

Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen

Deutsche Fassung ENV 13005 : 1999

Vornorm

DIN V
ENV 13005

ICS 17.020

Guide to the expression of uncertainty in measurement;
 German version ENV 13005 : 1999
 Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure;
 Version allemande ENV 13005 : 1999

Eine Vornorm ist das Ergebnis einer Normungsarbeit, das wegen bestimmter Vorbehalte zum Inhalt oder wegen des gegenüber einer Norm abweichenden Aufstellungsverfahrens vom DIN noch nicht als Norm herausgegeben wird. Zur vorliegenden Vornorm ist kein Entwurf veröffentlicht worden.

Nationales Vorwort

Diese Vornorm enthält die deutsche Übersetzung des „Guide to the expression of uncertainty in measurement (ISBN 92-67-10188-9)“.

Der 1993 bei der ISO erschienene und 1995 mit einem Korrekturblatt versehene „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ wurde auf Initiative des CEN/TC 290 „Geometrische Produktspezifikationen und -prüfung“ ins Erstumfrageverfahren (PQ) genommen. Nach Annahme als Europäische Vornorm wird er nunmehr auch als Deutsche Vornorm übernommen. Dieser „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ ist jedoch bereits 1995 auch in deutsch als „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ beim Beuth Verlag erschienen (ISBN 3-410-13405-0). Die vorliegende Vornorm ist mit Ausnahme der Paginierung identisch mit dem genannten „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“. Anwender, die bereits im Besitz jenes Leitfadens sind, können ihn problemlos weiter benutzen.

Der zuständige nationale Arbeitsausschuß ist der NATG-A.73 (früher AEF 73) „Meßtechnik“.

Fortsetzung 109 Seiten ENV

Normenausschuß Technische Grundlagen (NATG) – Einheiten und Formelgrößen –
 im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (DKE)

Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN

– Leerseite –

Nur für die Normungsarbeit

Deutsche Fassung

**Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit
beim Messen**

Diese Europäische Vornorm (ENV) wurde von CEN am 17. Juni 1998 als eine künftige Norm zur vorläufigen Anwendung angenommen.

Die Gültigkeitsdauer dieser ENV ist zunächst auf drei Jahre begrenzt. Nach zwei Jahren werden die Mitglieder des CEN gebeten, ihre Stellungnahmen abzugeben, insbesondere über die Frage, ob die ENV in eine Europäische Norm umgewandelt werden kann.

Die CEN-Mitglieder sind verpflichtet, das Vorhandensein dieser ENV in der gleichen Weise wie bei einer EN anzukündigen und die ENV auf nationaler Ebene unverzüglich in geeigneter Weise verfügbar zu machen. Es ist zulässig, entgegenstehende nationale Normen bis zur Entscheidung über eine mögliche Umwandlung der ENV in eine EN (parallel zur ENV) beizubehalten.

CEN-Mitglieder sind die nationalen Normungsinstitute von Belgien, Dänemark, Deutschland, Finnland, Frankreich, Griechenland, Irland, Island, Italien, Luxemburg, Niederlande, Norwegen, Österreich, Portugal, Schweden, Schweiz, Spanien, der Tschechischen Republik und dem Vereinigten Königreich.



EUROPÄISCHES KOMITEE FÜR NORMUNG
European Committee for Standardization
Comité Européen de Normalisation

Zentralsekretariat: rue de Stassart 36, B-1050 Brüssel

Inhalt

	Seite
Vorwort	4
0 Einleitung	5
1 Anwendungsbereich	7
2 Definitionen	8
2.1 Allgemeine metrologische Begriffe	8
2.2 Der Begriff "Meßunsicherheit"	8
2.3 Spezielle Begriffe des vorliegenden <i>Leitfadens</i>	9
3 Grundbegriffe	10
3.1 Messung	10
3.2 Meßabweichungen, Einflüsse und Korrekturen	11
3.3 Unsicherheit	11
3.4 Praktische Überlegungen	13
4 Ermittlung der Standardunsicherheit	15
4.1 Formulierung des Modells der Messung	15
4.2 Ermittlungsmethode A der Standard- unsicherheit	16
4.3 Ermittlungsmethode B der Standard- unsicherheit	18
4.4 Graphische Darstellung der Berech- nung der Standardunsicherheit	21
5 Ermittlung der kombinierten Standard- unsicherheit	25
5.1 Unkorrelierte Eingangsgrößen	25
5.2 Korrelierte Eingangsgrößen	27
6 Ermittlung der erweiterten Unsicherheit	29
6.1 Einleitung	29
6.2 Erweiterte Unsicherheit	29
6.3 Wahl eines Erweiterungsfaktors	30
7 Protokollieren der Unsicherheit	31
7.1 Allgemeine Anleitung	31
7.2 Spezielle Anleitung	31
8 Zusammenfassung des Verfahrens zur Ermittlung und Angabe der Unsicherheit	34

Anhänge

A Empfehlungen der Arbeitsgruppen und des CIPM	35
A.1 Empfehlung INC-1 (1980)	35
A.2 Empfehlung 1 (CI-1981)	36
A.3 Empfehlung 1 (CI-1986)	36
B Allgemeine metrologische Begriffe	37
B.1 Quelle für die Definitionen	37
B.2 Definitionen	37
C Grundbegriffe und Benennungen der Statistik	42
C.1 Quelle für die Definitionen	42
C.2 Definitionen	42
C.3 Ausführliche Erläuterung von Begriffen und Benennungen	45
D "Wahrer" Wert, Meßabweichung und Unsicherheit	48
D.1 Die Meßgröße	48
D.2 Die realisierte Größe	48
D.3 "Wahrer" Wert und richtiger Wert	48
D.4 Meßabweichung	49
D.5 Unsicherheit	49
D.6 Graphische Darstellung	50
E Motiv und Grundlage für die Empfehlung INC-1 (1980)	53
E.1 "Sicher", "zufällig" und "systematisch"	53
E.2 Rechtfertigung für realistische Unsicherheitsberechnungen	53
E.3 Rechtfertigung für die Gleichbehand- lung aller Unsicherheitskomponenten ..	54
E.4 Standardabweichungen als Maße der Unsicherheit	56
E.5 Vergleich zweier Unsicherheits- auffassungen	58

	Seite		Seite
F Praktische Anleitung zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten	59	H Beispiele	76
F.1 Aus mehrmaligen Beobachtungen ermittelte Komponenten: Ermittlungsmethode A der Standardunsicherheit ...	59	H.1 Endmaß-Kalibrierung	76
F.2 Auf andere Weise ermittelte Komponenten: Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit	62	H.2 Gleichzeitige Wirk- und Blindwiderstandsmessung	81
G Freiheitsgrade und Grade des Vertrauens	68	H.3 Kalibrierung eines Thermometers	85
G.1 Einführung	68	H.4 Aktivitätsmessung	88
G.2 Zentraler Grenzwertsatz	69	H.5 Varianzanalyse	92
G.3 Die <i>t</i> -Verteilung und Freiheitsgrade	70	H.6 Messungen auf einer Referenzskale: Härte	97
G.4 Effektive Freiheitsgrade	70	J Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen ...	100
G.5 Weitere Überlegungen	72	K Literaturverzeichnis	104
G.6 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	73	Stichwortverzeichnis	106

Nur für die Normungsdienst

Vorwort

Diese Europäische Vornorm wurde vom Technischen Komitee CEN/TC 290 „Geometrische Produktspezifikationen und -prüfung“ erarbeitet, dessen Sekretariat vom DIN gehalten wird.

Diese Europäische Vornorm enthält vollinhaltlich den „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (GUM)“, der in der ISO Technical Advisory Group ISO/TAG 4 unter Mitwirkung von Fachleuten von BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML ausgearbeitet und von der ISO veröffentlicht wurde.

Entsprechend der CEN/CENELEC-Geschäftsordnung sind die nationalen Normungsinstitute der folgenden Länder gehalten, diese Europäische Vornorm anzukündigen:

Belgien, Dänemark, Deutschland, Finnland, Frankreich, Griechenland, Irland, Island, Italien, Luxemburg, Niederlande, Norwegen, Österreich, Portugal, Schweden, Schweiz, Spanien, die Tschechische Republik und das Vereinigte Königreich.

Die beteiligten internationalen Organisationen haben eine Veröffentlichung als Internationale Norm nicht für zweckmäßig erachtet. ISO und IEC haben diesen Leitfaden jedoch als zu beachtende Technische Regel in die ISO/IEC Directives Part 3 aufgenommen. Die Technischen Komitees von ISO und IEC müssen diesen Leitfaden bei der Ermittlung von Meßunsicherheiten zugrunde legen.

Angesichts des Mangels an einer internationalen Übereinkunft über die Angabe der Unsicherheit im Meßwesen erteilte das Internationale Komitee für Maß und Gewicht (Comité International des Poids et Mesures; CIPM) als höchste Instanz in der Metrologie, dem Internationalen Büro für Maß und Gewicht (Bureau International des Poids et Mesures; BIPM) 1977 den Auftrag, das Problem gemeinsam mit den nationalen metrologischen Instituten aufzugreifen und eine Empfehlung zu erarbeiten.

Das BIPM erstellte einen detaillierten Fragebogen zu den damit im Zusammenhang stehenden Fragen und übersandte ihn an 32 nationale metrologische Institute, die bekanntermaßen an diesem Thema interessiert waren (sowie an fünf internationale Organisationen zur Kenntnisnahme). Bis Anfang 1979 hatten 21 Institute geantwortet [1]¹. Nahezu alle hielten es für wichtig, ein international anerkanntes Verfahren zur Angabe der Meßunsicherheit und zur Kombination von individuellen Unsicherheitskomponenten zu einer einzigen Gesamtunsicherheit zu haben. Eine einheitliche Meinung hinsichtlich der hierfür zu benutzenden Methode war jedoch nicht ersichtlich. Das BIPM berief hierauf eine Zusammenkunft ein, an der Experten aus 11 nationalen metrologischen Instituten teilnahmen, um zu einem einheitlichen und allgemein akzeptablen Verfahren für die Angabe der Meßunsicherheit zu gelangen. Diese Arbeitsgruppe zur Angabe von Meßunsicherheiten entwickelte die Empfehlung INC-1 (1980) "Angabe von experimentellen Unsicherheiten" [2]. Das CIPM genehmigte die Empfehlung 1981 [3] und bestätigte sie 1986 [4].

Mit der Aufgabe einen detaillierten Leitfaden auf der Grundlage der Empfehlung der Arbeitsgruppe zu erarbeiten (die eher einen kurzen Abriß als eine detaillierte Vorschrift darstellt), beauftragte das CIPM die Internationale Organisation für Normung (ISO), da diese die Erfordernisse, die aus den breiten Interessen von Industrie und Handel erwachsen, besser vertreten kann.

Die Verantwortung wurde der Technischen Beratergruppe "Metrologie" (TAG 4) der ISO zugewiesen, da es zu deren Aufgaben gehört, die Entwicklung von Richtlinien über Fragen des Meßwesens zu koordinieren, die im gemeinsamen Interesse der ISO und der sechs mit der ISO an der TAG 4 beteiligten Organisationen liegen. Diese Organisationen sind: die Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC), Partner der ISO bei der weltweiten Normung; das CIPM und die Internationale Organisation für gesetzliches Meßwesen (OIML), die beiden Weltorganisationen für das Meßwesen; die Internationale Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC) und die Internationale Organisation für reine und angewandte Physik (IUPAP), die beiden internationalen Organisationen, die die Fachgebiete Chemie und Physik vertreten; und die Internationale Föderation für klinische Chemie (IFCC).

TAG 4 bildete ihrerseits die Arbeitsgruppe 3 (ISO/TAG 4/WG 3), die sich aus vom BIPM, der IEC, der ISO und der OIML benannten und vom Vorsitzenden der TAG 4 berufenen Experten zusammensetzt. Die Aufgabenstellung für diese Arbeitsgruppe lautete:

Entwicklung eines Leitfadens auf der Grundlage der Empfehlung der BIPM-Arbeitsgruppe zur Angabe von Meßunsicherheiten, der Regeln für die Angabe der Meßunsicherheit im Bereich der Normung, Kalibrierung, Akkreditierung von Laboratorien und metrologischer Dienste bereitstellt;

Zweck eines solchen Leitfadens ist es,

- vollständig darüber zu informieren, wie man zu Unsicherheitsangaben kommt;
- eine Grundlage für den internationalen Vergleich von Meßergebnissen zu liefern.

1) Siehe die Literaturhinweise ab Seite 98f.

0 Einleitung

0.1 Wenn das Ergebnis der Messung einer physikalischen Größe vorgelegt wird, muß auch eine quantitative Angabe zur Qualität des Ergebnisses erfolgen, damit der Benutzer dessen Zuverlässigkeit beurteilen kann. Ohne eine solche Angabe lassen sich Meßergebnisse weder miteinander noch mit Referenzwerten vergleichen, die in einer Spezifikation oder Norm vorgegeben sind. Daher wird ein einfach handhabbares, leicht verständliches und allgemein anerkanntes Verfahren zur Charakterisierung der Qualität eines Meßergebnisses, das heißt zur Ermittlung und zur Angabe seiner *Meßunsicherheit*, benötigt.

0.2 Der Begriff der *Meßunsicherheit* als quantifizierbare Eigenschaft ist relativ neu in der Geschichte des Meßwesens, obwohl *Meßabweichung* und *Fehlerrechnung* schon lange zur meßkundlichen oder metrologischen Praxis gehören. Es ist heute allgemein anerkannt, daß selbst dann, wenn alle bekannten oder vermuteten Komponenten der Meßabweichung ermittelt und die entsprechenden Korrekturen angebracht werden, eine Unsicherheit bezüglich der Richtigkeit eines angegebenen Ergebnisses verbleibt, das heißt ein Zweifel darüber, wie gut das Meßergebnis den Wert der gemessenen Größe ausdrückt.

0.3 In dem Maße, wie der nahezu weltweite Gebrauch des Internationalen Einheitensystems (SI) alle wissenschaftlichen und technischen Messungen vereinheitlicht hat, würde eine weltweite Übereinkunft über die Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit erlauben, die Bedeutung eines breiten Spektrums von Meßergebnissen in der Wissenschaft, Technik und Industrie, im Handel und in Vorschriften leicht zu verstehen und richtig zu interpretieren. Im Zeitalter des Weltmarktes ist es dringend geboten, die Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit weltweit einheitlich zu gestalten, so daß in verschiedenen Ländern vorgenommene Messungen leicht miteinander verglichen werden können.

0.4 Die ideale Methode zur Ermittlung und Angabe der Unsicherheit eines Meßergebnisses sollte wie folgt beschaffen sein:

- *universell*: Die Methode muß auf alle Arten von Messungen und alle Typen von Eingabedaten anwendbar sein, die bei Messungen verwendet werden.

Die eigentliche Größe, um die Meßunsicherheit anzugeben, sollte wie folgt beschaffen sein:

- *in sich konsistent*: Sie muß sich direkt aus den zu ihr beitragenden Komponenten herleiten lassen und unabhängig von der Gruppierung dieser Komponenten und ihrer Zerlegung in Unterkomponenten sein.
- *übertragbar*: Es muß möglich sein, die für ein Meßergebnis ermittelte Meßunsicherheit direkt als Komponente zur Ermittlung der Meßunsicherheit bei einer anderen Messung zu verwenden, bei der das erste Ergebnis verwendet wird.

Weiterhin ist es bei vielen Anwendungen in Industrie und Handel sowie in den Bereichen Gesundheit und Sicherheit oft erforderlich, einen Bereich um das Meßergebnis anzugeben, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfaßt, die der gemessenen Größe vernünftigerweise zugeordnet werden können. Somit sollte die ideale Methode zur Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit in der Lage sein, einen solchen Bereich zu liefern, insbesondere einen Bereich, dessen Überdeckungswahrscheinlichkeit oder Vertrauensniveau auf realistische Weise dem geforderten entspricht.

0.5 Das Vorgehen in diesem Leitfaden beruht auf dem Ansatz in der Empfehlung INC-1 (1980) [2] der Arbeitsgruppe zur Angabe von Unsicherheiten, die auf Veranlassung der CIPM vom BIPM einberufen wurde (siehe Vorwort). Dieser Ansatz, dessen Berechtigung in Anhang E diskutiert wird, erfüllt alle oben aufgestellten Forderungen. Für die meisten anderen derzeit verwendeten Methoden trifft dies nicht zu. Die Empfehlung INC-1 wurde vom CIPM in dessen eigenen Empfehlungen 1 (CI-1981) [3] und 1 (CI-1986) [4] genehmigt bzw. bestätigt; im Anhang A sind diese CIPM-Empfehlungen

in deutscher Übersetzung wiedergegeben (siehe A.2 bzw. A.3). Da die Empfehlung INC-1 die Grundlage für das vorliegende Dokument bildet, sind ihre deutsche Übersetzung im Abschnitt 0.7 und ihr verbindlicher französischer Wortlaut im Anhang A.1 angeführt.

0.6 Das in diesem Leitfaden dargestellte Verfahren zur Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit wird in Kapitel 8 kurz zusammengefaßt. Eine Reihe von detaillierten Beispielen wird in Anhang H angeführt. Die übrigen Anhänge behandeln die folgenden Themen: Grundbegriffe der Metrologie (Anhang B); Grundbegriffe der Statistik (Anhang C); "wahrer" Wert, Meßabweichung und Meßunsicherheit (Anhang D); praktische Vorschläge für die Ermittlung von Unsicherheitskomponenten (Anhang F); Freiheitsgrade und Vertrauensniveaus (Anhang G); die im Dokument hauptsächlich verwendeten mathematischen Zeichen (Anhang J) und Literaturhinweise (Anhang K). Ein alphabetisches Stichwortverzeichnis beschließt das Dokument.

0.7 Empfehlung INC-1 (1980) Angabe experimenteller Unsicherheiten

1. Die Unsicherheit eines Meßergebnisses setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen, die sich nach der Art, in der ihr Zahlenwert geschätzt wird, in zwei Kategorien einteilen lassen:

A. Komponenten, die mit statistischen Methoden berechnet werden,

B. Komponenten, die auf andere Weise ermittelt werden.

Es besteht nicht immer eine einfache Entsprechung zwischen der Zuordnung zu den Kategorien A oder B und der zuvor verwendeten Klassifizierung nach "statistischen" und "systematischen" Meßunsicherheiten. Die Benennung "systematische Meßunsicherheit" kann zu Mißverständnissen führen und sollte vermieden werden.

Jede detaillierte Angabe der Unsicherheit muß aus einer vollständigen Liste der Komponenten bestehen, wobei für jede Komponente die Methode anzugeben ist, mit der man ihren Zahlenwert erhält.

2. Die Komponenten in Kategorie A werden durch geschätzte Varianzen s_i^2 (oder "geschätzte Standardabweichungen" s_i) und die Anzahl v_i der Freiheitsgrade gekennzeichnet. Wenn erforderlich, sind auch Kovarianzen anzugeben.

3. Die Komponenten in Kategorie B sind durch Größen u_i^2 zu charakterisieren, die als Näherungen der entsprechenden Varianzen angesehen werden können, deren Existenz vorausgesetzt wird. Die Größen u_i^2 können wie Varianzen und die Größen u_i wie Standardabweichungen behandelt werden. Wenn erforderlich, sind die Kovarianzen auf die entsprechende Weise zu behandeln.

4. Die kombinierte Meßunsicherheit sollte durch den Zahlenwert gekennzeichnet werden, den man mit der üblichen Methode zur Kombination von Varianzen erhält. Die kombinierte Meßunsicherheit und ihre Komponenten sollten in der Form von "Standardabweichungen" ausgedrückt werden.

5. Wenn es bei besonderen Anwendungen erforderlich ist, die kombinierte Meßunsicherheit mit einem Faktor zu multiplizieren, um eine Gesamtunsicherheit zu erhalten, so ist der Multiplikationsfaktor stets anzugeben.

1 Anwendungsbereich

1.1 - Der vorliegende *Leitfaden* stellt allgemeine Regeln zur Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit bereit, die auf verschiedenen Genauigkeitsniveaus in vielen Bereichen - von der Werkstatt bis zur Grundlagenforschung - befolgt werden können. Daher sollen die in diesem *Leitfaden* enthaltenen Prinzipien auf ein breites Spektrum von Messungen anwendbar sein, einschließlich solchen, die erforderlich sind:

- zur Qualitätsprüfung und Qualitätssicherung in der Produktion;
- zur Einhaltung und Durchsetzung von Gesetzen und Vorschriften;
- bei Forschungsarbeiten im Bereich der Grundlagenforschung, der angewandten Forschung und Entwicklung, in Wissenschaft und Technik;
- zur Kalibrierung von Normalen und Meßgeräten und zur Durchführung von Prüfungen im Rahmen eines nationalen Kalibrierdienstes, um die Rückverfolgbarkeit auf nationale Normale zu ermöglichen;
- zur Entwicklung, zum Bewahren und zum Vergleich internationaler und nationaler physikalischer Bezugsnormale einschließlich Referenzmaterialien.

1.2 Der vorliegende *Leitfaden* beschäftigt sich in erster Linie mit der Angabe der Unsicherheit bei der Messung einer wohldefinierten physikalischen Größe - der Meßgröße -, die durch einen im wesentlichen eindeutigen Wert charakterisiert werden kann. Wenn das interessierende Phänomen sich nur als Werteverteilung darstellen läßt oder von einem oder mehreren Parametern, wie zum Beispiel der Zeit, abhängig ist, dann entsprechen die zu seiner Beschreibung erforderlichen Meßgrößen der Menge von Größen, die diese Verteilung oder Abhängigkeit beschreiben.

1.3 Der vorliegende *Leitfaden* gilt auch für die Ermittlung und Angabe der Unsicherheit, die mit dem begrifflichen Ansatz und der theoretischen Analyse von Experimenten, Meßmethoden und komplexen Komponenten und Systemen verbunden ist. Da ein Meßergebnis und seine Unsicherheit rein theoretisch sein und nur auf hypothetischen Daten beruhen können, ist die in diesem *Leitfaden* verwendete Benennung "Meßergebnis" in diesem größeren Zusammenhang zu interpretieren.

1.4 Der vorliegende *Leitfaden* stellt allgemeine Regeln zur Ermittlung und Angabe der Meßunsicherheit bereit und gibt keine technikbezogenen Anweisungen. Es wird auch nicht diskutiert, wie die Unsicherheit eines bestimmten Meßergebnisses, nachdem sie einmal ermittelt wurde, für verschiedene Zwecke verwendet werden kann, zum Beispiel für Schlußfolgerungen über die Vereinbarkeit dieses Ergebnisses mit anderen ähnlichen Ergebnissen, zum Aufstellen von Toleranzgrenzen für einen Herstellungsprozeß oder für die Entscheidung darüber, ob eine bestimmte Handlungsrichtung sicher eingeschlagen werden kann. Es kann sich daher als notwendig erweisen, auf der Grundlage des vorliegenden *Leitfadens* weitere Normen zu entwickeln, die sich mit den speziellen Problemen bestimmter Bereiche des Messens oder den verschiedenen Anwendungen quantitativer Angaben der Unsicherheit befassen. Bei diesen Normen kann es sich um vereinfachte Fassungen des vorliegenden *Leitfadens* handeln. Sie müssen jedoch in ihrer Darstellung so genau sein, wie dies für den Grad der Genauigkeit und Komplexität der behandelten Messungen und Anwendungen angemessen ist.

ANMERKUNG: Es kann Situationen geben, in denen der Begriff der Meßunsicherheit nicht im vollen Umfang anwendbar erscheint, zum Beispiel wenn die Präzision eines Prüfverfahrens ermittelt wird (siehe z.B. Literaturangabe [5]).

2 Definitionen

2.1 Allgemeine metrologische Begriffe

Die Definitionen für eine Reihe von allgemeinen, für den vorliegenden *Leitfaden* relevanten Begriffen des Meßwesens, zum Beispiel "meßbare Größe", "Meßgröße" und "Meßabweichung" werden in Anhang B wiedergegeben. Diese Definitionen wurden dem *Internationalen Wörterbuch der Metrologie* (*International vocabulary of basic and general terms in metrology*; Abk. VIM) [6] entnommen. Anhang C enthält außerdem die Definitionen einer Reihe von Grundbegriffen der Statistik, die hauptsächlich der Internationalen Norm ISO 3534-1 [7] entstammen. Beginnend mit Abschnitt 3 erscheint im nachfolgenden Text jede dieser metrologischen und statistischen Benennungen (oder eine eng mit ihnen zusammenhängende Benennung) bei ihrer ersten Verwendung im Fettdruck, wobei die Nummer des Unterabschnitts, in dem die Definition steht, in Klammern angegeben ist.

Wegen ihrer Bedeutung für den vorliegenden *Leitfaden* wird die Definition des allgemeinen metrologischen Begriffs "Meßunsicherheit" sowohl in Anhang B als auch in Unterabschnitt 2.2.3 angegeben. Die für den vorliegenden *Leitfaden* wichtigsten Begriffe werden in den Unterabschnitten 2.3.1 bis 2.3.6 definiert. In all diesen Unterabschnitten und in den Anhängen B und C bedeutet das Einklammern bestimmter Wörter bei Benennungen, daß diese weggelassen werden können, wenn es unwahrscheinlich ist, daß es dadurch zu Unklarheiten kommt.

2.2 Der Begriff "Meßunsicherheit"

Der Begriff der Meßunsicherheit wird weiterführend in Abschnitt 3 und in Anhang D diskutiert.

2.2.1 Das Wort "Unsicherheit" bedeutet Zweifel, womit "Meßunsicherheit" im weitesten Sinne Zweifel an der Gültigkeit des Ergebnisses einer Messung bedeutet. Wegen des Fehlens verschiedener Wörter für diesen *allgemeinen Begriff* der Meßunsicherheit und die speziellen Größen, die, wie zum Beispiel die Standardabweichung,

quantitative Maße für diesen Begriff liefern, muß das Wort "Unsicherheit" in diesen beiden verschiedenen Bedeutungen verwendet werden.

2.2.2 Wenn es ohne Adjektive gebraucht wird, bezieht sich das Wort "Unsicherheit" im vorliegenden *Leitfaden* sowohl auf den allgemeinen Begriff als auch auf eine oder alle quantitativen Maße für diesen Begriff. Wenn ein bestimmtes Maß gemeint ist, werden entsprechende Adjektive verwendet.

2.2.3 Die offizielle Definition des Begriffs "Meßunsicherheit", die für die Verwendung in diesem *Leitfaden* und in der aktuellen Ausgabe des VIM [6] (Nr 3.9) entwickelt wurde, lautet:

(Meß)unsicherheit

Dem Meßergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftigerweise der Meßgröße zugeordnet werden könnte

ANMERKUNGEN

1 Der Parameter kann beispielsweise eine Standardabweichung (oder ein gegebenes Vielfaches davon), oder die halbe Weite eines Bereiches sein, der ein festgelegtes Vertrauensniveau hat.

2 Meßunsicherheit enthält im allgemeinen viele Komponenten. Einige dieser Komponenten können aus der statistischen Verteilung der Ergebnisse einer Meßreihe ermittelt und durch empirische Standardabweichungen gekennzeichnet werden. Die anderen Komponenten, die ebenfalls durch Standardabweichungen charakterisiert werden können, werden aus angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermittelt, die sich auf Erfahrung oder andere Information gründen.

3 Es wird vorausgesetzt, daß das Meßergebnis der beste Schätzwert für den Wert der Meßgröße ist, und daß alle Komponenten der Unsicherheit zur Streuung beitragen, eingeschlossen diejenigen, welche von systematischen Einwirkungen herrühren, z.B. solche, die von Korrekturen und Bezugsnormen stammen.

2.2.4 Bei der im Unterabschnitt 2.2.3 gegebenen Definition der Meßunsicherheit handelt es sich um eine operative Definition, die sich auf das Meßergebnis und dessen ermittelte Unsicherheit konzentriert. Sie steht jedoch nicht im Widerspruch zu anderen Begriffen der Meßunsicherheit, wie zum Beispiel:

- Maß für die mögliche Meßabweichung des Schätzwertes der Meßgröße, der als Meßergebnis ermittelt wurde;
- Schätzwert zur Kennzeichnung eines Wertebereiches, innerhalb dessen der wahre Wert der Meßgröße liegt (VIM, 1. Auflage, 1984, Nr 3.09).

Wenngleich diese beiden traditionellen Begriffe als Idealvorstellungen gültig sind, konzentrieren sie sich auf *nicht erfaßbare* Größen: die "Meßabweichung" des Meßergebnisses beziehungsweise den "wahren Wert" der Meßgröße (im Gegensatz zu deren Schätzwert). Welcher *Begriff* der Unsicherheit auch immer zugrundegelegt wird, eine Unsicherheitskomponente wird doch stets aus den gleichen Daten und zugehörigen Informationen *ermittelt*. (Siehe auch E.5)

2.3 Spezielle Begriffe des vorliegenden Leitfadens

Im allgemeinen werden die speziellen Begriffe des vorliegenden *Leitfadens* bei ihrem ersten Auftreten im Text definiert. Zum leichteren Auffinden sind die Definitionen der wichtigsten Begriffe jedoch hier aufgeführt.

ANMERKUNG: Eine weiterführende Diskussion dieser Begriffe ist an folgenden Stellen zu finden: zu 2.3.2 siehe 3.3.3 und 4.2; zu 2.3.3 siehe 3.3.3 und 4.3; zu 2.3.4 siehe Abschnitt 5 und die Gleichungen (10) und (13); zu 2.3.5 und 2.3.6 siehe Abschnitt 6.

2.3.1 Standardunsicherheit

Als Standardabweichung ausgedrückte Unsicherheit des Ergebnisses einer Messung

2.3.2 Ermittlungsmethode A (der Meßunsicherheit)

Methode zur Berechnung der Meßunsicherheit durch statistische Analyse von Reihen von Beobachtungen

2.3.3 Ermittlungsmethode B (der Meßunsicherheit)

Methode zur Berechnung der Meßunsicherheit mit anderen Mitteln als der statistischen Analyse von Reihen von Beobachtungen

2.3.4 kombinierte Standardunsicherheit

Standardunsicherheit eines Meßergebnisses, wenn dieses Ergebnis aus den Werten einer Anzahl anderer Größen gewonnen wird. Sie ist gleich der positiven Quadratwurzel einer Summe von Gliedern, wobei die Glieder Varianzen oder Kovarianzen dieser anderen Größen sind, gewichtet danach, wie das Meßergebnis mit Änderungen dieser Größen variiert.

2.3.5 erweiterte Meßunsicherheit

Kennwert, der einen Bereich um das Meßergebnis kennzeichnet, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfaßt, die der Meßgröße vernünftigerweise zugeordnet werden könnten.

ANMERKUNGEN

1 Der Anteil kann als Überdeckungswahrscheinlichkeit oder Vertrauensniveau des Bereiches angesehen werden.

2 Um dem durch die erweiterte Meßunsicherheit gekennzeichneten Bereich ein spezielles Vertrauensniveau zuzuordnen, sind explizite oder implizite Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung erforderlich, die durch das Meßergebnis und die kombinierte Standardunsicherheit charakterisiert wird. Das Vertrauensniveau, das diesem Bereich zugeordnet werden kann, kann nur in dem Maße bekannt sein, wie solche Annahmen gerechtfertigt sind.

3 Die erweiterte Meßunsicherheit wird in Abschnitt 5 der Empfehlung INC-1 (1980) *Gesamtunsicherheit* genannt.

2.3.6 Erweiterungsfaktor

Zahlenfaktor, mit dem die kombinierte Standardunsicherheit multipliziert wird, um eine erweiterte Meßunsicherheit zu erhalten

ANMERKUNG: Ein Erweiterungsfaktor k liegt typisch im Bereich 2 bis 3.

3 Grundbegriffe

Eine weiterführende Diskussion der Grundbegriffe befindet sich in Anhang D, der sich auf die Auffassungen des "wahren" Wertes, der Meßabweichung und der Meßunsicherheit konzentriert und graphische Darstellungen dieser Begriffe enthält, sowie in Anhang E, der die Motivation und die statistische Basis für die Empfehlung INC-1 (1980) untersucht, auf der dieser *Leitfaden* beruht. Anhang J ist ein Verzeichnis der wesentlichen mathematischen Zeichen, die im vorliegenden *Leitfaden* verwendet werden.

3.1 Messung

3.1.1 Ziel einer **Messung** (B.2.5) ist die Ermittlung des **Wertes** (B.2.2) der **Meßgröße** (B.2.9), das heißt, des Wertes der **speziellen Größe** (B.2.1., Anmerkung 1), die es zu messen gilt. Eine Messung beginnt daher mit einer geeigneten Spezifizierung der Meßgröße, der **Meßmethode** (B.2.7) und des **Meßverfahrens** (B.2.8).

ANMERKUNG: "Wahrer Wert" (siehe Anhang D) wird im vorliegenden *Leitfaden* aus den in D.3.5 angegebenen Gründen nicht verwendet; "Wert einer Meßgröße" (oder einer Größe) und "wahrer Wert einer Meßgröße" (oder einer Größe) werden als gleichwertig betrachtet.

3.1.2 Im allgemeinen ist das **Meßergebnis** (B.2.11) lediglich eine Näherung oder ein **Schätzwert** (C.2.26) des Wertes der Meßgröße und somit nur dann vollständig, wenn es von einer Angabe der **Meßunsicherheit** (B.2.18) dieses Schätzwertes begleitet wird.

3.1.3 In der Praxis wird die geforderte Spezifizierung oder Definition der Meßgröße von der geforderten **Meßgenauigkeit** (B.2.14) diktiert. Die Meßgröße muß mit ausreichender Vollständigkeit in bezug auf die geforderte Genauigkeit festgelegt werden, so daß ihr Wert für alle mit der Messung verbundenen praktischen Zwecke eindeutig ist. Im vorliegenden *Leitfaden* wird der Ausdruck "Wert der Meßgröße" in diesem Sinne verwendet.

BEISPIEL: Wenn die Länge eines nominell 1 m langen Stahlstabes auf Mikrometer ermittelt werden soll, so muß

ihre Spezifizierung die Temperatur und den Druck einschließen, unter denen die Länge gemessen wird. Somit muß die Meßgröße zum Beispiel als Länge des Stabes bei 25,00 °C und 101 325 Pa (plus weitere als notwendig erscheinende Definitionsparameter wie z.B. die Art der Auflagerung des Stahlstabes) festgelegt werden. Wenn die Länge jedoch nur auf Millimeter ermittelt werden soll, würde ihre Spezifizierung keine Festlegung der Temperatur, des Druckes oder eines Wertes für einen weiteren Definitionsparameter erfordern.

ANMERKUNG: Eine unvollständige Definition der Meßgröße kann zu einer so großen Unsicherheitskomponente führen, daß diese in die Berechnung der Unsicherheit des Meßergebnisses einbezogen werden muß (siehe D.1.1, D.3.4 und D.6.2).

3.1.4 In vielen Fällen wird das Ergebnis einer Messung auf der Grundlage von Reihen von Beobachtungen ermittelt, die unter **Wiederholbedingungen** (B.2.15, Anmerkung 1) ausgeführt wurden.

3.1.5 Es wird angenommen, daß Schwankungen bei mehrmaligen Beobachtungen dadurch entstehen, daß **Einflußgrößen**, die das Meßergebnis beeinflussen können, nicht völlig konstant gehalten werden.

3.1.6 Das mathematische Modell der Messungen, das die Menge der Werte bei mehrmaligen Beobachtungen in das Meßergebnis umwandelt, ist von entscheidender Bedeutung, da es zusätzlich zu den Beobachtungen normalerweise Einflußgrößen enthält, die nur ungenau bekannt sind. Dieser Kenntnismangel trägt zur Unsicherheit des Meßergebnisses ebenso bei wie die Schwankungen bei den mehrmaligen Beobachtungen und Unsicherheiten, die im mathematischen Modell selbst liegen.

3.1.7 Der vorliegende *Leitfaden* behandelt die Meßgröße als Skalar (eine einzelne Größe). Eine Erweiterung auf eine Menge zusammengehöriger Meßgrößen, die gleichzeitig während derselben Messung ermittelt werden, erfordert die Ersetzung der skalaren Meßgröße und ihrer **Varianz** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) durch eine vektorielle Meßgröße und **Kovarianzmatrix** (C.3.5). Eine solche Er-

setzung wird im vorliegenden *Leitfaden* nur in den Beispielen betrachtet (siehe H.2, H.3 und H.4).

3.2 Meßabweichungen, Einflüsse und Korrekturen

3.2.1 Eine Messung ist im allgemeinen mit Unvollkommenheiten verbunden, die eine **Meßabweichung** (B.2.19) im Meßergebnis hervorrufen. Eine Meßabweichung hat nach traditioneller Auffassung zwei Komponenten: eine **zufällige** (B.2.21) Komponente und eine **systematische** (B.2.22) Komponente.

ANMERKUNG: Meßabweichung ist ein Idealbegriff; Meßabweichungen können nicht genau bekannt sein.

3.2.2 Eine zufällige Meßabweichung kann durch nicht vorhersagbare oder zufällige zeitliche und räumliche Veränderungen von Einflußgrößen auftreten. Die Einflüsse solcher Veränderungen, im folgenden *zufällige Einflüsse* genannt, rufen Variationen bei mehrmaligen Beobachtungen der Meßgröße hervor. Obwohl es nicht möglich ist, die zufällige Meßabweichung eines Meßergebnisses ganz auszugleichen, läßt sie sich normalerweise durch Vergrößerung der Anzahl der Beobachtungen verringern; ihr Erwartungswert (C.2.9, C.3.1) ist Null.

ANMERKUNGEN:

1 Die empirische Standardabweichung eines arithmetischen Mittels oder Durchschnitts einer Reihe von Beobachtungen (siehe 4.2.3) ist *nicht* die zufällige Meßabweichung des Mittels, obwohl sie in einigen Publikationen so genannt wird. Sie ist statt dessen ein Maß für die *Unsicherheit* des Mittels aufgrund von zufälligen Einflüssen. Der genaue Wert der aus diesen Einflüssen hervorgehenden Meßabweichung kann nicht bekannt sein.

2 Im vorliegenden *Leitfaden* werden die Benennungen "Meßabweichung" und "Unsicherheit" sorgfältig unterschieden. Sie sind keine Synonyme, sondern stehen für völlig verschiedene Begriffe. Daher sollten sie weder miteinander verwechselt noch falsch gebraucht werden.

3.2.3 Die systematische Abweichung kann wie die zufällige Abweichung zwar ebenfalls nicht beseitigt, aber oft verringert werden. Wenn eine systematische Abweichung von der bekannten Wirkung einer Einflußgröße auf ein Meßergebnis herrührt, die nachfolgend *systematischer Einfluß* genannt wird, läßt sich dieser Einfluß quantifizieren, und es kann, wenn er in bezug auf die geforderte Genauigkeit der Messung signifikant ist, eine **Korrektur** (B.2.23) oder ein **Korrektionsfaktor** (B.2.24) angewendet werden, um den Einfluß auszugleichen. Es wird angenommen, daß der Erwartungswert einer durch einen systematischen Einfluß hervorgerufenen Meßabweichung nach Anbringen der Korrektur Null ist.

ANMERKUNG: Die Unsicherheit einer auf ein Meßergebnis angewandten Korrektur zur Berichtigung eines systematischen Einflusses ist *nicht* die durch den Einfluß bedingte systematische Abweichung des Meßergebnisses, oft auch Bias genannt, wenngleich sie manchmal so benannt wird. Sie ist statt dessen ein Maß für die *Unsicherheit* des Ergebnisses aufgrund von unvollständiger Kenntnis des erforderlichen Wertes der Korrektur. Die Abweichung, die nach einer unvollkommenen Berichtigung des systematischen Einflusses verbleibt, kann nicht genau bekannt sein. Die Benennungen "Meßabweichung" und "Unsicherheit" müssen richtig verwendet und sorgfältig voneinander unterschieden werden.

3.2.4 Es wird angenommen, daß das Ergebnis einer Messung hinsichtlich aller erkannten signifikanten systematischen Einflüsse korrigiert wurde, und daß alle Anstrengungen unternommen wurden, um solche Einflüsse zu erkennen.

BEISPIEL: Eine Korrektur hinsichtlich der endlichen Impedanz eines Spannungsmeßgerätes zur Messung des Spannungsabfalls (Meßgröße) an einem hochohmigen Widerstand wird angewandt, um den systematischen Einfluß auf das Meßergebnis zu verringern, der sich aus der Belastung des Spannungsmeßgerätes ergibt. Jedoch sind die Impedanzwerte von Spannungsmeßgerät und Widerstand, die zur Schätzung des Wertes der Korrektur verwendet und aus anderen Messungen gewonnen werden, selbst unsicher. Diese Unsicherheiten werden zur Berechnung der Unsicherheitskomponente aus der Ermittlung des Spannungsabfalls verwendet, die aus der Korrektur und damit aus dem systematischen Einfluß aufgrund der endlichen Impedanz des Spannungsmeßgerätes erwächst.

ANMERKUNGEN:

1 Meßgeräte und Meßeinrichtungen werden häufig mit Hilfe von Normalen und Referenzmaterialien justiert oder kalibriert, um die systematischen Einflüsse zu eliminieren; jedoch müssen die mit diesen Normalen und Referenzmaterialien verbundenen Meßunsicherheiten immer mitberücksichtigt werden.

2 Der Fall, in dem eine Korrektur eines bekannten signifikanten systematischen Einflusses nicht angebracht wird, wird in der Anmerkung zu 6.3.1 und in F.2.4.5 diskutiert.

3.3 Unsicherheit

3.3.1 Die Unsicherheit eines Meßergebnisses spiegelt die unzureichende Kenntnis des Wertes der Meßgröße wider (siehe 2.2). Das Meßergebnis ist nach angefügter Korrektur hinsichtlich der erkannten systematischen Einflüsse immer noch nur ein *Schätzwert* der Meßgröße infolge der Unsicherheit, die sich aus zufälligen Einflüssen und unvollkommener Berichtigung des Ergebnisses hinsichtlich systematischen Einflüssen ergibt.

ANMERKUNG: Das Meßergebnis kann (nach Anbringen der Korrektur), ohne daß dies bekannt ist, dem Wert der Meßgröße sehr nahekommen (und damit eine vernachlässigbare Meßabweichung aufweisen), aber dennoch eine große Meßunsicherheit haben. Daher sollte die Unsicherheit eines Meßergebnisses nicht mit der verbleibenden unbekannten Meßabweichung verwechselt werden.

3.3.2 In der Praxis gibt es viele mögliche Quellen für die Meßunsicherheit, zum Beispiel:

- a) unvollständige Definition der Meßgröße;
- b) unvollkommene Realisierung der Definition der Meßgröße;
- c) nichtrepräsentative Probenahme: die gemessene Probe stellt möglicherweise nicht die definierte Meßgröße dar;
- d) unzureichende Kenntnis der Einflüsse von Umweltbedingungen auf die Messung oder unvollkommene Messung der Umweltbedingungen;
- e) personell bedingte systematische Abweichungen beim Ablesen analoger Meßgeräte;
- f) endliche Auflösung oder Ansprechschwelle des Meßgeräts;
- g) ungenaue Werte von Normalen und Referenzmaterialien;
- h) ungenaue Werte von Konstanten und anderen Parametern, die aus anderen Quellen bezogen und beim Datenreduktionsalgorithmus verwendet werden;
- i) in der Meßmethode und dem Meßverfahren enthaltene Näherungen und Annahmen
- j) Variationen bei mehrmaligen Beobachtungen der Meßgröße unter scheinbar identischen Bedingungen.

