



Übungsblatt 3

Ausgabe am 6.11.2014

Besprechung am 12/13.11.2014, 15:15-16:00

Kurzreferat (15 min):

Beschleuniger der nächsten Generation:

Was ist und wie funktioniert eine Laser- (oder Plasmabeschleuniger)?

siehe dazu (und weiterführende Links):

de.wikipedia.org/wiki/Kielfeld-Beschleuniger

en.wikipedia.org/wiki/Plasma_acceleration

Gruppe 1: Marc Habiger

Gruppe 2: Valentin Henken-Mellies

Gruppe 3: Lukas Jordan

Gruppe 4: -

Aufgabe 1: Synchrotron

Ein Elektron, ein Proton und ein α -Teilchen werden jeweils auf kinetische Energien von $E_{kin} = 1 \text{ MeV}$ oder 100 GeV beschleunigt. Sie haben Dipolmagnete zur Verfügung, die ein Magnetfeld von $B = 1 \text{ Tesla}$ erzeugen können. Wie groß sind die Radien der Synchrotronringe um die Teilchen bei diesen beiden Energien auf einer festen Bahn zu halten?

Lösung 1:

Der Zusammenhang zwischen Ringradius und Teilchenimpuls ist gegeben durch

$$p[\text{GeV}] = 0.3B[T]\rho[\text{m}]Z$$

Der Impuls ergibt sich aus

$$E = T + m$$

und

$$E^2 = p^2 + m^2$$

zu

$$p = \sqrt{T^2 + 2Tm}$$

Daraus ergibt sich für den Ringradius die Beziehung

$$\rho = \frac{\sqrt{T^2 + 2Tm}}{0.3BZ}$$

Damit ergibt sich

Teilchen	Energie [GeV]	Masse [GeV]	Ladung	Radius ρ [m]
Elektron	0.001	0.511×10^{-3}	1	4.74×10^{-3}
Elektron	100	0.511×10^{-3}	1	333.3
Proton	0.001	0.938	1	0.145
Proton	100	0.938	1	336.4
α -Teilchen	0.001	3.727	2	0.144
α -Teilchen	100	3.727	2	172.8



Kern- und Teilchenphysik

WiSe 2013/14

Aufgabe 2: Betatron

In einem Betatron sollen Elektronen innerhalb 10ms auf eine kinetische Energie von 1MeV beschleunigt werden. Sie starten mit der Energie $E_{kin} = 0\text{ MeV}$. Wie groß muss der maximale magnetische Fluss Φ_m am Ende der Beschleunigungszeit sein und wie groß ist dann das Magnetfeld am Elektronenring mit Radius $r_0 = 1\text{m}$?

Lösung 2:

Im Betatron wird ein inhomogenes magnetisches Wechselfeld $B(r, t)$ generiert. Das B-feld auf dem stabilen Orbit ist mit Impuls verbunden:

$$p = 0.3 B(r_0)[T]r_0[m]Z$$

Das mag. Feld am Elektronenorbit ($Z = 1$) ist damit

$$B(r_0) = \frac{p}{0.3r_0} = \frac{\sqrt{T^2 + 2Tm}}{0.3r_0} = 4.7 \times 10^{-3}\text{T}$$

Der mag. Fluss ist gegeben durch

$$\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$$

Das mittlere Feld ergibt sich aus der Betatronbedingung für den stabilen Orbit:

$$\frac{1}{2} \langle B \rangle = B(r_0)$$

d.h.

$$\Phi = \langle B \rangle \pi r_0^2 = 2B(r_0) \pi r_0^2 = 2.98 \times 10^{-2}\text{Vs}$$

Aufgabe 3: Energieverlust und Bethe-Bloch Beziehung

Die Bethe-Bloch-Gleichung beschreibt den Energieverlust schwerer Teilchen auf ihrem Weg durch Materie. Vernachlässigt man die Dichte- und Schalenkorrektur, ist sie gegeben durch (vergl. PDG):

$$-\frac{dE}{dx} = K \cdot n \cdot 1/\beta^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 (\gamma\beta)^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

mit

$$K = 0.3071 \left[\frac{\text{MeV cm}^2}{\text{mol}} \right]$$

$$n = \rho \cdot \frac{Z}{A} \left[\frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} \right]$$

