses R .

Lösung 2:

Die Gesamtenergie E_{tot} des Neutronensterns setzt sich zusammen aus der Summe der gesamten mittleren kinetischen (Fermi-) und Gravitationsenergie

$$E_{tot} = N \cdot \langle E_f \rangle + E_G = N \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(3\pi^2 \cdot \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R} =$$

$$N \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{9}{4} \pi N \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R} =$$

$$AR^{-2} - BR^{-1}$$

wobei $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ eingesetzt wurde. M und m sind die Gesamtmassen des Neutronenstern bzw. die Neutronenmasse, N die Anzahl der Neutronen im Neutronenstern.

Aus



$$\frac{dE_{tot}}{dR} = 0$$

ergibt sich

$$R = 2AB^{-1} = \frac{1}{GM^2} \cdot \left(\frac{9}{4}\pi\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\hbar^2}{m} \cdot N^{\frac{5}{3}}$$

Mit $N = M/m$ und $M = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ erhält man

$$R = 10.8 \text{ km}$$

Aufgabe 3: Magnetische Momente

- a) ${}^3\text{He}$ und ${}^3\text{H}$ haben beide $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ als Quantenzahlen für den Grundzustand. Berechnen Sie das magnetische Moment für beide Kerne ($g_n^S = -3.83$; $g_p^S = 5.59$).
- b) Berechnen Sie das Mag. Dipolmoment für das Deuteron im 3S_1 -Zustand.

Lösung 3:

- a) In ${}^3\text{He}$ besetzen die zwei Protonen das $1s_{1/2}$ -Orbital und ihr Gesamtspin ist also 0. Also muss das magnetische Moment von ${}^3\text{He}$ vom ungepaarten Neutron kommen. Das dritte Nucleon sitzt aber auch in einer $1s_{1/2}$ -Schale und somit ist sein Bahndrehimpuls gleich 0 und trägt nicht zum magnetischen Moment bei. Der einzige Beitrag kommt vom Spin und dem damit verbundenen magnetischen Moment des Neutrons:

$$\mu({}^3\text{He}) = \left(\frac{1}{2}g_n^S + g_n^L \cdot 0\right) \cdot \mu_N = -1.91\mu_N$$

Das Entsprechende gilt für ${}^3\text{H}$:

$$\mu({}^3\text{H}) = \mu_p = +2.79\mu_N$$

- b) Die Nukleonen des Deuterons befinden sich im S-Zustand, d.h. es gibt keinen Bahndrehimpuls; das magnetische Moment des Deuterons berechnet sich alleine aus den Spinanteilen:

$$\mu(d) = \left(\frac{1}{2}(g_n^S + g_p^S) + g_p^L \cdot 0\right) \cdot \mu_N = 0.88\mu_N$$