Diese Quellen sind nicht unbedingt voneinander unabhängig; einige der Quellen a) bis i) können zu Quelle j) beitragen. Ein unerkannter systematischer Einfluß kann bei der Ermittlung der Unsicherheit eines Meßergebnisses nicht berücksichtigt werden, trägt jedoch zu dessen Meßabweichung bei.

3.3.3 Die Empfehlung INC-1 (1980) der Arbeitsgruppe zur Angabe von Unsicherheiten teilt die Unsicherheitskomponenten nach der Methode ihrer Ermittlung in zwei Kategorien "A" und "B" ein (siehe 0.7, 2.3.2 und 2.3.3). Diese Kategorien gelten für die *Unsicherheit* und sind kein Ersatz für die Wörter "zufällig" und "systematisch". Die Unsicherheit einer Korrektur hinsichtlich eines bekannten systematischen Einflusses kann man - genau wie die Unsicherheit, die einen zufälligen Einfluß kennzeichnet - in manchen Fällen durch eine Berechnung vom Typ A und in anderen Fällen durch eine Berechnung vom Typ B erhalten.

ANMERKUNG: In manchen Publikationen werden Unsicherheitskomponenten als "zufällig" und als

"systematisch" kategorisiert und jeweils Abweichungen zugeordnet, die entweder durch zufällige oder durch bekannte systematische Einflüsse entstehen. Eine solche Kategorisierung von Unsicherheitskomponenten kann sich bei allgemeiner Anwendung als mehrdeutig erweisen. So kann zum Beispiel eine "zufällige" Unsicherheitskomponente bei einer Messung zu einer "systematischen" Unsicherheitskomponente bei einer anderen Messung werden, bei der das Ergebnis der ersten Messung als Eingangswert verwendet wird. Durch eine Kategorisierung der *Methoden* zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten statt der *Komponenten* selbst wird eine solche Mehrdeutigkeit vermieden. Gleichzeitig schließt dies nicht aus, daß einzelne Komponenten, die mit Hilfe der beiden Methoden ermittelt wurden, für einen besonderen Zweck in bestimmten Gruppen zusammengefaßt werden (siehe 3.4.3).

3.3.4 Der Zweck der Klassifizierung nach Typ A und Typ B besteht in der Angabe der beiden verschiedenen Arten zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten und dient lediglich zur Erleichterung der Diskussion; mit der Klassifizierung soll nicht angedeutet werden, daß es irgendeinen Wesensunterschied zwischen den nach den beiden Methoden ermittelten Komponenten gibt. Beide Methoden beruhen auf **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** (C.2.3), die mit beiden ermittelten Unsicherheitskomponenten durch Varianzen oder Standardabweichungen quantitativ bestimmt.

3.3.5 Die geschätzte Varianz u^2 , die eine durch Ermittlungsmethode A erhaltene Unsicherheitskomponente charakterisiert, errechnet sich aus einer Reihe von mehrmaligen Beobachtungen und ist die bekannte statistisch geschätzte Varianz s^2 (siehe 4.2). Die geschätzte **Standardabweichung** (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u , die positive Quadratwurzel von u^2 , ist somit $u = s$ und wird manchmal kurz **Standardunsicherheit vom Typ A** genannt. Für eine durch Ermittlungsmethode B erhaltene Unsicherheitskomponente wird die geschätzte Varianz u^2 mit Hilfe verfügbarer Kenntnis (siehe 4.3) gewonnen. Die geschätzte Standardabweichung u wird manchmal **Standardunsicherheit vom Typ B** genannt.

Somit erhält man eine Standardunsicherheit vom Typ A aus einer **Wahrscheinlichkeitsdichte** (C.2.5), die von einer beobachteten **Häufigkeitsverteilung** (C.2.18) abgeleitet ist, während man eine Standardunsicherheit vom Typ B aus einer angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichte erhält, die auf dem Überzeugtheitsgrad beruht, daß ein Ereignis eintritt [häufig subjektive **Wahrscheinlichkeit** (C.2.1) genannt]. Beide Ansätze bedienen sich anerkannter Interpretationen der Wahrscheinlichkeit.

ANMERKUNG: Eine Berechnung einer Unsicherheitskomponente vom Typ B beruht gewöhnlich auf einer Zusammenfassung von relativ zuverlässigen Informationen (siehe 4.3.1).

3.3.6 Die Standardunsicherheit eines Meßergebnisses heißt *kombinierte Standardunsicherheit* und wird mit u_c bezeichnet, wenn das Ergebnis aus den Werten einer Reihe von anderen Größen gewonnen wurde. Dabei handelt es sich um den Schätzwert der dem Ergebnis zugeordneten Standardabweichung. Er ist gleich der positiven Quadratwurzel der kombinierten Varianz aus allen der Varianz- und Kovarianzkomponenten (C.3.4) unabhängig von deren Ermittlung und wird nach dem im vorliegenden *Leitfaden* Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (siehe Abschnitt 5) genannten Gesetz gewonnen.

3.3.7 Um den Bedürfnissen von Industrie und Handel sowie den Anforderungen der Einsatzgebiete Gesundheit und Sicherheit zu entsprechen, wird eine *erweiterte Unsicherheit* U durch Multiplizieren der kombinierten Standardunsicherheit u_c mit einem *Erweiterungsfaktor* k errechnet. Zweck von U ist es, einen Bereich um das Meßergebnis anzugeben, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Werteverteilung umfaßt, die der Meßgröße vernünftigerweise zugeordnet werden kann. Die Wahl des Faktors k , der gewöhnlich zwischen 2 und 3 liegt, beruht auf der für den Bereich geforderten Überdeckungswahrscheinlichkeit oder dem Grad des Vertrauens (siehe Abschnitt 6).

ANMERKUNG: Der Erweiterungsfaktor k ist stets anzugeben, so daß die Standardunsicherheit der Meßgröße zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit anderer Meßergebnisse, die von dieser Größe abhängen können, erneut ermittelt werden kann.

3.4 Praktische Überlegungen

3.4.1 Wenn alle Größen, von denen ein Meßergebnis abhängt, variiert werden, läßt sich seine Unsicherheit mit statistischen Mitteln berechnen. Da dies jedoch in der Praxis wegen begrenzter Zeit und Mittel selten möglich ist, wird die Meßunsicherheit gewöhnlich mit einem mathematischen Modell der Messung und dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz berechnet. Demnach wird in dem vorliegenden *Leitfaden* implizit von der Annahme ausgegangen, daß eine Messung bis zu dem Grad mathematisch modelliert werden kann, wie dies aufgrund der geforderten Meßgenauigkeit erforderlich ist.

3.4.2 Da das mathematische Modell unvollständig sein kann, müssen alle relevanten Größen im größtmöglichen Maße variiert werden, so daß die Ermittlung der Unsicherheit so weit wie möglich auf beobachteten Daten beruht. Wo es möglich ist, sind für eine zuverlässige Berechnung der Meßunsicherheit empirische Modelle der Messung, die auf langfristigen quantitativen Daten beruhen, und Prüfnormale sowie Kontrollkarten zu verwenden, die anzeigen, ob eine Messung statistisch beherrscht wird. Das mathematische Modell muß stets überprüft werden, wenn die beobachteten Daten oder die Ergebnisse

von unabhängigen Messungen derselben Meßgröße erweisen, daß das Modell unvollständig ist. Ein gut angelegtes Experiment kann die zuverlässige Berechnung der Unsicherheit sehr erleichtern und ist eine wesentliche Voraussetzung für anspruchsvolles Messen.

3.4.3 Um zu entscheiden, ob eine Meßeinrichtung richtig funktioniert, wird die anhand der beobachteten empirischen Standardabweichung ermittelte Streuung ihrer Ausgangswerte häufig mit der vorausgesagten Standardabweichung verglichen, die aus der Kombination der verschiedenen, die Messung charakterisierenden Unsicherheitskomponenten hervorgeht. In solchen Fällen dürfen nur jene (nach Ermittlungsmethode A oder B berechneten) Komponenten berücksichtigt werden, die zu der empirisch beobachteten Streuung dieser Ausgangswerte beitragen könnten.

ANMERKUNG: Eine solche Analyse wird durch die Aufteilung der Komponenten in solche, die zur Streuung beitragen, und solche, die dies nicht tun, in zwei getrennte und entsprechend bezeichnete Gruppen erleichtert.

3.4.4 In einigen Fällen braucht die Unsicherheit einer Korrektur hinsichtlich systematischer Einflüsse nicht in die Ermittlung der Unsicherheit eines Meßergebnisses einbezogen zu werden. Obwohl die Unsicherheit ermittelt wurde, kann sie unberücksichtigt bleiben, wenn ihr Beitrag zur kombinierten Standardunsicherheit der Messung unerheblich ist. Wenn der Wert der Korrektur selbst unbedeutend für die kombinierte Standardunsicherheit ist, darf er ebenfalls unberücksichtigt bleiben.

3.4.5 In der Praxis, speziell im Bereich des gesetzlichen Meßwesens, kommt es häufig vor, daß ein Gerät durch den Vergleich mit einem Normal geprüft wird, und daß die mit dem Normal und dem Vergleichsverfahren verbundenen Unsicherheiten angesichts der geforderten Prüfgenauigkeit vernachlässigbar sind. Ein Beispiel ist die Verwendung eines Satzes von wohlkalibrierten Massennormalen zum Prüfen der Genauigkeit einer Handelswaage. In solchen Fällen, in denen die Unsicherheitskomponenten klein genug sind, um vernachlässigt werden zu dürfen, kann die Messung als Ermittlung der Meßabweichung des geprüften Geräts angesehen werden. (Siehe auch F.2.4.2).

3.4.6 Der von einem Meßergebnis gelieferte Schätzwert einer Meßgröße wird zuweilen als Vielfaches des übernommenen Wertes eines Normals statt in der entsprechenden Einheit des Internationalen Einheitensystems (SI) angegeben. In solchen Fällen kann die Größenordnung der dem Meßergebnis zuzuordnenden Unsicherheit deutlich kleiner sein als bei der Angabe des Ergebnisses in der entsprechenden SI-Einheit. (Tatsächlich ist die Meßgröße hier als Quotient des Wertes der zu messenden

Größe zum übernommenen Wert des Normals neu definiert worden.)

BEISPIEL: Ein hochwertiges Zener-Spannungsnormal wird durch Vergleich mit einem Josephson-Effekt-Spannungsnormal kalibriert, das auf dem Wert der Josephson-Konstante beruht, der vom CIPM für die internationale Verwendung empfohlen wird. Die relative kombinierte Standardunsicherheit $u_c(V_S)/V_S$ (siehe 5.1.6) der kalibrierten elektrischen Spannung V_S des Zener-Normals beträgt 2×10^{-8} , wenn V_S als Vielfaches des vereinbarten Wertes angegeben wird, $u_c(V_S)/V_S$ beträgt jedoch 4×10^{-7} , wenn V_S als Vielfaches der SI-Einheit für die elektrische Spannung, das Volt (V), angegeben wird, was an der zusätzlichen Unsicherheit liegt, die mit dem SI-Wert der Josephson-Konstante verbunden ist.

3.4.7 Falsches Registrieren oder Analysieren von Daten kann eine beträchtliche unbekannte Abweichung des

Meßergebnisses zu Folge haben. Schwere Bearbeitungsfehler lassen sich gewöhnlich durch eine geeignete Überprüfung der Daten erkennen; leichte Fehler könnten durch zufällige Variationen verdeckt sein oder als solche erscheinen. Maße der Unsicherheit sind nicht dafür gedacht, solche Fehler zu berücksichtigen.

3.4.8 Obwohl der vorliegende *Leitfaden* den Rahmen für die Bewertung der Unsicherheit setzt, kann er kritisches Denken, intellektuelle Redlichkeit und berufliches Können nicht ersetzen. Die Ermittlung der Unsicherheit ist weder eine Routineaufgabe noch eine einfache mathematische Aufgabe, sondern bedarf detaillierter Kenntnisse über das Wesen der Meßgröße und der Messung. Die Qualität und Brauchbarkeit der für ein Meßergebnis angegebenen Unsicherheit hängen daher letztendlich vom Verständnis, der kritischen Analyse und der Integrität aller ab, die dazu beitragen, ihr einen Wert zuzuweisen.

Nur für die Normung

4 Ermittlung der Standardunsicherheit

Weitere Anleitungen zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten, die vor allem praktischen Charakter haben, befinden sich in Anhang F.

4.1 Formulierung des Modells der Messung

4.1.1 In den meisten Fällen wird eine Meßgröße Y nicht direkt gemessen, sondern aus N weiteren Größen $X_1, X_2, \dots, X_N$ durch eine Funktionsbeziehung f berechnet:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

ANMERKUNGEN:

1 Zur ökonomischen Gestaltung der Schreibweise wird im vorliegenden *Leitfaden* das gleiche Formelzeichen für die physikalische Größe (die Meßgröße) und für die Zufallsgröße (siehe 4.2.1) verwendet, die ein mögliches Ergebnis einer Beobachtung dieser Größe repräsentiert. Wenn angegeben wird, daß X_i eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung hat, wird das Zeichen im letzteren Sinn verwendet; es wird angenommen, daß die physikalische Größe selbst durch einen im wesentlichen eindeutigen Wert (siehe 1.2 und 3.1.3) charakterisiert werden kann.

2 In einer Reihe von Beobachtungen wird der k -te beobachtete Wert von X_i mit $X_{i,k}$ bezeichnet; wenn also R den elektrischen Widerstand eines Widerstandsgerätes bezeichnet, so wird der k -te Beobachtungswert des Widerstands mit R_k bezeichnet.

3 Der Schätzwert von X_i (streng genommen seines Erwartungswertes) wird mit x_i bezeichnet.

BEISPIEL: Wenn eine Spannung V an die Anschlüsse eines temperaturabhängigen Widerstandsgerätes angelegt wird, das einen elektrischen Widerstand R_0 bei einer festgelegten Temperatur t_0 und einen linearen Temperaturkoeffizienten α des Widerstands hat, so besteht folgende Abhängigkeit zwischen der Verlustleistung P (die Meßgröße) des Widerstandsgerätes bei der Temperatur t und V , R_0 , α und t :

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0 [1 + \alpha (t - t_0)]$$

ANMERKUNG: Andere Methoden zur Messung von P würden durch andere mathematische Ausdrücke modelliert.

4.1.2 Die Eingangsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$, von denen die Ausgangsgröße Y abhängt, können ihrerseits als Meßgrößen betrachtet werden und von anderen Größen einschließlich Korrekturen und Korrekturfaktoren für systematische Einflüsse abhängig sein, woraus sich eine komplizierte Funktionsbeziehung f ergibt, die unter Umständen gar nicht explizit aufgeschrieben werden kann. Weiterhin kann f experimentell ermittelt werden (siehe 5.1.4) oder nur als Algorithmus vorliegen, der numerisch ausgewertet werden muß. Die Funktion f ist bei ihrem Auftreten im vorliegenden *Leitfaden* in diesem weiteren Zusammenhang zu interpretieren, speziell als Funktion, die jede Größe einschließlich Korrekturen und Korrekturfaktoren enthält, die eine signifikante Unsicherheitskomponente zum Meßergebnis beitragen kann.

Wenn die Daten also darauf hindeuten, daß f die Messung nicht in dem Maße modellhaft beschreibt, wie dies durch die geforderte Genauigkeit des Meßergebnisses vorgeschrieben wird, sind zusätzliche Eingangsgrößen in f einzubeziehen, um die Unzulänglichkeit zu beseitigen (siehe 3.4.2). Das kann die Einbeziehung einer Eingangsgröße erfordern, die die unzureichende Kenntnis einer Erscheinung widerspiegelt, die die Meßgröße beeinflusst. Im Beispiel 4.1.1 könnten weitere Eingangsgrößen benötigt werden, um eine bekannte, nicht konstante Verteilung der Temperatur im Widerstandsgerät, einen möglichen nichtlinearen Temperaturkoeffizienten oder eine mögliche Abhängigkeit des Widerstands vom Luftdruck zu beschreiben.

ANMERKUNG: Die Gleichung (1) kann dennoch eine so elementare Form annehmen wie $Y = X_1 - X_2$. Dieser Ausdruck modelliert zum Beispiel zwei Messungen derselben Größe X .

4.1.3 Die Menge von Eingangsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$ läßt sich wie folgt charakterisieren:

- Größen, deren Werte und Unsicherheiten direkt während der aktuellen Messung ermittelt werden. Diese Werte und Unsicherheiten erhält man zum Beispiel aus einer einzelnen Beobachtung, mehrmaligen Beobachtungen oder einer auf Erfahrung beruhenden Beurteilung. Sie können die Ermittlung von Korrekturen für Ausgaben des Meßgeräts und Korrekturen hinsichtlich des Einflusses von Größen wie der Umgebungstemperatur

peratur, des Luftdrucks und der Luftfeuchte einschließen.

- Größen, deren Werte und Unsicherheiten von externen Quellen in die Messung eingebracht werden, zum Beispiel Größen, die mit kalibrierten Normalen, zertifizierten Referenzmaterialien und Referenzdaten aus Handbüchern verbunden sind.

4.1.4 Man erhält einen Schätzwert der Meßgröße Y , bezeichnet mit y , aus der Gleichung (1) mit den *Eingangsschätzwerten* $x_1, x_2, \dots, x_N$ für die Werte der N Größen $X_1, X_2, \dots, X_N$. Somit gilt für den *Ausgangsschätzwert* y , der das Meßergebnis darstellt:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2)$$

ANMERKUNG: In einigen Fällen gilt für den Schätzwert y :

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

Das heißt, daß y als der arithmetische Mittelwert oder der Durchschnitt (siehe 4.2.1) aus n unabhängigen Ermittlungen Y_k von Y angesehen wird, wobei jede Ermittlung die gleiche Unsicherheit hat und auf einer vollständigen Menge von gleichzeitig erhaltenen Beobachtungswerten der N Eingangsgrößen X_i beruht. Diese Art der Mittelwertbildung anstelle von $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$, wobei $\bar{X}_i = (\sum_{k=1}^n X_{i,k})/n$ das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungen $X_{i,k}$ ist, wäre vorzuziehen, wenn f eine nichtlineare Funktion der Eingangsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$ ist. Beide Ansätze sind jedoch identisch, wenn es sich bei f um eine lineare Funktion von X_i handelt (siehe H.2 und H.4).

4.1.5 Die geschätzte Standardabweichung, die dem Ausgangsschätzwert oder Meßergebnis y zugeordnet ist, heißt *kombinierte Standardunsicherheit* und wird mit $u_c(y)$ bezeichnet. Sie errechnet sich aus der jedem Eingangsschätzwert x_i zugeordneten Standardabweichung, die *Standardunsicherheit* genannt und mit $u(x_i)$ bezeichnet wird (siehe 3.3.5 und 3.3.6).

4.1.6 Einen Eingangsschätzwert x_i und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(x_i)$ erhält man aus einer Verteilung möglicher Werte der Eingangsgröße X_i . Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung kann auf Häufigkeiten beruhen, das heißt auf einer Reihe von Beobachtungen $X_{i,k}$ von X_i , oder eine *A-priori*-Verteilung sein. Berechnungen vom Typ A der Standardunsicherheit gründen sich auf Häufigkeitsverteilungen, während Berechnungen vom Typ B auf *A-priori*-Verteilungen basieren. Es ist dabei zu beachten, daß die Verteilungen in beiden Fällen Modelle

sind, die zur Darstellung unseres Wissensstandes benutzt werden.

4.2 Ermittlungsmethode A der Standardunsicherheit

4.2.1 In den meisten Fällen ist der beste verfügbare Schätzwert eines Erwartungswertes μ_q einer Größe q , die zufällig variiert [einer *Zufallsgröße* (C.2.2)] und für die n unabhängige Beobachtungen q_k unter den gleichen Meßbedingungen ermittelt wurden (siehe B.2.15), der *arithmetische Mittelwert* oder der *Durchschnitt* $\bar{q}$ (C.2.19) dieser n Beobachtungen

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (3)$$

Somit wird für eine Eingangsgröße X_i , die aus n unabhängigen Beobachtungen $X_{i,k}$ geschätzt wurde, der durch Gleichung (3) erhaltene arithmetische Mittelwert $\bar{X}_i$ als Eingangsschätzwert in Gleichung (2) eingesetzt, um das Meßergebnis y zu berechnen; es gilt also $x_i = \bar{X}_i$. Eingangsschätzwerte, die nicht aus mehrmaligen Beobachtungen ermittelt wurden, müssen durch andere Methoden, wie zum Beispiel in der zweiten Kategorie von 4.1.3 angegeben, gewonnen werden.

4.2.2 Die einzelnen Beobachtungen q_k unterscheiden sich in ihrem Wert aufgrund von zufälligen Streuungen der Einflußgrößen oder zufälligen Einflüssen (siehe 3.2.2). Für die empirische Varianz dieser Beobachtungen, die die Varianz σ^2 der Wahrscheinlichkeitsverteilung von q schätzt, gilt:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad (4)$$

Dieser Schätzwert der Varianz und seine positive Quadratwurzel $s(q_k)$, die *empirische Standardabweichung* (B.2.17) genannt wird, kennzeichnet die Streuung der Beobachtungswerte q_k um ihren Mittelwert $\bar{q}$.

4.2.3 Für den besten Schätzwert von $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$, der Varianz des Mittelwerts, gilt:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (5)$$

Die empirische Varianz des Mittelwerts $s^2(\bar{q})$ und die *empirische Standardabweichung des Mittelwerts* $s(\bar{q})$ (B.2.17, Anmerkung 2), die gleich der positiven Qua-

dratwurzel von $s^2(\bar{q})$ ist, sind quantitative Angaben darüber, wie gut $\bar{q}$ den Erwartungswert μ_q von q schätzt, wobei jede von beiden als Maß für die Unsicherheit von $\bar{q}$ verwendet werden kann.

Für eine Eingangsgröße X_i , die sich aus n Werten $X_{i,k}$ aus unabhängigen mehrmaligen Beobachtungen ergibt, beträgt die Standardunsicherheit $u(x_i)$ zu ihrem Schätzwert $x_i = \bar{X}_i$ somit $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$, wobei $s^2(\bar{X}_i)$ nach Gleichung (5) errechnet wird. Der Bequemlichkeit halber werden $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ und $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ manchmal auch *Varianz vom Typ A* beziehungsweise *Standardunsicherheit vom Typ A* genannt.

ANMERKUNGEN:

1 Die Anzahl n der Beobachtungen muß groß genug sein, um zu gewährleisten, daß $\bar{q}$ einen zuverlässigen Schätzwert des Erwartungswerts μ_q der Zufallsgröße q und daß $s^2(\bar{q})$ einen zuverlässigen Schätzwert der Varianz $\sigma^2(q) = \sigma^2/n$ liefert (siehe 4.3.2, Anmerkung). Die Differenz zwischen $s^2(\bar{q})$ und $\sigma^2(\bar{q})$ ist beim Konstruieren von Vertrauensbereichen zu berücksichtigen (siehe 6.2.2). Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung von q eine Normalverteilung ist (siehe 4.3.4), wird die Differenz in diesem Fall durch die t -Verteilung berücksichtigt (siehe G.3.2).

2 Obwohl die Varianz $s^2(\bar{q})$ die grundlegendere Größe darstellt, ist die Standardabweichung $s(\bar{q})$ die bequemere Größe für die Praxis, da sie die gleiche Dimension wie q hat und anschaulicher ist als die Varianz.

4.2.4 Für eine wohlcharakterisierte Messung unter statistischer Kontrolle kann ein zusammengefaßter Schätzwert der Varianz s_p^2 (oder eine zusammengefaßte empirische Standardabweichung s_p) zur Charakterisierung der Messung bereits verfügbar sein. Wenn der Wert einer Meßgröße q aus n unabhängigen Beobachtungen ermittelt wird, wird in diesen Fällen die empirische Varianz des arithmetischen Mittelwerts $\bar{q}$ der Beobachtungen besser durch s_p^2/n als durch $s^2(\bar{q})/n$ geschätzt. Für die Standardunsicherheit gilt dann $u = s_p/\sqrt{n}$. (Siehe auch die Anmerkung zu H.3.6)

4.2.5 Häufig wird der Schätzwert x_i einer Eingangsgröße X_i aus einer Kurve gewonnen, die den empirischen Daten mit der Methode der kleinsten Quadrate angepaßt wurde. Die geschätzten Varianzen und die sich daraus ergebenden Standardunsicherheiten der die Kurve charakterisierenden angepaßten Parameter und jeglicher vorausgesagter Punkte lassen sich gewöhnlich durch bekannte statistische Verfahren berechnen (siehe H.3 und Literaturangabe [8])

4.2.6 Die Anzahl ν_i der **Freiheitsgrade** (C.2.31) von $u(x_i)$ (siehe G.3), die in dem einfachen Fall, wenn $x_i = \bar{X}_i$ und $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ gleich $n - 1$ ist, errechnet sich wie in 4.2.1 und 4.2.3 aus n unabhängigen Beobachtungen und muß stets angegeben werden, wenn Unsicherheitskomponenten nach Methode A ermittelt werden.

4.2.7 Wenn die zufälligen Streuungen der Beobachtungen einer Eingangsgröße (zum Beispiel zeitlich) korreliert sind, sind der Mittelwert und die empirische Standardabweichung des Mittelwerts eventuell unzureichende **Schätzer** (C.2.25) für die gewünschte **Kenngroße** (C.2.23). In solchen Fällen müssen die Beobachtungen mit statistischen Methoden analysiert werden, die speziell für die Behandlung einer Reihe von korrelierten, zufällig variierenden Messungen geeignet sind.

ANMERKUNG: Solche spezialisierten Methoden werden zur Behandlung der Messungen von Frequenznormalen verwendet. Es ist jedoch beim Übergang von kurzzeitlichen zu langzeitlichen Messungen auch anderer metrologischer Größen möglich, daß die Annahme unkorrelierter zufälliger Streuungen nicht mehr gültig ist, so daß die spezialisierten Methoden zur Behandlung dieser Messungen ebenfalls eingesetzt werden können. (Siehe z.B. die detaillierte Diskussion der Allan-Varianz in Literaturangabe [9]).

4.2.8 Die Diskussion der Ermittlungsmethode A in den Unterabschnitten 4.2.1 bis 4.2.7 ist nicht erschöpfend; es gibt viele Situationen, darunter einige recht komplexe, die sich mit statistischen Methoden behandeln lassen. Als wichtiges Beispiel seien Kalibrierverfahren zur Ermittlung von Unsicherheiten sowohl aus kurz- als auch langzeitlichen zufälligen Streuungen der Ergebnisse des Vergleichs materieller Artefakte mit unbekannten Werten, wie zum Beispiel Maßverkörperungen und Massennormale, mit Referenznormalen mit bekannten Werten genannt, die oft auf der Methode der kleinsten Quadrate beruhen. In solchen vergleichsweise einfachen Meßsituationen lassen sich Unsicherheitskomponenten häufig durch eine sogenannte Varianzanalyse (siehe H.5) ermitteln, das heißt durch eine statistische Analyse der Daten mit Verfahren, die aus geschachtelten Folgen von Messungen der Meßgröße für eine Anzahl von verschiedenen Werten der Größen bestehen, von denen die Meßgröße abhängt.

ANMERKUNG: Auf niedrigeren Stufen der Kalibrierkette, auf denen Referenznormale häufig als genau bekannt angenommen werden, weil sie von einem metrologischen Staatsinstitut oder einem Primärnormal-Laboratorium kalibriert wurden, kann die Unsicherheit eines Kalibrierergebnisses eine einzelne Standardunsicherheit vom Typ A sein, die aus der die Messung charakterisierenden zusammengefaßten empirischen Standardabweichung ermittelt wurde.

4.3 Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit

4.3.1 Für einen Schätzwert x_i einer Eingangsgröße X_i , der nicht aus mehrmaligen Beobachtungen gewonnen wurde, wird die zugehörige geschätzte Varianz $u^2(x_i)$ oder die Standardunsicherheit $u(x_i)$ durch eine wissenschaftliche Beurteilung ermittelt, die sich auf alle verfügbaren Informationen über die mögliche Streuung von X_i gründet. Zu den zusammengefaßten Informationen können gehören:

- Daten aus früheren Messungen;
- Erfahrungen oder allgemeine Kenntnisse über Verhalten und Eigenschaften der relevanten Materialien und Meßgeräte;
- Angaben des Herstellers;
- Daten von Kalibrierscheinen und anderen Zertifikaten;
- Unsicherheiten, die Referenzdaten aus Handbüchern zugeordnet sind.

Der Bequemlichkeit halber werden $u^2(x_i)$ und $u(x_i)$ manchmal auch *Varianz vom Typ B* beziehungsweise *Standardunsicherheit vom Typ B* genannt.

ANMERKUNG: Wird x_i aus einer A-priori-Verteilung gewonnen, so lautet die korrekte Schreibweise für die zugehörige Varianz $u^2(X_i)$, jedoch werden im gesamten *Leitfaden* zur einfacheren Darstellung die Schreibweisen $u^2(x_i)$ und $u(x_i)$ verwendet.

4.3.2 Der richtige Gebrauch der Menge der verfügbaren Informationen für eine Berechnung der Standardunsicherheit nach Methode B beruht auf Erfahrung und allgemeinen Kenntnissen und ist eine Fähigkeit, die durch Praxis erlernt werden kann. Es muß anerkannt werden, daß eine Berechnung der Standardunsicherheit nach Methode B ebenso zuverlässig sein kann wie eine Berechnung nach Methode A, insbesondere in einer Meßsituation, in der sich eine Berechnung vom Typ A auf eine verhältnismäßig geringe Zahl von statistisch unabhängigen Beobachtungen stützt.

ANMERKUNG: Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung von q in Anmerkung 1 zu 4.2.3 normal ist, dann gilt für $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, den Quotienten der Standardverteilung von $s(\bar{q})$ und $\sigma(\bar{q})$, ein Wert von annähernd $[2(n-1)]^{-1/2}$. Somit beträgt bei Annahme von $\sigma[s(\bar{q})]$ als Unsicherheit von $s(\bar{q})$ die relative Unsicherheit von $s(\bar{q})$ für $n = 10$ Beobachtungen 24 %, während sie für $n = 50$ Beobachtungen 10 % beträgt. (Weitere Werte siehe Tabelle E.1 in Anhang E.)

4.3.3 Wird der Schätzwert x_i aus den Angaben eines Herstellers, einem Kalibrierzertifikat, einem Handbuch oder einer anderen Quelle bezogen und ist dort die Unsicherheit als bestimmtes Mehrfaches einer Stan-

dardabweichung angegeben, so errechnet sich die Standardunsicherheit $u(x_i)$ einfach, indem der angegebene Wert durch den Multiplikationsfaktor geteilt wird; die geschätzte Varianz $u^2(x_i)$ ist das Quadrat dieses Quotienten.

BEISPIEL: In einem Kalibrierzertifikat sei angegeben, daß die Masse m_s eines Massennormals aus nichtrostendem Stahl mit dem Nennwert 1 Kilogramm 1 000,000 325 g beträgt und daß "die Unsicherheit dieses Wertes 240 µg auf dem Niveau der dreifachen Standardabweichung beträgt." Die Standardunsicherheit des Massennormals beträgt dann einfach $u(m_s) = (240 \text{ µg})/3 = 80 \text{ µg}$. Dies entspricht einer relativen Standardunsicherheit $u(m_s)/m_s$ von 80×10^{-9} (siehe 5.1.6). Die geschätzte Varianz beträgt $u^2(m_s) = (80 \text{ µg})^2 = 6,4 \times 10^{-9} \text{ g}^2$.

ANMERKUNG: In vielen Fällen liegen nur wenige oder gar keine Informationen über die einzelnen Komponenten vor, aus denen die angegebene Unsicherheit gewonnen wurde. Dies ist im allgemeinen unwesentlich für die Ermittlung der Unsicherheit nach dem vorliegenden *Leitfaden*, da alle Standardunsicherheiten auf dieselbe Weise behandelt werden, wenn die kombinierte Standardunsicherheit eines Meßergebnisses berechnet wird (siehe Abschnitt 5).

4.3.4 Die angegebene Unsicherheit von x_i liegt nicht unbedingt wie in Abschnitt 4.3.3 als Mehrfaches einer Standardabweichung vor. Mitunter ist die Unsicherheit in Form eines Bereichs mit einem Vertrauensniveau von 90, 95 oder 99 Prozent (siehe 6.2.2) angegeben. Wenn nicht anders angezeigt, darf man annehmen, daß zur Berechnung der angegebenen Unsicherheit eine Normalverteilung (C.2.14) herangezogen wurde, so daß sich die Standardunsicherheit mittels Teilung der angegebenen Unsicherheit durch den entsprechenden Faktor für die Normalverteilung ermitteln läßt. Die Faktoren, die den oben angegebenen Vertrauensniveaus entsprechen, betragen 1,64; 1,96 und 2,58 (siehe auch Tabelle G.1 in Anhang G).

ANMERKUNG: Es bestände keine Notwendigkeit für eine solche Annahme, wenn die Unsicherheit entsprechend den Empfehlungen des vorliegenden *Leitfadens* angegeben wäre, da hier hervorgehoben wird, daß der herangezogene Erweiterungsfaktor stets mitzuteilen ist (siehe 7.2.3).

BEISPIEL: In einem Kalibrierzertifikat sei angegeben, daß der Widerstandswert R_s eines Widerstandsnormals mit einem Nennwert von 10 Ohm bei einer Temperatur von 23 °C $10,000\,742 \text{ Ω} \pm 129 \text{ µΩ}$ beträgt und daß "die angegebene Unsicherheit von 129 µΩ einen Bereich definiert, der ein Vertrauensniveau von 99 Prozent hat". Für die Standardunsicherheit des Widerstands kann angenommen werden: $u(R_s) = (129 \text{ µΩ}) / 2,58 = 50 \text{ µΩ}$. Dies entspricht einer relativen Standardunsicherheit $u(R_s)/R_s$

von $5,0 \times 10^{-6}$ (siehe 5.1.6). Die geschätzte Varianz beträgt $u^2(R_g) = (50 \mu\Omega)^2 = 2,5 \times 10^{-9} \Omega^2$.

4.3.5 Es sei der Fall betrachtet, in dem man, gestützt auf verfügbare Informationen, feststellen kann: "Es besteht eine 50%ige Chance, daß der Wert der Eingangsgröße X_i im Bereich a_- bis a_+ liegt" (mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, daß X_i in diesem Bereich liegt, beträgt 0,5 oder 50%). Wenn angenommen werden kann, daß die Verteilung der möglichen Werte von X_i annähernd eine Normalverteilung ist, läßt sich der Mittelpunkt des Bereichs als bester Schätzwert x_i von X_i annehmen. Wenn die halbe Weite des Bereichs ferner mit $a = (a_+ - a_-)/2$ bezeichnet wird, so läßt sich annehmen, daß $u(x_i) = 1,48a$, da der Bereich $\mu \pm \sigma / 1,48$ für eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ annähernd 50 Prozent der Verteilung einschließt.

BEISPIEL: Ein Maschinenarbeiter schätzt bei der Ermittlung der Abmessungen eines Werkstücks, daß dessen Länge mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 im Bereich zwischen 10,07 mm und 10,15 mm liegt. Er gibt $l = (10,11 \pm 0,04)$ mm an und meint damit, daß $\pm 0,04$ mm einen Bereich mit einem Vertrauensniveau von 50 Prozent beschreibt. Dann gilt $a = 0,04$ mm. Nimmt man nun an, daß die möglichen Werte von l normalverteilt sind, so gilt für die Standardunsicherheit der Länge $u(l) = 1,48 \times 0,04 \text{ mm} = 0,06 \text{ mm}$ und für die geschätzte Varianz $u^2(l) = (1,48 \times 0,04 \text{ mm})^2 = 3,5 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$.

4.3.6 Es sei ein ähnlicher Fall wie in 4.3.5 betrachtet, bei dem man jedoch, auf verfügbare Informationen gestützt, feststellen kann: "Es besteht etwa eine Chance von zwei Dritteln, daß der Wert von X_i im Bereich a_- bis a_+ liegt" (mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, daß X_i in diesem Bereich liegt, beträgt etwa 0,67). Es läßt sich dann vernünftigerweise $u(x_i) = a$ ansetzen, da der Bereich $\mu \pm \sigma$ für eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ annähernd 68,3 Prozent der Verteilung einschließt.

ANMERKUNG: Dem Wert von $u(x_i)$ würde eine beträchtlich größere Signifikanz verliehen, als ihm offensichtlich zukommt, wenn man die tatsächliche Abweichung von 0,96742 einer Normalverteilung ansetzte, die einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 entspricht, das heißt, wenn $u(x_i) = a/0,96742 = 1,033a$.

4.3.7 In anderen Fällen ist es vielleicht nur möglich, Schranken (obere und untere Grenzen) für X_i zu bestimmen, vor allem, indem man feststellt: "Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert von X_i im Bereich von a_- bis a_+ liegt, ist für alle praktischen Zwecke gleich 1, und die Wahrscheinlichkeit, daß X_i außerhalb dieses Bereichs liegt, liegt im wesentlichen bei Null." Wenn es keine speziellen Kenntnisse über die möglichen Werte von X_i in-

nerhalb des Bereichs gibt, läßt sich nur annehmen, daß im gesamten Bereich etwa die gleiche Wahrscheinlichkeit für die Lage von X_i besteht (eine Gleich- oder Rechteckverteilung möglicher Werte; siehe 4.4.5 und Bild 2a). Dann liegt x_i , der Erwartungswert von X_i , in der Mitte des Bereichs: $x_i = (a_- + a_+)/2$. Für die zugehörige Varianz gilt:

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2 / 12 \quad (6)$$

Wenn die Differenz zwischen den Schranken, $a_+ - a_-$, mit $2a$ bezeichnet wird, so nimmt Gleichung (6) folgende Form an:

$$u^2(x_i) = a^2 / 3 \quad (7)$$

ANMERKUNG: Wenn eine so ermittelte Unsicherheitskomponente signifikant zur Unsicherheit eines Meßergebnisses beiträgt, ist es ratsam, für die weitere Berechnung zusätzliche Daten heranzuziehen.

BEISPIELE

1 In einem Handbuch sei der Wert des linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha_{20}(\text{Cu})$ von reinem Kupfer bei 20°C mit $16,52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ angegeben und einfach festgestellt, daß "der Betrag der Meßabweichung zu diesem Wert $0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ nicht überschreitet". Auf der Grundlage dieser begrenzten Information ist es nicht unvernünftig anzunehmen, daß der Wert von $\alpha_{20}(\text{Cu})$ mit konstanter Wahrscheinlichkeit im Bereich von $16,12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ bis $16,92 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ liegt und daß die Lage von $\alpha_{20}(\text{Cu})$ außerhalb dieses Bereichs sehr unwahrscheinlich ist. Die Varianz dieser symmetrischen Rechteckverteilung möglicher Werte von $\alpha_{20}(\text{Cu})$ der halben Weite $a = 0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ beträgt dann nach Gleichung (7): $u^2(\alpha_{20}) = (0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})^2 / 3 = 53,3 \times 10^{-15} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$, und die Standardunsicherheit ist $u(\alpha_{20}) = (0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0,23 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

2 Ein Hersteller gibt für ein digitales Spannungsmeßgerät an, daß "zwischen einem und zwei Jahren nach der Kalibrierung des Geräts dessen Genauigkeit im 1-V-Bereich 14×10^{-6} mal Anzeigewert plus 2×10^{-6} mal Meßbereich beträgt". Es sei angenommen, daß das Gerät 20 Monate nach der Kalibrierung zur Messung einer Spannung V in seinem 1-V-Bereich benutzt wird. Der arithmetische Mittelwert der mehrmaligen Beobachtungen von V sei $\bar{V} = 0,928\,571 \text{ V}$ bei einer Standardunsicherheit vom Typ A von $u(\bar{V}) = 12 \mu\text{V}$. Die Standardunsicherheit läßt sich nach Methode B aus den Angaben des Herstellers ermitteln, indem man annimmt, daß die angegebene Genauigkeit symmetrische Schranken für eine additive Korrektur $\Delta\bar{V}$ von $\bar{V}$ setzt, deren Erwartungswert gleich Null und deren Wahrscheinlichkeit für ihren Wert innerhalb der Schranken konstant ist. Für die halbe Weite a der symmetrischen Rechteckverteilung möglicher Werte von $\Delta\bar{V}$ gilt dann: $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0,928\,571 \text{ V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1 \text{ V}) = 15 \mu\text{V}$. Nach Gleichung (7) errechnet sich $u^2(\Delta\bar{V})$

= $75 \mu V^2$ und $u(\Delta \bar{V}) = 8,7 \mu V$. Für den Schätzwert der Meßgröße V , der der Einfachheit halber mit demselben Symbol bezeichnet wird, gilt $V = \bar{V} + \Delta \bar{V} = 0,928 571 V$. Man erhält die kombinierte Standardunsicherheit dieses Schätzwerts durch Kombination der Standardunsicherheit $12 \mu V$ von $\bar{V}$ vom Typ A mit der Standardunsicherheit $8,7 \mu V$ von $\Delta \bar{V}$ vom Typ B. Die allgemeine Methode zur Kombination von Standardunsicherheitskomponenten wird in Abschnitt 5 angegeben, wobei dieses Beispiel in Unterabschnitt 5.1.5 behandelt wird.

4.3.8 Im Unterabschnitt 4.3.7 können die obere und untere Schranke a_+ und a_- für die Eingangsgröße X_i in bezug auf den besten Schätzwert x_i auch unsymmetrisch liegen. Genauer gesagt, wenn $a_- = x_i - b_-$ und $a_+ = x_i + b_+$, dann $b_- \neq b_+$. Da x_i (als bester Schätzwert von X_i) in diesem Fall nicht in der Mitte des Bereichs von a_- bis a_+ liegt, kann X_i nicht gleichverteilt über den Bereich sein. Dennoch kann es sein, daß nicht genug Informationen zur Auswahl einer Verteilung zur Verfügung stehen; verschiedene Modelle führen zu unterschiedlichen Angaben für die Varianz. Wenn solche Informationen nicht zur Verfügung stehen, gilt als einfachste Näherung

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \quad (8),$$

wobei es sich um die Varianz der Rechteckverteilung mit der vollen Weite $b_+ + b_-$ handelt. (Asymmetrische Verteilungen werden auch in F.2.4.4 und G.5.3 diskutiert.)