- a) Vergleichen Sie den Energieverlust von Elektronen, Pionen, Kaonen und Protonen der selben kinetischen Energie von 2GeV beim Durchdringen eines Aluminiumabsorbers von 1cm Dicke.

$$(m_e = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}, m_\pi = 139.57 \frac{\text{MeV}}{c^2}, m_K = 493.68 \frac{\text{MeV}}{c^2}, A_{Al} = 26.98 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, Z_{Al} = 13, \rho = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, I = 16 \cdot Z^{0.9} \text{ eV})$$

- b) Vergleichen Sie den Energieverlust von nichtrelativistischen Pionen, Kaonen, Protonen, Deuteronen ($m_d \approx 2m_p$) und α -Teilchen ($m_\alpha \approx 4m_p$) der selben kinetischen Energie (z. B. 10MeV).

Lösung 3:

a)



Kern- und Teilchenphysik

WiSe 2013/14

Bevor man die Bethe-Bloch Beziehung anwendet, muss man die kinematischen Variablen als Funktion der kinetischen Energie und Masse eines Teilchens ausdrücken.

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{T + m}{m}$$

und

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{T + m}\right)^2}$$

Damit ergibt sich für dE/dx als Funktion der kinetischen Energie folgender Ausdruck (für Teilchen mit $z > 1$) muss der Faktor z^2 mit berücksichtigt werden:

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \cdot K \cdot n \cdot \frac{(T + m)^2}{T^2 + 2Tm} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2}{I} \cdot \frac{T^2 + 2Tm}{m^2} \right) - \frac{T^2 + 2Tm}{(T + m)^2} \right]$$

Für die Berechnung braucht man das Ionisationspotenzial und die Elektronendichte:

$$I = 16 \cdot Z^{0.9} \text{ eV}$$

$$n = \rho \cdot \frac{Z}{A}$$

Hier ist Z die Kernladungszahl des Materials (nicht des Teilchens). Damit ergibt sich:

$$-\Delta E = \Delta x \cdot z^2 \cdot K \cdot n \cdot \frac{(T + m)^2}{T^2 + 2Tm} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2}{I} \cdot \frac{T^2 + 2Tm}{m^2} \right) - \frac{T^2 + 2Tm}{(T + m)^2} \right]$$

Diese Formel gilt für alle Teilchen mit Masse $M \gg m$, und führt demnach zu einem ungenauen Ergebnis für Elektronen. Der Grund liegt in der Näherung, die für die maximale Übertragbare Energie in einem Stoß auf ein Elektron T_{max} gemacht wurde. Außerdem verlieren die Elektronen die Energie durch Bremsstrahlung.

Damit ergibt sich für Teilchen der kin. Energie $T = 2 \text{ GeV}$:

Teilchen	β^2	$\beta^2 \gamma^2$	$\Delta E [\text{MeV}]$
e	1	$1.53 \cdot 10^7$	9.70 !!
π	0.995	234	5.30
K	0.960	24.51	4.57
p	0.898	8.81	4.46

NB:

Für niederenergetische Teilchen ($T = 10 \text{ MeV}$) sähe die Tabelle wie folgt aus:

Teilchen	β^2	$\beta^2 \gamma^2$	$\Delta E [\text{MeV}]$
π	0.129	0.148	20.75
K	0.039	0.041	56.06
p	0.021	0.021	93.09
d	0.011	0.011	158.77
α	0.0053	0.0053	1053.06

b)

Mit Hilfe von der Bethe-Bloch-Formel kann man auch die nichtrelativistischen Energieverluste berechnen. Für nicht-relativistischen Teilchen gilt:



$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{z^2}{v^2}$$

wobei z und v die Ladung und die Geschwindigkeit des Teilchens sind.

Die kinetische Energie wird in diesem Fall ($v \ll c$) nach der Formel $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ berechnet.

Bei gleichen kinetischen Energien unterschiedlicher Teilchen gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

Damit gilt

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \sim \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

Das bedeutet, dass, bei gleicher kinetischer Energie, schwerere Teilchen höheren Energieverlust hat. Dabei ist der Energieverlust proportional zum Quadrat der Ladungszahl. Siehe dazu obige Tabelle.
