



Übungsblatt 5

Ausgabe am 20.11.2014

Besprechung am 26/27.11.2014, 15:15-16:00

Kurzreferat (15 min):

Strahlenbiologische Wirkungskette in Zellen

Literatur:

Hanno Krieger, Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlungsschutzes, Abschnitt 14.2
Internet, z.B.:

<http://www.vetsuisse-bern.ch/~vet-impl/lernmodule/htmls/slide.html?radiosurfvet|radgeneral|radbio|cellularradio|2>

Gruppe 1: -

Gruppe 2: Johanna Lott

Gruppe 3: Johannes Hampp

Gruppe 4: -

Aufgabe 1: Detektoren – Silizium

Leiten Sie einen Ausdruck für der Energieauflösung (σ , FWHM und %) von Silizium als X-Ray Detektor ab. Was ist der Wert der Energieauflösung für Röntgenstrahlung von 50 keV?

Achtung: Dadurch, dass zunächst die gesamte, feste Energie des Photons auf die Elektron-Loch Paare übertragen wird, kann die Anzahl der Paare nicht „frei“ fluktuieren, d.h. ist kein Poissonverteilung. Dies wird durch den sog. Fano-Faktor berücksichtigt. Nehmen Sie an, dass das stat. Gewicht der Elektron-Loch-Paare um den Faktor $F = 0.1$ reduziert wird

Lösung 1:

Die Anzahl der e-h Paare, die in Silizium von einem absorbierten Photon der Energie E_γ erzeugt werden ist $n_{e-h} = (E_\gamma [eV]) / 3.6$, wobei $\epsilon = 3.62 eV$ die mittlere Energie ist, die für ein Elektron-Loch Paar aufgewendet werden muss.

Wären die e-h Paare Poisson-verteilt, wäre der RMS-Verteilung der Paare wie $\sigma = \sqrt{n_{e-h}}$. Wird der Fano-Faktor berücksichtigt, gilt

$$\sigma = \sqrt{F n_{e-h}}.$$

Dadurch ergibt sich für die relative Auflösung

$$\text{Rel. Auflösung [\%]} = 100 \cdot \frac{\sqrt{F n_{e-h}}}{n_{e-h}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{F}{n_{e-h}}}$$

Der Umrechnungsfaktor zwischen σ und FWHM (full width half maximum) ist 2.35, d.h.

$$\text{Rel. Auflösung FWHM [\%]} = 235 \cdot \frac{\sqrt{F n_{e-h}}}{n_{e-h}} = 235 \cdot \sqrt{\frac{F}{n_{e-h}}}$$

Als numerischen Wert für 50 keV erhält man



$$\text{Rel. Auflösung FWHH[\%]} = 235 \cdot \sqrt{\frac{F}{n_{e-h}}} = \sqrt{0.1 \cdot \frac{3.62}{50000}} = 0.63 \%$$

Aufgabe 2: Natürliche Radioaktivität

a) Schätzen Sie Gesamtmasse und -anzahl von ^{40}K unter der Annahme einer homogen Verteilung in der Erdkruste ab.

b) Wieviel ^{40}Ar wird pro Jahr durch den Zerfall von ^{40}K erzeugt?

Nehmen sie dafür an: Kalium ist in der Erdkruste (Dicke 10 km, $\rho = \frac{2.6\text{g}}{\text{cm}^3}$) mit einem Gewichtsanteil von 2.6% enthalten, die atomare Häufigkeit von ^{40}K ist 0.0117%. Der ^{40}K -Zerfall geht zu 89,28 % in ^{40}Ca und 10,72 % zu ^{40}Ar . Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ von ^{40}K ist $1.248 \cdot 10^9\text{y}$.

Lösung 2:

a) Die Gesamtmasse von ^{40}K in der Erdkruste berechnet sich nach

$$m(^{40}\text{K}) = \rho V_c \epsilon_m \epsilon_a$$

wobei ϵ_m und ϵ_a Gewichtsanteil bzw. atomare Häufigkeit von ^{40}K sind.

Das Volumen der Erdkruste V_c berechnet sich wie folgt:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3) = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - (r_1 - d)^3) \approx 4\pi r_1^2 d$$

wobei in der Näherung wg. $d \ll r_1$ die Terme mit $d^n, n > 1$ weggelassen wurden.