BEISPIEL: Im Beispiel 1 von 4.3.7 sei der Wert des im Handbuch angegebenen Koeffizienten $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16,52 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; und es sei angegeben, daß "der kleinste mögliche Wert $16,40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ und der größte mögliche Wert $16,92 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ beträgt". Dann gilt $b_- = 0,12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $b_+ = 0,40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ und nach Gleichung (8) $u(\alpha_{20}) = 0,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

ANMERKUNGEN:

1 In vielen Meßsituationen in der Praxis, bei denen die Schranken asymmetrisch sind, kann es sich als angebracht erweisen, zum Schätzwert x_i eine Korrektur in der Größenordnung von $(b_+ - b_-)/2$ hinzuzufügen, so daß der neue Schätzwert x'_i von X_i in der Mitte zwischen den Schranken liegt: $x'_i = (a_- + a_+)/2$. Damit reduziert sich die Situation auf den in 4.3.7 dargestellten Fall mit den neuen Werten $b'_+ = b'_- = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

2 Auf der Grundlage des Prinzips der maximalen Entropie kann für die Wahrscheinlichkeitsdichte im Fall von Asymmetrie gelten: $p(X_i) = A \exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, wobei $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ und $\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1\} / \{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\}$. Dies führt zu einer

Varianz von $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)^2 / \lambda$; für $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ und für $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9 Da es in 4.3.7 keine speziellen Kenntnisse über die möglichen Werte von X_i innerhalb der geschätzten Schranken a_- bis a_+ gab, ließ sich lediglich annehmen, daß es für X_i gleich wahrscheinlich ist, einen beliebigen Wert innerhalb dieser Schranken anzunehmen, und daß die Wahrscheinlichkeit, daß X_i außerhalb dieser Schranken liegt, Null beträgt. Solche stufenförmigen Unstetigkeiten einer Funktion sind in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Physik oft unrealistisch. In vielen Fällen ist es realistischer zu erwarten, daß die Werte in der Nähe der Schranken weniger wahrscheinlich sind als die Werte in der Nähe des Mittelpunkts. Es ist dann sinnvoll, die symmetrische Rechteckverteilung durch eine symmetrische Trapezverteilung mit gleicher Steigung der Seitenkanten (ein gleichschenkliges Trapez), einer unteren Grundlinie mit der Länge $a_+ - a_- = 2a$ und einer oberen Grundlinie mit der Länge $2a\beta$, wobei $0 \leq \beta \leq 1$, zu ersetzen. Für $\beta \rightarrow 1$ nähert sich diese Trapezverteilung der Rechteckverteilung aus 4.3.7 an, während sie für $\beta = 0$ eine Dreieckverteilung ist (siehe 4.4.6 und Bild 2b). Nimmt man eine solche Trapezverteilung für X_i an, so gilt ein Erwartungswert $x_i = (a_- + a_+)/2$ von X_i ; für die ihm zugeordnete Varianz gilt:

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6 \quad (9a)$$

was für eine Dreieckverteilung mit $\beta = 0$ übergeht in:

$$u^2(x_i) = a^2/6 \quad (9b)$$

ANMERKUNGEN:

1 Für eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ umfaßt der Bereich $\mu \pm 3\sigma$ annähernd 99,73 Prozent der Verteilung. Wenn also die obere und untere Schranke a_+ und a_- 99,73%ige statt 100%ige Grenzen definieren und X_i als annähernd normalverteilt angenommen werden kann, gilt - im Unterschied zu 4.3.7, wo keine speziellen Kenntnisse über X_i zwischen den Schranken vorlagen - $u^2(x_i) = a^2/9$. Für die symmetrische Rechteckverteilung mit der halben Weite a gilt $a^2/3$ [Gleichung 7], für die Dreieckverteilung mit der halben Weite a gilt im Vergleich dazu $a^2/6$ [Gleichung 9b]. Die Werte der Varianzen bei den drei Verteilungen sind angesichts der großen Unterschiede hinsichtlich der jeweils zu ihrer Rechtfertigung benötigten Informationen überraschend ähnlich.

2 Die Trapezverteilung ist gleichwertig mit der Faltung zweier Rechteckverteilungen [10], wovon eine die halbe Weite a_1 hat, die gleich der mittleren halben Weite des Trapezes ist, das heißt $a_1 = a(1 + \beta)/2$, während die andere die halbe Weite a_2 hat, die gleich der mittleren

halben Weite der dreieckigen Teile des Trapezes ist, das heißt $a_2 = a(1 - \beta)/2$. Die Varianz der Verteilung beträgt dann $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. Die gefaltete Verteilung kann als Rechteckverteilung interpretiert werden, deren Weite $2a_1$ selbst eine Unsicherheit aufweist, die durch die Rechteckverteilung der Weite $2a_2$ dargestellt wird und modellhaft die Tatsache abbildet, daß die Schranken einer Eingangsgröße nicht genau bekannt sind. Doch selbst wenn a_2 30 % von a_1 beträgt, übersteigt u den Wert $a_1/\sqrt{3}$ um weniger als 5 %.

4.3.10 Es ist wichtig, daß Unsicherheitskomponenten nicht "doppelt gezählt" werden. Wenn eine Unsicherheitskomponente, die die Folge eines bestimmten Einflusses ist, nach Methode B berechnet wird, ist sie nur so weit als selbständige Unsicherheitskomponente in die Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit zu einem Meßergebnis einzubeziehen, wie der Einfluß nicht zur beobachteten Streuung der Beobachtungen beiträgt. Die Unsicherheit, die sich aus dem zur beobachteten Streuung beitragenden Teil des Einflusses ergibt, ist bereits in der Unsicherheitskomponente enthalten, die aus der statistischen Analyse der Beobachtungen gewonnen wurde.

4.3.11 Die Diskussion der Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit in den Unterabschnitten 4.3.3 bis 4.3.9 soll lediglich hinweisenden Charakter haben. Zudem sollten sich Berechnungen der Unsicherheit, wie in den Unterabschnitten 3.4.1 bis 3.4.2 angedeutet, auf so viele quantitative Daten wie möglich stützen.

4.4 Graphische Darstellung der Berechnung der Standardunsicherheit

4.4.1 Bild 1 stellt die Schätzung des Wertes einer Eingangsgröße X_i und die Berechnung der Unsicherheit zu diesem Schätzwert aus der unbekannten Verteilung der möglichen Meßwerte von X_i bzw. die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_i dar, die durch mehrmalige Beobachtungen erfaßt wurde.

4.4.2 In Bild 1a wird angenommen, daß es sich bei der Eingangsgröße X_i um eine Temperatur t handelt, deren unbekannte Verteilung eine Normalverteilung mit einem Erwartungswert $\mu_t = 100^\circ\text{C}$ und einer Standardabweichung $\sigma = 1,5^\circ\text{C}$ ist. Für ihre Wahrscheinlichkeitsdichte (siehe C.2.14) gilt dann

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t - \mu_t)^2 / 2\sigma^2\right]$$

ANMERKUNG: Die Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z)$ erfordert, daß die Beziehung $\int p(z)dz = 1$ erfüllt ist.

4.4.3 Bild 1b zeigt ein Histogramm von $n = 20$ mehrmaligen Beobachtungen t_k der Temperatur t , von denen angenommen wird, daß sie zufällig aus der Verteilung in Bild 1a entnommen wurden. Die 20 Beobachtungen oder Stichprobeneinheiten, deren Werte in Tabelle 1 aufgeführt sind, sind für das Histogramm in Intervalle der Weite 1°C klassiert. (Die Erstellung des Histogramms ist für die statistische Analyse der Daten natürlich nicht erforderlich.)

Der mit Gleichung (3) berechnete arithmetische Mittelwert oder Durchschnitt $\bar{t}$ der $n = 20$ Beobachtungen beträgt $\bar{t} = 100,145^\circ\text{C} \approx 100,14^\circ\text{C}$ und wird als bester Schätzwert des Erwartungswertes μ_t von t auf der Grundlage der verfügbaren Daten aufgefaßt. Für die mit Gleichung (4) berechnete empirische Standardabweichung $s(t_k)$ gilt $s(t_k) = 1,489^\circ\text{C} \approx 1,49^\circ\text{C}$, für die mit Gleichung (5) berechnete empirische Standardabweichung des Mittelwerts $s(\bar{t})$, die die Standardunsicherheit $u(\bar{t})$ des Mittelwerts $\bar{t}$ ist, gilt $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k) / \sqrt{20} = 0,333^\circ\text{C} \approx 0,33^\circ\text{C}$. (Für weitere Berechnungen ist es zweckmäßig, daß alle Ziffern erhalten bleiben.)

ANMERKUNG: Obwohl die in Tabelle 1 gegebenen Daten angesichts des weitverbreiteten Einsatzes von hochauflösenden digitalen elektronischen Thermometern nicht unglaublich sind, dienen sie hier nur zur Illustration und sollten nicht unbedingt als Beschreibung einer wirklichen Messung angesehen werden.

4.4.4 Bild 2 stellt die Schätzung des Wertes einer Eingangsgröße X_i und die Berechnung der Unsicherheit zu diesem Schätzwert aus einer *A-priori*-Verteilung der möglichen Werte von X_i bzw. die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_i dar, die auf den gesamten verfügbaren Informationen beruht. Für beide gezeigten Fälle wird als Eingangsgröße wieder eine Temperatur t angenommen.

4.4.5 Für den in Bild 2a dargestellten Fall wird angenommen, daß nur wenige Informationen über die Eingangsgröße t verfügbar sind. Alles, was man dann tun kann, ist, t durch eine symmetrische, rechteckige *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilung zu beschreiben, die eine untere Schranke $a_- = 96^\circ\text{C}$, eine obere Schranke $a_+ = 104^\circ\text{C}$ und somit eine halbe Weite $a = (a_+ - a_-)/2 = 4^\circ\text{C}$ aufweist (siehe 4.3.7). Für die Wahrscheinlichkeitsdichte von t gilt dann

$$p(t) = 1/2a, \quad a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0 \text{ in allen übrigen Fällen}$$

Wie in 4.3.7 angedeutet, ist der beste Schätzwert von t ihr Erwartungswert $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100^\circ\text{C}$. Dies folgt aus C.3.1. Für die Standardunsicherheit dieses Schätzwerts

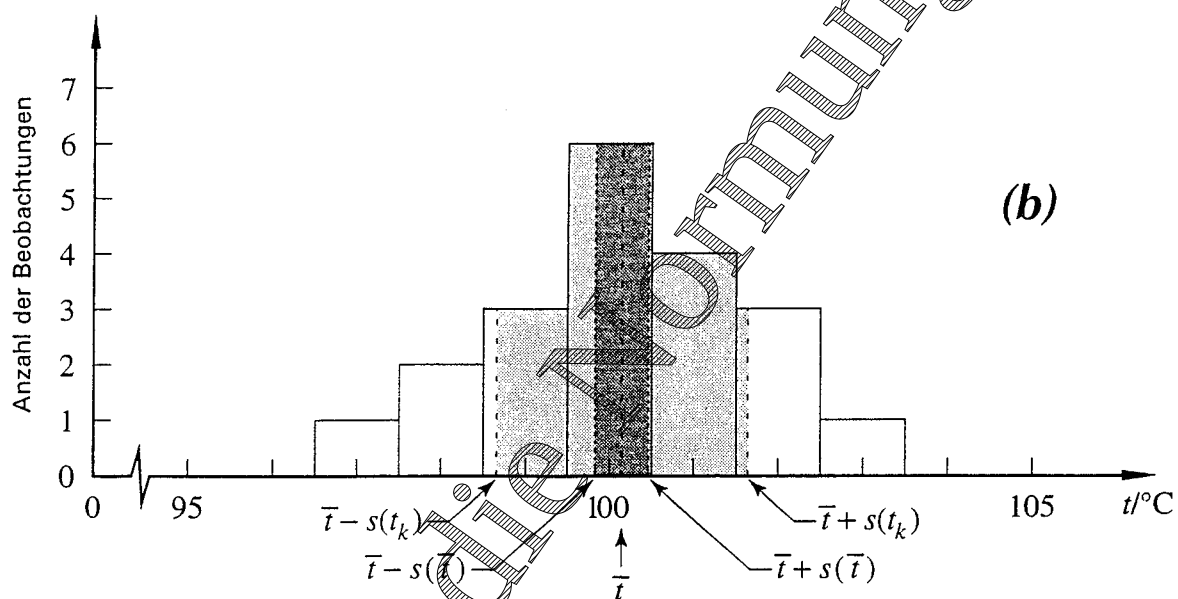
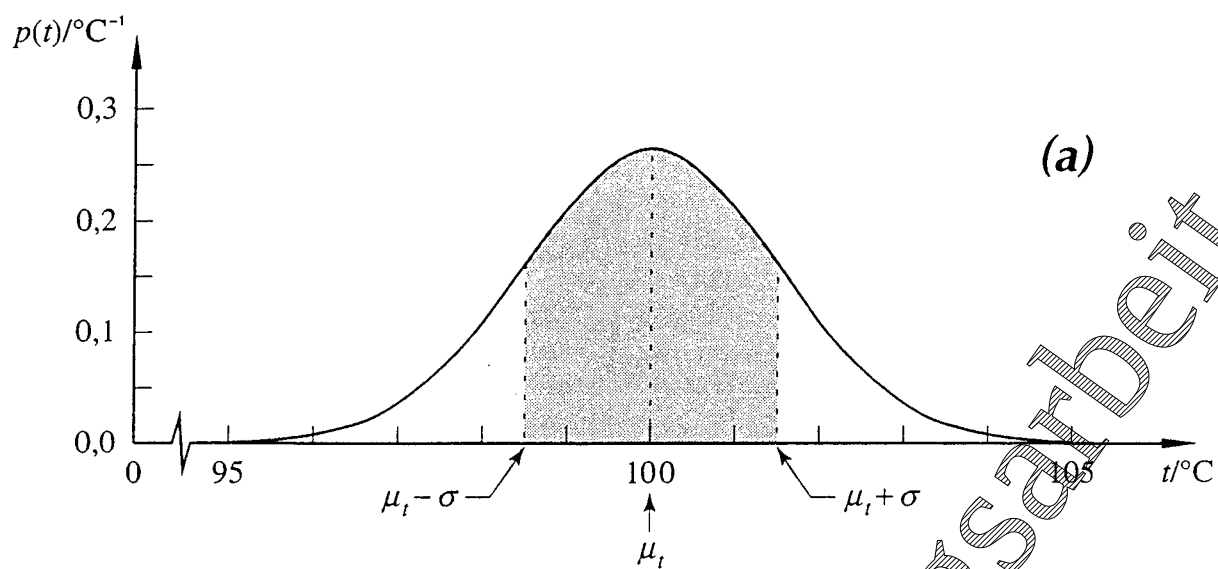


Bild 1. Graphische Darstellung der Berechnung der Standardunsicherheit einer Eingangsgröße aus mehrmaligen Beobachtungen

gilt dann $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2,3 \text{ °C}$, was aus C.3.2 folgt [siehe Gleichung (7)].

4.4.6 Für den in Bild 2b dargestellten Fall wird angenommen, daß die verfügbaren Informationen über t weniger eingeschränkt sind und daß t durch eine symmetrische, dreieckige *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben wird, die die gleiche untere Schranke $a_- = 96 \text{ °C}$, die gleiche obere Schranke $a_+ = 104 \text{ °C}$ und somit die gleiche halbe Weite $a = (a_+ - a_-)/2 = 4 \text{ °C}$ wie in 4.4.5 aufweist (siehe 4.3.9). Für die Wahrscheinlichkeitsdichte von t gilt dann

$$p(t) = (t - a_-)/a^2, \quad a_- \leq t \leq (a_- + a_+)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2, \quad (a_- + a_+)/2 \leq t \leq a_+,$$

$$p(t) = 0 \text{ in allen übrigen Fällen}$$

Wie in 4.3.9 angedeutet, gilt $\mu_t = (a_- + a_+)/2 = 100 \text{ °C}$ für den Schätzwert von t , was aus C.3.1 hervorgeht.

Für die Standardunsicherheit zu diesem Schätzwert gilt $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1,6 \text{ °C}$, was aus C.3.2 folgt [siehe Gleichung (9b)].

Der oben erhaltene Wert $u(\mu_t) = 1,6 \text{ °C}$ ist zu vergleichen mit dem Wert $u(\mu_t) = 2,3 \text{ °C}$, der in 4.4.5 aus einer Rechteckverteilung mit derselben Weite von 8 °C gewonnen wurde, mit $\sigma = 1,5 \text{ °C}$ der Normalverteilung in Bild 1a, deren Weite von $+2,58\sigma$ bis $+2,58\sigma$ die Verteilung zu 99% umfaßt und fast 8 °C beträgt, und mit $u(\bar{t}) = 0,33 \text{ °C}$, die in 4.4.3 aus 20 zufälligen Beobachtungen aus derselben Normalverteilung gewonnen wurde.

Tabelle 1: Zwanzig Beobachtungen der Temperatur t , klassiert in Intervalle von 1 °C

Intervall $t_1 \leq t < t_2$		Temperatur
$t_1/\text{°C}$	$t_2/\text{°C}$	$t/\text{°C}$
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

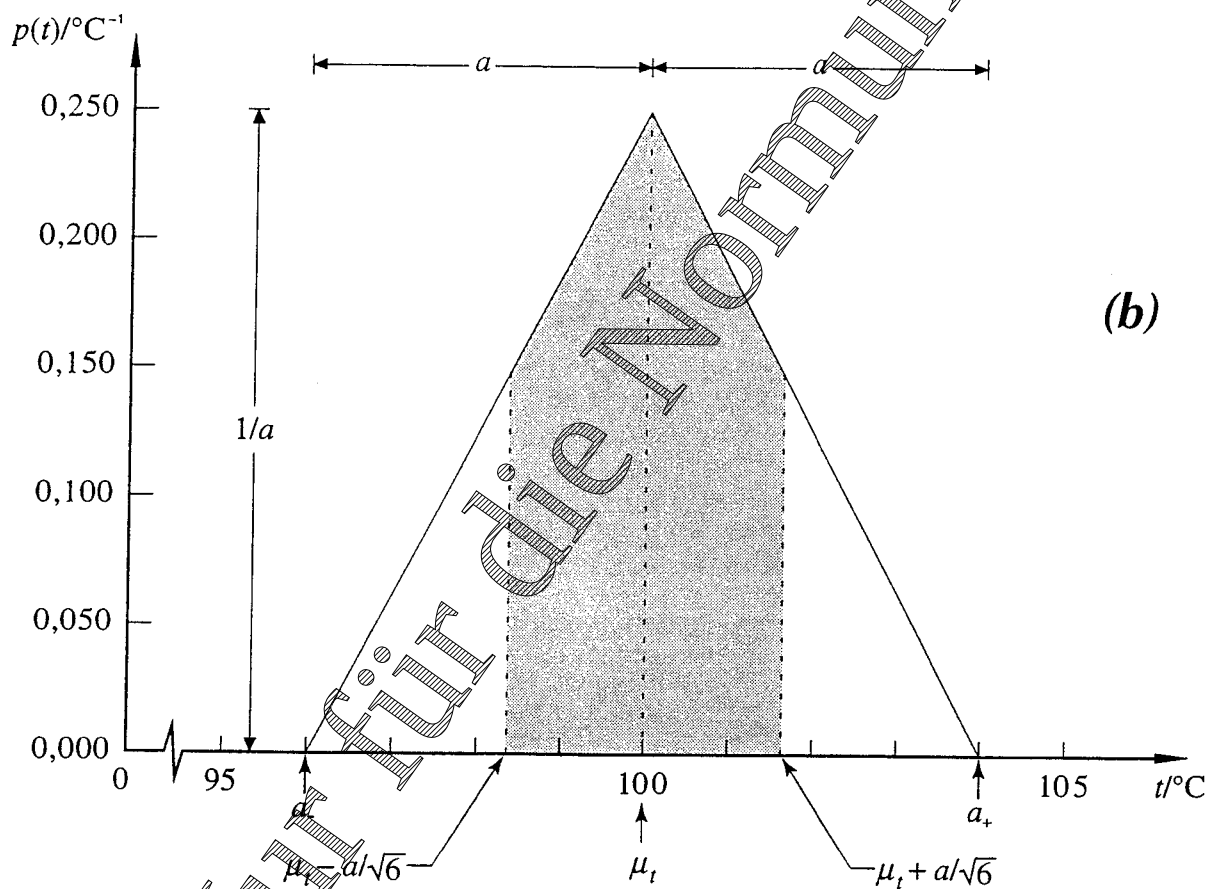
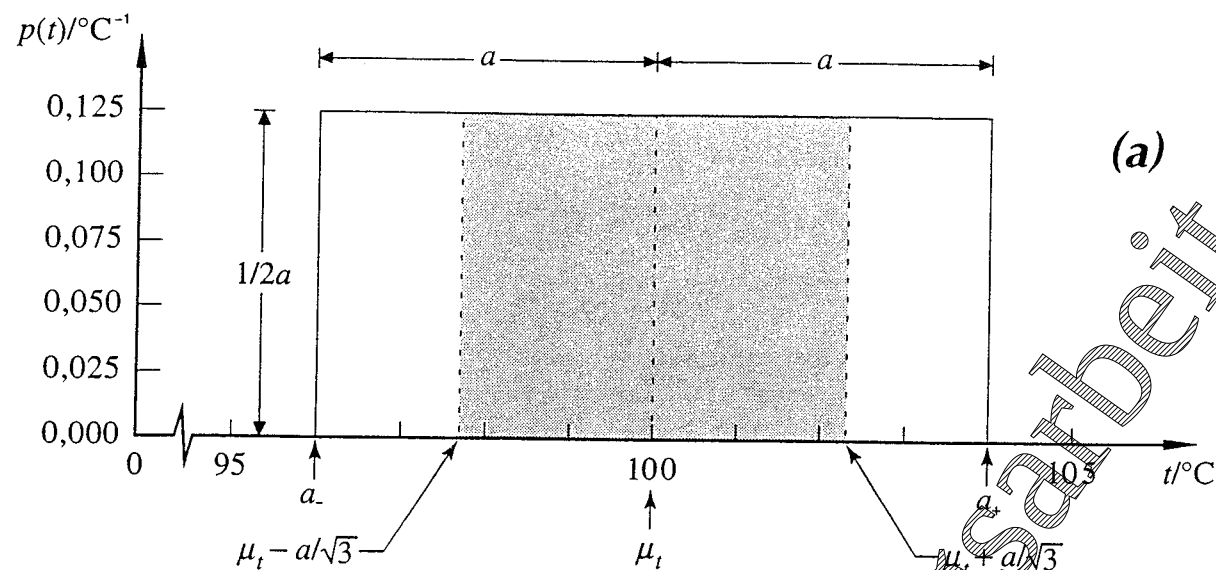


Bild 2. Graphische Darstellung der Berechnung der Standardunsicherheit einer Eingangsgröße aus einer A-priori-Verteilung

5 Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit

5.1 Unkorrelierte Eingangsgrößen

In diesem Unterabschnitt werden Eingangsgrößen betrachtet, die **unabhängig** voneinander sind (C.3.7). Der Fall, in dem zwei oder mehrere Eingangsgrößen in Beziehung zueinander stehen, das heißt voneinander abhängig oder **korreliert** sind (C.2.8), wird in Unterabschnitt 5.2 behandelt.

5.1.1 Wenn y ein Schätzwert der Meßgröße Y und damit das Meßergebnis ist, erhält man die Standardunsicherheit von y durch entsprechendes Kombinieren der Standardunsicherheiten zu den Eingangsschätzwerten $x_1, x_2, \dots, x_N$ (siehe 4.1). Diese **kombinierte Standardunsicherheit** zum Schätzwert y wird mit $u_c(y)$ bezeichnet.

ANMERKUNG: Aus ähnlichen Gründen wie in 4.3.1 werden die Formelzeichen $u_c(y)$ und $u_c^2(y)$ in allen Fällen verwendet.

5.1.2 Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ ist die positive Quadratwurzel aus der kombinierten Varianz $u_c^2(y)$, für die gilt:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (10)$$

wobei f die in Gleichung (1) gegebene Funktion ist. Bei jedem $u(x_i)$ handelt es sich um eine Standardunsicherheit nach 4.2 (Ermittlungsmethode A) oder 4.3 (Ermittlungsmethode B). Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ ist eine geschätzte Standardabweichung und kennzeichnet die Streuung der Werte, die der Meßgröße Y vernünftigerweise zugeordnet werden können (siehe 2.2.3).

Gleichung (10) und ihre Entsprechung für korrelierte Eingangsgrößen, Gleichung (13), beruhen beide auf einer Näherung erster Ordnung einer Taylor-Reihe von $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ und drücken aus, was im vorliegenden *Leitfaden Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz* genannt wird (siehe E.3.1 und E.3.2).

ANMERKUNG: Wenn die Nichtlinearität von f signifikant ist, müssen Glieder höherer Ordnung in der Taylor-Reihenentwicklung in den Ausdruck für $u_c^2(y)$, Gleichung (10), einbezogen werden. Wenn die Verteilung jedes X_i um ihren Erwartungswert symmetrisch ist, müssen die folgenden wichtigsten Glieder der nächsthöheren Ordnung den Gliedern der Gleichung (10) hinzugefügt werden:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right) u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Ein Beispiel für eine Situation, in der der Beitrag von Gliedern höherer Ordnung zu $u_c^2(y)$ berücksichtigt werden muß, siehe in H.1.

5.1.3 Die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ sind gleich $\partial f / \partial X_i$ berechnet bei $X_i = x_i$ (siehe Anmerkung 1 unten). Diese Ableitungen, die häufig Empfindlichkeitskoeffizienten genannt werden, beschreiben, wie der Ausgangsschätzwert y bei Veränderung der Werte für die Eingangsschätzwerte $x_1, x_2, \dots, x_N$ variiert. Die Veränderung von y auf Grund einer geringen Veränderung Δx_i des Eingangsschätzwertes x_i wird speziell durch $\Delta y_i = (\partial f / \partial x_i) (\Delta x_i)$ gegeben. Wird diese Veränderung durch die Standardunsicherheit zum Schätzwert x_i erzeugt, so lautet für y die entsprechende Variation $(\partial f / \partial x_i) u(x_i)$. Die kombinierte Varianz $u_c^2(y)$ kann daher als Summe von Gliedern angesehen werden, die jeweils die geschätzte Varianz zum Ausgangsschätzwert y darstellt, der von der geschätzten Varianz des jeweils zugehörigen Eingangsschätzwertes x_i erzeugt wird. Das führt zu folgender Schreibung von Gleichung (10):

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (11a)$$

wobei

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \quad (11b)$$

ANMERKUNGEN:

1 Strenggenommen werden die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$ an Erwartungswerten von X_i bestimmt. In der Praxis werden die partiellen Ableitungen jedoch wie folgt geschätzt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bigg|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$$

2 Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ läßt sich numerisch berechnen, indem $c_i u(x_i)$ in Gleichung (11a) wie folgt ersetzt wird:

$$Z_i = \frac{1}{2} [f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N)]$$

Das heißt, daß $u_c(y)$ numerisch bestimmt wird, indem man die Veränderung von y aufgrund einer Veränderung $+u(x_i)$ und $-u(x_i)$ von x_i berechnet. Der Wert von $u_c(y)$ kann dann als $|Z_i|$ und der Wert des entsprechenden Empfindlichkeitskoeffizienten c_i als $Z_i / u(x_i)$ angenommen werden.

BEISPIEL: Für das Beispiel in 4.1.1, wobei aus Gründen der einfacheren Darstellung das gleiche Formelzeichen für die Größe und ihren Schätzwert verwendet wird:

$$c_1 \equiv \partial P / \partial V = 2V / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] = 2P / V$$

$$c_2 \equiv \partial P / \partial R_0 = -V^2 / R_0^2 [1 + \alpha(t - t_0)] = -P / R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P / \partial \alpha = -V^2 (t - t_0) / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 = -P(t - t_0) / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P / \partial t = -V^2 \alpha / R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 = -P \alpha / [1 + \alpha(t - t_0)]$$

und

$$\begin{aligned} u^2(P) &= \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0} \right)^2 u^2(R_0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 u^2(t) \\ &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\ &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P) \end{aligned}$$

5.1.4 Anstelle ihrer Berechnung aus der Funktion f werden die Empfindlichkeitskoeffizienten $\partial f / \partial x_i$ mitunter

auch experimentell ermittelt: man mißt die Veränderung von Y , die durch die Veränderung eines bestimmten X_i bewirkt wird, wobei man die übrigen Eingangsgrößen konstant hält. In diesem Fall wird die Kenntnis der Funktion f (oder eines Teils davon, wenn nur einige Empfindlichkeitskoeffizienten auf diese Weise ermittelt werden) entsprechend auf eine empirische Taylor-Reihenentwicklung erster Ordnung reduziert, die auf den gemessenen Empfindlichkeitskoeffizienten beruht.

5.1.5 Wird Gleichung (1) für die Meßgröße Y um die Nennwerte $X_{i,0}$ der Eingangsgrößen X_i entwickelt, dann gilt in erster Näherung (die gewöhnlich ausreicht): $Y = Y_0 + c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \dots + c_N \delta_N$, wobei $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{N,0})$, $c_i = (\partial f / \partial X_i)$, berechnet bei $X_i = X_{i,0}$ und $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Zum Zweck der Analyse der Unsicherheit wird deshalb eine Meßgröße üblicherweise durch eine lineare Funktion ihrer Variablen in der Weise angenähert, daß ihre Eingangsgrößen X_i in δ_i umgewandelt werden (siehe E.3.1).

BEISPIEL: In Beispiel 2 aus 4.3.7 ist $\bar{V} + \Delta \bar{V}$ der Schätzwert von V , wobei $\bar{V} = 0,928\,571\text{ V}$, $u(\bar{V}) = 12\,\mu\text{V}$, die additive Korrektur $\Delta \bar{V} = 0$ und $u(\Delta \bar{V}) = 8,7\,\mu\text{V}$. Da $\partial V / \partial \bar{V} = 1$ und $\partial V / \partial (\Delta \bar{V}) = 1$, ergeben sich die zu V gehörige kombinierte Varianz zu

$$\begin{aligned} u^2(V) &= u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta \bar{V}) = (12\,\mu\text{V})^2 + (8,7\,\mu\text{V})^2 \\ &= 219 \times 10^{-12}\text{ V}^2 \end{aligned}$$

und die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(V) = 15\,\mu\text{V}$, was einer relativen kombinierten Standardunsicherheit $u_c(V)/V$ von 16×10^{-6} entspricht (siehe 5.1.6). Es handelt sich hier um einen Fall, bei dem die Meßgröße bereits eine lineare Funktion der Größen ist, von denen sie abhängt, wobei $c_i = +1$. Aus Gleichung (10) folgt mit $Y = Y_0 + c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \dots + c_N \delta_N$ und mit den Konstanten $c_i = +1$ oder -1 für $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u^2(x_i)$.

5.1.6 Wenn Y von der Form $Y = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N}$ ist und die Exponenten p_i als positive oder negative Zahlen mit vernachlässigbaren Unsicherheiten bekannt sind, läßt sich die kombinierte Varianz nach Gleichung (10) wie folgt ausdrücken:

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^N [p_i u(x_i)/x_i]^2 \quad (12)$$

Die Form ist die gleiche wie in Gleichung (11a), jedoch wird die kombinierte Varianz als *relative kombinierte Varianz* $[u_c(y)/y]^2$ sowie die geschätzte Varianz $u^2(x_i)$ als geschätzte *relative Varianz* $[u(x_i)/x_i]^2$ ausgedrückt. [Die

relative kombinierte Standardunsicherheit ist dann $u_c(y)/|y|$, die relative Standardunsicherheit zu den Eingangsschätzwerten ist $u(x_i)/|x_i|$ mit $y \neq 0$ und $|x_i| \neq 0$.

ANMERKUNGEN:

1 Wenn Y diese Form hat, läßt sich diese leicht in eine lineare Funktion von Variablen (siehe 5.2.5) umwandeln, indem man $X_i = X_{i0}(1 + \delta_i)$ setzt, woraus sich die folgende Beziehung ergibt: $(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^N p_i \delta_i$. Andererseits führt die logarithmische Transformation $Z = \ln Y$ und $W_i = \ln X_i$ zu einer exakten Linearisierung in den neuen Variablen: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^N p_i W_i$.

2 Wenn alle p_i entweder +1 oder -1 sind, wird Gleichung (12) zu $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^N [u(x_i)/x_i]^2$, woraus ersichtlich ist, daß in diesem speziellen Fall die zum Schätzwert y gehörende relative kombinierte Varianz einfach gleich der Summe der geschätzten relativen Varianzen ist, die zu den Eingangsschätzwerten x_i gehören.

5.2 Korrelierte Eingangsgrößen

5.2.1 Gleichung (10) und diejenigen, wie etwa die Gleichungen (11) und (12), die von ihr abgeleitet sind, sind nur dann gültig, wenn die Eingangsgrößen X_i unabhängig voneinander oder unkorreliert sind (die Zufallsgrößen, nicht die physikalischen Größen, die als Invarianten angenommen werden, siehe 4.1.1, Anmerkung 1). Sind einige X_i signifikant korreliert, so müssen die Korrelationen berücksichtigt werden.

5.2.2 Wenn die Eingangsgrößen korreliert sind, lautet der jeweils zum Meßergebnis gehörende Ausdruck für die kombinierte Varianz:

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (13)$$

wobei x_i und x_j die Schätzwerte von X_i und X_j sind sowie $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ die geschätzte Kovarianz zu x_i und x_j ist. Der Grad der Korrelation von x_i und x_j wird durch den geschätzten **Korrelationskoeffizienten** (C.3.6) charakterisiert:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)} \quad (14)$$

wobei $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ und $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$. Wenn die Schätzwerte x_i und x_j unabhängig voneinander sind, dann gilt $r(x_i, x_j) = 0$ und eine Änderung des einen Wertes impliziert keine zu erwartende Änderung des anderen Wertes (weitere Diskussion siehe C.2.8, C.3.6 und C.3.7).

Mittels Korrelationskoeffizienten, die sich leichter als Kovarianzen interpretieren lassen, kann das Kovarianzglied in Gleichung (13) wie folgt geschrieben werden:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (15)$$

Aus Gleichung (13) wird dann, mit Hilfe von Gleichung (11b):

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (16)$$

ANMERKUNGEN

1 Im Sonderfall, daß alle Eingangsschätzwerte mit den Korrelationskoeffizienten $r(x_i, x_j) = +1$ korreliert sind, reduziert sich Gleichung (16) auf:

$$u_c^2(y) = \left(\sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2$$

Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ ist daher einfach eine *lineare Summe* von Gliedern, die die Variation des Ausgangsschätzwertes y repräsentieren, die sich aus der Standardunsicherheit der einzelnen Eingangsschätzwerte x_i ergibt (siehe 5.1.3). [Diese lineare Summe darf trotz der ähnlichen Form nicht mit dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz verwechselt werden; Standardunsicherheiten sind keine Fehler (siehe E.3.2).]

BEISPIEL: Zehn elektrische Widerstände mit einem Nennwert von jeweils $R_i = 1000 \Omega$ werden mit einer vernachlässigbaren Vergleichsunsicherheit mit demselben Standardwiderstand R_S kalibriert, für den laut Kalibrierschein eine Standardunsicherheit $u(R_S) = 100 \text{ m}\Omega$ gilt. Die Widerstände sind über Drähte, deren Widerstand vernachlässigt werden kann, in Reihe geschaltet, um einen Referenzwiderstand R_{ref} des Nennwerts $10 \text{ k}\Omega$ zu erhalten. Somit ist $R_{\text{ref}} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Da für jedes Widerstandspaar $r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ (siehe F.1.2.3, Beispiel 2), gilt die Gleichung aus Anmerkung 1. Da für jeden Widerstand $\partial f / \partial x_i = \partial R_{\text{ref}} / \partial R_i = 1$ und $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (siehe F.1.2.3, Beispiel 2), ergibt diese Gleichung für R_{ref} die

kombinierte Standardunsicherheit $u_c(R_{\text{ref}}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S)$
 $= 10 \times (100 \text{ m}\Omega) = 1 \Omega$. Das Ergebnis nach Gleichung
 (10), $u_c(R_{\text{ref}}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_S) \right]^{1/2} = 0,32 \text{ m}\Omega$, ist unrichtig, da es nicht berücksichtigt, daß alle Kalibrierwerte der Widerstände korreliert sind.

2 Die geschätzten Varianzen $u^2(x_i)$ und die geschätzten Kovarianzen $u(x_i, x_j)$ können als Elemente einer Kovarianzmatrix mit den Elementen u_{ij} angesehen werden. Die Varianzen $u^2(x_i)$ bilden die Diagonalelemente u_{ii} der Matrix, während die Kovarianzen $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ die Nichtdiagonalelemente u_{ij} ($i \neq j$) bilden. Sind zwei Eingangsschätzwerte unkorreliert, so sind die zu ihnen gehörige Kovarianz und die entsprechenden Elemente u_{ij} und u_{ji} der Kovarianzmatrix Null. Sind alle Eingangsschätzwerte unkorreliert, so sind alle Nichtdiagonalelemente Null, und die Kovarianzmatrix ist diagonal. (Siehe auch C.3.5.)

3 Zur numerischen Berechnung läßt sich Gleichung (16) wie folgt schreiben:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z_i Z_j r(x_i, x_j)$$

wobei Z_i in 5.1.3, Anmerkung 2 gegeben ist.

4 Wenn die X_i der in 5.1.6 betrachteten Sonderform korreliert sind, müssen die Glieder

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N [p_i u(x_i)/x_i] [p_j u(x_j)/x_j] r(x_i, x_j)$$

auf der rechten Seite von Gleichung (12) hinzugefügt werden.

5.2.3 Es seien die beiden arithmetischen Mittelwerte $\bar{q}$ und $\bar{r}$ betrachtet, die die Erwartungswerte μ_q und μ_r der beiden zufällig schwankenden Größen q und r schätzen und die sich aus n unabhängigen Paaren von gleichzeitigen Beobachtungen der Größen q und r errechnen, welche unter denselben Meßbedingungen vorgenommen wurden (siehe B.2.15). Dann wird die Kovarianz (siehe C.3.4) von $\bar{q}$ und $\bar{r}$ wie folgt geschätzt:

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \quad (17)$$

wobei q_k und r_k die einzelnen Meßwerte der Größen q und r darstellen und $\bar{q}$ und $\bar{r}$ nach Gleichung (3) aus den Meßwerten errechnet werden. Wenn die Meßwerte tatsächlich unkorreliert sind, so dürfte die errechnete Kovarianz nahe Null liegen.

Für die geschätzte Kovarianz zweier korrelierter Eingangsgroßen X_i und X_j , die durch die aus unabhängigen

Paaren mehrmaliger gleichzeitiger Beobachtungen ermittelten Mittelwerte $\bar{X}_i$ und $\bar{X}_j$ geschätzt werden, gilt somit $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$, wobei $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ nach Gleichung (17) berechnet wird. Diese Anwendung von Gleichung (17) stellt die Ermittlungsmethode A für die Kovarianz dar. Den geschätzten Korrelationskoeffizienten von $\bar{X}_i$ und $\bar{X}_j$ erhält man aus Gleichung (14): $r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) / s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)$.

ANMERKUNG: Beispiele, bei denen Kovarianzen nach Gleichung (17) verwendet werden müssen, sind in H.2 und H.4 angegeben.

5.2.4 Zwischen zwei Eingangsgroßen kann eine signifikante Korrelation bestehen, wenn zu ihrer Ermittlung dasselbe Meßgerät, dasselbe physikalische Normal oder derselbe Referenzwert mit einer signifikanten Standardunsicherheit herangezogen werden. Wird zum Beispiel ein bestimmtes Thermometer zur Ermittlung der zur Schätzung der Eingangsgroße X_i benötigten Temperaturkorrektur benutzt, und wird dasselbe Thermometer auch zur Ermittlung ähnlicher Temperaturkorrekturen verwendet, die zur Schätzung der Eingangsgroße X_j benötigt werden, so könnten die beiden Eingangsgroßen signifikant korreliert sein. Die Korrelation zwischen X_i und X_j wird jedoch beseitigt, wenn X_i und X_j in diesem Beispiel als unkorrigierte Größen neu definiert und die Größen, die die Kalibrierkurve für das Thermometer angeben, als zusätzliche Eingangsgroßen mit unabhängigen Standardunsicherheiten einbezogen werden. (Weitere Diskussion siehe F.1.2.3 und F.1.2.4).

5.2.5 Korrelationen zwischen Eingangsgroßen können nicht ignoriert werden, wenn sie vorhanden und signifikant sind. Die zugehörigen Kovarianzen sind nach Möglichkeit experimentell durch Variieren der korrelierten Eingangsgroßen (siehe C.3.6, Anmerkung 3) oder unter Verwendung des Pools verfügbarer Informationen über die korrelierte Variabilität der betreffenden Größen (Ermittlungsmethode B) zu ermitteln. Auf Erfahrung und allgemeinen Kenntnissen (siehe 4.3.1 und 4.3.2) basierende Einsicht wird insbesondere dann benötigt, wenn der Grad der Korrelation zwischen Eingangsgroßen, der sich aus dem Wirken gemeinsamer Einflüsse wie Umgebungstemperatur, Luftdruck und Luftfeuchte ergibt, zu schätzen ist. Glücklicherweise haben die Einflußgrößen oft nur einen vernachlässigbaren Effekt. Deshalb können die Eingangsgroßen als unkorreliert angenommen werden. Wenn sie jedoch nicht als unkorreliert angenommen werden können, lassen sich die Korrelationen selbst dadurch vermeiden, daß die gemeinsamen Einflüsse als zusätzliche unabhängige Eingangsgroßen gemäß 5.2.4 eingeführt werden.

6 Ermittlung der erweiterten Unsicherheit

6.1 Einleitung

6.1.1 Empfehlung INC-1 (1980) der Arbeitsgruppe zur Angabe von Unsicherheiten, auf der dieser *Leitfaden* beruht (siehe Einleitung), und die Empfehlungen 1 (CI-1981) und 1 (CI-1986) des CIPM, mit denen INC-1 (1980) befürwortet und bestätigt wird (siehe A.2 und A.3), sprechen sich für die Verwendung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ als den Parameter zur quantitativen Angabe der Unsicherheit eines Meßergebnisses aus. Tatsächlich hat das CIPM darum in seiner zweiten Empfehlung gefordert, daß "alle Teilnehmer bei der Angabe von Ergebnissen internationaler Vergleiche oder bei anderen Arbeiten unter der Schirmherrschaft des CIPM und der *Comités Consultatifs*" den jetzt kombinierte Standardunsicherheit genannten Parameter $u_c(y)$ verwenden.

6.1.2 Obwohl sich $u_c(y)$ universell zur Angabe der Unsicherheit eines Meßergebnisses verwenden läßt, ist es in einigen industriellen, kommerziellen und regulatorischen Anwendungen sowie dann, wenn Gesundheits- und Sicherheitsaspekte zum Tragen kommen, häufig erforderlich, die Unsicherheit in Form eines Bereichs um das Meßergebnis anzugeben, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfaßt, die der gemessenen Größe sinnvollerweise zugeordnet werden können. Die Existenz einer solchen Forderung wurde von der Arbeitsgruppe anerkannt und führte zu Absatz 5 der Empfehlung INC-1 (1980). Sie spiegelt sich auch in Empfehlung 1 (CI-1986) des CIPM wider.

