



Übungsblatt 9

Ausgabe am 18.12.2014

Besprechung am 7/8.1.2015, 15:15-16:00

Kurzreferat (15 min):

Kernspinresonanz als bildgebendes Verfahren in der Medizin: wie funktioniert das (im Prinzip)?

Gruppe 1: Jonathan Funk

Gruppe 2: Silas Maisenbacher

Gruppe 3: Gela Hämmerling

Gruppe 4: Raphael Nold

Aufgabe 1: Rutherford Streuung

In der Vorlesung wurde für die Rutherfordstreuung ein Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel angegeben:

$$b(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_{kin}} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- Leiten Sie hieraus einen Näherungsausdruck für Kleinwinkelstreuung ($\theta \rightarrow 0$) ab.
- Berechnung Sie daraus den totalen Wirkungsquerschnitt für Streueignisse mit $\theta > 5^\circ$.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung von mindestens 5° , für den dass für ein Strahl von Protonen der Geschwindigkeit $v = 4 \cdot \frac{10^7 m}{s}$, der senkrecht auf ein ^{194}Pt -Target der Dicke $d = 10\mu m$ und der Dichte $\rho = 21.45 \cdot \frac{g}{cm^3}$ einfällt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Proton zweimal streut, wobei jeder Streuwinkel mindestens 5° sein soll. (Hinweis: Verwenden sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die für Ereignisse kleiner Wahrscheinlichkeit Gültigkeit hat).

Lösung 1:

- Unter Verwendung der Beziehungen

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Erhält man

$$b(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{kin}} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \frac{1}{\theta}$$

- Für $\theta = 5^\circ = 5 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$ erhält man

$$b_5 = 1.55 \cdot 10^{-13} m.$$

Alle Teilchen mit $b < b_5$ streuen nach Winkeln $\theta > 5^\circ$. Die entsprechende Kreisfläche ist πb_5^2 , d.h. der Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_5 = \pi b_5^2 = 7.55 \cdot 10^{-26} m^2$$

- Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Streueignis mit $\theta > 5^\circ$ ist gegeben durch



$$P = \frac{f_R}{I_{\text{Teilchen}}^{\text{Strahl}}} = \sigma_5 \cdot d \cdot \rho \cdot \frac{N_A}{M_A} = 5.02 \cdot 10^{-2}$$

- d) Da $P \ll 1$ kann die Wahrscheinlichkeit durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden:

$$P(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu}$$

wobei μ der Erwartungswert und n die Ereignishäufigkeit ist.

Aus

$$P(1, \mu) = \mu \cdot e^{-\mu} \approx 5.02 \cdot 10^{-2}$$

folgt $\mu \approx 0.053$ und damit für

$$P(2, 0.053) = \frac{0.053^2}{2!} e^{-0.053} = 1.3 \cdot 10^{-3}$$

Aufgabe 2: Formfaktor

Aus der Definition des Formfaktors

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{\frac{i(\vec{q} \cdot \vec{r})}{\hbar}} d^3r$$

ergibt sich für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} r^2 dr$$

dabei ist ρ auf 1 normiert: $\int_0^\infty \rho(\vec{r}) d^3r = 1$

- a) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme, dass der Formfaktor

$$F(x) = \frac{3}{x^3} \cdot (\sin(x) - x \cdot \cos(x)), \quad x = \frac{qR}{\hbar}$$

ist.

- b) Berechnen Sie $F(q = 0)$
 c) Ermitteln Sie (graphisch oder numerisch) die ersten drei positiven Nullstellen von $F(x)$

Lösung 2:

- a) Für eine homogene, auf 1 normierte Ladungsverteilung einer Kugel mit Radius R gilt:

$$\rho(r) = \begin{cases} c, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}$$

mit

$$\frac{1}{c} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Damit berechnet sich der Formfaktor zu

$$F(q) = \frac{4\pi}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr =$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{3\hbar}{qR^3} \int_{r=0}^R r \cdot \sin(qr/\hbar) dr = \\
 & \frac{3\hbar^2}{q^2R^3} \left(\left[-r \cdot \frac{\hbar}{q} \cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \right]_0^R - \int_{r=0}^R -\frac{\hbar}{q} \cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr \right) = \\
 & \frac{3\hbar^2}{q^2R^3} \left(\left[-r \cdot \cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right) + \frac{\hbar}{q} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \right]_0^R \right) = \\
 & \frac{3\hbar^2}{q^2R^3} \left(-R \cdot \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right) + \frac{\hbar}{q} \sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) \right) = \\
 & \frac{3\hbar^3}{q^3R^3} \left(-\frac{qR}{\hbar} \cdot \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right) + \sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) \right) = \\
 & \frac{3}{x^3} (-x \cdot \cos(x) + \sin(x))
 \end{aligned}$$

b) $F(q=0)$ erhält man durch die Reihenentwicklung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
 F(q=0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) = \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right] \right) &= \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) &= \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mathcal{O}(x^2)) &= 1
 \end{aligned}$$

c) Aus $F(q) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
 \sin x - x \cos x &= 0 \\
 x &= \tan x
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4.493 \\
 x_2 &= 7.725 \\
 x_3 &= 10.904
 \end{aligned}$$

und können graphisch oder numerisch (Newton-Verfahren) bestimmt werden.