Mit $r_1 = 6371$ ergibt sich

$$V_c = 4\pi \cdot 6371^2 \cdot 10 = 5.1 \cdot 10^9 \text{ km}^3$$

$$\rho V_c = 1.33 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$m(^{40}\text{K}) = 4,03 \cdot 10^{16} \text{ kg}$$

$$N(^{40}\text{K}) \approx 4,03 \cdot \frac{10^{16}}{40u} \approx \frac{10^{15}}{1.66 \cdot 10^{-27}} \approx 6 \cdot 10^{41}$$

b) Die Masse von Argon durch den Zerfall von ^{40}K berechnet sich durch

$$m(^{40}\text{Ar}) \approx f \cdot m(^{40}\text{K}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Für $t = 1 \text{ y}$, $\tau = 1.248 \cdot \frac{10^9}{\ln(2)} = 1.81 \cdot 10^9 \text{ y}$ und $f = 0.1072$ ergibt sich

$$m(^{40}\text{Ar}) = 2.24 \cdot 10^8 \text{ kg}$$

Aufgabe 3: Radioaktivität

a) Die Zerfallsgleichungen für eine Zerfallskette $A \rightarrow B \rightarrow C$ sind

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A$$

$$\frac{dN_B}{dt} = +\lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

Lösen Sie die Differentialgleichung für $N_B(t)$.

Hinweis: Multiplizieren Sie die zweite Gleichung mit $e^{\lambda_B t}$ und ordnen Sie die Terme so um, dass Sie integrieren können. Setzen Sie dafür die Lösung der ersten Gleichung ein.

b) Zur Zeit $t = 0$ seien N_{A_0} radioaktive Kerne A vorhanden, die mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 10 \text{ d}$ in Kerne B zerfallen, deren Halbwertszeit 5 d beträgt.



Kern- und Teilchenphysik

WiSe 2014/15

Wie groß sind $N_A(t)$ und $N_B(t)$ nach einem Tag, nach zehn Tagen und nach 100 Tagen, wenn $N_B(0) = 0$ ist?

c) Wie lange dauert es, bis von 1 kg Tritium ${}^3_1\text{H}$ nur noch 1 g übrig ist?

Lösung:

a) Das System der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A \\ \frac{dN_B}{dt} &= +\lambda_A N_A - \lambda_B N_B\end{aligned}$$

durch Multiplikation der Gleichung dN_B/dt mit $e^{\lambda_B t}$ und Umsortierung der Terme:

$$\frac{dN_B}{dt} \cdot e^{\lambda_B t} = +\lambda_A \cdot e^{\lambda_B t} \cdot N_A - \lambda_B \cdot e^{\lambda_B t} \cdot N_B$$

zusammen mit der Lösung von $\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A$

$$N_A = N_A(0)e^{-\lambda_A t}$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(N_B e^{\lambda_B t}) = \lambda_A N_A(0) e^{(\lambda_B - \lambda_A)t}$$

durch Integration erhält man

$$\begin{aligned}N_B e^{\lambda_B t} &= \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} + C \\ N_B(t) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) e^{-\lambda_A t} + C e^{-\lambda_B t}\end{aligned}$$

b) Aus der Bedingung $N_B(0) = 0$ erhält man die Integrationskonstante C

$$C = -\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0)$$

d.h. man hat die Gleichung

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

die Zerfallskonstanten für die Kern A und B ergeben sich aus den Halbwertszeiten

$T_{1/2}^A = 10d$ bzw. $T_{1/2}^B = 5d$ zu

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \frac{\ln(2)}{10d} = 0.069/d \\ \lambda_B &= \frac{\ln(2)}{5d} = 0.139/d\end{aligned}$$

damit ergeben sich als Lösungen

$$\begin{aligned}N_A(1d) &= N_A(0) e^{-0.069} = 0.933 \cdot N_A(0) \\ N_A(10d) &= N_A(0) e^{-0.69} = 0.5 \cdot N_A(0) \\ N_A(100d) &= N_A(0) e^{-6.9} = 0.001 \cdot N_A(0)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}N_B(1d) &= \frac{0.069}{0.139 - 0.069} N_A(0) \cdot (e^{-0.069} - e^{-0.139}) = 0.069 \cdot N_A(0) \\ N_B(10d) &= \frac{0.069}{0.139 - 0.069} N_A(0) \cdot (e^{-0.69} - e^{-1.39}) = 0.25 \cdot N_A(0)\end{aligned}$$



Kern- und Teilchenphysik

WiSe 2014/15

$$N_B(100d) = \frac{0.069}{0.139 - 0.069} N_A(0) \cdot (e^{-6.9} - e^{-13.9}) = 0.001 \cdot N_A(0)$$

c) Es gilt das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) = -\frac{t_{1/2}}{\ln(2)} \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) = -\frac{t_{1/2}}{\ln(2)} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

Mit $t_{1/2} = 12.32 \text{ y}$ und $\frac{m(t)}{m_0} = 10^{-3}$ ergibt sich

$$t = 122.8 \text{ y}$$