6.2 Erweiterte Unsicherheit

6.2.1 Jenes zusätzliche Maß der Unsicherheit, das die Forderung erfüllt, einen Bereich gemäß 6.1.2 anzugeben, wird *erweiterte Unsicherheit* genannt und mit U bezeichnet. Die erweiterte Unsicherheit U erhält man durch Multiplikation der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ mit einem *Erweiterungsfaktor* k :

$$U = k u_c(y) \quad (18)$$

Das Ergebnis einer Messung kann dann bequem durch $Y = y \pm U$ ausgedrückt werden, was so zu interpretieren

ist, daß y der beste Schätzwert des der Meßgröße Y zugehörigen Wertes ist und daß $y - U$ bis $y + U$ einen Bereich darstellt, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfaßt, die Y sinnvollerweise zugeordnet werden können. Ein solcher Bereich läßt sich auch als $y - U \leq Y \leq y + U$ angeben.

6.2.2 Die Begriffe **Vertrauensbereich** (C.2.27, C.2.28) und **Vertrauensniveau** (C.2.29) haben spezielle Definitionen in der Statistik und können auf den durch U angegebenen Bereich nur unter bestimmten Bedingungen angewendet werden. So müssen zum Beispiel alle Unsicherheitskomponenten, die zu $u_c(y)$ beitragen, nach der Ermittlungsmethode A berechnet worden sein. Daher wird das Wort "Vertrauen" im vorliegenden *Leitfaden* nicht als Attribut für das Wort "Bereich" verwendet, wenn der durch U angegebene Bereich gemeint ist; die Benennung "Vertrauensniveau" wird in diesem Zusammenhang ebenfalls nicht benutzt. Statt dessen wird von "Grad des Vertrauens" gesprochen. Genauer wird U so interpretiert, daß es einen Bereich um das Meßergebnis definiert, der einen großen Anteil p der durch dieses Ergebnis und seine kombinierte Standardunsicherheit charakterisierten Wahrscheinlichkeitsverteilung umfaßt, wobei p die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* oder den *Grad des Vertrauens* des Bereichs darstellt.

6.2.3 Wenn möglich, ist der zu dem durch U definierten Bereich gehörige Grad des Vertrauens p zu schätzen und anzugeben. Es ist zu beachten, daß das Multiplizieren von $u_c(y)$ mit einer Konstanten keine neue Information, sondern nur dieselbe Information in einer anderen Form liefert. Doch ebenso ist zu beachten, daß der Grad p des Vertrauens (insbesondere für Werte von p nahe 1) ziemlich unsicher ist, und zwar zum einen wegen der begrenzten Kenntnis der durch y und $u_c(y)$ charakterisierten Wahrscheinlichkeitsverteilung (vor allem in den Extrembereichen), zum anderen wegen der Unsicherheit von $u_c(y)$ selbst (siehe Anmerkung 2 zu 2.3.5, 6.3.2 und Anhang G, insbesondere G.6.6).

ANMERKUNG: Bevorzugte Arten der Angabe eines Meßergebnisses siehe 7.2.2, wenn $u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist, und 7.2.3, wenn es U ist.

6.3 Wahl eines Erweiterungsfaktors

6.3.1 Der Wert des Erweiterungsfaktors k wird auf der Grundlage des für den Bereich $y - U$ bis $y + U$ geforderten Grad des Vertrauens ausgewählt. Im allgemeinen liegt k zwischen 2 und 3. Bei speziellen Anwendungen kann k auch außerhalb dieses Bereichs liegen. Umfassende Erfahrungen und genaue Kenntnisse darüber, für welche Verwendungszwecke ein Meßergebnis vorgesehen ist erleichtert die Wahl eines geeigneten Werts von k .

ANMERKUNG: Es kommt gelegentlich vor, daß eine bekannte Korrektur b für einen systematischen Einfluß an das berichtete Meßergebnis nicht angebracht wurde, sondern statt dessen versucht wurde, den Einfluß durch Vergrößerung der dem Meßergebnis zugeordneten "Unsicherheit" zu berücksichtigen. Das ist zu vermeiden; nur unter ganz besonderen Umständen dürfen Korrekturen für bekannte signifikante systematische Einflüsse nicht an ein Meßergebnis angebracht werden (einen solchen Spezialfall und seine Behandlung siehe F.2.4.5). Die Berechnung der Unsicherheit beim Messen darf nicht mit der Zuordnung eines Sicherheitsgrenzwerts zu einer Größe verwechselt werden.

6.3.2 Im Idealfall würde man gern einen bestimmten Wert des Erweiterungsfaktors k wählen, der einen Bereich $Y = y \pm U = y \pm k u_c(y)$ entsprechend einem bestimmten Grad p des Vertrauens liefert, zum Beispiel 95 oder 99 Prozent. Ebenso wäre man gern in der Lage, den mit einem Bereich assoziierten Grad des Vertrauens für einen

gegebenen Wert von k eindeutig angeben zu können. Das läßt sich in der Praxis jedoch nicht leicht machen, denn dafür sind umfassende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsverteilung erforderlich, die durch das Meßergebnis y und die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ charakterisiert wird. Obwohl diese Parameter von größter Bedeutung sind, reichen sie allein nicht aus, um Bereiche mit genau bekanntem Grad des Vertrauens aufzustellen.

6.3.3 Die Empfehlung INC-1 (1980) legt nicht fest, wie die Beziehung zwischen k und p anzustellen ist. Dieses Problem wird in Anhang G diskutiert; eine bevorzugte Methode für eine Näherungslösung wird in G.4 vorgestellt und in G.6.4 kurz beschrieben. In Meßsituationen, in denen die durch y und $u_c(y)$ charakterisierte Wahrscheinlichkeitsverteilung annähernd normal ist und der effektive Freiheitsgrad von $u_c(y)$ groß ist, ist jedoch oft ein einfacheres Vorgehen möglich, das in G.6.6 diskutiert wird. In diesem Fall, der in der Praxis häufig auftritt, läßt sich annehmen, daß $k = 2$ einen Bereich ergibt, dessen Grad des Vertrauens bei annähernd 95 Prozent liegt, und daß $k = 3$ einen Bereich ergibt, dessen Grad des Vertrauens bei annähernd 99 Prozent liegt.

ANMERKUNG: Eine Methode zur Schätzung des effektiven Freiheitsgrads von $u_c(y)$ wird in G.4 angegeben. Mit Hilfe von Tabelle G.2 in Anhang G läßt sich entscheiden, ob diese Lösung für eine bestimmte Messung angemessen ist (siehe G.6.6).

Nur für die Normung

7 Protokollieren der Unsicherheit

7.1 Allgemeine Anleitung

7.1.1 Je weiter man in der Meßhierarchie aufsteigt, umso mehr Angaben werden im allgemeinen darüber benötigt, wie man zu einem Meßergebnis und seiner Unsicherheit gelangt ist. Insbesondere müssen die für eine Neuauswertung der Messung erforderlichen Informationen für alle verfügbar sein, die sie benötigen. Dies gilt für jede Ebene der Hierarchie, einschließlich kommerzieller und regulativer Tätigkeiten auf dem Markt, ingenieurtechnischer Arbeiten in der Industrie, Kalibrierstellen niedrigeren Ranges, Industrieforschung und -entwicklung, wissenschaftlicher Forschung, Primärnormale und Kalibrierlaboratorien der Industrie, metrologische Staatsinstitute und das BIPM. Der Hauptunterschied besteht darin, daß auf den unteren Ebenen der Hierarchie ein größeres Maß an notwendigen Informationen in Form von veröffentlichten Kalibrier- und Prüfbescheinigungen und -berichten, Handbüchern, internationalen und nationalen Normen und vor Ort geltenden Bestimmungen zur Verfügung gestellt werden wird.

7.1.2 Wenn nähere Angaben über eine Messung, darunter die Art, wie die Unsicherheit zum Ergebnis ermittelt wurde, durch Verweis auf veröffentlichte Dokumente gemacht werden, wie dies häufig geschieht, wenn die Ergebnisse einer Kalibrierung in einem Zertifikat mitgeteilt werden, so müssen diese Publikationen unbedingt auf dem neuesten Stand gehalten werden, damit sie mit dem tatsächlich verwendeten Meßverfahren übereinstimmen.

7.1.3 Tagtäglich werden in Industrie und Wirtschaft zahlreiche Messungen ohne eine explizite Feststellung der Unsicherheit vorgenommen. Viele dieser Messungen erfolgen jedoch mit Meßgeräten, die einer regelmäßigen Kalibrierung oder gesetzlich vorgeschriebenen Prüfung unterliegen. Wenn von den Meßgeräten bekannt ist, daß sie ihrer Spezifikation oder den geltenden technischen Regeln entsprechen, lassen sich die Unsicherheiten zu ihren Anzeigewerten aus diesen Spezifikationen oder technischen Regeln ermitteln.

7.1.4 Obwohl die in der Praxis erforderliche Menge an Informationen zur Dokumentation eines Meßergebnisses vom vorgesehenen Verwendungszweck abhängig ist, bleibt dabei das Grundprinzip der Anforderung unverän-

dert: wenn über ein Meßergebnis und seine Unsicherheit berichtet wird, sollten lieber zu viele als zu wenige Angaben gemacht werden. Zum Beispiel sollte man

- die Methoden, die zur Berechnung des Meßergebnisses und seiner Unsicherheit aus experimentellen Beobachtungen und Eingangsdaten angewendet wurden, klar beschreiben ;
- alle Unsicherheitskomponenten auflisten und ihre Auswertung vollständig dokumentieren;
- die Datenanalyse so darstellen, daß alle wichtigen Schritte leicht nachvollziehbar sind und bei Bedarf eine unabhängige Neuauswertung des angegebenen Meßergebnisses möglich ist;
- alle bei der Analyse und ihren Quellen verwendeten Korrekturen und Konstanten angeben .

Als Test für die genannte Liste läßt sich die Frage stellen: "Habe ich ausreichende Informationen in hinreichend klarer Form angegeben, daß mein Ergebnis aktualisiert werden kann, sobald neue Informationen oder Daten verfügbar vorliegen?"

7.2 Spezielle Anleitung

7.2.1 Bei der Angabe eines Meßergebnisses sollte man, wenn $u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist

- vollständig beschreiben, wie die Meßgröße Y definiert ist;
- den Schätzwert y der Meßgröße Y und ihre kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ angeben; ebenso stets die Einheiten von y und $u_c(y)$;
- die relative kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)/|y|$ bei $|y| \neq 0$ angeben, wenn dies angebracht ist;
- die in 7.2.7 skizzierten Informationen angeben oder auf eine Publikation verweisen, die diese Informationen enthält.

Wenn es für die vorgesehenen Nutzer des Meßergebnisses zum Beispiel für künftige Berechnungen von Erweiterungsfaktoren und das Verständnis der Messung für sinnvoll erachtet wird, kann man noch folgendes angeben:

- die geschätzten effektiven Freiheitsgrade ν_{eff} (siehe G.4);
- die kombinierten Standardunsicherheiten nach Ermittlungsmethode A und B, $u_{cA}(y)$ und $u_{cB}(y)$, sowie deren geschätzte effektiven Freiheitsgrade ν_{effA} und ν_{effB} (siehe G.4.1, Anmerkung 3).

7.2.2 Wenn $u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist, sollte das numerische Meßergebnis vorzugsweise in einer der folgenden vier Arten angegeben werden, damit es nicht zu Mißverständnissen kommt. (Die Größe, deren Wert mitgeteilt wird, wird als Normal der Masse m_S mit dem Nennwert von 100 g angenommen; die in Klammern gesetzten Wörter können der Kürze halber weggelassen werden, wenn u_c an anderer Stelle im Dokument definiert ist, das das Ergebnis angibt.)

- 1) " $m_S = 100,021\ 47\ \text{g}$ mit (einer kombinierten Standardunsicherheit) $u_c = 0,35\ \text{mg}$."
- 2) " $m_S = 100,021\ 47(35)\ \text{g}$, wobei die in Klammern gesetzte Zahl den Zahlenwert der (kombinierten Standardunsicherheit) u_c angibt, der sich auf die jeweils letzten Stellen des angegebenen Meßergebnisses bezieht."
- 3) " $m_S = 100,021\ 47(0,000\ 35)\ \text{g}$, wobei die in Klammern gesetzte Zahl den Zahlenwert der (kombinierten Standardunsicherheit) u_c in derselben Einheit wie das Meßergebnis angibt."
- 4) " $m_S = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 35)\ \text{g}$, wobei die auf das Zeichen $\pm$ folgende Zahl der Zahlenwert der (kombinierten Standardunsicherheit) u_c und kein Vertrauensbereich ist."

ANMERKUNG: Das letztere Format mit dem Zeichen $\pm$ ist nach Möglichkeit zu vermeiden, da es traditionell zur Angabe eines Bereichs verwendet wurde, der ein hohes Vertrauensniveau aufweist, was zu einer Verwechslung mit der erweiterten Unsicherheit (siehe 7.2.4) führen kann. Obwohl die Warnung in 4) eine derartige Verwechslung verhindern soll, kann die Schreibweise $Y = y \pm u_c(y)$ noch immer so mißverstanden werden, daß eine erweiterte Unsicherheit mit $k = 1$ gemeint wäre und daß der Bereich $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ einen bestimmten Grad des Vertrauens p hätte (und zwar den, der der Normalverteilung (siehe G.1.3) zugeordnet ist). Dies gilt insbesondere, wenn die Warnung versehentlich weggelassen wird. Wie in 6.3.2

und in Anhang G angedeutet, läßt sich eine derartige Interpretation von $u_c(y)$ normalerweise nicht rechtfertigen.

7.2.3 Bei der Angabe eines Meßergebnisses sollte man, wenn die erweiterte Unsicherheit $U = k u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist:

- a) vollständig beschreiben, wie die Meßgröße Y definiert ist;
- b) das Meßergebnis in der Form $Y = y \pm U$ angeben, ebenso stets die Einheiten von y und U ;
- c) die relative erweiterte Unsicherheit $U/|y|$ angeben, wenn dies angebracht und $|y| \neq 0$ ist;
- d) den zur Ermittlung von U verwendeten Wert von k angeben [oder zur Erleichterung für den Nutzer des Meßergebnisses sowohl k als auch $u_c(y)$];
- e) den angenäherten Grad des Vertrauens angeben, der dem Bereich $y \pm U$ zugeordnet ist, sowie die Methode seiner Ermittlung;
- f) die in 7.2.7 skizzierten Informationen angeben oder auf eine Publikation verweisen, die diese Informationen enthält.

7.2.4 Wenn U das Maß für die Unsicherheit ist, sollte das numerische Meßergebnis zum Zwecke größtmöglicher Klarheit vorzugsweise in der folgenden Weise angegeben werden. (Die in Klammern gesetzten Wörter können der Kürze halber weggelassen werden, wenn U , u_c und k an anderer Stelle im Dokument definiert sind, das das Ergebnis angibt.)

" $m_S = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 79)\ \text{g}$, wobei die auf das Zeichen $\pm$ folgende Zahl der Zahlenwert (der erweiterten Unsicherheit) $U = k u_c$ ist und U aus (einer kombinierten Standardunsicherheit) $u_c = 0,35\ \text{mg}$ und aus (einem Erweiterungsfaktor) $k = 2,26$ auf der Grundlage einer t -Verteilung für $\nu = 9$ Freiheitsgrade ermittelt wurde. Sie definiert einen Bereich mit einem geschätzten Grad des Vertrauens von 95 Prozent."

7.2.5 Wenn durch eine Messung zur gleichen Zeit mehr als eine Meßgröße bestimmt wird, das heißt, wenn sie mindestens zwei Ausgangswerte y_i liefert (siehe H.2, H.3 und H.4), dann sind zusätzlich zu y_i und $u_c(y_i)$ die Elemente der Kovarianzmatrix $u(y_i, y_j)$ oder die Elemente $r(y_i, y_j)$ der **Matrix der Korrelationskoeffizienten** (C.3.6, Anmerkung 2) (vorzugsweise beide) anzugeben.

7.2.6 Die Zahlenwerte des Schätzwerts y und seiner Standardunsicherheit $u_c(y)$ oder erweiterten Unsicherheit

U dürfen nicht mit einer übermäßigen Stellenanzahl angegeben werden. Es reicht gewöhnlich aus, $u_c(y)$ und U [ebenso wie die Standardunsicherheiten $u(x_i)$ der Eingangsgrößen x_i] auf höchstens zwei Stellen anzugeben, obwohl es in manchen Fällen notwendig sein kann, weitere Stellen beizubehalten, um bei nachfolgenden Berechnungen Rundungsabweichungen zu vermeiden.

Werden Endergebnisse angegeben, kann es angebrachter sein, Unsicherheiten aufzurunden statt sie auf die nächste Stelle zu runden. So läßt sich $u_c(y) = 10,47 \text{ m}\Omega$ auf $11 \text{ m}\Omega$ aufrunden. Man sollte dabei jedoch Vernunft walten lassen und einen Wert wie $u(x_i) = 28,05 \text{ kHz}$ auf 28 kHz abrunden. Ausgangs- und Eingangsgrößen sind entsprechend ihren Unsicherheiten zu runden, zum Beispiel ist $y = 10,05762 \Omega$ mit $u_c(y) = 27 \text{ m}\Omega$ auf $y = 10,058 \Omega$ zu runden. Korrelationskoeffizienten sind auf drei Stellen genau anzugeben, wenn ihre absoluten Werte nahe bei Eins liegen.

7.2.7 In einem detaillierten Bericht über die Ermittlung des Meßergebnisses und der Unsicherheit sind die Empfehlungen aus 7.1.4 zu befolgen; außerdem sollte man

- den Wert aller Eingangsschätzwerte x_i und ihrer Standardunsicherheit $u(x_i)$ mit einer Beschreibung der Art ihrer Ermittlung angeben;
- die den korrelierten Eingangsschätzwerten zugeordneten geschätzten Kovarianzen oder geschätzten Korrelationskoeffizienten (vorzugsweise beide) sowie die Art ihrer Ermittlung angeben;
- die Freiheitsgrade für die Standardunsicherheit aller Eingangsschätzwerte sowie die Art ihrer Ermittlung angeben;
- die Funktionsbeziehung $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ sowie, wenn dies als sinnvoll erachtet wird, die partiellen Ableitungen oder Empfindlichkeitskoeffizienten $\partial f / \partial x_i$ anzugeben. Insbesondere sollten die experimentell ermittelten Werte dieser Koeffizienten angegeben werden.

ANMERKUNG: Da die Funktionsbeziehung f extrem komplex sein oder nicht explizit, sondern nur als Computerprogramm existieren kann, ist es vielleicht nicht immer möglich, f und ihre Ableitungen anzugeben. Die Funktion f kann dann allgemein beschrieben oder das verwendete Programm durch einen entsprechenden Verweis angegeben werden. In diesen Fällen ist Klarheit darüber wichtig, wie der Schätzwert y der Meßgröße Y und seine kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ ermittelt wurden.

Nur für die Normung

8 Zusammenfassung des Verfahrens zur Ermittlung und Angabe der Unsicherheit

Die bei der Ermittlung und Angabe der Unsicherheit eines Meßergebnisses zu befolgenden Schritte gemäß dem vorliegenden Leitfaden lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- 1 Geben Sie die Beziehung zwischen der Meßgröße Y und den Eingangsgrößen X_i an, von denen Y abhängt ($Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$). Die Funktion f muß jede Größe einschließlich aller Korrekturen und Korrekturfaktoren enthalten, die eine wesentliche Komponente zur Unsicherheit des Meßergebnisses darstellen (siehe 4.1.1. und 4.1.2).
- 2 Ermitteln Sie entweder durch eine statistische Analyse von Meßwerten oder auf andere Weise den Schätzwert x_i der Eingangsgröße X_i (siehe 4.1.3).
- 3 Ermitteln Sie die *Standardunsicherheiten* $u(x_i)$ für jeden Eingangsschätzwert x_i . Bei einem Eingangsschätzwert, der durch statistische Analyse von Meßwerten gewonnen wurde, wird die Standardunsicherheit gemäß 4.2 ermittelt (*Ermittlungsmethode A der Standardunsicherheit*). Bei einem Eingangsschätzwert, der auf andere Weise gewonnen wurde, wird die Standardunsicherheit $u(x_i)$ gemäß 4.3 ermittelt (*Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit*).
- 4 Berechnen Sie die Kovarianzen, die eventuell korrelierten Eingangsschätzwerten zugeordnet sind (siehe 5.2).
- 5 Errechnen Sie das Meßergebnis, das heißt, den Schätzwert y der Meßgröße Y , aus der Funktionsbeziehung f , wobei Sie für die Eingangsgrößen X_i die in Schritt 2 ermittelten Schätzwerte x_i verwenden (siehe 4.1.4).
- 6 Ermitteln Sie die *kombinierte Standardunsicherheit* $u_c(y)$ für das Meßergebnis y anhand der Beschreibung in Kapitel 5 aus den Standardunsicherheiten und Kovarianzen, die den Eingangsschätzwerten zugeordnet sind. Wenn die Messung gleichzeitig mehrere Ausgangsgrößen liefert, berechnen Sie deren Kovarianzen (siehe 7.2.5, H.2, H.3, H.4).
- 7 Ist die Angabe einer *erweiterten Unsicherheit* U erforderlich, die den Zweck hat, einen Bereich von $y - U$ bis $y + U$ anzugeben, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen Anteil der Verteilung von Werten umfaßt, die der Meßgröße Y sinnvollerweise zugeordnet werden können, so multiplizieren Sie die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ mit einem *Erweiterungsfaktor* k , der normalerweise zwischen 2 und 3 liegt, um $U = k u_c(y)$ zu erhalten. Wählen Sie k anhand des für diesen Bereich geforderten Grads des Vertrauens aus (siehe 6.2, 6.3 und speziell Anhang G, in dem die Wahl von k erläutert wird, mit der man einen Bereich erhält, dessen Grad des Vertrauens einem angegebenen Wert nahekommt).
- 8 Protokollieren Sie das Meßergebnis gemeinsam mit seiner kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ oder erweiterten Unsicherheit U entsprechend 7.2.1 und 7.2.3; verwenden Sie dabei eines der in 7.2.2 und 7.2.4 empfohlenen Formate. Beschreiben Sie in der ebenfalls in Kapitel 7 skizzierten Form, wie y und $u_c(y)$ oder U gewonnen wurden.

Anhang A

Empfehlungen der Arbeitsgruppe und des CIPM

A.1 Empfehlung INC-1 (1980)

Die Arbeitsgruppe zur Angabe von Maßunsicherheiten (siehe Vorwort) wurde im Oktober 1980 vom Internationalen Büro für Maß und Gewicht (BIPM) als Antwort auf eine Anforderung des Internationalen Komitees für Maß und Gewicht (CIPM) einberufen. Sie erarbeitete einen detaillierten Bericht für das CIPM, der mit der Empfehlung INC-1 (1980) [2] abschloß. Die deutsche Übersetzung dieser Empfehlung ist in Abschnitt 0.7 des vorliegenden *Leitfadens* angeführt. Hier der verbindliche französische Text [2]:

Expression des incertitudes expérimentales

Recommendation INC-1 (1980)

1. L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

- A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,
- B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2. Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écarts-types» estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3. Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4. L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'«écarts-types».

5. Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir l'incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Empfehlung 1 (CI-1981)

Das CIPM hat den von der Arbeitsgruppe zur Angabe von Meßunsicherheiten vorgelegten Bericht geprüft und auf seiner 70. Tagung im Oktober 1981 folgende Empfehlung verabschiedet [3]:

Empfehlung 1 (CI-1981) Angabe von Meßunsicherheiten

Das Internationale Komitee für Maß und Gewicht,

geleitet von

- der Notwendigkeit, eine einheitliche Methode für die Angabe der Unsicherheit beim Messen in der Metrologie zu finden,
- den Anstrengungen, die viele Organisationen über viele Jahre hinweg unternommen haben,
- dem ermutigenden Fortschritt, der bei der Suche nach einer annehmbaren Lösung gemacht wurde und der das Ergebnis der Diskussionen der Arbeitsgruppe zur Angabe von Meßunsicherheiten darstellt, die 1980 im BIPM zusammengekommen ist,

erkennt an,

- daß die Vorschläge der Arbeitsgruppe die Grundlage für eine letztendliche Einigung über die Angabe von Meßunsicherheiten bilden können

und empfiehlt,

- daß die Vorschläge der Arbeitsgruppe weithin verbreitet werden;
- daß das BIPM versuchen soll, die darin enthaltenen Prinzipien bei internationalen Vergleichen anzuwenden, die im kommenden Jahr unter seiner Schirmherrschaft durchgeführt werden;
- daß andere interessierte Organisationen ermutigt werden, die Vorschläge zu untersuchen und zu prüfen und ihre Meinung dazu an das BIPM zu übermitteln;
- daß das BIPM nach zwei bis drei Jahren einen Bericht über die Anwendung dieser Vorschläge vorlegt.

A.3 Empfehlung 1 (CI-1986)

Das CIPM hat das Problem der Angabe von Meßunsicherheiten auf seiner 75. Tagung im Oktober 1986 weiter behandelt und folgende Empfehlung verabschiedet [4]:

Empfehlung 1 (CI-1986)

Angabe von Meßunsicherheiten bei Arbeiten, die unter der Schirmherrschaft des CIPM durchgeführt werden

Das Internationale Komitee für Maß und Gewicht,

geleitet von der Annahme der Empfehlung INC-1 (1980), die von der Arbeitsgruppe zur Angabe von Meßunsicherheiten erarbeitet wurde, und der Annahme der Empfehlung 1 (CI-1981) durch das CIPM,

geleitet davon, daß bestimmte Mitglieder der Comités Consultatifs Klarheit über diese Empfehlung im Hinblick auf die unter ihrer Aufsicht durchgeführten Arbeiten, vor allem internationale Vergleiche, haben möchten,

erkennt an, daß Absatz 5 der Empfehlung INC-1 (1980), der sich mit Spezialanwendungen, vor allem solchen mit kommerzieller Bedeutung, befaßt, nunmehr von einer Arbeitsgruppe der Internationalen Organisation für Normung (ISO) behandelt wird, die sich aus Vertretern von ISO, OIML und IEC zusammensetzt und an der das CIPM mitwirkt,

fordert dazu auf, daß Absatz 4 der Empfehlung INC-1 (1980) von allen Teilnehmern bei der Angabe von Ergebnissen sämtlicher internationaler Vergleiche oder anderer Arbeiten, die unter Schirmherrschaft des CIPM oder der Comités Consultatifs durchgeführt werden, angewendet wird und daß die kombinierte Unsicherheit aus den Unsicherheiten nach Ermittlungsmethode A und B als *einfache Standardabweichung* angegeben wird.

Anhang B

Allgemeine metrologische Begriffe

B.1 Quelle für die Definitionen

Die Definitionen der für den vorliegenden *Leitfaden* relevanten allgemeinen metrologischen Begriffe wurden der zweiten Auflage des Internationalen Wörterbuchs der Metrologie (Abk. VIM) [6] entnommen, das von der Internationalen Organisation für Normung (ISO) im Namen der sieben Organisationen veröffentlicht wurde, die seine Entwicklung gefördert und die Experten für seine Erarbeitung benannt haben: das Internationale Büro für Maß und Gewicht (BIPM), die Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC), die Internationale Föderation für Klinische Chemie (IFCC), die Internationale Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC), die Internationale Union für reine und angewandte Physik (IUPAP) und die Internationale Organisation für gesetzliches Meßwesen (OIML). Das VIM ist auch die erste zu konsultierende Quelle für Definitionen von Begriffen, die an dieser Stelle oder im übrigen Text nicht angeführt sind.

ANMERKUNG: Einige Grundbegriffe und Benennungen der Statistik finden sich in Anhang C, während die Begriffe "wahrer Wert", "Meßabweichung" und "Unsicherheit" weiter in Anhang D behandelt werden.

B.2 Definitionen

Ähnlich wie in Kapitel 2, bedeuten in Klammern gesetzte Wörter bei einigen Benennungen, daß diese Wörter weggelassen werden können, wenn nicht zu erwarten ist, daß es dadurch nicht zu Verwechslungen kommt.

Bei den in einigen Anmerkungen enthaltenen fettgedruckten Benennungen handelt es sich um zusätzliche metrologische Begriffe, die in der jeweiligen Anmerkung entweder explizit oder implizit definiert werden (siehe Literaturhinweis [6]).

B.2.1 (Meßbare) Größe [VIM 1.1]

Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, die qualitativ beschrieben und quantitativ ermittelt werden kann

ANMERKUNGEN

- 1 Die Benennung "Größe" kann sich auf eine Größe im allgemeinen Sinn [siehe Beispiele a)] oder eine **spezielle Größe** [siehe Beispiele b)] beziehen.

BEISPIELE

- a) Größen im allgemeinen Sinn: Länge, Zeit, Masse, Temperatur, elektrischer Widerstand, Stoffmengenkonzentration;
 - b) spezielle Größen:
 - Länge eines gegebenen Stabes
 - elektrischer Widerstand eines gegebenen Drahtes
 - Stoffmengenkonzentration in einer Weinprobe.
- 2 Größen, die zueinander durch eine Relation geordnet werden können, werden **Größen gleicher Art** genannt.
 - 3 Größen gleicher Art können in **Kategorien** zusammengefaßt werden, z.B.:
 - Arbeit, Wärmemenge, Energie
 - Dicke, Umfang, Wellenlänge.
 - 4 **Formelzeichen für Größen** sind in ISO 31 festgelegt.

B.2.2 (Größen-)Wert [VIM 1.18]

Spezielle Größe, dargestellt als Produkt aus Zahl und Einheit

BEISPIELE:

- | | | | |
|---|-----------|------|----------|
| a) Länge eines Stabes | 5,34 m | oder | 534 cm; |
| b) Masse eines Körpers: | 0,152 kg | oder | 152 g; |
| c) Stoffmenge einer Wasserprobe (H ₂ O): | 0,012 mol | oder | 12 mmol. |

ANMERKUNGEN

- 1 Der Größenwert kann positiv, negativ oder null sein.
- 2 Der Größenwert kann auf mehr als eine Art ausgedrückt werden.

- 3 Die Größenwerte von Größen der Dimension 1 werden allgemein als Zahlen angegeben.
- 4 Eine Größe, die nicht als mit einer Zahl multiplizierte Einheit angegeben werden kann, kann dargestellt werden mit Bezug auf eine Referenzwertskala oder auf ein Meßverfahren oder auf beides.

B.2.3 Wahrer Wert [VIM 1.19]

Wert, der mit der Definition einer betrachteten speziellen Größe übereinstimmt

ANMERKUNGEN

- 1 Diesen Wert würde man bei einer idealen Messung erhalten.
- 2 Wahre Werte sind ihrer Natur nach nicht ermittelbar.
- 3 Häufiger als der bestimmte Artikel "der" wird der unbestimmte Artikel "ein" in Verbindung mit dem "wahren Wert" verwendet, weil es viele Größenwerte geben kann, die mit der Definition einer betrachteten speziellen Größe übereinstimmen.

Leitfaden-Kommentar: Zur Begründung, warum der Begriff "wahrer Wert" im vorliegenden *Leitfaden* nicht verwendet wird, und warum die Begriffe "wahrer Wert einer Meßgröße" (oder einer Größe) und "Wert einer Meßgröße" (oder einer Größe) als gleichwertig betrachtet werden, siehe Anhang D, insbesondere D.3.5.

B.2.4 Richtiger Wert [VIM 1.20]

Durch Vereinbarung anerkannter Wert, der einer betrachteten speziellen Größe zugeordnet wird, und der mit einer dem jeweiligen Zweck angemessenen Unsicherheit behaftet ist

BEISPIELE

- a) Der Wert einer durch ein Bezugsnorm realisierten Größe kann an einer betrachteten Stelle als richtiger Wert angesehen werden;
- b) der von CODATA (1986) empfohlene Wert für die Avogadro-Konstante, $N_A: 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

ANMERKUNGEN

- 1 Ein richtiger Wert wird gelegentlich **zugewiesener Wert, bester Schätzwert, vereinbarter Wert oder Referenzwert** genannt. "Referenzwert" in diesem Sinne darf nicht mit dem Referenzwert im Sinne der Anmerkung zu [VIM] Nr. 5.7 verwechselt werden.
- 2 Um einen richtigen Wert festzulegen, werden oft zahlreiche Meßergebnisse ausgewertet.

Leitfaden-Kommentar: Siehe den *Leitfaden-Kommentar* zu B.2.3.

B.2.5 Messung [VIM 2.1]

Gesamtheit der Tätigkeiten zur Ermittlung eines Größenwertes

ANMERKUNG: Die Tätigkeiten können automatisch ablaufen.

B.2.6 Meßprinzip [VIM 2.3]

Die wissenschaftliche Grundlage eines Meßverfahrens

BEISPIELE

- a) der thermoelektrische Effekt, angewendet auf Temperaturmessungen;
- b) der Josephson-Effekt, angewendet auf Messungen der elektrischen Spannung;
- c) der Doppler-Effekt, angewendet auf Geschwindigkeitsmessungen;
- d) der Raman-Effekt, angewendet auf die Messung der Wellenzahl von Molekülschwingungen.

B.2.7 Meßmethode [VIM 2.4]

Allgemeine Beschreibung der logischen Abfolge von Handlungen zur Durchführung von Messungen

ANMERKUNG: Meßmethoden können auf verschiedene Art qualifiziert werden, zum Beispiel:

- Substitutionsmeßmethode
- Differenzmeßmethode
- Nullabgleich.

B.2.8 Meßverfahren [VIM 2.5]

Gesamtheit der genau beschriebenen Tätigkeiten, wie sie bei der Ausführung spezieller Messungen entsprechend einer vorgegebenen Meßmethode angewendet werden

ANMERKUNG: Es ist üblich, ein Meßverfahren in einem Dokument niederzulegen, das dann "Meßanweisung" (oder **Meßregel**) heißt und normalerweise genügend Einzelheiten enthält, die den Anwender in die Lage versetzen, die Messung ohne weitere Informationen auszuführen.

B.2.9 Meßgröße [VIM 2.6]

Spezielle Größe, die Gegenstand einer Messung ist

BEISPIEL: Dampfdruck einer gegebenen Wasserprobe bei 20 °C.

ANMERKUNG: Die Spezifikation einer Meßgröße kann Angaben über Größen wie Zeitpunkt, Temperatur und Druck erfordern.

B.2.10 Einflußgröße [VIM 2.7]

Größe, die nicht Meßgröße ist, jedoch das Meßergebnis beeinflußt

BEISPIELE

- a) Temperatur einer Meßschraube zur Längenmessung;
- b) Frequenz bei der Messung der Amplitude einer Wechselspannung;
- c) Bilirubin-Konzentration bei der Messung der Hämoglobin-Konzentration in einer Probe von menschlichem Blutplasma.

Leitfaden-Kommentar: Die Definition der Einflußgröße versteht sich einschließlich von Werten, die mit Normen, Referenzmaterialien und Referenzdaten verbunden sind und von denen das Meßergebnis abhängen kann, sowie von Erscheinungen wie schnelle Schwankungen durch das Meßgerät und Größen wie Umgebungstemperatur, Luftdruck und Feuchte.

B.2.11 Meßergebnis [VIM 3.1]

Einer Meßgröße zugeordneter, durch Messung gewonnener Wert

ANMERKUNGEN

- 1 Wenn ein Meßergebnis vorliegt, sollte klargestellt sein, ob es sich bezieht auf:
 - die Anzeige
 - das unberichtigte Meßergebnis
 - das berichtigte Meßergebnis
 und ob mehrere Werte gemittelt werden.
- 2 Eine vollständige Angabe des Meßergebnisses enthält eine Information über die Meßunsicherheit.

B.2.12 Unberichtigtes Meßergebnis [VIM 3.3]

Meßergebnis vor Berichtigung hinsichtlich der systematischen Meßabweichung

B.2.13 Berichtigtes Meßergebnis [VIM 3.4]

Meßergebnis nach Berichtigung hinsichtlich der systematischen Meßabweichung

B.2.14 Meßgenauigkeit [VIM 3.5]

Ausmaß der Übereinstimmung zwischen dem Meßergebnis und einem wahren Wert der Meßgröße

ANMERKUNGEN

- 1 "Genauigkeit" ist ein qualitativer Begriff.
- 2 Für "Genauigkeit" sollte nicht das Wort Präzision verwendet werden.

Leitfaden-Kommentar: siehe *Leitfaden-Kommentar*, zu B.2.3.

B.2.15 Wiederholpräzision (von Meßergebnissen) [VIM 3.6]

Ausmaß der gegenseitigen Annäherung zwischen Ergebnissen aufeinanderfolgender Messungen derselben Meßgröße, ausgeführt unter denselben Bedingungen

ANMERKUNGEN

- 1 Diese Bedingungen werden **Wiederholbedingungen** genannt.
- 2 Wiederholbedingungen umfassen:
 - dasselbe Meßverfahren
 - denselben Beobachter
 - dasselbe Meßgerät, benutzt unter denselben Bedingungen
 - denselben Ort
 - Wiederholung innerhalb einer kurzen Zeitspanne
- 3 Die Wiederholpräzision kann quantitativ durch Streuungskennwerte der Ergebnisse ausgedrückt werden.

B.2.16 Erweiterte Vergleichpräzision (von Meßergebnissen) [VIM 3.7]

Ausmaß der gegenseitigen Annäherung zwischen Meßergebnissen derselben Meßgröße, gewonnen unter veränderten Meßbedingungen

ANMERKUNGEN

- 1 Eine gültige Feststellung der erweiterten Vergleichpräzision erfordert eine Angabe der veränderten Meßbedingungen.
- 2 Die veränderten Meßbedingungen können umfassen:
 - Meßprinzip oder Meßmethode
 - Beobachter
 - Meßgerät
 - Bezugsnorm
 - Ort
 - Benutzungsbedingungen
 - Zeit.
- 3 Die erweiterte Vergleichpräzision kann quantitativ durch Streuungskennwerte der Ergebnisse ausgedrückt werden.
- 4 Ergebnisse sind hier üblicherweise als berichtigte Ergebnisse verstanden.

B.2.17 Empirische Standardabweichung [VIM 3.8]

Für eine Reihe von Messungen derselben Meßgröße die Größe s , welche die Streuung der Ergebnisse charakterisiert und durch die Formel

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}$$

gegeben ist, wobei q_k das Ergebnis der k -ten Messung und $\bar{q}$ der arithmetische Mittelwert der n Ergebnisse ist.

ANMERKUNGEN

- 1 Betrachtet man die Reihe von n Werten als Stichprobe aus einer Verteilung, dann ist $\bar{q}$ ein unverfälschter Schätzwert für den Erwartungswert μ_q und $s^2(q_k)$ ein unverfälschter Schätzwert für die Varianz σ^2 dieser Verteilung.
- 2 Der Ausdruck $s(q_k)/\sqrt{n}$ ist ein Schätzwert für die Standardabweichung der Verteilung von $\bar{q}$ und wird **empirische Standardabweichung des Mittelwerts** genannt.
- 3 Die "empirische Standardabweichung des Mittelwerts" wird verschiedentlich fälschlicherweise **empirischer Standardfehler des Mittelwerts** genannt.

Leitfaden-Kommentar: Einige der in VIM verwendeten Formelzeichen wurden geändert, um die Übereinstimmung mit der Schreibweise in 4.2 des vorliegenden *Leitfadens* herzustellen.

B.2.18 (Meß)unsicherheit [VIM 3.9]

Dem Meßergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftigerweise der Meßgröße zugeordnet werden könnte

ANMERKUNGEN

- 1 Der Parameter kann beispielsweise eine Standardabweichung (oder ein gegebenes Vielfaches davon), oder die halbe Weite eines Bereiches sein, der ein festgelegtes Vertrauensniveau hat.
- 2 Meßunsicherheit enthält im allgemeinen viele Komponenten. Einige dieser Komponenten können aus der statistischen Verteilung der Ergebnisse einer Meßreihe ermittelt und durch empirische Standardabweichungen gekennzeichnet werden. Die anderen Komponenten, die ebenfalls durch Standardabweichungen charakterisiert werden können, werden aus angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermittelt, die sich auf Erfahrung oder andere Information gründen.
- 3 Es wird vorausgesetzt, daß das Meßergebnis der beste Schätzwert für den Wert der Meßgröße ist, und daß alle Komponenten der Unsicherheit zur Streuung beitragen,

eingeschlossen diejenigen, welche von systematischen Einwirkungen herrühren, z.B. solche, die von Korrekturen und Bezugsnormalen stammen.

Leitfaden-Kommentar: Im VIM wird unterstrichen, daß die Definition und die Anmerkungen identisch mit denen im vorliegenden *Leitfaden* sind (siehe 2.2.3).

B.2.19 Meßabweichung [VIM 3.10]

Meßergebnis minus den wahren Wert der Meßgröße

ANMERKUNGEN

- 1 Weil ein wahrer Wert nicht festgestellt werden kann, wird in der Praxis ein richtiger Wert benutzt (siehe [VIM] 1.19 [B 2.3] und 1.20 [B 2.4]).
- 2 Wenn es nötig ist, "Meßabweichung" von "relativer Meßabweichung" zu unterscheiden, wird die erstgenannte zuweilen absolute Meßabweichung genannt. Dies darf nicht mit dem Abweichungsbetrag verwechselt werden.

Leitfaden-Kommentar: Hängt das Ergebnis einer Messung von den Werten anderer Größen als der Meßgröße ab, fließen die Meßabweichungen zu den Meßwerten dieser Größen in die Meßabweichung des Meßergebnisses ein. Siehe auch den *Leitfaden-Kommentar* zu B.2.22 und B.2.3.

B.2.20 Relative Meßabweichung [VIM 3.12]

Meßabweichung dividiert durch einen wahren Wert der Meßgröße

ANMERKUNG: Weil ein wahrer Wert nicht festgestellt werden kann, wird in der Praxis ein richtiger Wert benutzt (siehe [VIM] 1.19 [B 2.3] und 1.20 [B 2.4]).

Leitfaden-Kommentar: Siehe den *Leitfaden-Kommentar* zu B.2.3.

B.2.21 Zufällige Meßabweichung [VIM 3.13]

Meßergebnis minus dem Mittelwert, der sich aus einer unbegrenzten Anzahl von Messungen derselben Meßgröße ergeben würde, die unter Wiederholbedingungen ausgeführt wurden

ANMERKUNGEN

- 1 Zufällige Meßabweichung ist gleich Meßabweichung minus systematische Meßabweichung.
- 2 Weil nur eine endliche Anzahl von Messungen durchgeführt werden kann, kann man nur einen Schätzwert der zufälligen Meßabweichung feststellen.

Leitfaden-Kommentar: Siehe den *Leitfaden-Kommentar* zu B.2.22.

B.2.22 Systematische Meßabweichung [VIM 3.14]

Mittelwert, der sich aus einer unbegrenzten Anzahl von Messungen derselben Meßgröße ergeben würde, die unter Wiederholbedingungen ausgeführt wurden, minus einem wahren Wert der Meßgröße

ANMERKUNGEN

- 1 Systematische Meßabweichung ist gleich Meßabweichung minus zufällige Meßabweichung.
- 2 Wie der wahre Wert können auch die systematische Meßabweichung und ihre Ursachen nicht vollständig bekannt sein.
- 3 Für ein Meßgerät siehe "Systematische Meßabweichung eines Meßgerätes" ([VIM] 5.25).

Leitfaden-Kommentar: Häufig läßt sich die Entstehung einer Meßabweichung (siehe B.2.19) damit erklären, daß eine Reihe von zufälligen und systematischen Einflüssen jeweils eigene Meßabweichungskomponenten zur Gesamtmeßabweichung beitragen. Siehe auch den *Leitfaden-Kommentar* zu B.2.19 und B.2.3.

B.2.23 Korrektur [VIM 3.15]

Algebraisch zum unberichtigten Meßwert addierter Wert zum Ausgleich hinsichtlich der systematischen Meßabweichung

ANMERKUNGEN

- 1 Die Korrektur ist gleich der geschätzten systematischen Meßabweichung mit entgegengesetztem Vorzeichen.
- 2 Weil die systematische Meßabweichung nicht genau bekannt sein kann, ist ein vollständiger Ausgleich nicht möglich.

B.2.24 Korrekturfaktor [VIM 3.16]

Zahlenfaktor, mit dem das unberichtigte Meßergebnis zum Ausgleich hinsichtlich der systematischen Meßabweichung multipliziert wird

ANMERKUNG: Weil die systematische Meßabweichung nicht genau bekannt sein kann, ist ein vollständiger Ausgleich nicht möglich.

Nur für die Normung

Anhang C

Grundbegriffe und Benennungen der Statistik

C.1 Quelle für die Definitionen

Die Definitionen der in diesem Anhang enthaltenen Grundbegriffe der Statistik wurden der Internationalen Norm ISO 3534-1 [7] entnommen. Diese Norm ist auch die erste zu konsultierende Quelle für Definitionen von Begriffen, die an dieser Stelle nicht angeführt sind. Einige der Benennungen und die ihnen zugrundeliegenden Begriffe werden in C.3 genauer ausgeführt, nachdem ihre formale Definition bereits in C.2 angegeben wurde, um die Benutzung des vorliegenden *Leitfadens* weiter zu erleichtern. Der Abschnitt C.3, der außerdem die Definitionen verwandter Begriffe enthält, basiert jedoch nicht direkt auf ISO 3534-1.

C.2 Definitionen

Ähnlich wie in Kapitel 2 und in Anhang B bedeuten in Klammern gesetzte Wörter bei einigen Benennungen, daß diese Wörter weggelassen werden können, wenn es dadurch nicht zu Verwechslungen kommen kann.

Die Begriffe C.2.1 und C.2.14 werden als Eigenschaften von Grundgesamtheiten definiert. Die Definitionen der Begriffe C.2.15 und C.2.31 beziehen sich auf eine Menge von Beobachtungen (siehe Literaturhinweis [7]).

C.2.1 Wahrscheinlichkeit [ISO 3534-1, 1.1]

Reelle Zahl im Bereich von 0 bis 1, die einem zufälligen Ereignis beigelegt ist.

ANMERKUNG: Sie kann entweder auf eine langzeitliche relative Eintretenshäufigkeit oder auf einen Überzeugungsgrad vom Eintreten des Ereignisses bezogen sein. Bei einem hohen Überzeugungsgrad liegt die Wahrscheinlichkeit bei 1.

C.2.2 Zufallsgröße [ISO 3534-1, 1.2]

Variable, die einen beliebigen Wert aus einer gegebenen Menge von Werten annehmen kann und mit der eine Wahrscheinlichkeitsverteilung verknüpft ist ([ISO 3534-1] 1.3 [C.2.3]).

ANMERKUNGEN

- 1 Eine Zufallsgröße, die nur isolierte Werte annehmen kann, wird "diskret" genannt. Eine Zufallsgröße, die beliebige Werte eines endlichen oder unendlichen Bereichs annehmen kann, wird "stetig" genannt.
- 2 Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit $\Pr(A)$ oder $P(A)$ bezeichnet.

Leitfaden-Kommentar: Anstelle des in ISO 3534-1 verwendeten Formelzeichens $P_i(A)$ wird im vorliegenden Leitfaden das Formelzeichen $\Pr(A)$ benutzt.

C.2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung (einer Zufallsgröße) [ISO 3534-1, 1.3]

Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der eine Zufallsgröße beliebige Werte annimmt oder zu einem gegebenen Wertebereich gehört.

ANMERKUNG: Die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtbereich der Werte der Zufallsgröße hat den Wert Eins.

C.2.4 Verteilungsfunktion [ISO 3534-1, 1.4]

Funktion, welche für jedes x die Wahrscheinlichkeit angibt, daß die Zufallsgröße X kleiner oder gleich x ist:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

C.2.5 Wahrscheinlichkeitsdichte (für eine stetige Zufallsgröße) [ISO 3534-1, 1.5]

Erste Ableitung der Verteilungsfunktion, falls sie existiert:

$$f(x) = dF(x) / dx$$

ANMERKUNG: $f(x)dx$ ist das "Wahrscheinlichkeitselement":

$$f(x)dx = \Pr(x < X < x + dx)$$

C.2.6 Wahrscheinlichkeitsfunktion [ISO 3534-1, 1.6]

Funktion, die jedem Wert x_i , den eine diskrete Zufallsgröße X annehmen kann, eine Wahrscheinlichkeit p_i zuordnet:

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

C.2.7 Parameter [ISO 3534-1, 1.12]

Größe zur Kennzeichnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße.

C.2.8 Korrelation [ISO 3534-1, 1.13]

Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Zufallsgrößen innerhalb einer Verteilung von zwei oder mehreren Zufallsgrößen.

ANMERKUNG: Die meisten statistischen Maße der Korrelation geben nur den Grad des linearen Zusammenhangs an.

C.2.9 Erwartungswert (einer Zufallsgröße oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung); Mittelwert (der Grundgesamtheit) [ISO 3534-1, 1.18]

1 Für eine diskrete Zufallsgröße X , die die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt, ist der Erwartungswert durch

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

definiert, wobei die Summierung über alle x_i zu erstrecken ist, die von X angenommen werden können.

2 Für eine stetige Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ ist der Erwartungswert durch

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

definiert, wobei die Integration über den Gesamtbereich der Werte von X zu erstrecken ist.

C.2.10 Zentrierte Zufallsgröße [ISO 3534-1, 1.21]

Zufallsgröße mit dem Erwartungswert Null.

ANMERKUNG: Hat eine Zufallsgröße X den Erwartungswert μ , ist die zugehörige zentrierte Zufallsgröße $(X - \mu)$.

C.2.11 Varianz (einer Zufallsgröße oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung) [ISO 3534-1, 1.22]

Erwartungswert des Quadrats der zentrierten Zufallsgröße ([ISO 3534-1] 1.21 [C.2.10]):

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2$$

C.2.12 Standardabweichung (einer Zufallsgröße oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung) [ISO 3534-1, 1.23]

Positive Quadratwurzel aus der Varianz:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

C.2.13 Zentrales Moment¹⁾ der Ordnung q [ISO 3534-1, 1.28]

Erwartungswert der q -ten Potenz der zentrierten Zufallsgröße $(X - \mu)$ bei einer Verteilung einer einfachen Zufallsgröße:

$$E[(X - \mu)^q]$$

ANMERKUNG: Das zentrale Moment zweiter Ordnung ist die Varianz ([ISO 3534-1] 1.22 [C.2.11]) der Zufallsgröße X .

C.2.14 Normalverteilung; Laplace-Gauß-Verteilung [ISO 3534-1, 1.37]

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

für $-\infty < x < +\infty$.

ANMERKUNG: μ ist der Erwartungswert und σ die Standardabweichung der Normalverteilung.

C.2.15 Merkmal [ISO 3534-1, 2.2]

Eigenschaft, mit deren Hilfe Elemente einer gegebenen Grundgesamtheit identifiziert und voneinander unterschieden werden.

ANMERKUNG: Es kann sich entweder um ein quantitatives Merkmal (Variablen) oder ein qualitatives Merkmal (Attribute) handeln.

C.2.16 Grundgesamtheit [ISO 3534-1, 2.3]

Menge der betrachteten Elemente.

ANMERKUNG: Bei einer Zufallsgröße wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung ([ISO 3534-1] 1.3 [C.2.3]) als Grundgesamtheit dieser Zufallsgröße angesehen.

1) Werden in den Definitionen der Momente die Zufallsgrößen X , $X - a$, Y , $Y - b$ usw. durch ihre Beträge $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$ usw. ersetzt, dann sind dadurch andere Momente definiert, die "absolute Momente" genannt werden.

C.2.17 Häufigkeit [ISO 3534-1, 2.11]

Zahl, die angibt, wie oft ein gegebener Ereignistyp eintritt, bzw. Anzahl der Beobachtungswerte, die zu einer gegebenen Klasse gehören.

C.2.18 Häufigkeitsverteilung [ISO 3534-1, 2.15]

Empirischer Zusammenhang zwischen den Merkmalswerten und den absoluten oder relativen Häufigkeiten ihres Auftretens.

ANMERKUNG: Die Verteilung läßt sich als *Histogramm* ([ISO 3534-1]2.17), *Stabdiagramm* ([ISO 3534-1]2.18), *Häufigkeitssummenpolygon* ([ISO 3534-1]2.19) oder *Zweiwegtafel* ([ISO 3534-1]2.22) graphisch darstellen.

C.2.19 Arithmetischer Mittelwert, Durchschnitt [ISO 3534-1, 2.26]

Summe der Beobachtungswerte dividiert durch die Anzahl der Beobachtungswerte.

ANMERKUNGEN

1 Die Benennung "Mittelwert" wird im allgemeinen mit Bezug auf einen Parameter der Grundgesamtheit, die Benennung "Durchschnitt" mit Bezug auf das Ergebnis einer Berechnung mit den Daten einer Probe benutzt.

2 Der Durchschnitt einer einfachen, aus einer Grundgesamtheit entnommenen Zufallsprobe ist ein erwartungstreuer Schätzer des Mittelwerts dieser Grundgesamtheit. Dennoch werden zuweilen andere Schätzer wie geometrischer oder harmonischer Mittelwert, Median oder Modalwert verwendet.

C.2.20 Varianz [ISO 3534-1, 2.33]

Streuungsmaß, das gleich der Summe der quadrierten Abweichungen der Beobachtungswerte von ihrem arithmetischen Mittelwert dividiert durch die um 1 verminderte Anzahl der Beobachtungswerte ist:

BEISPIEL: Für n Beobachtungswerte $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit dem Mittelwert

$$\bar{x} = (1/n) \sum x_i$$

ist die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

ANMERKUNGEN:

1 Die Varianz einer Stichprobe ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz einer Grundgesamtheit.

2 Die Varianz ist das $n/(n-1)$ -fache des zentralen Moments zweiter Ordnung (siehe Anmerkung zu [ISO 3534-1] 2.39).

Leitfaden-Kommentar: Die hier definierte Varianz läßt sich treffender "Stichprobenschätzwert für die Varianz der Grundgesamtheit" nennen. Die Varianz für eine Stichprobe wird normalerweise als zentrales Moment zweiter Ordnung der Stichprobe definiert (siehe C.2.13 und C.2.22).

C.2.21 Standardabweichung [ISO 3534-1, 2.34]

Positive Quadratwurzel aus der Varianz.

ANMERKUNG: Die Standardabweichung der Stichprobe ist ein nicht erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung der Grundgesamtheit.

C.2.22 Zentrales Moment der Ordnung q [ISO 3534-1, 2.37]

In einer Verteilung eines einzelnen Merkmals das arithmetische Mittel der q -ten Potenz der Differenz von Beobachtungswerten und ihrem Mittelwert $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungswerte ist.

ANMERKUNG: Das zentrale Moment erster Ordnung ist gleich Null.

C.2.23 Kenngröße [ISO 3534-1, 2.45]

Funktion von Zufallsgrößen einer Stichprobe.

ANMERKUNG: Eine Kenngröße als Funktion von Zufallsgrößen ist ebenfalls eine Zufallsgröße und nimmt als solche von Stichprobe zu Stichprobe verschiedene Werte an. Der Wert der Kenngröße, den man mit den Beobachtungswerten aus dieser Funktion gewinnt, läßt sich in einer statistischen Prüfung oder als Schätzwert eines Parameters der Grundgesamtheit verwenden, zum Beispiel als Mittelwert oder Standardabweichung.

C.2.24 Schätzung [ISO 534-1, 2.49]

Das Zuordnen von Zahlenwerten aus Stichprobenergebnissen zu Parametern einer Verteilung, die als statistisches Modell für eine Grundgesamtheit gewählt wurde, aus der die Stichprobe stammt.

ANMERKUNG: Das Ergebnis dieser Operation kann als Einzelwert (Punktschätzwert; siehe [ISO 3534-1]2.51 [C.2.26]) oder als Schätzintervall (siehe [ISO 3534-1]2.57 [C.2.27] und 2.58 [C.2.28]) angegeben werden.

C.2.25 Schätzer [ISO 3534-1, 2.50]

Kenngröße zur Schätzung eines Parameters einer Grundgesamtheit.

C.2.26 Schätzwert [ISO 3534-1, 2.51]

Wert eines Schätzers als Ergebnis einer Schätzung.

C.2.27 Zweiseitiger Vertrauensbereich [ISO 3534-1, 2.57]

Sind T_1 und T_2 zwei Funktionen der Beobachtungswerte und θ der zu schätzende Parameter einer Gesamtheit, so daß die Wahrscheinlichkeit $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ mindestens gleich $(1 - \alpha)$ ist [wobei $(1 - \alpha)$ eine festgelegte positive Zahl kleiner als 1 ist], dann ist das Intervall zwischen T_1 und T_2 ein zweiseitiger $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für θ .

ANMERKUNGEN:

- 1 Die Grenzen T_1 und T_2 des Vertrauensbereichs sind *Kenngrößen* ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) und nehmen als solche von Stichprobe zu Stichprobe verschiedene Werte an.
- 2 Bei einer umfangreichen Stichprobenreihe ist die relative Häufigkeit der Fälle, in denen der wahre Wert des Parameters θ vom Vertrauensbereich überdeckt wird, größer oder gleich $(1 - \alpha)$.

C.2.28 Einseitiger Vertrauensbereich [ISO 3534-1, 2.58]

Ist T eine Funktion der Beobachtungswerte und θ der zu schätzende Parameter einer Grundgesamtheit, so daß die Wahrscheinlichkeit $\Pr(T \geq \theta)$ [oder die Wahrscheinlichkeit $\Pr(T \leq \theta)$] mindestens gleich $(1 - \alpha)$ ist [wobei $(1 - \alpha)$ eine festgelegte positive Zahl kleiner als 1 ist], dann ist das Intervall vom kleinstmöglichen Wert von θ bis T (oder das Intervall von T bis zum größtmöglichen Wert von θ) ein einseitiger $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für θ .

- 1 Die Grenze T des Vertrauensbereichs ist eine *Kenngröße* ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) und nimmt als solche von Stichprobe zu Stichprobe verschiedene Werte an.
- 2 Siehe Anmerkung 2 von ([ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27]).

C.2.29 Vertrauensniveau [ISO 3534-1, 2.59]

Wert $(1 - \alpha)$ der zu einem Vertrauensbereich oder einem statistischen Anteilsbereich gehörenden Wahrscheinlichkeit. (Siehe [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27], 2.58 [C.2.28] und 2.61 [C.2.30]).

ANMERKUNG: Der Wert $(1 - \alpha)$ wird oft in Prozent angegeben.

C.2.30 Statistischer Anteilsbereich [ISO 3534-1, 2.61]

Intervall, für das mit einem gegebenen Vertrauensniveau gesagt werden kann, das es mindestens einen vorgegebenen Anteil der Grundgesamtheit enthält.

ANMERKUNGEN

- 1 Sind beide Grenzen statistisch definiert, handelt es sich um einen zweiseitigen Bereich. Ist eine der beiden Grenzen

nicht endlich oder besteht sie aus der Grenze der Variablen, ist der Bereich einseitig.

- 2 Im Englischen auch "statistical tolerance interval" genannt. Diese Benennung kann zur Verwechslung mit dem in ISO 3534-2 definierten "tolerance interval" führen und sollte daher nicht verwendet werden.

C.2.31 Freiheitsgrade [ISO 3534-1, 2.85]

Ganz allgemein die Anzahl der Glieder einer Summe abzüglich der Anzahl der Nebenbedingungen, die für die Glieder dieser Summe gelten.

C.3 Ausführliche Erläuterung von Begriffen und Benennungen

C.3.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Funktion $g(z)$ über eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z)$ der Zufallsgröße z ist definiert durch

$$E[g(z)] = \int g(z)p(z)dz$$

wobei entsprechend der Definition von $p(z)$ gilt: $\int p(z)dz = 1$. Der Erwartungswert der Zufallsgröße z , auch Erwartungswert oder Mittelwert von z genannt und bezeichnet mit μ_z , ist definiert durch

$$\mu_z = E[g(z)] = \int zp(z)dz$$

Er wird statistisch geschätzt durch $\bar{z}$, den arithmetischen Mittelwert oder das Mittel aus n unabhängigen Beobachtungswerten z_i der Zufallsgröße z , deren Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z)$ ist:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

C.3.2 Varianz

Die Varianz einer Zufallsgröße ist der Erwartungswert ihrer quadratischen Abweichung von ihrem Erwartungswert. Somit ist die Varianz der Zufallsgröße z mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z)$ gegeben durch

$$\sigma^2(z_i) = \int (z - \mu_z)^2 p(z)dz$$

wobei μ_z der Erwartungswert von z ist. Die Varianz $\sigma^2(z)$ läßt sich wie folgt schätzen:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2, \text{ wobei } \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

Die z_i sind n Beobachtungswerte von z .

ANMERKUNGEN

1 Der Faktor $n - 1$ im Ausdruck für $s^2(z)$ ergibt sich aus der Korrelation zwischen z_i und $\bar{z}$ und spiegelt die Tatsache wider, daß sich in der Menge $\{z_i - \bar{z}\}$ nur $n - 1$ unabhängige Elemente befinden.

2 Ist der Erwartungswert μ_z von z bekannt, so kann die Varianz wie folgt geschätzt werden:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z)^2$$

Die Varianz für den arithmetischen Mittelwert bzw. das Mittel der Beobachtungswerte ist ein besser geeignetes Maß für die Unsicherheit eines Meßergebnisses als die Varianz der einzelnen Beobachtungswerte. Die Varianz für eine Variable z muß sorgfältig von der Varianz für das Mittel $\bar{z}$ unterschieden werden. Die Varianz für den arithmetischen Mittelwert einer Reihe von n unabhängigen Beobachtungswerten z_i von z ist gegeben durch $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ und wird durch die empirische Varianz des Mittelwerts wie folgt geschätzt:

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die positive Quadratwurzel aus der Varianz. Während man die Standardunsicherheit nach Ermittlungsmethode A durch Ziehen der Quadratwurzel aus der statistisch ermittelten Varianz gewinnt, ist es bei der Ermittlung der Standardunsicherheit nach Methode B häufig bequemer, zunächst eine nichtstatistische äquivalente Standardabweichung zu berechnen und dann durch Quadrieren der Standardabweichung die äquivalente Varianz zu gewinnen.

C.3.4 Kovarianz

Die Kovarianz zweier Zufallsgrößen ist ein Maß für ihre gegenseitige Abhängigkeit. Die Kovarianz der Zufallsgrößen y und z ist gegeben durch

$$\text{cov}(y, z) = \text{cov}(z, y) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{cov}(y, z) &= \text{cov}(z, y) \\ &= \iint (y - \mu_y)(z - \mu_z) p(y, z) dy dz \\ &= \iint y z p(y, z) dy dz - \mu_y \mu_z \end{aligned}$$

wobei $p(y, z)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der beiden Variablen y und z ist. Die Kovarianz $\text{cov}(y, z)$ [auch bezeichnet mit $v(y, z)$] läßt sich schätzen durch $s(y_i, z_i)$, die man aus n unabhängigen Paaren von gleichzeitigen Beobachtungen y_i und z_i von y und z gewinnt:

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

wobei

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{und} \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

ANMERKUNG: Die geschätzte Kovarianz der beiden Mittelwerte $\bar{y}$ und $\bar{z}$ wird durch $s(y, z) = s(y_i, z_i)/n$ angegeben.

C.3.5 Kovarianzmatrix

Kovarianzmatrix wird bei einer multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung die Matrix V genannt, deren Elemente gleich den Varianzen und Kovarianzen der Variablen sind. Die Diagonalelemente $v(z, z) \equiv \sigma^2(z)$ oder $s(z_i, z_i) \equiv s^2(z_i)$ sind die Varianzen, während die Nichtdiagonalelemente $v(y, z)$ oder $s(y_i, z_i)$ die Kovarianzen sind.

C.3.6 Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die relative gegenseitige Abhängigkeit zweier Variablen, der gleich dem Verhältnis ihrer Kovarianzen zur positiven Quadratwurzel aus dem Produkt ihrer Varianzen ist. Somit gilt

$$\rho(y, z) = \rho(z, y) = \frac{v(y, z)}{\sqrt{v(y, y)v(z, z)}} = \frac{v(y, z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

mit den Schätzwerten:

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

Der Korrelationskoeffizient ist eine reine Zahl, so daß $-1 \leq \rho \leq +1$ oder $-1 \leq r(y_i, z_i) \leq +1$.

ANMERKUNGEN

1 Da ρ und r reine Zahlen im Bereich von (einschließlich) -1 bis $+1$ sind, es sich bei Kovarianzen jedoch gewöhnlich um Größen mit sehr unhandlichen physikalischen Dimensionen und Größenordnungen handelt, sind Korrelationskoeffizienten im allgemeinen brauchbarer als Kovarianzen.

2 Bei multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird gewöhnlich anstelle der Kovarianzmatrix die Matrix der Korrelationskoeffizienten angegeben. Da $\rho(y, y) = 1$ und

$r(y_i, y_i) = 1$, sind die Diagonalelemente dieser Matrix gleich Eins.

3 Wenn die Eingangsschätzwerte x_i und x_j korreliert sind (siehe 5.2.2) und eine Änderung δ_i von x_i eine Änderung δ_j von x_j hervorruft, dann läßt sich der zu x_i und x_j gehörige Korrelationskoeffizient näherungsweise wie folgt schätzen:

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i) \delta_j / u(x_j) \delta_i$$

Diese Beziehung kann als Grundlage für die empirische Schätzung der Korrelationskoeffizienten dienen. Sie kann außerdem zur Berechnung der näherungsweisen Änderung eines Eingangsschätzwerts aufgrund der Änderung eines anderen verwendet werden, wenn deren Korrelationskoeffizient bekannt ist.

C.3.7 Unabhängigkeit

Zwei Zufallsgrößen sind statistisch unabhängig voneinander, wenn ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung das Produkt ihrer individuellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist.

ANMERKUNG: Sind zwei Zufallsgrößen unabhängig voneinander, sind ihre Kovarianz und ihr Korrelationskoeffizient gleich Null. Umgekehrt gilt dies jedoch nicht notwendigerweise.

C.3.8 Die t -Verteilung; Student-Verteilung

Die t -Verteilung oder Student-Verteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße t , für deren Wahrscheinlichkeitsdichte gilt:

$$p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi \nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$-\infty < t < +\infty$$

wobei Γ die Gammafunktion ist und $\nu > 0$. Der Erwartungswert der t -Verteilung ist gleich Null und die Varianz ist $\nu/(\nu - 2)$ für $\nu > 2$. Wenn $\nu \rightarrow \infty$, nähert sich die t -Verteilung der Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (siehe C.2.14).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ ist die t -Verteilung, wenn die Zufallsgröße z mit dem Erwartungswert μ_z normalverteilt ist, wobei $\bar{z}$ der arithmetische Mittelwert aus n unabhängigen Beobachtungswerten z_i von z , $s(z_i)$ die empirische Standardabweichung der n Beobachtungswerte und $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ die empirische Standardabweichung des Mittels $\bar{z}$ mit $\nu = n - 1$ Freiheitsgraden sind.

Anhang D

"Wahrer" Wert, Meßabweichung und Unsicherheit

Die Benennung **wahrer Wert** (B.2.3) wurde traditionell in Veröffentlichungen zur Unsicherheit verwendet, sie wird jedoch aus den in diesem Anhang angeführten Gründen im vorliegenden *Leitfaden* nicht benutzt. Da die Benennungen "Meßgröße", "Meßabweichung" und "Unsicherheit" häufig falsch verstanden werden, wird die Diskussion der ihnen zugrunde liegenden Begriffe in diesem Anhang weiterführend zur Behandlung in Kapitel 3 vertieft. Anhand zweier Bilder wird gezeigt, warum der Begriff der Unsicherheit nach dem vorliegenden *Leitfaden* auf dem Meßergebnis und seiner berechneten Unsicherheit statt auf den Größen "wahrer" Wert und Meßabweichung beruht, die nicht erfaßbar sind.

D.1 Die Meßgröße

D.1.1 Der erste Schritt bei einer Messung ist die Spezifizierung der Meßgröße, das heißt der Größe, die gemessen werden soll. Sie kann nicht durch einen Wert angegeben werden, sondern nur in Form einer Beschreibung dieser Größe. Allerdings läßt sie sich vom Prinzip her ohne eine unendliche Menge von Informationen niemals *vollständig* beschreiben. In dem Maße, wie sie Raum für Interpretationen läßt, trägt die unvollständige Beschreibung der Meßgröße somit eine Unsicherheitskomponente zur Unsicherheit des Meßergebnisses bei, die in bezug auf die geforderte Genauigkeit des Meßergebnisses signifikant oder nicht signifikant sein kann.

D.1.2 Üblicherweise werden in der Definition einer Meßgröße bestimmte physikalische Zustände und Bedingungen angegeben.

BEISPIEL: Die Schallgeschwindigkeit in einem trockenen Luftgemisch mit der Zusammensetzung (Stoffmengenanteile) $N_2 = 0,7808$, $O_2 = 0,2095$, $Ar = 0,009\,35$ und $CO_2 = 0,000\,35$ bei der Temperatur $T = 273,15\,K$ und dem Druck $p = 101\,325\,Pa$.

D.2 Die realisierte Größe

D.2.1 Im Idealfall stimmt die für die Messung realisierte Größe vollständig mit der Definition der Meßgröße überein. Häufig kann eine solche Größe jedoch nicht realisiert werden, so daß die Messung an einer Größe vorgenommen wird, die eine Näherung an die Meßgröße darstellt.

D.3 "Wahrer" Wert und berichtigter Wert

D.3.1 Das Meßergebnis für die realisierte Größe wird hinsichtlich der Differenz zwischen dieser Größe und der Meßgröße berichtigt, um vorherzusagen, welches Meßergebnis erzielt worden wäre, wenn die realisierte Größe die Definition der Meßgröße tatsächlich vollkommen erfüllt hätte. Genauso wird das Meßergebnis für die realisierte Größe hinsichtlich aller übrigen erkannten signifikanten systematischen Einflüsse berichtigt. Obwohl das berichtigte Endergebnis mitunter als bester Schätzwert des "wahren" Wertes der Meßgröße angesehen wird, ist es in Wirklichkeit einfach der beste Schätzwert des Wertes der Größe, die gemessen werden sollte.

D.3.2 Als Beispiel sei angenommen, bei der Meßgröße handele es sich um die Dicke einer gegebenen Werkstoffplatte bei einer vorgegebenen Temperatur. Die Probe wird auf eine Temperatur gebracht, die der vorgegebenen Temperatur nahekommt, und ihre Dicke wird an einer bestimmten Stelle mit einer Bügelmeßschraube gemessen. Bei der realisierten Größe handelt es sich dann um die Materialdicke an dieser Stelle und bei dieser Temperatur unter dem von der Bügelmeßschraube ausgeübten Druck.

D.3.3 Es werden die Temperatur des Materials und der ausgeübte Druck zum Zeitpunkt der Messung ermittelt. Das unberichtigte Meßergebnis für die realisierte Größe wird dann berichtigt, wobei die Kalibrierkurve der Bügelmeßschraube, die Abweichung der Proben temperatur von der vorgegebenen Temperatur sowie die leichte Verformung der Probe unter dem ausgeübten Druck berücksichtigt werden.

D.3.4 Das berichtigte Ergebnis kann als bester Schätzwert des "wahren" Wertes bezeichnet werden, wobei "wahr" in dem Sinne zu verstehen ist, daß es sich um den Wert einer Größe handelt, von der angenommen wird, daß sie die Definition der Meßgröße vollkommen erfüllt; wäre die Bügelmeßschraube jedoch an einer anderen Stelle der Werkstoffplatte angesetzt worden, hätte sich eine andere realisierte Größe mit einem anderen "wahren" Wert ergeben. Doch auch dieser "wahre" Wert wäre vereinbar mit der Definition der Meßgröße, denn sie verlangt nicht, daß die Dicke der Platte an einer bestimmten Stelle zu ermitteln ist. Somit weist der "wahre" Wert auf Grund

der unvollständigen Definition der Meßgröße eine Unsicherheit auf, die aus Messungen an verschiedenen Stellen der Platte errechnet werden kann. Jede Meßgröße weist auf einem gewissen Niveau eine solche "Eigenunsicherheit" auf, die sich im Prinzip auf irgendeine Weise schätzen läßt. Es handelt sich hierbei um die Mindestunsicherheit, mit der eine Meßgröße ermittelt werden kann. Jede Messung, die nur diese Unsicherheit aufweist, kann als bestmögliche Messung der Meßgröße betrachtet werden. Soll für die jeweilige Größe ein Wert mit einer geringeren Unsicherheit gewonnen werden, so läßt sich das nur durch eine umfassendere Definition der Meßgröße erreichen.

ANMERKUNGEN

1 Im angeführten Beispiel wird eine Reihe von anderen Dingen, die die Dicke möglicherweise beeinflussen können, bei der Spezifizierung der Meßgröße nur ungenau berücksichtigt: Luftdruck, Feuchte, Lage der Platte im Gravitationsfeld, Art der Auflagerung usw.

2 Obwohl die Meßgröße hinreichend genau definiert werden soll, so daß die aus einer unvollständigen Definition resultierende Unsicherheit im Vergleich zur geforderten Meßgenauigkeit vernachlässigt werden kann, muß eingeräumt werden, daß dies vielleicht nicht immer durchführbar ist. So kann die Definition beispielsweise unvollständig sein, weil sie Parameter nicht enthält, von denen ungerechtfertigterweise angenommen wurde, sie könnten nur vernachlässigbaren Einfluß haben. Ebenso kann es sein, daß sie Bedingungen impliziert, die niemals vollkommen erfüllt sein können und deren unvollständige Realisierung sich schwer berücksichtigen läßt. So impliziert die Schallgeschwindigkeit aus dem Beispiel in D.1.2 unendliche ebene Wellen mit verschwindend geringer Amplitude. In dem Maße, wie diese Bedingungen nicht erfüllt sind, müssen Beugung und nichtlineare Effekte berücksichtigt werden.

3 Eine unzureichende Spezifizierung der Meßgröße kann zu Diskrepanzen zwischen den Meßergebnissen von Messungen scheinbar derselben Größe in verschiedenen Laboratorien führen.

D.3.5 Die Benennung "wahrer Wert einer Meßgröße" oder einer Größe (oft abgekürzt zu "wahrer Wert") wird im vorliegenden *Leinfaden* vermieden, da das Wort "wahr" als überflüssig betrachtet wird. "Meßgröße" (siehe B.2.9) bedeutet "spezielle Größe, die Gegenstand einer Messung ist", daher bedeutet "Wert einer Meßgröße" den "Wert einer speziellen Größe, die Gegenstand einer Messung ist". Da "spezielle Größe" allgemein als definite oder angegebene Größe verstanden wird (siehe B.2.1, Anmerkung 1), ist das Adjektiv "wahr" in "wahrer Wert einer Meßgröße" (oder "wahrer Wert einer Größe") unnötig; der "wahre" Wert der Meßgröße (oder Größe) ist ganz einfach

der Wert der Meßgröße (oder Größe). Hinzu kommt, wie in der Diskussion weiter oben festgestellt, daß ein einziger "wahrer" Wert nur ein Idealbegriff ist.

D.4 Meßabweichung

Ein berichtiges Meßergebnis ist nicht der Wert der Meßgröße, das heißt, es weicht davon ab auf Grund der unvollkommenen Messung der realisierten Größe infolge von zufälligen Schwankungen der Beobachtungswerte (zufälligen Einflüssen), unvollkommener Ermittlung der Korrekturen für systematische Einflüsse und Kenntnislücken über bestimmte physikalische Erscheinungen (auch systematische Einflüsse). Weder der Wert der realisierten Größe noch der Wert der Meßgröße können jemals genau bekannt sein; bekannt sein können lediglich ihre Schätzwerte. Im oben angeführten Beispiel *kann* die gemessene Dicke der Platte abweichen, das heißt vom Wert der Meßgröße (der Plattendicke) verschieden sein, da jeder der folgenden Faktoren in Kombination mit den anderen eine unbekannte Abweichung zum Meßergebnis beitragen kann:

- leichte Unterschiede zwischen den Anzeigewerten der Bügelmeßschraube bei mehrmaliger Messung derselben realisierten Größe;
- mangelhafte Kalibrierung der Bügelmeßschraube;
- mangelhafte Messung der Temperatur und des ausgeübten Drucks;
- Kenntnislücken hinsichtlich des Einflusses von Temperatur, Luftdruck und Feuchtigkeit auf die Probe oder die Bügelmeßschraube oder auf beide.

D.5 Unsicherheit

D.5.1 Während der genaue Wert der einzelnen Beiträge zur Abweichung eines Meßergebnisses unbekannt ist und nicht bekannt sein kann, läßt sich die mit systematischen und zufälligen Einflüssen verbundene *Unsicherheit*, die zur Meßabweichung führt, ermitteln. Doch selbst wenn die ermittelten Unsicherheiten gering sind, ist dies keine Garantie dafür, daß auch die Abweichung des Meßergebnisses gering ist, denn bei der Ermittlung einer Korrektur oder der Bewertung von Kenntnislücken kann ein systematischer Einfluß unberücksichtigt geblieben sein, weil man ihn nicht erkannt hat. Daher ist die Unsicherheit eines Meßergebnisses nicht unbedingt ein Indikator für die Wahrscheinlichkeit, daß das Meßergebnis nahe am Wert der Meßgröße liegt. Sie ist ganz einfach ein Schätzwert für die wahrscheinliche Nähe zum besten Wert entsprechend den vorhandenen Kenntnissen.

D.5.2 Die Meßunsicherheit drückt somit aus, daß es für eine gegebene Meßgröße und ein gegebenes, zu ihr gehörendes Meßergebnis nicht einen Wert, sondern eine unendliche Menge von um das Ergebnis gestreuten Werten gibt, die mit allen Beobachtungen und Daten vereinbar

sind und der Meßgröße mit verschiedenen Graden von Glaubwürdigkeit zugewiesen werden können.

D.5.3 Glücklicherweise trifft das hier Behandelte auf viele praktische Meßsituationen nicht zu. Hierzu gehören die Fälle, in denen die Meßgröße hinreichend gut definiert ist, in denen Normale oder Meßgeräte mit Hilfe von wohlbekannten Referenznormalen kalibriert werden, die sich auf nationale Normale zurückführen lassen, und in denen die Unsicherheiten der Kalibrierkorrekturen unbedeutend sind im Vergleich zu jenen, die aus den zufälligen Einflüssen auf die Anzeigewerte der Meßgeräte oder aus einer begrenzten Zahl von Beobachtungswerten resultieren (siehe E.4.3). Nichtsdestoweniger tragen Kenntnismängel hinsichtlich Einflußgrößen und ihrer Effekte wesentlich zur Unsicherheit eines Meßergebnisses bei.

D.6 Graphische Darstellung

D.6.1 Bild D.1 stellt einige der in Kapitel 3 des vorliegenden *Leitfadens* sowie in diesem Anhang behandelten Begriffe bildlich dar. Es zeigt, warum die Unsicherheit und nicht die Meßabweichung den Schwerpunkt des vorliegenden *Leitfadens* bildet. Die genaue Abweichung eines Meßergebnisses ist im allgemeinen unbekannt und nicht erfaßbar. Man kann lediglich die Werte der Eingangsgrößen einschließlich der Korrekturen für erkannte systematische Einflüsse mit ihren jeweiligen Standardunsicherheiten (geschätzten Standardabweichungen) schätzen. Diese Schätzung kann entweder auf der Grundlage unbekannter Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch mehrmalige Beobachtung stichprobenartig erfaßt werden, oder anhand von subjektiven oder *A-priori* Verteilungen erfolgen, die auf einem Pool verfügbarer Informationen basieren. Das Meßergebnis kann dann aus den Schätzwerten der Eingangsgrößen und die kombinierte Standardunsicherheit dieses Ergebnisses aus

den Standardunsicherheiten der Schätzwerte errechnet werden. Nur wenn es eine solide Basis für die Annahme gibt, daß alles richtig durchgeführt wurde, ohne daß signifikante systematische Einflüsse übersehen wurden, läßt sich auch annehmen, daß das Meßergebnis ein zuverlässiger Schätzwert der Meßgröße ist und daß seine kombinierte Standardunsicherheit ein verlässliches Maß für die mögliche Meßabweichung ist.

ANMERKUNGEN

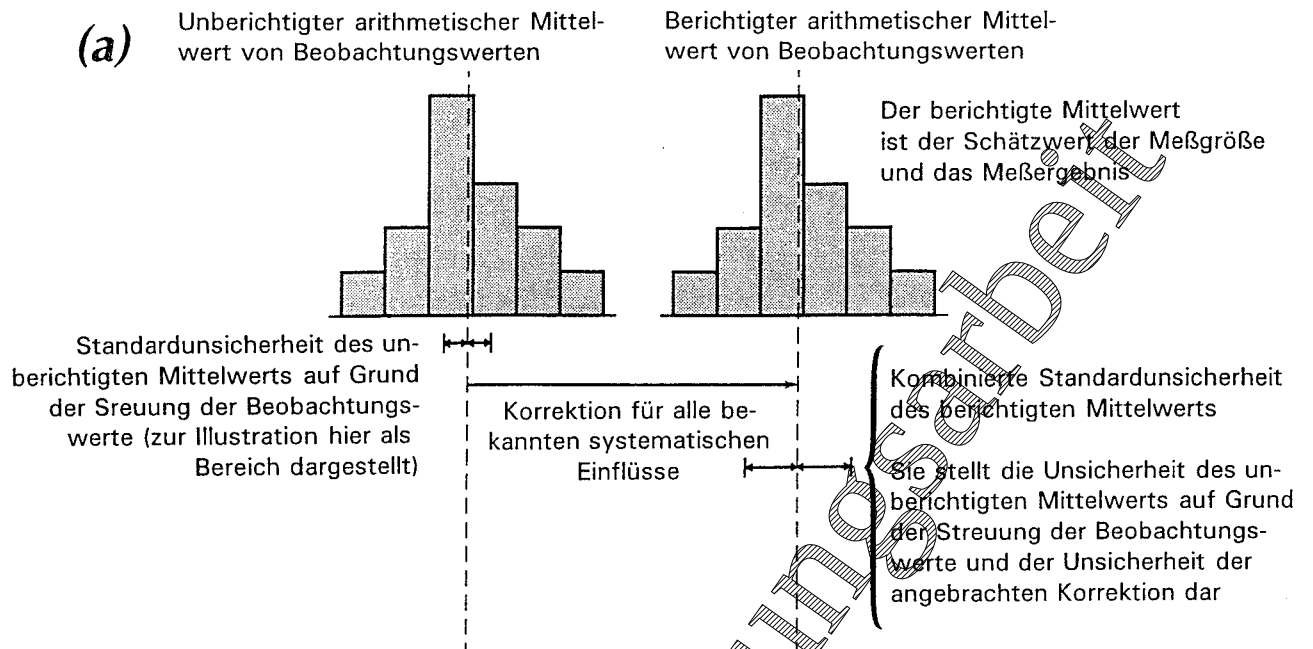
1 In Bild D.1 sind die Beobachtungswerte zur Illustration als Histogramm dargestellt (siehe 4.4.3 und Bild 1b).

2 Die Korrektur für eine Meßabweichung ist gleich dem negativen Wert des Schätzwerts der Meßabweichung. Daher hat der Pfeil in den Bildern D.1 und D.2, der die Korrektur für eine Meßabweichung anzeigt, die gleiche Länge wie die Meßabweichung, weist jedoch in die entgegengesetzte Richtung, und umgekehrt. Aus dem Text im Bild geht hervor, ob ein bestimmter Pfeil für eine Meßabweichung oder für eine Korrektur steht.

D.6.2 In Bild D.2 sind einige der Begriffe aus Bild D.1 bildlich dargestellt, jedoch in anderer Form. Zusätzlich zeigt es noch, daß es viele Werte für eine Meßgröße geben kann, wenn diese unvollständig definiert wurde (Eintrag g im Bild). Die aus dieser unvollständigen Definition resultierende Unsicherheit wird durch Messungen mehrfacher Realisierungen der Meßgröße ermittelt, wobei dieselbe Methode, dieselben Meßgeräte usw. (siehe D.3.4) verwendet werden.

ANMERKUNG: In der Spalte mit der Überschrift "Varianz" sind als Varianzen jene $u_i^2(y)$ zu verstehen, die in Gleichung (11) in Abschnitt 5.1.3 definiert sind; daher summieren sie sich, wie dargestellt, linear auf.

Begriffe, die auf beobachtbaren Größen basieren



Idealbegriffe, die auf nicht erfassbaren Größen beruhen

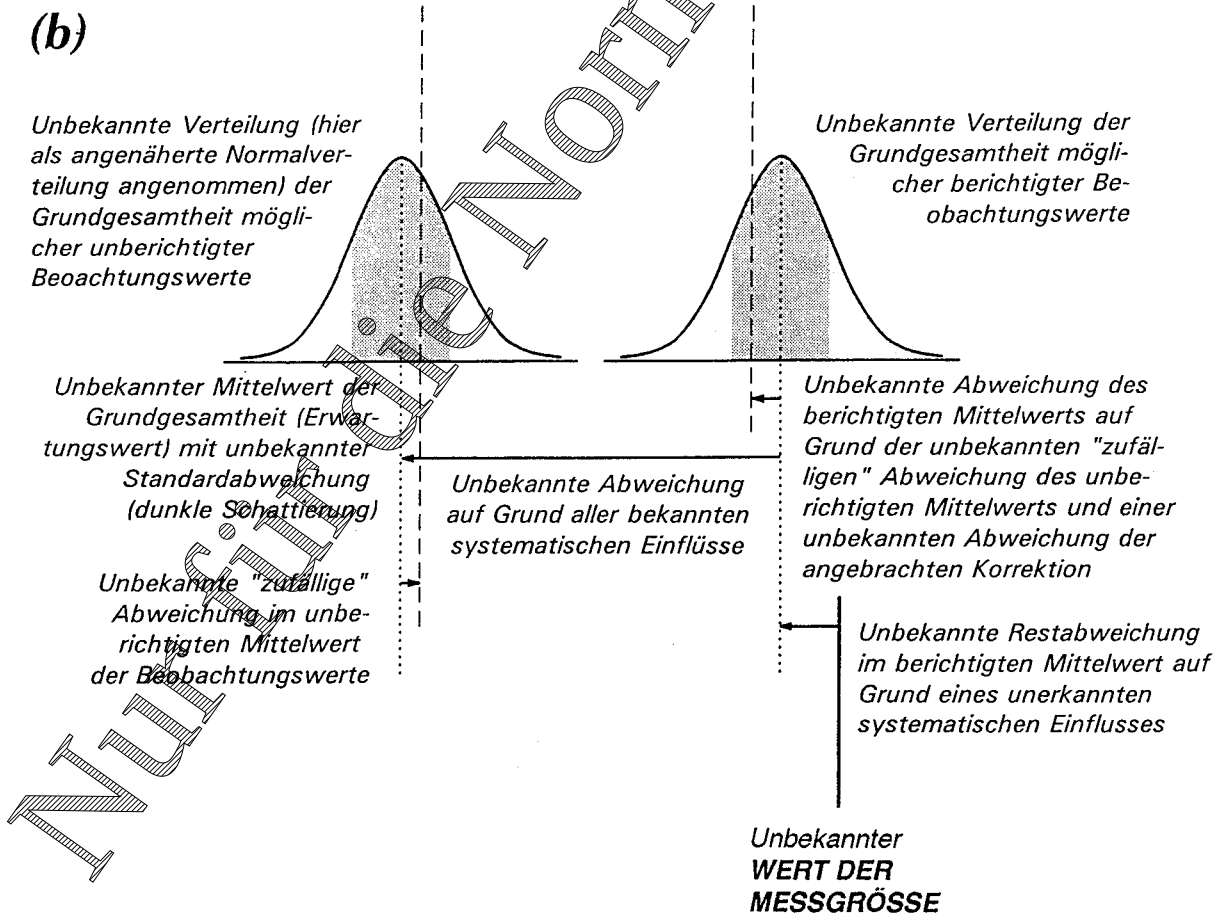


Bild D.1. Graphische Darstellung von Wert, Meßabweichung und Unsicherheit

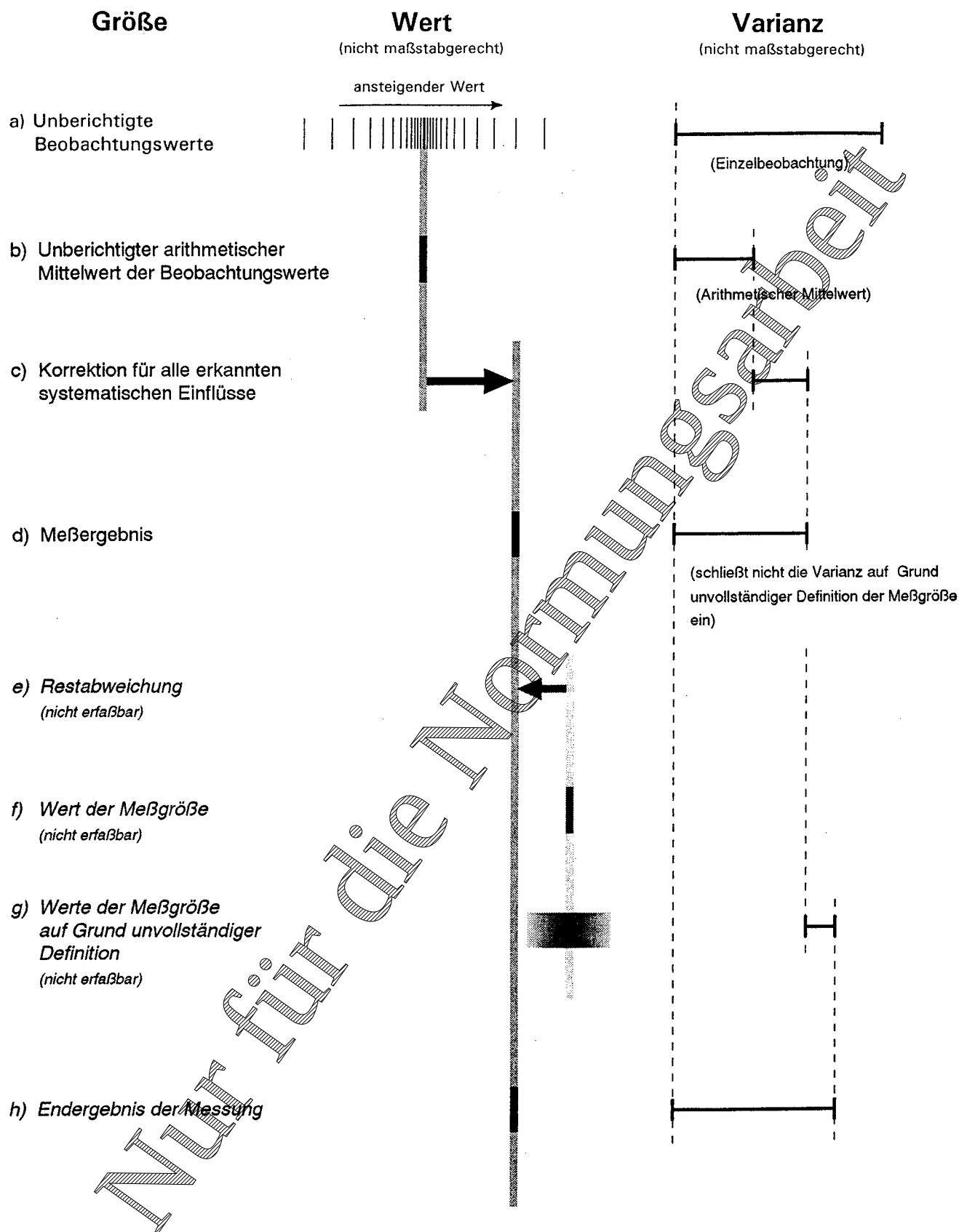


Bild D.2. Graphische Darstellung von Werten, Meßabweichung und Unsicherheit

Anhang E

Motiv und Grundlage für die Empfehlung INC-1 (1980)

In diesem Anhang wird kurz auf Motiv und statistische Grundlage der Empfehlung INC-1 (1980) der Arbeitsgruppe über die Angabe von Unsicherheiten eingegangen, auf der der vorliegende *Leitfaden* beruht. Eine weitergehende Behandlung erfolgt in den Quellen [1, 2, 11, 12].

E.1 "Sicher", "zufällig" und "systematisch"

E.1.1 Im vorliegenden *Leitfaden* wird eine weithin anwendbare Methode zur Berechnung und zur Angabe der Unsicherheit beim Messen vorgestellt. Sie liefert eher einen realistischen als einen "sicheren" Wert für die Unsicherheit und beruht auf der Vorstellung, daß es keinen wesentlichen Unterschied gibt zwischen einer Unsicherheitskomponente, die von einem zufälligen Einfluß herührt, und einer, die durch eine Korrektur für einen systematischen Einfluß (siehe 3.2.2 und 3.2.3) entsteht. Diese Methode steht somit im Gegensatz zu bestimmten älteren Modellen, die die folgenden beiden Gedanken zur Grundlage haben.

E.1.2 Der erste Grundgedanke besagt, die angegebene Unsicherheit müsse "sicher" oder "konservativ" sein. Das bedeutet, daß sie niemals in der Richtung auf einen zu kleinen Wert fehlerhaft sein darf. Da die Berechnung der Unsicherheit zu einem Meßergebnis problematisch ist, wurde sie oft in der Tat absichtlich zu groß angegeben.

E.1.3 Der zweite Grundgedanke besagt, daß die Einflüsse, die zur Unsicherheit führen, stets entweder als "zufällig" oder "systematisch" erkennbar wären, wobei es sich jeweils um von Natur aus verschiedene Arten von Einflüssen handele. Die zu ihnen gehörenden Unsicherheiten müßten jeweils auf ihre eigene Weise kombiniert und getrennt angegeben werden (oder auf spezielle Weise kombiniert werden, wenn ein einziger Wert gefordert ist). In der Tat wurde die Methode zur Kombination von Unsicherheiten häufig darauf ausgerichtet, die Sicherheitsforderung zu erfüllen.

E.2 Rechtfertigung für realistische Unsicherheitsberechnungen

E.2.1 Bei der Mitteilung des Werts einer Meßgröße müssen der beste Schätzwert dieses Werts und der beste berechnete Wert der Unsicherheit für diesen Schätzwert angegeben werden, denn wenn die Unsicherheit fehlerhaft sein sollte, ist es normalerweise nicht möglich zu entscheiden, in welcher Richtung sie "sicher" abweichen soll. Zu gering angegebene Unsicherheiten könnten ein übermäßiges Vertrauen in die angegebenen Werte begründen, was peinliche und zuweilen verheerende Folgen haben kann. Absichtlich zu groß angegebene Unsicherheiten wiederum können ebenfalls unerwünschte Auswirkungen haben. Die Benutzer von Meßgeräten würden teurere Geräte kaufen als nötig, teure Produkte würden unnötigerweise ausrangiert, oder die Dienste von Kalibrierlaboratorien würden abgelehnt.

E.2.2 Dies soll nicht heißen, daß diejenigen, die ein Meßergebnis verwenden, nicht ihren eigenen Multiplikationsfaktor auf die angegebene Unsicherheit anwenden dürfen, um zu einer erweiterten Unsicherheit gelangen, die einen Bereich mit einem bestimmten Grad des Vertrauens nach ihren eigenen Bedürfnissen definiert. Ebenso wenig soll das heißen, daß bestimmte Meßdienste nicht unter bestimmten Umständen routinemäßig einen Faktor zum Erhalt einer solchen erweiterten Unsicherheit anwenden dürfen, um damit den Bedürfnissen einer bestimmten Nutzerklasse ihrer Meßergebnisse nachzukommen. Jedoch müssen solche Faktoren (die stets anzugeben sind) auf eine realistisch ermittelte Unsicherheit angewendet werden, und das erst *nachdem* die Unsicherheit so bestimmt wurde, so daß der durch die erweiterte Unsicherheit definierte Bereich den geforderten Grad des Vertrauens aufweist und die Berechnung leicht umgekehrt werden kann.

E.2.3 Im Meßwesen müssen Meßergebnisse häufig von anderen in die eigenen Analysen einbezogen werden, wo-

bei alle diese fremden Ergebnisse ihre eigenen Unsicherheiten aufweisen. Bei der Berechnung der Unsicherheit für das eigene Meßergebnis wird somit ein bester und kein "sicherer" Wert der Unsicherheit für alle von anderen Quellen bezogenen Ergebnisse benötigt. Hinzu kommt, daß es eine logische und einfache Möglichkeit der Kombination dieser herangezogenen Unsicherheiten mit denen der eigenen Beobachtungswerte geben muß, um die Unsicherheit des eigenen Ergebnisses anzugeben. Die Empfehlung INC-1 (1980) bietet diese Möglichkeit.

E.3 Rechtfertigung für die Gleichbehandlung aller Unsicherheitskomponenten

Den Schwerpunkt der Diskussion in diesem Unterabschnitt bildet ein einfaches Beispiel dafür, wie im vorliegenden *Leitfaden* durch zufällige Einflüsse und durch Korrekturen für systematische Einflüsse bedingte Unsicherheitskomponenten bei der Ermittlung der Unsicherheit eines Meßergebnisses in genau gleicher Weise behandelt werden. Damit wird der im vorliegenden *Leitfaden* vertretene und in E.1.1 dargelegte Standpunkt veranschaulicht, daß alle Unsicherheitskomponenten wesensgleich und daher in gleicher Weise zu behandeln sind. Den Ausgangspunkt dieser Diskussion bildet eine vereinfachte Herleitung des mathematischen Ausdrucks für die Fortpflanzung von Standardabweichungen, der im vorliegenden *Leitfaden* Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz genannt wird.

E.3.1 Die Ausgangsgröße $z = f(w_1, w_2, \dots, w_N)$ sei abhängig von N Eingangsgrößen $w_1, w_2, \dots, w_N$, wobei jedes w_i durch eine eigene Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben sei. Die Entwicklung von f in eine Taylor-Reihe erster Ordnung an der Stelle der Erwartungswerte $E(w_i) \equiv \mu_i$ der w_i ergibt für kleine Abweichungen von z von μ_z , ausgedrückt in kleinen Abweichungen von w_i von μ_i ,

$$z_i - \mu_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \quad (\text{E.1})$$

wobei alle Glieder höherer Ordnung als vernachlässigbar angenommen werden und $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$. Das Quadrat der Abweichung $z - \mu_z$ ist dann gegeben durch

$$(z - \mu_z)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \right)^2 \quad (\text{E.2a})$$

was auch in der Form

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} (w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \quad (\text{E.2b})$$

geschrieben werden kann.

Der Erwartungswert der quadrierten Abweichung $(z - \mu_z)^2$ ist die Varianz zu z , das heißt $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$. Somit folgt aus Gleichung (E.2b):

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (\text{E.3})$$

In diesem Ausdruck ist $\sigma_z^2 = E[(z - \mu_z)^2]$ die Varianz von w_i und $\rho_{ij} = v(w_i, w_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ der Korrelationskoeffizient von w_i und w_j , wobei $v(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ die Kovarianz von w_i und w_j ist.

ANMERKUNGEN

1 σ_z^2 und σ_i^2 sind die zentralen Momente zweiter Ordnung (siehe C.2.13 und C.2.22) der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von z bzw. w_i . Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ihren Erwartungswert, ihre Varianz und ihre zentralen Momente höherer Ordnung vollständig charakterisiert werden.

2 Die [gemeinsam mit Gleichung (15)] zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit herangezogene Gleichung (13) in 5.2.2 ist identisch mit Gleichung (E.3), abgesehen davon, daß Gleichung (13) mit den Schätzwerten der Varianzen, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten ausgedrückt ist.

E.3.2 In der traditionellen Terminologie wird Gleichung (13) häufig "allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz" genannt, eine Benennung, die besser zu einem Ausdruck wie $\Delta z = \sum_{i=1}^N (\partial f / \partial w_i) \Delta w_i$ paßt, wobei Δz die Änderung von z auf Grund von (geringfügigen) Änderungen Δw_i von w_i ist [siehe Gleichung (E.8)]. Tatsächlich ist es angemessen, Gleichung (E.3) Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz zu nennen, wie es im vorliegenden *Leitfaden* geschieht, denn sie zeigt, wie die Unsicherheiten der Eingangsgrößen w_i gleichgesetzt mit den Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser w_i ,

zur Unsicherheit der Ausgangsgröße z kombiniert werden, wenn diese Unsicherheit mit der Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von z gleichgesetzt wird.

E.3.3 Gleichung (E.3) gilt auch für die Fortpflanzung von Mehrfachen der Standardabweichungen, denn wenn jede Standardabweichung σ_i durch ein Mehrfaches $k\sigma_i$ ersetzt wird, wobei k für alle σ_i gleich ist, dann wird die Standardabweichung der Ausgangsgröße z durch $k\sigma_z$ ersetzt. Dies gilt jedoch nicht für die Fortpflanzung von Vertrauensbereichen. Wird jedes σ_i durch eine Größe δ_i ersetzt, die einen Bereich zu einem vorgegebenen Grad p des Vertrauens angibt, dann gibt die entsprechende Größe δ_z für z keinen Bereich an, der demselben Wert von p entspricht, es sei denn, alle w_i werden durch Normalverteilungen beschrieben. In Gleichung (E.3) sind keine solchen Annahmen bezüglich der Normalverteilung der Wahrscheinlichkeiten für die Größen w_i impliziert. Genauer: Wird in Gleichung (10) in 5.1.2 jede Standardunsicherheit $u(x_i)$ aus unabhängigen mehrmaligen Beobachtungen ermittelt und entsprechend ihren Freiheitsgraden für einen bestimmten Wert von p (z.B. $p = 95\%$) mit dem t -Faktor multipliziert, so definiert die Unsicherheit des Schätzwerts y kein diesem Wert p entsprechendes Intervall (siehe G.3 und G.4).

ANMERKUNG: Die Forderung nach Normalverteilung bei der Fortpflanzung von Vertrauensbereichen mit Gleichung (E.3) ist vielleicht ein Grund für die historische Trennung der Unsicherheitskomponenten aus mehrmaligen Beobachtungen, die als normalverteilt angesehen wurden, von jenen, die einfach als obere und untere Grenzen ermittelt wurden.

E.3.4 Es sei folgendes Beispiel betrachtet: z sei von nur einer Eingangsgröße w_i abhängig, $z = f(w)$, wobei w durch Bildung des Durchschnitts aus n Werten w_k von w ermittelt wird. Diese n Werte werden aus n unabhängigen, mehrmaligen Beobachtungen q_k einer Zufallsgröße q gewonnen; w_k und q_k sind verknüpft durch die Beziehung

$$w_k = \alpha + \beta q_k \quad (\text{E.4})$$

α ist hier eine konstante "systematische" Verschiebung, die allen Beobachtungen gemeinsam ist, β ist ein gemeinsamer Skalenfaktor. Obwohl Verschiebung und Skalenfaktor während der Beobachtungen fest sind, wird angenommen, daß sie durch *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilungen charakterisiert sind, wobei α und β die besten Schätzwerte für die Erwartungswerte dieser Verteilungen sind.

Der beste Schätzwert von w ist der arithmetische Mittelwert $\bar{w}$, der wie folgt gewonnen wird:

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\alpha + \beta q_k) \quad (\text{E.5})$$

Die Größe z wird dann geschätzt durch $f(\bar{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, \dots, q_n)$, und den Schätzwert $u^2(z)$ ihrer Varianz $\sigma^2(z)$ gewinnt man aus Gleichung (E.3). Wenn der Einfachheit halber angenommen wird, daß $z = w$, so daß als bester Schätzwert von $z = f(\bar{w}) = \bar{w}$ gilt, dann läßt sich $u^2(z)$ leicht ermitteln. Bei Beachtung von Gleichung (E.5), daß

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k = \bar{q}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n},$$

und Bezeichnung der geschätzten Varianzen zu α und β mit $u^2(\alpha)$ und $u^2(\beta)$ sowie unter der Annahme, daß die einzelnen Beobachtungswerte unkorreliert sind, erhält man aus Gleichung (E.3)

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \bar{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (\text{E.6})$$

wobei $s^2(q_k)$ die empirische Varianz zu den nach Gleichung (4) in 4.2.2 berechneten Beobachtungswerten q_k und $s^2(q_k)/n = s^2(\bar{q})$ die empirische Varianz zum Mittelwert $\bar{q}$ [Gleichung (5) in 4.2.3] ist.

E.3.5 In der traditionellen Terminologie wird das dritte Glied auf der rechten Seite von Gleichung (E.6) "zufälliger" Beitrag zur geschätzten Varianz $u^2(z)$ genannt, weil es normalerweise mit der Erhöhung der Anzahl n der Beobachtungen abnimmt, während die ersten beiden Glieder "systematische" Beiträge genannt werden, weil sie nicht von n abhängen.

Wichtiger noch ist, daß Gleichung (E.6) in einigen traditionellen Darstellungen der Unsicherheit beim Messen als fragwürdig betrachtet wird, da sie nicht zwischen Unsicherheiten auf Grund von systematischen Einflüssen und solchen auf Grund von zufälligen Einflüssen unterscheidet. Insbesondere wird das Kombinieren von Varianzen, die aus *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilungen gewonnen wurden, mit solchen, die aus Häufigkeitsverteilungen gewonnen wurden, mißbilligt, da der Begriff der Wahrscheinlichkeit *nur* für Ereignisse gelten soll, die viele Male unter im wesentlichen gleichen Bedingungen wiederholt werden können, wobei die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses ($0 \leq p \leq 1$) die *relative Häufigkeit* angibt, mit der es eintritt.

Im Gegensatz zu dieser häufigkeitsorientierten Auffassung der Wahrscheinlichkeit besteht ein weiterer, ebenso gültiger Standpunkt darin, daß die Wahrscheinlichkeit ein

Maß für den *Überzeugtheitsgrad* davon ist, daß ein Ereignis eintritt [13, 14]. Man nehme beispielsweise an, man hätte die Chance, einen kleinen Geldbetrag D zu gewinnen und sei ein vernünftiger Wetter. Der Überzeugtheitsgrad vom Eintreten des Ereignisses A ist $p = 0,5$, wenn man den beiden Wettermöglichkeiten indifferent gegenübersteht: (1) Erhalt von D bei Eintreten des Ereignisses A und nichts bei Nichteintreten desselben; (2) Erhalt von D bei Nichteintreten des Ereignisses A und nichts bei Eintreten desselben. Die Empfehlung INC-1 (1980), auf der der vorliegende *Leitfaden* basiert, vertritt implizit diese Auffassung der Wahrscheinlichkeit, da sie Ausdrücke wie Gleichung (E.6) zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit eines Meßergebnisses für geeignet ansieht.

E.3.6 Durch die Auffassung der Wahrscheinlichkeit als Überzeugtheitsgrad sowie die Berechnung und Angabe der Unsicherheit beim Messen auf der Grundlage der Standardabweichung (Standardunsicherheit) und des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes [Gleichung (E.3)], wie es im vorliegenden *Leitfaden* geschieht, ergeben sich drei klare Vorteile:

- a) das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz gestattet es, die kombinierte Standardunsicherheit eines Ergebnisses problemlos in die Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit eines anderen Ergebnisses einzubeziehen, bei dem das erste Ergebnis verwendet wird;
- b) die kombinierte Standardunsicherheit kann als Grundlage für die Berechnung von Intervallen dienen, die auf realistische Weise den geforderten Graden des Vertrauens entsprechen;
- c) es ist unnötig, Komponenten für die Berechnung der Unsicherheit in "zufällige" und "systematische" (oder auf andere Weise) einzuteilen, da alle Unsicherheitskomponenten in gleicher Weise behandelt werden.

Vorteil c) ist von großem Nutzen, denn eine solche Einteilung führt häufig zu Verwirrung: eine Unsicherheitskomponente ist nicht entweder "zufällig" oder "systematisch". Ihr Charakter ergibt sich aus dem Verwendungszweck der entsprechenden Größe oder, formell gesprochen, aus dem Kontext, in dem die Größe in dem mathematischen Modell erscheint, das die Messung beschreibt. Wenn ihre jeweilige Größe also in einem anderen Kontext verwendet wird, kann eine "zufällige" Komponente zu einer "systematischen" Komponente werden und umgekehrt.

E.3.7 Aus dem unter c) angegebenen Grund werden Unsicherheitskomponenten in der Empfehlung INC-1 (1980) nicht in "zufällige" und "systematische" Komponenten unterteilt. Soweit es um die Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit eines Meßergebnisses

geht, ist eine solche Einteilung von Unsicherheitskomponenten in der Tat nicht notwendig und eine wie auch immer geartete Klassifizierung nicht wirklich erforderlich. Da bequeme Begriffsmarken aber mitunter bei der Kommunikation und Auseinandersetzung über Ideen hilfreich sein können, liefert die Empfehlung INC-1 (1980) ein Schema zur Klassifizierung zweier Methoden zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten, nämlich die Ermittlungsmethoden "A" und "B" (siehe 0.7, 2.3.2 und 2.3.3).

Durch die Klassifizierung der Methoden, nach denen Unsicherheitskomponenten ermittelt werden, vermeidet man das prinzipielle Problem, das mit einer Klassifizierung der Komponenten selbst verbunden ist, nämlich die Abhängigkeit dieser Klassifizierung vom Verwendungszweck der jeweiligen Komponente. Eine solche Einteilung der Methoden anstelle der Komponenten schließt jedoch nicht aus, daß einzelne mit diesen beiden Methoden ermittelte Komponenten bei einer konkreten Messung für einen bestimmten Zweck zusammengefaßt werden, zum Beispiel beim Vergleich der empirisch beobachteten und der theoretisch vorhergesagten Streuung der Ausgangswerte einer komplexen Meßeinrichtung (siehe 3.4.3).

E.4 Standardabweichungen als Maße der Unsicherheit

E.4.1 Gleichung (E.3) erfordert, daß der Schätzwert einer Eingangsgröße unabhängig davon, wie er gewonnen wird, als Standardunsicherheit, d.h. als geschätzte Standardabweichung, berechnet wird. Wird statt dessen ein "sicherer" Alternativwert berechnet, darf dieser nicht in Gleichung (E.3) eingesetzt werden. Insbesondere dann, wenn in Gleichung (E.3) die "Grenze für maximale Abweichung" (die größte denkbare Abweichung vom vermutlichen besten Schätzwert) verwendet wird, ist die Bedeutung der sich ergebenden Unsicherheit schlecht definiert; sie läßt sich nicht für nachfolgende Unsicherheitsberechnungen für andere Größen heranziehen (siehe E.3.3).

E.4.2 Kann die Standardunsicherheit einer Eingangsgröße nicht durch Analyse einer angemessenen Anzahl von mehrmaligen Beobachtungen ermittelt werden, muß eine Wahrscheinlichkeitsverteilung herangezogen werden, die eine geringere Kenntnisgrundlage aufweist als eigentlich erforderlich wäre. Dadurch wird die Verteilung nicht etwa ungültig oder unrealistisch. Wie alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist sie ein Ausdruck des Umfangs an vorhandenen Kenntnissen.

E.4.3 Berechnungen, die auf mehrmaligen Beobachtungen beruhen, sind nicht unbedingt denen überlegen, die mit anderen Mitteln vorgenommen werden. Es sei die empirische Standardabweichung $s(\bar{q})$ des Mittelwerts aus n unabhängigen Beobachtungswerten q_k einer normalver-

teilten Zufallsgröße q [siehe Gleichung (5) in 4.2.3] betrachtet. Die Größe $s(\bar{q})$ ist eine Kenngröße (siehe C.2.23), mit der $\sigma(\bar{q})$ geschätzt wird, die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{q}$, das heißt der Verteilung der Werte von $\bar{q}$, die man erhielte, wenn die Messung eine unendliche Anzahl von Malen durchgeführt würde. Die Varianz $\sigma^2[s(\bar{q})]$ zu $s(\bar{q})$ ist näherungsweise gegeben durch

$$\sigma^2[s(\bar{q})] \approx \sigma^2(\bar{q})/2v \quad (\text{E.7})$$

wobei $v = n - 1$ die Freiheitsgrade von $s(\bar{q})$ sind (siehe G.3.3). Somit beträgt die Standardunsicherheit, die gegeben ist durch den Quotienten $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ und als Maß für die relative Unsicherheit von $s(\bar{q})$ genommen werden kann, näherungsweise $[2(n - 1)]^{-1/2}$. Diese "Unsicherheit der Unsicherheit" von $\bar{q}$, die sich aus dem rein statistischen Grund der begrenzten Probennahme ergibt, kann überraschend groß sein: für $n = 10$ Beobachtungen beträgt sie 24 %. Dieser und weitere Werte sind in Tabelle E.1 aufgeführt, aus der hervorgeht, daß die Standardabweichung einer statistisch geschätzten Standardabweichung für die praktischen Werte von n nicht vernachlässigt werden darf. Es läßt sich daraus schließen, daß Berechnungen der Standardunsicherheit nach Ermittlungsmethode A nicht unbedingt zuverlässiger sind als solche nach Ermitt-

Tabelle E.1: $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, die Standardabweichung der empirischen Standardabweichung des Mittelwertes $\bar{q}$ aus n unabhängigen Beobachtungen einer normalverteilten Zufallsgröße q dividiert durch die Standardabweichung des Mittelwertes^(a)

Anzahl der Beobachtungen n	$\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (%)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

^(a)Die angegebenen Werte wurden anhand des genauen Ausdrucks für $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, nicht des näherungsweisen Ausdrucks $[2(n - 1)]^{-1/2}$ errechnet.

lungsmethode B und daß in vielen Meßsituationen in der Praxis, bei denen die Anzahl der Beobachtungen begrenzt ist, nach Ermittlungsmethode B gewonnene Komponenten besser bekannt sein können als die nach Ermittlungsmethode A gewonnenen.

E.4.4 Wenn auch die mit der Anwendung einer bestimmten Meßmethode verbundenen Unsicherheiten statistische Parameter sind, die Zufallsgrößen kennzeichnen, so wurde argumentiert, gäbe es doch Beispiele eines "wahrhaft systematischen Einflusses", dessen Unsicherheit anders behandelt werden müsse. Als Beispiel dient eine Verschiebung mit einem unbekannten festen Wert, die bei jeder Ermittlung gleich ist, was an einer möglichen Unvollkommenheit des Prinzips der Methode selbst oder einer der ihr zugrunde liegenden Annahmen liegt. Wenn aber die Existenz einer solchen Verschiebung anerkannt und ihre Größe als möglicherweise signifikant angesehen wird, dann läßt sie sich durch eine wie einfach auch immer konstruierte Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben, die auf den Kenntnissen basiert, aus denen die Existenz der Verschiebung und ihre mögliche Signifikanz geschlossen wird. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit nun als ein Maß der Überzeugtheit davon, daß ein Ereignis eintritt, kann der Beitrag eines solchen systematischen Einflusses in die kombinierte Standardunsicherheit eines Meßergebnisses einbezogen werden, indem er als Standardunsicherheit einer *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt und auf dieselbe Weise wie jede andere Standardunsicherheit einer Eingangsgröße behandelt wird.

BEISPIEL: Die Spezifikation für ein bestimmtes Meßverfahren erfordere die Berechnung einer bestimmten Eingangsgröße aus einer speziellen Potenzreihenentwicklung, deren Glieder höherer Ordnung nur ungenau bekannt sind. Der systematische Einfluß, der daraus resultiert, daß diese Glieder nicht genau behandelt werden können, führt zu einer unbekannten festen Verschiebung, die durch Wiederholung des Verfahrens nicht stichprobenmäßig experimentell ermittelt werden kann. Daher kann die zum Einfluß gehörige Unsicherheit nicht errechnet und in die Unsicherheit des Endergebnisses der Messung eingebracht werden, wenn man eine streng häufigkeitsorientierte Auffassung von der Wahrscheinlichkeit vertritt. Faßt man Wahrscheinlichkeit hingegen als Überzeugtheitsgrad auf, so läßt sich die den Einfluß kennzeichnende Unsicherheit aus einer *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilung ermitteln (die aus dem verfügbaren Wissen über die ungenau bekannten Glieder hergeleitet wird) und wie jede andere Unsicherheit in die Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit des Meßergebnisses einbeziehen.

E.5 Vergleich zweier Unsicherheitsauffassungen

E.5.1 Der Schwerpunkt des vorliegenden *Leitfadens* liegt eher auf dem Meßergebnis und seiner errechneten Unsicherheit als auf nicht faßbaren Größen wie "wahrer" Wert und Meßabweichung (siehe Anhang D). Durch die Sichtweise, daß das Meßergebnis einfach der der Meßgröße zugeordnete Wert ist und daß die Unsicherheit dieses Ergebnisses ein Maß für die Streuung der Werte ist, die der Meßgröße vernünftigerweise zugeordnet werden können, wird im vorliegenden *Leitfaden* die oft verwirrende Anbindung der Unsicherheit an die nicht faßbaren Größen "wahrer" Wert und Meßabweichung gelöst.

E.5.2 Diese Anbindung erklärt sich aus einer Interpretation der Ableitung von Gleichung (E.3), dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz, unter dem Aspekt von "wahrem" Wert und Meßabweichung. In diesem Fall wird μ_i als der unbekannte, eindeutige "wahre" Wert der Eingangsgröße w_i betrachtet, wobei sich jedes w_i zu seinem "wahren" Wert μ_i nach $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$ verhält, wobei ε_i die Meßabweichung von w_i ist. Der Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung für jedes ε_i wird als Null angenommen, $E(\varepsilon_i) = 0$, wobei für die Varianz gilt: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. Aus Gleichung (E.1) wird dann

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i \quad (\text{E.8})$$

wobei $\varepsilon_z = z - \mu_z$ die Meßabweichung von z und μ_z der "wahre" Wert von z sind. Nimmt man dann den Erwartungswert des Quadrats von ε_z , so erhält man eine Gleichung, die in der Form mit Gleichung (E.3) identisch ist, in der jedoch $E(\varepsilon_z^2) = \sigma_z^2$ die Varianz von ε_z und $\rho_{ij} = v(\varepsilon_i, \varepsilon_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ der Korrelationskoeffizient von ε_i und ε_j sind mit der Kovarianz $v(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ von ε_i und ε_j . Die Varianzen und Kovarianzen sind daher an die Meßabweichungen der Eingangsgrößen statt an die Eingangsgrößen selbst gebunden.

ANMERKUNG: Es wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit als Maß für die Überzeugtheit vom Eintreten eines Ereignisses betrachtet wird, was auch heißt, daß eine systematische Meßabweichung auf die gleiche Weise wie eine zufällige Meßabweichung behandelt werden kann und daß ε_i für beide steht.

E.5.3 In der Praxis führt eine unterschiedliche Betrachtungsweise nicht zu Unterschieden im Zahlenwert des Meßergebnisses oder der zu diesem Ergebnis gehörigen Unsicherheit.

Erstens werden in beiden Fällen die besten verfügbaren Schätzwerte der Eingangsgrößen w_i zur Ermittlung des besten Schätzwerts von z aus der Funktion f herangezogen. Dabei ist es für die Berechnung gleichgültig, ob man die besten Schätzwerte als Werte ansieht, die den betreffenden Größen am besten zugeordnet werden können, oder als beste Schätzwerte von deren "wahren" Werten ansieht.

Zweitens sind Varianzen und Standardabweichungen von ε_i und w_i identisch, weil $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ und μ_i eindeutige, feste Werte sind und daher keine Unsicherheit haben. Das bedeutet, daß die als Schätzwerte für die Standardabweichung σ_i zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit eines Meßergebnisses verwendeten Standardunsicherheiten in beiden Fällen identisch sind und denselben Zahlenwert für jene Unsicherheit ergeben. Wiederum ergibt sich für die Berechnung kein Unterschied daraus, ob man eine Standardunsicherheit als Streuungsmaß für die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Eingangsgröße oder als Streuungsmaß für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Meßabweichung dieser Größe betrachtet.

ANMERKUNG: Ohne die Annahme aus E.5.2 würde das in diesem Unterabschnitt Gesagte nicht gelten, es sei denn, alle Schätzwerte der Eingangsgrößen sowie die Unsicherheiten zu diesen Schätzwerten wurden aus der statistischen Analyse mehrmaliger Beobachtungen, das heißt nach Ermittlungsmethode A gewonnen.

E.5.4 Obwohl sich beim Vorgehen auf der Grundlage des "wahren" Werts und der Meßabweichung dieselben Zahlenwerte ergeben wie bei dem im vorliegenden *Leitfaden* gewählten Ansatz (vorausgesetzt, die Annahme aus E.5.2 wird herangezogen), beseitigt die im vorliegenden *Leitfaden* vertretene Auffassung die Verwechslung von Meßabweichung und Unsicherheit (siehe Anhang D). In der Tat wird durch das Vorgehen im vorliegenden *Leitfaden*, bei dem der Schwerpunkt auf dem beobachteten (oder geschätzten) Wert einer Größe und der beobachteten (oder geschätzten) Streuung dieses Werts liegt, jegliche Erwähnung der Meßabweichung vollständig überflüssig.

Anhang F

Praktische Anleitung zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten

Dieser Anhang enthält zusätzliche Vorschläge zur Ermittlung von Unsicherheitskomponenten, die vor allem von praktischer Natur sind und die bereits in Kapitel 4 gemachten Vorschläge ergänzen sollen.

F.1 Aus mehrmaligen Beobachtungen ermittelte Komponenten: Ermittlungsmethode A der Standardunsicherheit

F.1.1 Zufälligkeit und mehrmalige Beobachtungen

F.1.1.1 Unsicherheiten, die aus mehrmaligen Beobachtungen gewonnen werden, werden häufig gegenüber anders ermittelten als "objektiv", "statistisch streng" usw. bezeichnet. Hierbei wird fälschlich impliziert, daß sie sich durch bloße Anwendung statistischer Formeln auf Beobachtungswerte ermitteln läßt und daß ihre Ermittlung keinerlei Beurteilung erfordert.

F.1.1.2 Es ist zuerst danach zu fragen, in welchem Maße die mehrmaligen Beobachtungen völlig unabhängige Wiederholungen desselben Meßverfahrens sind. Wenn sich all diese Beobachtungen auf eine einzige Probe beziehen und die Probenahme Bestandteil des Meßverfahrens ist, weil die Meßgröße eine Materialeigenschaft ist (im Gegensatz zur Eigenschaft einer gegebenen Probe des Materials), dann sind die Beobachtungen nicht unabhängig wiederholt. Zur beobachteten Varianz der mehrmaligen Beobachtungen von ein- und derselben Probe muß eine Varianzkomponente hinzugefügt werden, die sich aus möglichen Unterschieden zwischen Proben ergibt.

Gehört zu einem Meßverfahren der Nullabgleich eines Meßgeräts, muß dieser bei jeder Wiederholung ebenfalls erneut erfolgen, selbst wenn während der Beobachtungszeit nur eine vernachlässigbare Drift aufgetreten ist, da dem Nullabgleich potentiell eine statistisch ermittelbare Unsicherheit zugeordnet werden kann.

Ist eine Barometerablesung erforderlich, so ist diese im Prinzip ebenso bei jeder Wiederholung der Messung vorzunehmen (vorzugsweise nachdem das Barometer gestört wurde und wieder ins Gleichgewicht zurückgekehrt ist), denn es kann selbst bei konstantem barometrischem Druck zu Schwankungen sowohl der Anzeige als auch der Ableseung kommen.

F.1.1.3 Zweitens ist zu fragen, ob alle als zufällig angenommenen Einflüsse auch wirklich zufällig sind. Sind Mittelwerte und Varianzen ihrer Verteilung konstant, oder gibt es während der mehrmaligen Beobachtungen vielleicht eine Drift des Werts einer nicht gemessenen Einflußgröße? Wenn eine hinreichende Anzahl von Beobachtungswerten vorliegt, können die arithmetischen Mittelwerte der Ergebnisse aus der ersten und der zweiten Hälfte des Beobachtungszeitraums sowie ihre empirischen Standardabweichungen berechnet und die beiden Mittelwerte miteinander verglichen werden, um beurteilen zu können, ob die Differenz zwischen ihnen statistisch signifikant ist und ob somit ein Einfluß vorhanden ist, der sich zeitlich verändert.

F.1.1.4 Wenn die Werte der "üblichen Versorgung" im Labor (Spannung und Frequenz der Stromversorgung, Wasserdruck und -temperatur, Stickstoffdruck usw.) Einflußgrößen darstellen, tritt bei deren Schwankungen normalerweise ein starkes nichtzufälliges Element in Erscheinung, das nicht übersehen werden darf.

F.1.1.5 Wenn die niedrigstwertige Stelle einer Digitalanzeige während einer Beobachtung ständig infolge von "Rauschen" schwankt, fällt es mitunter schwer, nicht unbewußt persönlich bevorzugte Werte dieser Stelle auszuwählen. Es ist dann besser, die Anzeige in einem beliebigen Moment auf irgendeine Weise einzufrieren und das eingefrorene Ergebnis zu registrieren.

F.1.2 Korrelationen

Viele der in diesem Abschnitt diskutierten Aspekte gelten auch für die Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit.

F.1.2.1 Die zu den Schätzwerten zweier Eingangsgrößen X_i und X_j gehörende Kovarianz kann als Null angesetzt oder als unbedeutend gelten, wenn

- X_i und X_j unkorreliert sind (die Zufallsgrößen, nicht die physikalischen Größen, die als Invarianten angesehen werden, siehe 4.1.1, Anmerkung 1), zum Beispiel weil sie mehrmals, jedoch nicht gleichzeitig in verschiedenen unabhängigen Experimenten gemessen wurden oder weil sie Ergebnisgrößen aus verschiedenen Ermittlungen darstellen, die unabhängig voneinander erfolgt sind,
- eine der Größen X_i und X_j als Konstante betrachtet werden kann, oder
- die Informationen zur Errechnung der zu den Schätzwerten von X_i und X_j gehörigen Kovarianz unzureichend sind.

ANMERKUNGEN

- Andererseits ist es in bestimmten Fällen wie dem Referenzwiderstandsbeispiel aus Anmerkung 1 zu 5.2.2 offensichtlich, daß die Eingangsgrößen vollkommen korreliert sind und daß die Standardunsicherheiten für ihre Schätzwerte linear zu verknüpfen sind.
- Verschiedene Experimente können auch nicht unabhängig voneinander sein, wenn zum Beispiel jeweils dasselbe Meßgerät benutzt wurde (siehe F.1.2.3).

F.1.2.2 Ob zwei mehrmals und gleichzeitig beobachtete Eingangsgrößen korreliert sind, läßt sich mit Gleichung (17) in 5.2.3 ermitteln. Wenn zum Beispiel die Frequenz eines Oszillators eine Eingangsgröße ist, die bezüglich der Temperatur nicht oder schlecht kompensiert ist, und wenn die Umgebungstemperatur ebenfalls eine Eingangsgröße ist und beide gleichzeitig beobachtet werden, dann kann sich durch Berechnung der Kovarianz von Oszillatorfrequenz und Umgebungstemperatur eine signifikante Korrelation offenbaren.

F.1.2.3 In der Praxis sind Eingangsgrößen häufig korreliert, weil dieselben physikalischen Normale, Meßgeräte, Referenzwerte oder sogar Meßverfahren mit einer signifikanten Unsicherheit zum Schätzen der Werte der Eingangsgrößen verwendet werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien zwei Eingangsgrößen X_1 und X_2 durch die Werte x_1 und x_2 geschätzt und abhängig von ei-

ner Menge unkorrelierter Variablen $Q_1, Q_2, \dots, Q_L$. Somit gilt $X_1 = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$ und $X_2 = G(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$, obwohl einige dieser Variablen tatsächlich nur in der einen und nicht in der anderen Funktion auftreten können. Wenn $u^2(q_l)$ die geschätzte Varianz ist, die zum Schätzwert q_l von Q_l gehört, dann gilt für die zu x_1 gehörende geschätzte Varianz nach Gleichung (10) aus 3.1.2

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \right)^2 u^2(q_l) \quad (\text{F.1})$$

und ein ähnlicher Ausdruck für $u^2(x_2)$. Die geschätzte Kovarianz zu x_1 von x_2 ist gegeben durch

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^L \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \quad (\text{F.2})$$

Da nur diejenigen Glieder zur Summe beitragen, für die $\partial F / \partial q_l \neq 0$ und $\partial G / \partial q_l \neq 0$ für ein gegebenes l , ist die Kovarianz gleich Null, wenn F und G keine gemeinsame Variable haben.

Der zu den beiden Schätzwerten x_1 und x_2 gehörende geschätzte Korrelationskoeffizient $r(x_1, x_2)$ wird aus $u(x_1, x_2)$ [Gleichung (F.2)] und Gleichung (14) in 5.2.2 ermittelt, wobei $u(x_1)$ aus Gleichung (F.1) und $u(x_2)$ aus einem ähnlichen Ausdruck errechnet werden. [Siehe auch Gleichung (H.9) in H.2.3.] Es ist auch möglich, daß die zu zwei Eingangsschätzwerten gehörige geschätzte Kovarianz sowohl eine statistische Komponente [siehe Gleichung (17) in 5.2.3] als auch eine Komponente besitzt, die sich aus dem hier Diskutierten ergibt.

BEISPIELE

- Ein Widerstandsnormal R_S wird bei derselben Messung sowohl zur Ermittlung des Stroms I und der Temperatur t verwendet. Der Strom wird durch Messung der elektrischen Spannung an den Anschlüssen des Normals mit einem digitalen Spannungsmeßgerät ermittelt, die Temperatur wird mit einer Widerstandsmeßbrücke und dem Normal, dem Widerstand $R_t(t)$ eines kalibrierten Temperaturmeßfühlers, dessen Temperatur-Widerstands-Beziehung im Bereich $15^\circ\text{C} \leq t \leq 30^\circ\text{C}$ ausgedrückt wird durch $t = aR_t^2(t) - t_0$, ermittelt, wobei a und t_0 bekannte Konstanten sind. Somit wird der Strom durch die Beziehung $I = V_S / R_S$ und die Temperatur aus der Beziehung $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$ ermittelt, wobei $\beta(t)$ das mit der Brücke gemessene Verhältnis $R_t(t)/R_S$ ist.

Da dem Ausdruck für I und dem Ausdruck für t nur die Größe R_S gemeinsam ist, ergibt Gleichung (F.2) für die Kovarianz von I und t :

$$\begin{aligned} u(I, t) &= \frac{\partial I}{\partial R_S} \frac{\partial t}{\partial R_S} u^2(R_S) \\ &= \left(-\frac{V_S}{R_S^2} \right) (2\alpha\beta^2(t)R_S) u^2(R_S) \\ &= -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2} u^2(R_S) \end{aligned}$$

(Der Einfachheit halber wird in diesem Beispiel das gleiche Formelzeichen sowohl für die Eingangsgröße als auch für deren Schätzwert verwendet.)

Um einen Zahlenwert für die Kovarianz zu erhalten, setzt man in diesen Ausdruck die Zahlenwerte der Meßgrößen I und t und die im Kalibrierschein des Widerstandsnormal angegebenen Werte von R_S und $u(R_S)$ ein. Die Einheit von $u(I, t)$ ist offensichtlich $A \cdot ^\circ C$, da die Dimension der relativen Varianz $[u(R_S)/R_S]^2$ Eins ist (das heißt, daß es sich bei letzterer um eine sogenannte dimensionslose Größe handelt).

Weiterhin sei eine Größe P durch die Beziehung $P = C_0 I^2 / (T_0 + t)$ zu den Eingangsgrößen I und t charakterisiert, wobei C_0 und T_0 bekannte Konstanten mit vernachlässigbaren Unsicherheiten $[u^2(C_0) \approx 0, u^2(T_0) \approx 0]$ sind.

Gleichung (13) in 5.2.2 ergibt dann für die Varianz von P , ausgedrückt durch die Varianzen von I und t sowie deren Kovarianz,

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4 \frac{u^2(I)}{I^2} - 4 \frac{u(I, t)}{I(T_0 + t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0 + t)^2}$$

Die Varianzen $u^2(I)$ und $u^2(t)$ gewinnt man durch Anwendung von Gleichung (10) aus 5.1.2 auf die Beziehungen $I = V_S/R_S$ und $t = \alpha\beta^2(t)R_S^2 - t_0$. Daraus ergibt sich

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2 u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2 u^2(R_S)/R_S^2$$

wobei der Einfachheit halber angenommen wird, daß die Unsicherheiten der Konstanten V_0 und a ebenfalls vernachlässigbar sind. Diese Ausdrücke lassen sich einfach ermitteln, da $u^2(V_S)$ und $u^2(\beta)$ jeweils aus den mehrmaligen Ablesungen des Spannungsmeßgeräts und der Widerstandsmeßbrücke gewonnen werden können. Natürlich müssen bei der Ermittlung von $u^2(V_S)$ und $u^2(\beta)$ die Unsicherheiten berücksichtigt werden, die den Meßgeräten selbst und den verwendeten Meßverfahren inhärent sind.

2 In dem Beispiel aus Anmerkung 1 zu 5.2.2 sei die Kalibrierung aller Widerstände durch $R_i = \alpha_i R_S$ angegeben, wobei $u(\alpha_i)$ die Standardunsicherheit des aus mehrmaligen Beobachtungen gewonnenen gemessenen Verhältnisses α_i ist. Weiterhin gelte für jeden Widerstand $\alpha_i \approx 1$, und $u(\alpha_i)$ sei

für jede Kalibrierung im wesentlichen gleich, so daß $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Die Gleichungen (F.1) und (F.2) ergeben $u^2(R_i) = R_S^2 u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ und $u(R_i, R_j) = u^2(R_S)$. Dies impliziert durch Gleichung (14) in 5.2.2, daß für den Korrelationskoeffizienten zweier beliebiger Widerstände ($i \neq j$) gilt:

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left(1 + \left(\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S} \right)^2 \right)^{-1}$$

Da $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$, und wenn $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, gilt $r_{ij} \approx 0,5$; für $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$ gilt $r_{ij} \approx 0,990$; und für $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$ gilt $r_{ij} \approx 1,000$. Mit $u(\alpha) \rightarrow 0$, streben also $r_{ij} \rightarrow 1$ und $u(R_i) \rightarrow u(R_S)$.

ANMERKUNG: Im allgemeinen sind die Schätzwerte der kalibrierten Meßeinrichtungen bei Vergleichskalibrierungen wie in diesem Beispiel korreliert, wobei der Grad der Korrelation vom Verhältnis der Vergleichsunsicherheit zur Unsicherheit des Referenznormal abhängt. Wenn die Vergleichsunsicherheit, wie es häufig in der Praxis vorkommt, gegen die Unsicherheit des Normal vernachlässigt werden kann, sind die Korrelationskoeffizienten gleich +1 und die Unsicherheit ist für alle kalibrierten Meßeinrichtungen die gleiche wie für das Normal.

F.1.2.4 Die erforderliche Einführung der Kovarianz $u(x_i, x_j)$ läßt sich umgehen, wenn die ursprüngliche Menge von Eingangsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$, von denen die Meßgröße Y abhängt [siehe Gleichung (1) in 4.1], so umdefiniert wird, daß sie als zusätzliche unabhängige Eingangsgrößen jene Größen Q_i enthält, die einer oder mehreren der ursprünglichen X_i gemeinsam sind. (Es können zusätzliche Messungen erforderlich sein, um die Beziehung zwischen Q_i und den betroffenen X_i vollständig aufzustellen.) Es mag jedoch in einigen Situationen bequemer sein, die Kovarianzen beizubehalten als die Anzahl der Eingangsgrößen zu erhöhen. Ein ähnliches Verfahren läßt sich für die beobachteten Kovarianzen von gleichzeitigen mehrmaligen Beobachtungen durchführen [siehe Gleichung (17) in 5.2.3], doch ist die Identifizierung von geeigneten zusätzlichen Eingangsgrößen häufig *ad hoc* und unphysikalisch.

BEISPIEL: Werden in Beispiel 1 des vorigen Abschnitts die Ausdrücke für I und t durch R_S in den Ausdruck für P eingesetzt, so ergibt sich

$$P = \frac{C_0 V_S^2}{R_S^2 [T_0 + \alpha\beta^2(t)R_S^2 - t_0]}$$

und die Korrelation von I und t wird vermieden, indem die Eingangsgrößen I und t durch die Größen V_S, R_S und β er-

setzt werden. Da diese Größen unkorreliert sind, erhält man die Varianz von P aus Gleichung (10) in 5.1.2.

F.2 Auf andere Weise ermittelte Komponenten: Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit

F.2.1 Der Bedarf der Ermittlungsmethode B

Wenn ein metrologisches Institut unerschöpfliche Zeit und Mittel hätte, könnten alle denkbaren Ursachen für Unsicherheiten erschöpfend untersucht werden, zum Beispiel die Verwendung verschiedener Typen und Arten von Meßgeräten, verschiedener Meßverfahren, verschiedener Anwendungsarten dieser Verfahren sowie verschiedener Näherungen bei den theoretischen Modellen der Messung. Die mit all diesen Ursachen verbundenen Unsicherheiten könnten dann anhand einer statistischen Analyse von Reihen von Beobachtungen ermittelt und die Unsicherheit für jede Ursache durch eine statistische ermittelte Standardabweichung gekennzeichnet werden. Mit anderen Worten, alle Unsicherheitskomponenten wären nach der Ermittlungsmethode A gewonnen. Da aber eine solche Untersuchung wirtschaftlich nicht praktikabel ist, müssen viele Unsicherheitskomponenten auf andere, praktikable Weise ermittelt werden.

F.2.2 Mathematisch determinierte Verteilungen

F.2.2.1 Auflösung einer Digitalanzeige

Eine Quelle für die Unsicherheit eines digitalen Meßgeräts ist die Auflösung seiner Anzeigeeinheit. Wenn zum Beispiel alle mehrmaligen Anzeigen identisch wären, wäre die der Wiederholbarkeit zuzuordnende Meßunsicherheit keineswegs gleich Null, denn es gibt einen Bereich von Eingangssignalen, die ein bekanntes Intervall abdecken und dieselbe Anzeige ergeben. Wenn die Auflösung der Anzeigeeinheit mit δx bezeichnet wird, so kann der Wert einer Größe, die eine gegebene Anzeige X erzeugt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle im Bereich $X - \delta x/2$ bis $X + \delta x/2$ liegen. Die Größe wird somit durch eine rechteckige Wahrscheinlichkeitsverteilung (siehe 4.3.7 und 4.4.5) der Weite δx mit der Varianz $u^2 = (\delta x)^2/12$ beschrieben, wodurch eine Standardunsicherheit $u = 0,29\delta x$ für jede Anzeige impliziert ist.

Somit hat eine Waage mit einer Anzeigeeinheit, deren kleinste signifikante Stelle 1 g beträgt, eine Varianz auf Grund der Auflösung der Einheit von $u^2 = (1/12)g^2$ und eine Standardunsicherheit $u = (1/\sqrt{12})g = 0,29 g$.

F.2.2.2 Hysterese

Bestimmte Arten von Hysterese verursachen eine ähnliche Unsicherheit. Die Anzeige eines Meßgeräts kann um einen festen und bekannten Betrag abhängig davon abweichen, ob die aufeinanderfolgenden Anzeigen ansteigend oder fallend sind. Der geübte Bediener bemerkt die Richtung aufeinanderfolgender Anzeigen und bringt die entsprechenden Korrekturen an. Doch die Richtung der Hysterese ist nicht immer beobachtbar; es können im Meßgerät verdeckte Schwankungen um einen Gleichgewichtspunkt herum auftreten, so daß die Anzeige von der Richtung abhängt, von der aus die letzte Annäherung an diesen Punkt erfolgt ist. Wenn der Bereich möglicher Ausgaben δx ist, so ist die Varianz wiederum $u^2 = (\delta x)^2/12$, und die Standardunsicherheit auf Grund der Hysterese beträgt $u = 0,29\delta x$.

F.2.2.3 Arithmetik mit endlicher Genauigkeit

Das Runden oder Abschneiden von Zahlen bei der automatischen Datenreduktion durch einen Computer kann ebenfalls eine Unsicherheitsquelle sein. Es sei zum Beispiel ein Computer mit einer Wortlänge von 16 Bit betrachtet. Wenn bei einer Berechnung eine Zahl mit dieser Wortlänge von einer anderen Zahl subtrahiert wird, von der sie sich nur im 16. Bit unterscheidet, verbleibt nur ein signifikantes Bit. Solche Ereignisse treten bei der Berechnung von "schlecht konditionierten" Algorithmen auf und sind dann oft schwer vorhersagbar. Man kann die Unsicherheit empirisch ermitteln, indem man die für die Berechnung wichtigste Eingangsgröße (meist gibt es eine, die sich proportional zum Wert der Ausgangsgröße verhält) in kleinen Schritten erhöht, bis sich die Ausgangsgröße ändert. Die kleinste Änderung der Ausgangsgröße, die auf diese Weise erreicht werden kann, kann als Maß für die Unsicherheit herangezogen werden: wenn dies δx ist, so gilt $u^2 = (\delta x)^2/12$ und $u = 0,29\delta x$.

ANMERKUNG: Man kann die Unsicherheitsberechnung überprüfen, indem man das Ergebnis der Berechnung auf einem Computer mit begrenzter Wortlänge mit jenem vergleicht, das man auf einem Computer mit deutlich größerer Wortlänge erhält.

F.2.3 Fremde Eingangswerte

F.2.3.1 Ein fremder Wert für eine Eingangsgröße ist ein Wert, der nicht im Verlauf einer gegebenen Messung, sondern von anderer Seite als Ergebnis einer unabhängigen Ermittlung gewonnen wurde. Häufig ist ein solcher Wert mit einer Aussage über seine Unsicherheit versehen.

So kann die Unsicherheit zum Beispiel als Standardabweichung, Mehrfaches einer Standardabweichung oder halbe Weite eines Bereichs mit angegebenem Vertrauensniveau ausgedrückt sein. Alternativ hierzu können obere und untere Grenzen angegeben oder gar keine Informationen über die Unsicherheit geliefert worden sein. Im letzteren Fall müssen die Nutzer des Werts ihre eigenen Kenntnisse über die Größenordnung der Unsicherheit auf Grund der Art der Größe, der Zuverlässigkeit der Quelle, den in der Praxis gewonnenen Unsicherheiten für solche Größen usw. einsetzen.

ANMERKUNG: Die Diskussion der Unsicherheit von fremden Eingangsgrößen wird in diesem Abschnitt der leichteren Darstellung halber unter der Ermittlungsmethode B der Standardunsicherheit behandelt. Die Unsicherheit einer solchen Größe kann sich entweder ausschließlich aus nach Ermittlungsmethode A gewonnenen Komponenten oder aus Komponenten, die nach Ermittlungsmethode A, und Komponenten, die nach Ermittlungsmethode B gewonnen wurden, zusammensetzen. Da es für die Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit nicht notwendig ist, zwischen Komponenten zu differenzieren, die nach der einen oder der anderen Ermittlungsmethode gewonnen wurden, ist es auch nicht erforderlich, die Zusammensetzung der Unsicherheit einer fremden Eingangsgröße zu kennen.

F.2.3.2 Einige Kalibrierlabors drücken "Unsicherheit" in Form von oberen und unteren Grenzen aus, die einen Bereich angeben, der ein "Mindestvertrauensniveau" aufweist, zum Beispiel "mindestens" 95 %. Dies kann als Beispiel für eine sogenannte "sichere" Unsicherheit (siehe E.1.2) angesehen werden, die sich nicht in eine Standardunsicherheit umwandeln läßt, ohne daß man weiß, wie sie berechnet wurde. Liegen hinreichende Informationen darüber vor, kann sie nach den Regeln des vorliegenden *Leitfadens* neu berechnet werden; andernfalls ist eine unabhängige Ermittlung mit den jeweils zur Verfügung stehenden Mitteln vorzunehmen.

F.2.3.3 Einige Unsicherheiten werden einfach als Höchstgrenzen ausgedrückt, in denen *alle* Werte der Größe liegen sollen. Es wird üblicherweise angenommen, daß die in diesen Grenzen liegenden Werte alle gleich wahrscheinlich sind (Rechteckverteilung der Wahrscheinlichkeit). Eine solche Verteilung darf jedoch nicht angenommen werden, wenn es Grund für die Erwartung gibt, daß Werte, die innerhalb dieser Grenzen in Grenznähe liegen, weniger wahrscheinlich sind als jene, die eher im mittleren Bereich liegen. Eine Rechteckverteilung der halben Weite a hat die Varianz $a^2/3$; eine Normalverteilung, bei der a die halbe Weite eines Bereichs mit einem Grad des Vertrauens von 99,73 Prozent ist, hat die Varianz $a^2/9$. Es dürfte vernünftig sein, einen Kompromiß zwischen diesen beiden Werten zu finden, indem man zum Beispiel eine Dreieckverteilung annimmt, deren Varianz $a^2/6$ beträgt (siehe 4.3.9 und 4.4.6).

F.2.4 Gemessene Eingangswerte

F.2.4.1 Einmalige Beobachtung, kalibrierte Meßgeräte

Wenn ein Eingangsschätzwert durch eine einmalige Beobachtung mit einem bestimmten Meßgerät gewonnen wurde, das mit einem Normal von geringer Unsicherheit kalibriert wurde, so liegt die Unsicherheit des Schätzwerts hauptsächlich in der Wiederholbarkeit. Die Varianz mehrmaliger Messungen mit dem Meßgerät ist möglicherweise zuvor schon einmal festgestellt worden, zwar vielleicht nicht unbedingt bei genau demselben Ausgangswert, jedoch hinreichend nahe, um genutzt werden zu können, so daß es möglich ist anzunehmen, daß die Varianz für den Eingangswert genutzt werden kann. Liegen solche Informationen nicht vor, muß anhand der Art der Meßeinrichtung oder des Meßgeräts, den bekannten Varianzen anderer Meßgeräte der gleichen Bauart usw. eine Schätzung vorgenommen werden.

F.2.4.2 Einmalige Beobachtung, geprüfte Meßgeräte

Nicht allen Meßgeräten liegt ein Kalibrierschein oder eine Kalibrierkurve bei. Die meisten Meßgeräte werden jedoch nach einer schriftlich niedergelegten Norm hergestellt und entweder vom Hersteller oder von einer unabhängigen Institution daraufhin geprüft, ob sie dieser Norm entsprechen. Die Norm enthält üblicherweise meßtechnische Forderungen, häufig in Form von "höchstzulässigen Abweichungen", die von dem Meßgerät einzuhalten sind. Die Einhaltung dieser Forderungen wird durch Vergleich mit einem Referenzgerät überprüft, dessen höchstzulässige Unsicherheit üblicherweise in der Norm angegeben ist. Diese Unsicherheit wird dann zu einer Unsicherheitskomponente des geprüften Meßgeräts.

Wenn über die charakteristische Abweichungskurve des geprüften Meßgeräts nichts bekannt ist, muß die gleiche Wahrscheinlichkeit für jeden Wert der Abweichung innerhalb der zulässigen Grenzen, das heißt eine Rechteckverteilung der Wahrscheinlichkeit, angenommen werden. Jedoch haben bestimmte Arten von Meßgeräten solche Kalibrierkurven, bei denen die Meßabweichungen zum Beispiel in einem Teil des Meßbereichs stets positiv, in anderen stets negativ sind. Mitunter lassen sich solche Informationen in der schriftlich niedergelegten Norm nachlesen.

F.2.4.3 Überwachte Größen

Messungen finden häufig unter überwachten Referenzbedingungen statt, die für eine Reihe von Messungen als konstant angenommen werden. Zum Beispiel können Messungen an Proben vorgenommen werden, die sich in einem gerührten Ölbad befinden, dessen Temperatur von einem Thermostat geregelt wird. Die Temperatur des Ba-

des kann bei jeder Messung der Probe gemessen werden, aber wenn sich die Temperatur des Bades zyklisch ändert, ist die Momentantemperatur der Probe unter Umständen nicht dieselbe wie die vom Thermometer im Bad angezeigte Temperatur. Die Berechnung von Temperaturschwankungen einer Probe auf der Grundlage der Wärmetransporttheorie sowie ihrer Varianz sprengt den Rahmen des vorliegenden *Leitfadens*, jedoch muß sie von einem bekannten oder angenommenen Temperaturzyklus für das Bad ausgehen. Dieser Zyklus läßt sich durch ein feines Thermoelement und einen Temperaturschreiber beobachten. Wenn dies nicht möglich ist, läßt sich eine Näherung aus den Kenntnissen über die Art der Regelung herleiten.

F.2.4.4 Asymmetrische Verteilungen möglicher Werte

Es gibt Fälle, in denen alle möglichen Werte einer Größe auf einer Seite neben einem einzigen Grenzwert liegen. Mißt man zum Beispiel die feste senkrechte Höhe h (Meßgröße) der Flüssigkeitssäule in einem Druckmesser, kann es sein, daß die Achse des Höhenmeßgeräts in einem kleinen Winkel β von der Vertikalen abweicht. Die vom Gerät festgelegte Entfernung l ist stets größer als h ; es sind keine Werte kleiner als h möglich. Das liegt daran, daß h gleich der Projektion $l \cos \beta$ ist, womit $l = h / \cos \beta$ und alle Werte von $\cos \beta$ kleiner als 1 sind; es sind keine Werte größer als 1 möglich. Diese sogenannte "Kosinusabweichung" kann auch so in Erscheinung treten, daß die Projektion $h' \cos \beta$ der Meßgröße h' gleich der beobachteten Entfernung l ist, das heißt $l = h' \cos \beta$; die beobachtete Entfernung ist also stets kleiner als die Meßgröße.

Wird eine neue Variable $\delta = 1 - \cos \beta$ eingeführt, gilt für die beiden Fälle unter der Annahme, daß $\beta \approx 0$ oder $\delta \ll 1$, was in der Praxis häufig vorkommt:

$$h = \bar{l} (1 - \delta) \quad (\text{F.3a})$$

$$h' = \bar{l} (1 + \delta) \quad (\text{F.3b})$$

Hier ist $\bar{l}$, der beste Schätzwert von l , der arithmetische Mittelwert aus n unabhängigen Beobachtungen l_k von l mit der geschätzten Varianz $u^2(\bar{l})$ [siehe Gleichungen (3) und (5) in 4.2]. Aus den Gleichungen (F.3a) und (F.3b) folgt, daß man zum Erhalt eines Schätzwerts von h oder h' einen Schätzwert des Korrekturfaktors δ benötigt, während die Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit zu den Schätzwerten von h oder h' die geschätzte Varianz $u^2(\delta)$ zu δ erfordert. Genauer ergibt die Anwendung von Gleichung (10) aus 5.1.2 auf die Gleichungen (F.3a) und (F.3b) für $u_c^2(h)$ und $u_c^2(h')$ (– und + entsprechend eingesetzt):

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \quad (\text{F.4a})$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \quad (\text{F.4b})$$

Zum Erhalt von Schätzwerten des Erwartungswerts von δ und der Varianz von δ sei angenommen, daß die Achse des zur Höhenmessung der Flüssigkeitssäule im Druckmesser verwendeten Meßgeräts auf eine Vertikalebene festgelegt ist und daß die Verteilung der Werte des Neigungswinkels β um den Erwartungswert 0 herum eine Normalverteilung mit der Varianz σ^2 ist. Obwohl β sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, ist $\delta = 1 - \cos \beta$ für alle Werte von β positiv. Wird der Versatz der Geräteachse als nicht auf eine Ebene begrenzt angenommen, so kann die Orientierung der Achse über einen Raumwinkel variieren, da die Achse auch im Azimut versetzt sein kann, doch β ist dann stets ein positiver Winkel.

Im ebenenbegrenzten oder eindimensionalen Fall ist das Wahrscheinlichkeitselement $p(\beta) d\beta$ (C.2.5, Anmerkung) proportional zu $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)] d\beta$, im nicht ebenenbegrenzten oder zweidimensionalen Fall ist das Wahrscheinlichkeitselement proportional zu $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)] \sin \beta d\beta$. Die Wahrscheinlichkeitsdichten $p(\delta)$ sind in den beiden Fällen diejenigen Ausdrücke, die zur Ermittlung des Erwartungswerts und der Varianz von δ zur Verwendung in den Gleichungen (F.3) und (F.4) benötigt werden. Sie lassen sich leicht aus den Wahrscheinlichkeitselementen gewinnen, da der Winkel β als klein angesehen werden kann. Daher können $\delta = 1 - \cos \beta$ und $\sin \beta$ in niedrigster Ordnung nach β entwickelt werden. Das ergibt $\delta \approx \beta^2/2$, $\sin \beta = \sqrt{2\delta}$ und $d\beta = d\delta/\sqrt{2\delta}$. Für die Wahrscheinlichkeitsdichten gilt dann:

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi \delta}} \exp(-\delta/\sigma^2) \quad (\text{F.5a})$$

für eine Dimension

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-\delta/\sigma^2) \quad (\text{F.5b})$$

für zwei Dimensionen

wobei

$$\int_0^\infty p(\delta) d\delta = 1$$

Gleichungen (F.5a) und (F.5b), aus denen hervorgeht, daß der wahrscheinlichste Wert für die Korrektur δ in beiden Fällen Null ist, ergeben für den Erwartungswert und die Varianz von δ im eindimensionalen Fall $E(\delta) = \sigma^2/2$ und $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ und im zweidimensionalen Fall $E(\delta) = \sigma^2$ und $\text{var}(\delta) = \sigma^4$. Aus den Gleichungen (F.3a), (F.3b) und (F.4b) wird dann:

$$h = \bar{l} [1 - (d/2) u^2(\beta)] \quad (\text{F.6a})$$

$$h' = \bar{l} [1 + (d/2) u^2(\beta)] \quad (\text{F.6b})$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2) \bar{l}^2 u^4(\beta) \quad (\text{F.6c})$$

wobei d die Dimension ($d = 1$ oder 2) und $u(\beta)$ die Standardunsicherheit des Winkels β ist, der als bester Schätzwert für die Standardabweichung σ einer vorausgesetzten Normalverteilung genommen und aus allen verfügbaren Informationen über die Messung (Ermittlungsmethode B) ermittelt wird. Das Beispiel zeigt den Fall, in dem der Schätzwert des Werts einer Meßgröße von der *Unsicherheit* einer Eingangsgröße abhängt.

Obwohl die Gleichungen (F.6a) bis (F.6c) speziell für die Normalverteilung gelten, kann die Analyse auch bei anderen angenommenen Verteilungen von β durchgeführt werden. Nimmt man zum Beispiel für β eine symmetrische Rechteckverteilung mit den Ober- und Untergrenzen $+\beta_0$ und $-\beta_0$ (eindimensionaler Fall) bzw. $+\beta_0$ und Null (zweidimensionaler Fall) an, so sind $E(\delta) = \beta_0^2/6$ und $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/45$ für eine Dimension bzw. $E(\delta) = \beta_0^2/4$ und $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/48$ für zwei Dimensionen.

ANMERKUNG: Dies ist eine Situation, in der die Näherung erster Ordnung der Entwicklung der Funktion $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ in eine Taylor-Reihe zur Ermittlung von $u_c^2(y)$ nach Gleichung (10) in 5.1.2 wegen der Nichtlinearität von f ungeeignet ist, denn $\cos \beta \neq \cos \beta$ (siehe Anmerkung 2 zu 5.1.2 und H.2.4). Obwohl die Analyse gänzlich mit β durchgeführt werden kann, wird die Aufgabe durch Einführung der Variable δ erleichtert.

Ein weiteres Beispiel für eine Situation, in der alle möglichen Werte einer Größe auf einer Seite eines einzigen Grenzwerts liegen, ist die Bestimmung der Konzentration eines Bestandteils in einer Lösung durch Titration, bei der das Erreichen des Grenzwerts durch Auslösen eines Signals angezeigt wird. Die Menge an zugegebenem Reagens ist stets größer und niemals kleiner als die zum Auslösen des Signals benötigte Menge. Der über den Grenzwert hinaus titrierte Überschuß ist eine für die Datenreduktion benötigte Variable. Die hier (und in ähnlichen Fällen) anzuwendende Methode besteht in der Annahme

einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Überschuß, der zur Ermittlung eines Erwartungswerts für den Überschuß und dessen Varianz herangezogen wird.

BEISPIEL: Wird für den Überschuß z eine Untergrenze Null und eine Obergrenze C_0 angenommen, so ist der Erwartungswert für den Überschuß $C_0/2$ und die zugehörige Varianz $C_0^2/12$. Wird als Wahrscheinlichkeitsdichte des Überschusses eine Normalverteilung mit $0 \leq z \leq \infty$ angenommen, das heißt, $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1} \exp(-z^2/2\sigma^2)$, so beträgt der Erwartungswert $\sigma\sqrt{2/\pi}$ und die Varianz $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

F.2.4.5 Unsicherheit, wenn Korrekturen aus einer Kalibrierkurve nicht vollzogen werden

In der Anmerkung zu 6.3.1 wird auf einen Fall Bezug genommen, in dem eine bekannte Korrektur b für einen signifikanten systematischen Einfluß nicht an das angegebene Meßergebnis angebracht wurde, sondern durch Vergrößern der diesem Ergebnis zugewiesenen "Unsicherheit" berücksichtigt wurde. Ein Beispiel ist das Ersetzen einer erweiterten Unsicherheit U durch $U + b$, wobei U als erweiterte Unsicherheit unter der angenommenen Voraussetzung $b = 0$ ermittelt wurde. So wird manchmal vorgegangen, wenn alle nachfolgenden Bedingungen zutreffen: die Meßgröße Y ist, wie im Falle einer Kalibrierkurve für einen Temperaturfühler, über einen Wertebereich eines Parameters t definiert; U und b sind ebenfalls von t abhängig; und es darf nur ein einziger Wert für die "Unsicherheit" für alle Schätzwerte $y(t)$ der Meßgröße über den Bereich der möglichen Werte von t angegeben werden. In solchen Fällen wird das Meßergebnis häufig in folgender Form angegeben: $Y(t) = y(t) \pm [U_{\max} + b_{\max}]$, wobei der Index "max" anzeigt, daß der Höchstwert von U und der Höchstwert der bekannten Korrektur b über den Wertebereich von t verwendet werden.

Obwohl im vorliegenden *Leitfaden* empfohlen wird, daß an die Meßergebnisse Korrekturen für bekannte und signifikante systematische Einflüsse angebracht werden, mag das in einer solchen Situation wegen des unannehmbar hohen Aufwands bei der Berechnung und beim Anbringen je einer Korrektur sowie bei der Berechnung und Verwendung je einer Unsicherheit für jeden Wert von $y(t)$ nicht immer durchführbar sein.

Ein vergleichsweise einfaches Herangehen an dieses Problem, das mit den geltenden Prinzipien im vorliegenden *Leitfaden* vereinbar ist, läßt sich wie folgt realisieren:

Man berechnet eine einzelne mittlere Korrektur $\bar{b}$ nach

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} b(t) dt \quad (\text{F.7a})$$

wobei t_1 und t_2 den interessierenden Bereich des Parameters t definieren. Dann ermittelt man den besten Schätzwert von $Y(t)$ als $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, wobei $y(t)$ der beste unkorrigierte Schätzwert von $Y(t)$ ist. Die zur mittleren Korrektur $\bar{b}$ gehörende Varianz über den interessierenden Bereich ist gegeben durch

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \bar{b}]^2 dt \quad (\text{F.7b})$$

wobei die Unsicherheit für die tatsächliche Ermittlung der Korrektur $b(t)$ unberücksichtigt bleibt. Die mittlere Varianz von $b(t)$ auf Grund ihrer tatsächlichen Ermittlung ist gegeben durch

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)] dt \quad (\text{F.7c})$$

wobei $u^2[b(t)]$ die Varianz zur Korrektur $b(t)$ ist. In ähnlicher Weise erhält man die mittlere Varianz zu $y(t)$, die sich aus allen weiteren Unsicherheitsquellen außer der Korrektur $b(t)$ ergibt, durch

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)] dt \quad (\text{F.7d})$$

wobei $u^2[y(t)]$ die Varianz zu $y(t)$ ist, die sich aus allen weiteren Unsicherheitsquellen außer der Korrektur $b(t)$ ergibt. Der einzige Wert der Standardunsicherheit, der auf alle Schätzwerte $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ der Meßgröße $Y(t)$ angewendet werden soll, ist dann die positive Quadratwurzel aus

$$u_c(y') = \sqrt{\overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\bar{b})} \quad (\text{F.7e})$$

Die erweiterte Unsicherheit U läßt sich durch Multiplikation von $u_c(y')$ mit einem geeignet gewählten Erweiterungsfaktor k berechnen, das heißt $U = k u_c(y')$, woraus sich $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$ ergibt. Die Verwendung derselben Durchschnittskorrektur für alle Werte von t statt einer Korrektur für jeden Wert von t muß jedoch mitgeteilt werden, und es ist klar anzugeben, wofür U steht.

F.2.5 Unsicherheit der Meßmethode

F.2.5.1 Die vielleicht am schwersten zu ermittelnde Unsicherheitskomponente ist jene, die mit der Meßmethode zu tun hat, insbesondere dann, wenn diese Methode nachweislich Ergebnisse mit geringerer Streuung als andere bekannte Methoden erbringt. Jedoch gibt es wahrscheinlich andere Methoden, von denen einige noch un-

bekannt oder in gewisser Weise unpraktisch sind, die systematisch unterschiedliche Resultate mit augenscheinlich gleicher Gültigkeit ergeben würden. Das impliziert eine *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilung und nicht eine Verteilung, aus der sich leicht Stichproben ziehen und statistisch behandeln lassen. Obwohl die Unsicherheit der Meßmethode dominant sein mag, sind die einzigen verfügbaren Informationen zur Berechnung ihrer Standardunsicherheit oft nur die vorhandenen Kenntnisse der physikalischen Welt. (Siehe auch E.4.4).

ANMERKUNG: Eine Ermittlung derselben Meßgröße durch verschiedene Methoden - entweder im gleichen oder in verschiedenen Laboratorien, oder auf die gleiche Weise in unterschiedlichen Laboratorien - gibt oft wertvollen Aufschluß über die einer bestimmten Methode zuzuordnende Unsicherheit. Im allgemeinen ist der Austausch von Normen oder Referenzmaterialien zwischen Laboratorien zum Zwecke unabhängiger Messungen nützlich für die Beurteilung der Zuverlässigkeit von Unsicherheitsrechnungen und zum Auffinden bisher unerkannter systematischer Einflüsse.

F.2.6 Unsicherheit der Probe

F.2.6.1 Bei vielen Messungen muß ein unbekanntes Objekt mit einem bekannten, über ähnliche Eigenschaften verfügenden Normal verglichen werden, um das unbekannte Objekt zu kalibrieren. Als Beispiele lassen sich Endmaße, bestimmte Thermometer, Sätze von Massestücken, Widerstände und hochreine Materialien nennen. In der Mehrzahl der Fälle sind die Meßmethoden gegenüber Probenahme (der Auswahl des jeweils zu kalibrierenden unbekannten Objekts), Probenbehandlung und bestimmten wirkenden Einflußgrößen der Umgebung nicht besonders empfindlich oder werden dadurch ungünstig beeinflusst, weil das unbekannte Objekt und das Normal im Prinzip in derselben (oft vorhersagbaren) Weise auf solche Größen reagieren.

F.2.6.2 In einigen praktischen Meßsituationen spielen Probenahme und -behandlung eine viel größere Rolle. Dies kommt häufig bei der chemischen Analyse von natürlichen Stoffen vor. Im Gegensatz zu vom Menschen hergestellten Stoffen, die nachweislich über das für die Messung erforderliche Maß hinaus homogen sind, erweisen sich natürliche Stoffe oft als sehr inhomogen. Diese Inhomogenität führt zu zwei zusätzlichen Unsicherheitskomponenten. Zur Ermittlung der ersten ist festzustellen, in welchem Maße die ausgewählte Probe das zu analysierende Ausgangsmaterial adäquat repräsentiert. Zur Ermittlung der zweiten ist festzustellen, in welchem Maße die sekundären (nicht analysierten) Konstituenten die Messung beeinflussen und wie adäquat sie durch die Meßmethode berücksichtigt werden.

F.2.6.3 In einigen Fällen ermöglicht eine sorgfältige Planung des Experiments die statistische Berechnung der Unsicherheit auf Grund der Probe (siehe H.5 und H.5.3.2). Normalerweise jedoch, insbesondere bei signifi-

kanter Wirkung von Einflußgrößen der Umgebung auf die Probe, erfordert die Berechnung der Unsicherheit das ganze auf Erfahrung beruhende Können und Wissen des Analytikers und alle verfügbaren Informationen.

Nur für die Normungsarbeit

Anhang G

Freiheitsgrade und Grade des Vertrauens

G.1 Einführung

G.1.1 Dieser Anhang beschäftigt sich mit der allgemeinen Frage, wie man aus dem Schätzwert y der Meßgröße Y und der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ zu diesem Schätzwert zu einer erweiterten Unsicherheit $U_p = k_p u_c(y)$ gelangt, die ein Intervall $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ definiert, das eine festgelegte Überdeckungswahrscheinlichkeit oder einen Grad p des Vertrauens hat. Er behandelt somit die Festlegung des Erweiterungsfaktors k_p , der ein Intervall um das Meßergebnis y erzeugt, von dem erwartet werden kann, daß er einen großen, festgelegten Anteil p der Verteilung von Werten umfaßt, die der Meßgröße Y vernünftigerweise zugeordnet werden können (siehe Kapitel 6).

G.1.2 In den meisten praktischen Meßsituationen ist die Berechnung von Intervallen mit bestimmten Graden des Vertrauens - in der Tat also die Berechnung der individuellsten Unsicherheitskomponenten in solchen Situationen - im besten Fall nur eine Näherung. Selbst die empirische Standardabweichung des Mittelwerts aus immerhin 30 mehrmaligen Beobachtungen einer Größe, die durch eine Normalverteilung beschrieben wird, hat eine Unsicherheit von ca. 13 % (siehe Tabelle E.1 in Anhang E).

In den meisten Fällen ist es nicht sinnvoll, beispielsweise zwischen einem Intervall mit einem Grad des Vertrauens von 95 % (eine Chance von 1 : 20, daß der Wert der Meßgröße Y außerhalb des Intervalls liegt) und einem mit 94 oder 96 % (1 : 17 bzw. 1 : 25) zu unterscheiden. Besonders schwierig ist es, Intervalle mit Graden des Vertrauens von 99 % (Chance von 1 : 100) und darüber zu rechtfertigen, selbst wenn man davon ausgeht, daß keine systematischen Einflüsse übersehen wurden, da im allgemeinen nur sehr wenige Informationen über die extremen Anteile oder "Schwänze" von Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen erhältlich sind.

G.1.3 Um den Wert des Erweiterungsfaktors k_p zu erhalten, der ein Intervall mit einem festgelegten Grad des Vertrauens ergibt, sind detaillierte Kenntnisse über die durch das Meßergebnis gekennzeichnete Wahrscheinlichkeitsverteilung und seine kombinierte Standardunsicherheit erforderlich. Für eine durch eine Normalverteilung beschriebene Größe z mit dem Erwartungswert μ_z und der Standardabweichung σ läßt sich zum Beispiel der Wert von k_p , der ein Intervall $\mu_z \pm k_p \sigma$ erzeugt, das den Anteil p der Verteilung umfaßt und somit die Überdeckungswahrscheinlichkeit oder den Grad p des Vertrauens hat, leicht berechnen. Einige Beispiele sind in Tabelle G.1 angeführt.

Tabelle G.1: Wert des Erweiterungsfaktors k_p , der bei einer angenommenen Normalverteilung ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens p erzeugt

Grad p des Vertrauens (in %)	Erweiterungsfaktor k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

ANMERKUNG: Wenn z im Gegensatz hierzu durch eine Rechteckverteilung mit dem Erwartungswert μ_z und der Standardabweichung $\sigma = a/\sqrt{3}$ beschrieben wird, wobei a die halbe Weite der Verteilung ist, ist der Grad p des Vertrauens 57,74 % für $k_p = 1$; 95 % für $k_p = 1,65$; 99 % für $k_p = 1,71$ und 100 % für $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1,73$. Die Rechteckverteilung ist "schlanker" als die Normalverteilung in dem Sinne, daß sie von endlicher Ausdehnung ist und keine "Schwänze" hat.

G.1.4 Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$, von denen die Meßgröße Y abhängt, bekannt sind [ihre Erwartungswerte, Varianzen und höheren Momente (siehe C.2.13 und C.2.22), wenn es sich nicht um Normalverteilungen handelt], und wenn $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_NX_N$, dann kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y durch Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermittelt werden [10]. Werte von k_p , die Intervalle mit festgelegten Graden p des Vertrauens ergeben, können dann aus der sich durch die Faltung ergebenden Verteilung errechnet werden.

G.1.5 Wenn die funktionale Beziehung zwischen der Meßgröße Y und ihren Eingangsgrößen nichtlinear ist und eine Entwicklung der Beziehung in eine Taylor-Reihe keine akzeptable Näherung erster Ordnung ergibt (siehe 5.1.2 und 5.1.5), dann läßt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y nicht durch Faltung der Verteilungen der Eingangsgrößen ermitteln. In solchen Fällen sind andere analytische oder numerische Methoden erforderlich.

G.1.6 In der Praxis werden solche Faltungen sehr selten, wenn überhaupt, durchgeführt, um Intervalle mit festgelegten Graden des Vertrauens zu berechnen, weil die Parameter, die die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen kennzeichnen, normalerweise Schätzwerte sind, weil die Erwartung, der zu einem bestimmten Intervall gehörige Grad des Vertrauens könne mit irgendeiner größeren Genauigkeit bekannt sein, unrealistisch ist, und weil die gefalteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen sehr komplex sind. Statt dessen werden Näherungen verwendet, die den zentralen Grenzwertsatz ausnutzen.

G.2 Zentraler Grenzwertsatz

G.2.1 Wenn $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_NX_N = \sum_{i=1}^N c_iX_i$ und alle X_i normalverteilt sind, ist die resultierende Faltungsverteilung von Y ebenfalls normal. Doch selbst wenn die X_i nicht normalverteilt sind, läßt sich die Verteilung von Y auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes häufig durch eine Normalverteilung annähern. Dieser Satz besagt, daß die Verteilung von Y mit dem Erwartungswert $E(Y) = \sum_{i=1}^N c_iE(X_i)$ und der Varianz $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^N c_i^2\sigma^2(X_i)$, wobei $E(X_i)$ der Erwartungswert von X_i und $\sigma^2(Y)$ die Varianz von Y sind, *annähernd normal* ist, wenn die X_i unabhängig voneinander sind und $\sigma^2(Y)$ viel größer ist als jede Einzelkomponente $c_i^2\sigma^2(X_i)$ der nicht normalverteilten X_i .

G.2.2 Der zentrale Grenzwertsatz ist bedeutsam, weil er die große Rolle zeigt, die die Varianzen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen im Vergleich zu den höheren Momenten der Verteilungen bei der Bestimmung der Form für die resultierende Faltungs-

verteilung von Y spielen. Er impliziert weiterhin, daß die Faltungsverteilung mit Erhöhung der Anzahl der Eingangsgrößen für $\sigma^2(Y)$ gegen eine Normalverteilung konvergiert; die Konvergenz erfolgt umso schneller, je näher die Werte von $c_i^2\sigma^2(X_i)$ beieinanderliegen (in der Praxis äquivalent dazu, daß jeder Eingangsschätzwert x_i eine vergleichbare Unsicherheit zur Unsicherheit des Schätzwerts y der Meßgröße Y beiträgt); je näher die Verteilung der X_i einer Normalverteilung ist, desto weniger X_i werden benötigt, um eine Normalverteilung für Y zu erreichen.

BEISPIEL: Die Rechteckverteilung (siehe 4.3.7 und 4.4.5) ist ein extremes Beispiel für eine nicht-normale Verteilung, jedoch ergibt die Faltung von nur drei dieser Verteilungen gleicher Breite annähernd eine Normalverteilung. Wenn a die halbe Weite jeder der drei Rechteckverteilungen ist, so daß ihre Varianz jeweils $a^2/3$ ist, so ist die Varianz der gefalteten Verteilung $\sigma^2 = a^2$. Die 95%- und 99%-Intervalle der gefalteten Verteilung sind durch $1,937\sigma$ bzw. $2,379\sigma$ bestimmt, während die entsprechenden Intervalle für eine Normalverteilung mit derselben Standardabweichung σ mit $1,96\sigma$ bzw. $2,576\sigma$ definiert sind (siehe Tabelle G.1) [10].

ANMERKUNGEN

1 Für jedes Intervall mit einem Grad p des Vertrauens größer als etwa 91,7 % ist der Wert von k_p für eine Normalverteilung größer als der entsprechende Wert, der sich aus der Faltung einer beliebigen Anzahl von Rechteckverteilungen beliebiger Breite ergibt.

2 Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des arithmetischen Mittelwerts $\bar{q}$ aus n Beobachtungen q_k einer Zufallsgröße q mit dem Erwartungswert μ_q und der endlichen Standardabweichung σ einer Normalverteilung mit dem Mittelwert μ_q und der Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$ nähert, wenn $n \rightarrow \infty$, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung q auch immer haben mag.

G.2.3 Wenn festgestellt werden kann, daß die Bedingungen des zentralen Grenzwertsatzes annähernd erfüllt sind, insbesondere wenn die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ nicht von einer nach Ermittlungsmethode A errechneten Standardunsicherheitskomponente dominiert wird, die nur auf wenigen Beobachtungen beruht, oder von einer nach Ermittlungsmethode B errechneten Unsicherheitskomponente dominiert wird, die auf einer angenommenen Rechteckverteilung beruht, ist eine praktische Folge des zentralen Grenzwertsatzes, daß eine vernünftige erste Näherung zur Berechnung der erweiterten Unsicherheit $U_p = k_p u_c(y)$, die ein Intervall mit einem Grad p des Vertrauens liefert, die Verwendung eines Werts für k_p aus einer Normalverteilung ist. Die zu diesem Zweck am meisten verwendeten Werte sind in Tabelle G.1 angeführt.

G.3 Die t -Verteilung und Freiheitsgrade

G.3.1 Zum Erhalt einer besseren Näherung als bei einfacher Verwendung von k_p aus der Normalverteilung wie in G.2.3 ist zu bedenken, daß die Berechnung eines Intervalls mit einem festgelegten Grad des Vertrauens nicht die Verteilung der Variablen $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, sondern die Verteilung der Variablen $(y - Y)/u_c(y)$ erfordert. Das liegt daran, daß in der Praxis üblicherweise lediglich y verfügbar ist, der aus $y = \sum_{i=1}^N c_i x_i$ gewonnene Schätzwert zu Y , wobei x_i der Schätzwert von X_i ist; die kombinierte Varianz $u_c^2(y)$ zu y errechnet sich aus $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$, wobei $u(x_i)$ die Standardunsicherheit (geschätzte Standardabweichung) zum Schätzwert x_i ist.

ANMERKUNG: Strenggenommen müßte Y in dem Ausdruck $(y - Y)/u_c(y)$ eigentlich $E(Y)$ heißen. Der Einfachheit halber wurde im vorliegenden *Leitfaden* nur an wenigen Stellen eine solche Differenzierung vorgenommen. Im allgemeinen wurde dasselbe Formelzeichen für die physikalische Größe, die Zufallsgröße, die diese Größe repräsentiert, und den Erwartungswert dieser Variablen verwendet (siehe 4.1.1, Anmerkungen).

G.3.2 Wenn z eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ_z und der Standardabweichung σ und $\bar{z}$ der arithmetische Mittelwert aus n Beobachtungen z_k von z ist, wobei $s(\bar{z})$ die empirische Standardabweichung von $\bar{z}$ ist [siehe Gleichungen (3) und (5) in 4.2], dann ist die Verteilung der Variablen $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ die t -Verteilung oder Student-Verteilung (C.3.8) mit $\nu = n - 1$ Freiheitsgraden.

Es folgt $Y = X$, wenn die Meßgröße Y einfach eine einzelne normalverteilte Größe X ist. Wird X anhand des arithmetischen Mittelwerts $\bar{X}$ aus n unabhängigen Beobachtungen X_k von X mit der empirischen Standardabweichung des Mittelwerts $s(\bar{X})$ ermittelt, so ist $y = \bar{X}$ der beste Schätzwert von Y , wobei die empirische Standardabweichung dieses Schätzwerts $u_c(y) = s(\bar{X})$ ist. Dann ist $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ verteilt nach der t -Verteilung mit

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq (y - Y)/u_c(y) \leq t_p(\nu)] = p \quad (\text{G.1a})$$

oder

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq (y - Y)/u_c(y) \leq t_p(\nu)] = p \quad (\text{G.1b})$$

was sich umschreiben läßt als

$$\Pr[y - t_p(\nu)u_c(y) \leq Y \leq y + t_p(\nu)u_c(y)] = p \quad (\text{G.1c})$$

In diesen Ausdrücken bedeutet $\Pr[\]$ "Wahrscheinlichkeit von", der t -Faktor $t_p(\nu)$ ist der Wert von t für einen gege-

benen Wert des Parameters ν , die Anzahl der Freiheitsgrade (siehe G.3.3), so daß der Anteil p der t -Verteilung vom Intervall $-t_p(\nu)$ bis $+t_p(\nu)$ eingeschlossen wird. Somit definiert die erweiterte Unsicherheit

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y) \quad (\text{G.1d})$$

ein Intervall $y - U_p$ bis $y + U_p$, das sich bequemer als $Y = y \pm U_p$ schreiben läßt und von dem erwartet werden kann, daß es einen Anteil p der Verteilung von Werten umfaßt, die der Meßgröße Y vernünftigerweise zugeordnet werden können, wobei p die Überdeckungswahrscheinlichkeit oder der Grad des Vertrauens des Intervalls ist.

G.3.3 Die Anzahl ν der Freiheitsgrade ist gleich $n - 1$ für eine einzelne, durch das arithmetische Mittel aus n unabhängigen Beobachtungen geschätzte Größe (wie in G.3.2). Wenn n unabhängige Beobachtungen zur Ermittlung von Steigung und Achsenabschnitt einer Geraden mit der Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden, ist $\nu = n - 2$ die Anzahl der Freiheitsgrade ihrer jeweiligen Standardunsicherheiten. Für eine Ausgleichung von m Parametern und n Meßpunkten nach der Methode der kleinsten Quadrate ist $\nu = n - m$ die Anzahl der Freiheitsgrade der Standardunsicherheit für jeden Parameter. (Siehe die weitere Diskussion der Freiheitsgrade in Literaturhinweis [15].)

G.3.4 Ausgewählte Werte von $t_p(\nu)$ für verschiedene Werte von ν und p sind in Tabelle G.2 in diesem Anhang angeführt. Für $\nu \rightarrow \infty$ nähert sich die t -Verteilung der Normalverteilung an und $t_p(\nu) \approx (1 + 2/\nu)^{1/2} k_p$, wobei k_p in diesem Ausdruck der Erweiterungsfaktor ist, der zum Erhalt eines Intervalls mit dem Grad p des Vertrauens für eine normalverteilte Variable nötig ist. Somit ist der Wert von $t_p(\infty)$ in Tabelle G.2 für ein gegebenes p gleich dem Wert von k_p in Tabelle G.1 für dasselbe p .

ANMERKUNG: Häufig wird die t -Verteilung in Quantilen tabelliert; das heißt, es werden die Werte der Quantile $t_{1-\alpha}$ angegeben, wobei $1 - \alpha$ die kumulative Wahrscheinlichkeit bezeichnet und die Beziehung

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, \nu) dt$$

das Quantil definiert, worin f die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. $t_p(\nu)$ und $t_{1-\alpha}(\nu)$ sind also durch $p = 1 - 2\alpha$ miteinander verknüpft. So ist zum Beispiel das Quantil $t_{0,975}$ für $1 - \alpha = 0,975$ und $\alpha = 0,025$ dasselbe wie $t_p(\nu)$ für $p = 0,95$.

G.4 Effektive Freiheitsgrade

G.4.1 Im allgemeinen beschreibt die t -Verteilung nicht die Verteilung der Variablen $(y - Y)/u_c(y)$, wenn $u_c^2(y)$ die Summe aus zwei oder mehreren Varianzkomponenten $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (siehe 5.1.3) ist, selbst wenn jedes x_i der

Schätzwert einer normalverteilten Eingangsgröße X_i ist. Jedoch läßt sich die Verteilung der Variablen näherungsweise mit Hilfe einer t -Verteilung mit v_{eff} effektiven Freiheitsgraden ermitteln, die man aus der Welch-Satterthwaite-Formel erhält [16, 17, 18]

$$\frac{u_c^4(y)}{v_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i} \quad (\text{G.2a})$$

oder

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (\text{G.2b})$$

mit

$$v_{\text{eff}} \leq \sum_{i=1}^N v_i \quad (\text{G.2c})$$

wobei $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$ (siehe 5.1.3). Die erweiterte Unsicherheit $U_p = k_p u_c(y) = t_p(v_{\text{eff}}) u_c(y)$ ergibt dann ein Intervall $Y = y \pm U_p$ mit einem annähernden Grad des Vertrauens p .

ANMERKUNGEN

1 Wenn der aus Gleichung (G.2b) gewonnene Wert von v_{eff} keine ganze Zahl ist, was in der Praxis normalerweise der Fall sein dürfte, kann man den entsprechenden Wert von t_p aus Tabelle G.2 entnehmen, indem man interpoliert oder v_{eff} auf die nächstniedrigere ganze Zahl abrundet.

2 Wird ein Eingangsschätzwert x_i selbst aus zwei oder mehreren Schätzwerten gewonnen, dann ist der Wert des im Ausdruck $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ zu verwendenden v_i im Nenner von Gleichung (G.2b) die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade, die nach einem der Gleichung (G.2b) äquivalenten Ausdruck errechnet wurden.

3 In Abhängigkeit von den Bedürfnissen der potentiellen Anwender kann es sich als nützlich erweisen, zusätzlich zu v_{eff} auch die Werte für v_{effA} und v_{effB} zu berechnen und anzugeben, die mit Gleichung (G.2b) unter separater Behandlung der Standardunsicherheiten nach den Ermittlungsmethoden A und B errechnet werden. Wenn der Beitrag der Standardunsicherheiten nach Ermittlungsmethode A und B zu $u_c^2(y)$ einzeln mit $u_{cA}^2(y)$ bzw. $u_{cB}^2(y)$ bezeichnet wird, dann lautet die Beziehung der verschiedenen Größen zueinander:

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{v_{\text{eff}}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{v_{\text{effA}}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{v_{\text{effB}}}$$

BEISPIEL: Es sei $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$, und die Schätzwerte x_1, x_2, x_3 der normalverteilten Eingangsgrößen X_1, X_2, X_3 seien die arithmetischen Mittel aus $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ und $n_3 = 15$ unabhängigen mehrmaligen Beobachtungen mit den jeweiligen relativen Standardunsicherheiten $u(x_1)/x_1 = 0,25\%$, $u(x_2)/x_2 = 0,57\%$ und $u(x_3)/x_3 = 0,82\%$. In diesem Fall gilt $c_i = \partial f / \partial X_i = Y/X_i$ (zu berechnen bei x_1, x_2, x_3 ; siehe 5.1.3, Anmerkung 1), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^3 [u(x_i)/x_i]^2 = (1,03\%)^2$ (siehe Anmerkung 2 zu 5.1.6), und aus Gleichung (G.2b) wird

$$v_{\text{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^3 \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{v_i}}$$

Somit gilt

$$v_{\text{eff}} = \frac{1,03^4}{\frac{0,25^4}{10-1} + \frac{0,57^4}{5-1} + \frac{0,82^4}{15-1}} = 19,0$$

Nach Tabelle G.2 beträgt der Wert von t_p für $p = 95\%$ und $v = 19$, $t_{95}(19) = 2,09$; daher beträgt die relative erweiterte Unsicherheit für diesen Grad des Vertrauens $U_{95} = 2,09 \times (1,03\%) = 2,2\%$. Dann kann festgestellt werden: $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0,022)$ (wobei y mit dem Ausdruck $y = bx_1x_2x_3$ zu ermitteln ist) oder $0,978y \leq Y \leq 1,022y$, wobei der zu diesem Intervall gehörende Grad des Vertrauens annähernd 95% beträgt.

G.4.2 In der Praxis hängt $u_c(y)$ von den Standardunsicherheiten $u(x_i)$ der Eingangsschätzwerte sowohl normalverteilter als auch nicht normalverteilter Eingangsgrößen ab, wobei man die $u(x_i)$ sowohl aus auf Häufigkeit beruhenden als auch aus *A-priori*-Wahrscheinlichkeitsverteilungen (das heißt, sowohl aus Berechnungen nach Ermittlungsmethode A als auch nach Ermittlungsmethode B) erhält. Eine analoge Feststellung gilt für den Schätzwert y und die Eingangsschätzwerte x_i , von denen y abhängt. Dennoch läßt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Funktion $t = (y - Y) / u_c(y)$ näherungsweise mit der t -Verteilung beschreiben, wenn sie in eine Taylor-Reihe um ihren Erwartungswert entwickelt wird. Im wesentlichen wird dies in der Näherung niedrigster Ordnung durch die Welch-Satterthwaite-Formel, Gleichung (G.2a) oder (G.2b) erreicht.

Es stellt sich die Frage nach der Anzahl der Freiheitsgrade, die einer nach Ermittlungsmethode B gewonnenen Standardunsicherheit zuzuordnen ist, wenn v_{eff} nach Gleichung (G.2b) berechnet wird. Da die Definition der Freiheitsgrade erkennen läßt, daß v in der t -Verteilung ein

Maß für die Unsicherheit der Varianz $s^2(\bar{z})$ ist, kann Gleichung (E.7) aus E.4.3 zur Festlegung der Anzahl der Freiheitsgrade v_i verwendet werden:

$$v_i \approx \frac{1}{2} \frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right)^{-2} \quad (\text{G.3})$$

Bei der in große Klammern gesetzten Größe handelt es sich um die relative Unsicherheit von $u(x_i)$; für eine Berechnung der Standardunsicherheit nach Ermittlungsmethode B ist dies eine subjektive Größe, deren Wert durch eine wissenschaftliche Aussage auf der Grundlage des Pools an vorhandenen Informationen gewonnen wird.

BEISPIEL: Es sei angenommen, daß man aufgrund der Kenntnis davon, wie der Eingangsschätzwert x_i ermittelt und wie seine Standardunsicherheit $u(x_i)$ berechnet wurde, zu dem Urteil gelangt, daß der Wert von $u(x_i)$ zu etwa 25% zuverlässig sei. Daher läßt sich für die relative Unsicherheit $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0,25$ annehmen, womit sich nach Gleichung (G.3) $v_i = (0,25)^{-2}/2 = 8$ ergibt. Hätte man den Wert von $u(x_i)$ als nur zu etwa 50% zuverlässig angenommen, wäre $v_i = 2$. (Siehe auch Tabelle E.1 in Anhang E.)

G.4.3 Bei der in den Abschnitten 4.3 und 4.4 erläuterten Ermittlung der Standardunsicherheit nach Methode B aus einer *A-priori*-Verteilung wurde implizit angenommen, daß der aus einer solchen Ermittlung resultierende Wert von $u(x_i)$ genau bekannt ist. Wird $u(x_i)$ beispielsweise aus einer Rechteck-Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer angenommenen halben Weite $a = (a_+ - a_-)/2$ wie in 4.3.7 und 4.4.5 gewonnen, dann wird $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ als Konstante ohne Unsicherheit angesehen, denn a_+ und a_- und damit a werden als solche angenommen (siehe aber 4.3.9, Anmerkung 2). Dies impliziert $v_i \rightarrow \infty$ bzw. $1/v_i \rightarrow 0$ aufgrund von Gleichung (G.3), wodurch es aber bei der Berechnung von Gleichung (G.2b) zu keinen Problemen kommt. Unter der Annahme, daß $v_i \rightarrow \infty$ nicht unbedingt unrealistisch ist, ist es übliche Praxis, a_- und a_+ so zu wählen, daß für eine Lage der jeweiligen Größe außerhalb des Intervalls a_- bis a_+ nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit besteht.

G.5 Weitere Überlegungen

G.5.1 In der Literatur zur Meßunsicherheit findet sich ein Ausdruck, der häufig zur Ermittlung einer Unsicherheit benutzt wird, die ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von 95% liefern soll:

$$U_{95} = [t_{95}^2(v_{\text{eff}})s^2 + 3u^2]^{1/2} \quad (\text{G.4})$$

$t_{95}(v_{\text{eff}})$ entstammt hier der *t*-Verteilung für v_{eff} Freiheitsgrade und $p = 95\%$; bei v_{eff} handelt es sich um die nach der Welch-Satterthwaite-Formel [Gleichung (G.2b)] berechneten Anzahl der effektiven Freiheitsgrade, wobei *nur* jene Unsicherheitskomponenten s_i berücksichtigt werden, die in der *aktuellen* Messung aus mehrmaligen Beobachtungen statistisch errechnet wurden: $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$. $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2 (a_j^2/3)$ gilt dann für *alle* übrigen Unsicherheitskomponenten, wobei $+a_j$ und $-a_j$ als genau bekannte Ober- und Untergrenze von X_j in bezug auf deren besten Schätzwert x_j angenommen werden (das heißt: $x_j - a_j \leq X_j \leq x_j + a_j$).

ANMERKUNG: Eine Komponente, die auf mehrmaligen Beobachtungen außerhalb des Rahmens der aktuellen Messung beruht, wird in der gleichen Weise behandelt wie jede andere zu u^2 gehörende Komponente. Um daher einen sinnvollen Vergleich zwischen Gleichung (G.4) und Gleichung (G.5) aus dem folgenden Unterabschnitt zu ziehen, wird angenommen, daß solche Komponenten vernachlässigt werden können, wenn sie überhaupt auftreten.

G.5.2 Wird eine erweiterte Unsicherheit, die ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von 95% liefert, nach den in G.3 und G.4 empfohlenen Methoden ermittelt, so lautet der sich anstelle von Gleichung (G.4) ergebende Ausdruck

$$U_{95} = t_{95}(v_{\text{eff}})[s^2 + u^2]^{1/2} \quad (\text{G.5})$$

wobei v_{eff} nach Gleichung (G.2b) berechnet wird und die Berechnung *alle* Unsicherheitskomponenten einschließt.

In den meisten Fällen ist der Wert von U_{95} , der sich nach Gleichung (G.5) ergibt, größer als der Wert von U_{95} nach Gleichung (G.4), wenn man zugrundelegt, daß bei der Berechnung von Gleichung (G.5) alle nach Methode B ermittelten Varianzen aus *A-priori*-Rechteckverteilungen mit der gleichen halben Weite wie die Grenzen a_j , die zur Ermittlung von u^2 in Gleichung (G.4) verwendet wurden. Dies läßt sich verstehen, wenn man sich vor Augen führt, daß zwar $t_{95}(v_{\text{eff}})$ in den meisten Fällen etwas größer sein wird als $t_{95}(v_{\text{eff}})$, daß beide Faktoren jedoch einen Wert nahe 2 haben, sowie daß u^2 in Gleichung (G.5) mit $t_p^2(v_{\text{eff}}) \approx 4$ multipliziert wird, während u^2 in Gleichung (G.4) mit 3 multipliziert wird. Obwohl beide Ausdrücke dieselben Werte von U_{95} und U_{95} ergeben, wenn $u^2 \ll s^2$, ist U_{95} immerhin 13% kleiner als U_{95} , wenn $u^2 \gg s^2$. Somit ergibt sich aus Gleichung (G.4) im allgemeinen eine Unsicherheit, die ein Intervall mit einem *kleineren* Grad des Vertrauens bestimmt als der des von der erweiterten Unsicherheit nach Gleichung (G.5) angegebene Intervalls.

ANMERKUNGEN

1 Mit den Grenzwerten $u^2/s^2 \rightarrow \infty$ und $v_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ gilt $U'_{95} \rightarrow 1,732u$, während $U_{95} \rightarrow 1,960u$. In diesem Fall erbringt U'_{95} ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von nur 91,7%, U_{95} jedoch ein Intervall mit 95%. In der Praxis wird dieser Fall angenähert, wenn die aus den oberen und unteren Grenzen erhaltenen Komponenten dominant und von großer Zahl sind sowie Werte für $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2 / 3$ von vergleichbarer Größe besitzen.

2 Bei einer Normalverteilung liefert der Erweiterungsfaktor $k = \sqrt{3} \approx 1,732$ ein Intervall mit einem Grad p des Vertrauens von 91,673%. Dieser Wert von p erweist sich als robust in dem Sinne, daß er im Vergleich zu anderen Werten in optimaler Weise unabhängig von kleinen Abweichungen der Verteilungen der Eingangsgrößen von der Normalverteilung ist.

G.5.3 Mitunter ist eine Eingangsgröße asymmetrisch verteilt: Abweichungen von ihrem Erwartungswert sind mit dem einen Vorzeichen wahrscheinlicher als mit dem anderen (siehe 4.3.8). Obwohl dies für die Berechnung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ des Schätzwerts x_i von X_i und damit für die Ermittlung von $u_c(y)$ keine Bedeutung hat, kann die Berechnung von U davon beeinflusst werden.

Es ist normalerweise günstig, ein symmetrisches Intervall $Y = y \pm U$ anzugeben, wenn es keinen Kostenunterschied zwischen Abweichungen des einen Vorzeichens gegenüber denen des anderen gibt. Wenn die Asymmetrie von X_i nur eine geringfügige Asymmetrie der durch das Meßergebnis y und seine kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ charakterisierten Wahrscheinlichkeitsverteilung nach sich zieht, wird die durch Angabe eines symmetrischen Intervalls auf der einen Seite verlorene Wahrscheinlichkeit durch die auf der anderen Seite hinzugewonnene Wahrscheinlichkeit ausgeglichen. Als Alternative ließe sich ein Intervall angeben, das hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit symmetrisch (und damit bezüglich U asymmetrisch) ist; die Wahrscheinlichkeit, daß Y unter der Untergrenze $y - U_-$ liegt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß Y über der Obergrenze $y + U_+$ liegt. Doch um solche Grenzwerte anzugeben, benötigt man mehr Informationen als nur die Schätzwerte y und $u_c(y)$ [und damit auch mehr Informationen als die Schätzwerte x_i und $u(x_i)$ für jede Eingangsgröße X_i].

G.5.4 Die Ermittlung der erweiterten Unsicherheit U_p , die hier als Vielfaches von $u_c(y)$ angegeben wird, von v_{eff} und des Faktors $k_{95}(v_{\text{eff}})$ aus der t -Verteilung stellt nur eine Näherung dar und hat ihre Beschränkungen. Die t -Verteilung gibt die Verteilung von $(y - Y)/u_c(y)$ nur dann an, wenn Y normalverteilt ist, der Schätzwert y und seine kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ unabhängig sind

und wenn die Verteilung von $u_c^2(y)$ eine χ^2 -Verteilung ist. Durch die Einführung von v_{eff} wird nur dem letzteren Problem Rechnung getragen und eine annähernde χ^2 -Verteilung von $u_c^2(y)$ erzielt. Der zweite Teil des Problems, der sich aus der Nicht-Normalverteilung von Y ergibt, erfordert zusätzlich zur Varianz die Berücksichtigung höherer Momente.

G.6 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

G.6.1 Der Erweiterungsfaktor k_p , der ein Intervall mit einem Grad p des Vertrauens nahe einem vorgegebenen Grad liefert, kann nur gefunden werden, wenn umfassende Kenntnisse über die Wahrscheinlichkeitsverteilung jeder Eingangsgröße vorhanden sind und wenn diese Verteilungen miteinander kombiniert werden, um die Verteilung der Ausgangsgröße zu erhalten. Die Eingangsschätzwerte x_i und ihre Standardunsicherheiten $u(x_i)$ allein reichen für diesen Zweck nicht aus.

G.6.2 Da sich die aufwendigen, für die Kombination von Wahrscheinlichkeitsverteilungen erforderlichen Berechnungen selten durch Umfang und Zuverlässigkeit der verfügbaren Informationen rechtfertigen lassen, ist eine Näherung für die Verteilung der Ausgangsgröße vertretbar. Wegen des zentralen Grenzwertsatzes reicht normalerweise die Annahme aus, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $(y - Y)/u_c(y)$ der t -Verteilung entspricht, so daß $k_p = t_p(v_{\text{eff}})$, wobei der t -Faktor auf der Anzahl v_{eff} der effektiven Freiheitsgrade von $u_c(y)$ beruht, die mit der Welch-Satterthwaite-Formel ermittelt wurden [Gleichung (G.2b)].

G.6.3 Zur Gewinnung von v_{eff} aus Gleichung (G.2b) benötigt man die Anzahl der Freiheitsgrade v_i für jede Komponente der Standardunsicherheit. Bei einer nach Methode A ermittelte Komponente erhält man v_i aus einer Reihe von mehrmaligen unabhängigen Beobachtungen, auf denen der entsprechende Eingangsschätzwert basiert, und aus der Zahl der unabhängigen Größen, die durch diese Beobachtungen gewonnen werden (siehe G.3.3). Bei einer nach Methode B ermittelten Komponente erhält man v_i aus der beurteilten Zuverlässigkeit des Wertes dieser Komponente [siehe G.4.2 und Gleichung (G.3)].

G.6.4 Im folgenden wird eine Zusammenfassung der bevorzugten Methode für die Berechnung der erweiterten Unsicherheit $U_p = k_p u_c(y)$ gegeben, mit der ein Intervall $Y = y \pm U$ angegeben wird, das einen angenäherten Grad p des Vertrauens aufweist:

- 1) Ermittlung von y und $u_c(y)$ wie in den Abschnitten 4 und 5 angegeben.

- 2) Berechnung von v_{eff} nach der Welch-Satterthwaite-Formel, Gleichung (G.2b) (hier zur Bequemlichkeit noch einmal angeführt):

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (\text{G.2b})$$

Wenn $u(x_i)$ nach Ermittlungsmethode A berechnet wird, ist v_i zu ermitteln wie in G.3.3 angegeben. Wenn $u(x_i)$ nach Ermittlungsmethode B berechnet wird und - wie es oft in der Praxis vorkommt - als genau bekannt angesehen werden kann, dann gilt $v_i \rightarrow \infty$, ansonsten ist v_i anhand von Gleichung (G.3) zu schätzen.

- 3) Ermittlung des t -Faktors $t_p(v_{\text{eff}})$ für den gewünschten Grad p des Vertrauens aus Tabelle G.2. Ist v_{eff} keine ganze Zahl, ist entweder zu interpolieren oder v_{eff} auf die nächstniedrigere ganze Zahl zu abrunden.
- 4) Berechnung von $U_p = k_p u_c(y)$ für $k_p = t_p(v_{\text{eff}})$.

G.6.5 In manchen Situationen, die in der Praxis nicht allzu häufig vorkommen sollten, werden die für den zentralen Grenzwertsatz erforderlichen Bedingungen nicht hinreichend erfüllt, und das Vorgehen nach G.6.4 führt zu einem unannehmbaren Ergebnis. Wenn $u_c(y)$ zum Beispiel von einer Unsicherheitskomponente dominiert wird, die aus einer Rechteckverteilung ermittelt wurde, deren Grenzen als genau bekannt angenommen wurden, kann es vorkommen [wenn $t_p(v_{\text{eff}}) > \sqrt{3}$], daß die Ober- und Untergrenze des durch U_p definierten Intervalls, $y + U_p$ und $y - U_p$, außerhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgangsgröße Y liegen. Solche Fälle müssen individuell bearbeitet werden, sind aber oft einer näherungsweisen analytischen Behandlung zugänglich (z.B. Faltung einer Normalverteilung mit einer Rechteckverteilung [10]).

G.6.6 In vielen praktischen Messsituationen auf einer Reihe von Anwendungsgebieten sind folgende Bedingungen erfüllt:

- der Schätzwert y der Meßgröße Y wird aus den Schätzwerten x_i einer bestimmten Anzahl von Eingangsgrößen X_i gewonnen, die sich durch gutartig verhaltende Wahrscheinlichkeitsverteilungen, z.B. Normal- und Rechteckverteilungen, beschreiben lassen;

- die Standardunsicherheiten $u(x_i)$ dieser Schätzwerte, die entweder nach Ermittlungsmethode A oder B gewonnen werden, tragen mit vergleichbaren Anteilen zur kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ des Meßergebnisses y bei;
- die im Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz implizierte lineare Annäherung ist hinreichend (siehe 5.1.2 und E.3.1);
- die Unsicherheit von $u_c(y)$ ist klein genug, da die Anzahl ihrer effektiven Freiheitsgrade v_{eff} erheblich ist, z.B. größer als 10.

Unter diesen Umständen lassen sich infolge des zentralen Grenzwertsatzes die durch das Meßergebnis und dessen kombinierte Standardunsicherheit charakterisierte Wahrscheinlichkeitsverteilung als normal annehmen, und $u_c(y)$ kann aufgrund der erheblichen Größe von v_{eff} als ausreichend zuverlässiger Schätzwert der Standardabweichung dieser Normalverteilung gelten. Auf der Grundlage der Darstellung im vorliegenden Anhang, einschließlich der Betonung des Näherungscharakters der Unsicherheitsberechnung und der Unsinnigkeit einer Unterscheidung zwischen Intervallen mit Grade des Vertrauens, die nur um 1 bis 2% voneinander abweichen, läßt sich folgendes durchführen:

- Es wird $k = 2$ gesetzt und angenommen, daß $U = 2u_c(y)$ ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von annähernd 95% definiert;

für kritischere Anwendungen kann auch

- $k = 3$ gesetzt und angenommen werden, daß $U = 3u_c(y)$ ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von annähernd 99% definiert.

Obwohl dieses Vorgehen für viele praktische Messungen geeignet sein dürfte, hängt seine Anwendbarkeit im Einzelfall davon ab, wie dicht $k = 2$ an $t_{95}(v_{\text{eff}})$ bzw. $k = 3$ an $t_{99}(v_{\text{eff}})$ liegen muß, d.h. davon, wie dicht sich der Grad des Vertrauens des durch $U = 2u_c(y)$ oder $U = 3u_c(y)$ angegebenen Intervalls an 95% bzw. 99% annähern muß. Obwohl $t_{95}(11)$ und $t_{99}(11)$ bei $v_{\text{eff}} = 11$, $k = 2$ und $k = 3$ nur um 10 bzw. 4 Prozent zu niedrig geschätzt werden (siehe Tabelle G.2), mag dies in einigen Fällen nicht akzeptabel sein. Weiterhin erzeugt $k = 3$ bei allen Werten von v_{eff} , die etwas größer als 13 sind, ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von über 99%. (Siehe Tabelle G.2, aus der auch hervorgeht, daß die Grade des Vertrauens der Intervalle, die durch $k = 2$ und $k = 3$ entstehen, für $v_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ 95,45 bzw. 99,73 Prozent betragen.) Somit entscheiden in der Praxis die Größe von v_{eff} und die Anforderungen an die erweiterte Standardunsicherheit darüber, ob dieses Vorgehen möglich ist.

Tabelle G.2: Wert von $t_p(v)$ aus der t -Verteilung für die Anzahl v der Freiheitsgrade, die ein Intervall $-t_p(v)$ bis $+t_p(v)$ definieren, das den Anteil p der Verteilung umfaßt

Anzahl v der Freiheitsgrade	Anteil p in %					
	68,27 ^(a)	90	95	95,45 ^(a)	99	99,73 ^(a)
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,39	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

^(a) Für eine Größe z , die durch eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ_z und die Standardabweichung σ beschrieben wird, werden durch das Intervall $\mu_z + k\sigma$ die Anteile $p = 68,27$; $95,45$ und $99,73$ Prozent der Verteilung mit $k = 1, 2$ bzw. 3 erfaßt.

Anhang H

Beispiele

In diesem Anhang finden sich sechs ziemlich detailliert beschriebene Beispiele (H.1 bis H.6) zur Illustration der im vorliegenden *Leitfaden* vorgestellten Grundprinzipien zur Ermittlung und Angabe der Unsicherheit beim Messen. Gemeinsam mit den Beispielen aus dem Haupttext und einigen der anderen Anhänge sollen sie die Benutzer des vorliegenden *Leitfadens* in die Lage versetzen, diese Prinzipien in ihrer eigenen Arbeit umzusetzen.

Da die Beispiele zur Illustration dienen sollen, sind sie diesem Erfordernis entsprechend vereinfacht worden. Außerdem sind die Beispiele und die darin verwendeten Zahlenwerte nicht unbedingt als Beschreibung realer Messungen anzusehen, denn sie wurden unter dem Gesichtspunkt ausgewählt, die Prinzipien des *Leitfadens* zu verdeutlichen. Während die Daten so wie gegeben verwendet wurden, sind zur Vermeidung von Rundungsabweichungen in Zwischenrechnungen mehr Stellen beibehalten worden, als normalerweise angegeben werden. Somit kann das angegebene Ergebnis einer Berechnung, in die mehrere Größen einbezogen sind, geringfügig von dem abweichen, das aus den Werten folgt, die im Textteil für diese Größen angegeben sind.

In vorangegangenen Abschnitten des vorliegenden *Leitfadens* wurde hervorgehoben, daß die Unterteilung der zur Berechnung der Unsicherheitskomponenten verwendeten Methoden in A und B ausschließlich der leichteren Darstellung dient; für die Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit oder der erweiterten Unsicherheit eines Meßergebnisses ist sie nicht erforderlich, da alle Unsicherheitskomponenten unabhängig von der Art ihrer Ermittlung auf dieselbe Weise behandelt werden (siehe 3.3.4, 5.1.2 und E.3.7). Daher ist die zur Ermittlung einer bestimmten Unsicherheitskomponente herangezogene Methode in den folgenden Beispielen nicht speziell als Methode A oder B ausgewiesen. Aus der Diskussion dürfte jedoch klar werden, ob eine Komponente nach Ermittlungsmethode A oder B gewonnen wurde.

H.1 Endmaß-Kalibrierung

Dieses Beispiel zeigt, daß selbst eine scheinbar einfache Messung noch recht subtile Aspekte der Unsicherheitsermittlung aufweisen kann.

H.1.1 Meßaufgabe

Die Länge eines Endmaßes mit einer Nennlänge von 50 mm ist durch Vergleich mit einem bekannten Normal derselben Nennlänge zu ermitteln. Das direkte Ergebnis des Vergleichs der beiden Endmaße ist die Differenz d zwischen ihren Längen:

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_S(1 + \alpha_S\theta_S) \quad (\text{H.1})$$

wobei

l : Meßgröße, das heißt, Länge des zu kalibrierenden Endmaßes bei 20 °C;

l_S : im Kalibrierschein angegebene Länge des Normals bei 20 °C;

α und α_S : Wärmeausdehnungskoeffizienten des zu kalibrierenden Endmaßes bzw. des Normals;

θ und θ_S : Abweichungen der Temperatur von der Referenztemperatur von 20 °C des zu kalibrierenden Endmaßes bzw. des Normals.

H.1.2 Mathematisches Modell

Nach Gleichung (H.1) ist die Meßgröße gegeben durch

$$l = \frac{l_S(1 + \alpha_S\theta_S) + d}{(1 + \alpha\theta)} \quad (\text{H.2})$$

$$= l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + \dots$$

Wenn man die Temperaturdifferenz zwischen dem zu kalibrierenden Endmaß und dem Normal als $\delta\theta = \theta - \theta_S$ und die Differenz ihrer Wärmeausdehnungskoeffizienten als $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$ schreibt, wird aus Gleichung (H.2):

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \quad (\text{H.3})$$

$$= l_S + d - l_S[\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta]$$

Die Differenzen $\delta\theta$ und $\delta\alpha$, jedoch nicht ihre Unsicherheiten, werden als Null geschätzt; $\delta\alpha$, α_S , $\delta\theta$ und θ werden als unkorreliert angenommen. (Würde die Meßgröße in Abhängigkeit von θ , θ_S , α und α_S angegeben, so müßte die Korrelation zwischen θ und θ_S sowie zwischen α und α_S berücksichtigt werden).

Aus Gleichung (H.3) folgt, daß man den Schätzwert des Werts der Meßgröße l aus dem einfachen Ausdruck $l_S + \bar{d}$ erhält, wobei l_S die im Kalibrierschein angegebene Länge des Normals bei 20 °C ist und d durch $\bar{d}$ geschätzt wird, dem arithmetischen Mittelwert aus $n = 5$ unabhängigen, mehrmaligen Beobachtungen. Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(l)$ von l gewinnt man durch Anwendung von Gleichung (10) im Abschnitt 5.1.2 auf Gleichung (H.3) auf nachstehend diskutierte Weise.

ANMERKUNG: Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in diesem und allen weiteren Beispielen ein- und dasselbe Formelzeichen für die Größe und deren Schätzwert verwendet.

H.1.3 Beitragende Varianzen

Die für dieses Beispiel gemäß diesem und den folgenden Unterabschnitten wichtigen Punkte sind in Tabelle H.1 zusammengefaßt.

Da angenommen wird, daß $\delta\alpha = 0$ und $\delta\theta = 0$, ergibt die Anwendung von Gleichung (10) aus 5.1.2 auf Gleichung (H.3)

$$u_c^2(l) = c_S^2 u^2(l_S) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 u^2(\alpha_S) + c_{\theta}^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \quad (\text{H.4})$$

wobei gilt:

$$c_S = \partial f / \partial l_S = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$$

$$c_{\theta} = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_S \theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_S \alpha_S$$

und somit

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) + l_S^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_S^2 \alpha_S^2 u^2(\delta\theta) \quad (\text{H.5})$$

H.1.3.1 Unsicherheit $u(l_S)$ der Kalibrierung des Normals

Im Kalibrierschein wird die erweiterte Unsicherheit des Normals mit $U = 0,075 \mu\text{m}$ angegeben und vermerkt, daß sie mit einem Erweiterungsfaktor $k = 3$ gewonnen wurde. Für die Standardunsicherheit gilt dann:

$$u(l_S) = (0,075 \mu\text{m}) / 3 = 25 \text{ nm}$$

H.1.3.2 Unsicherheit $u(d)$ der gemessenen Längendifferenz

Die zusammengefaßte empirische Standardabweichung, die den Vergleich von l und l_S charakterisiert, wurde anhand der Streuung von 25 mehrmaligen unabhängigen Beobachtungen der Längendifferenz zweier Normal-Endmaße zu 13 nm ermittelt. Bei dem für dieses Beispiel durchgeführten Vergleich wurden 5 Beobachtungen vorgenommen. Für die dem arithmetischen Mittelwert dieser Ablesungen zugeordnete Standardunsicherheit gilt dann (siehe 4.2.4):

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = 13 \text{ nm} / \sqrt{5} = 5,8 \text{ nm}$$

Nach dem Kalibrierschein des für den Vergleich von l und l_S verwendeten Komparators beträgt dessen Unsicherheit "aufgrund zufälliger Abweichungen" $\pm 0,01 \mu\text{m}$ mit einem Grad des Vertrauens von 95 Prozent. Sie beruht auf 6 Messungen. Bei Verwendung des t -Faktors $t_{95}(5) = 2,57$ für $\nu = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade (siehe Anhang G, Tabelle G.2) beträgt die Standardunsicherheit somit

$$u(d_1) = (0,01 \mu\text{m}) / 2,57 = 3,9 \text{ nm}$$

Die Unsicherheit des Komparators "aufgrund von systematischen Abweichungen" wird im Kalibrierschein mit $0,02 \mu\text{m}$ auf dem "Drei-Sigma-Niveau" angegeben. Für die Standardunsicherheit aufgrund dessen kann daher gelten:

$$u(d_2) = (0,02 \mu\text{m}) / 3 = 6,7 \text{ nm}$$

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ nm}^2$$

Den Gesamtbeitrag erhält man aus der Summe der geschätzten Varianzen:

oder

$$u(d) = 9,7 \text{ nm}$$

Tabelle H.1: Überblick über die Komponenten der Standardunsicherheit

Komponente der Standardunsicherheit $u(x_i)$	Unsicherheitsquelle	Wert der Standardunsicherheit $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) = c_i u(x_i)$ in nm	Freiheitsgrade
$u(l_S)$	Kalibrierung des Normal-Endmaßes	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Gemessene Differenz der Endmaße	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	mehrmalige Beobachtungen	5,8 nm			24
$u(d_1)$	zufällige Komparatoreinflüsse	3,9 nm			5
$u(d_2)$	systematische Komparatoreinflüsse	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Wärmeausdehnungskoeffizient des Normal-Endmaßes	$1,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	
$u(\theta)$	Prüfhalterungstemperatur	0,41 °C	0	0	
$u(\bar{\theta})$	mittlere Prüfhalterungstemperatur	0,2 °C			
$u(\Delta)$	zyklische Schwankung der Raumtemperatur	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Differenz der Wärmeausdehnungskoeffizienten der Endmaße	$0,58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Temperaturdifferenz der Endmaße	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 \text{ nm}^2$ $u_c(l) = 32 \text{ nm}$ $v_{\text{eff}}(l) = 16$					

H.1.3.3 Unsicherheit $u(\alpha_S)$ des Wärmeausdehnungskoeffizienten

Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Normal-Endmaßes ist angegeben mit $\alpha_S = 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ mit einer Unsicherheit repräsentiert durch eine Rechteckverteilung in den Grenzen von $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Für die Standardunsicherheit gilt dann [siehe Gleichung (7) in 4.3.7]

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Da laut H.1.3 $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$, trägt diese Unsicherheit nicht zur Unsicherheit von l in der ersten Ordnung bei. Sie leistet jedoch einen Beitrag zweiter Ordnung, der in H.1.7 erläutert wird.

H.1.3.4 Unsicherheit $u(\theta)$ der Temperaturabweichung des Endmaßes

Die Temperatur der Prüfhalterung ist mit $(19,5 \pm 0,5) \text{ } ^\circ\text{C}$ angegeben; während der einzelnen Beobachtungen wurde die Temperatur nicht aufgezeichnet. Die angegebene Ma-

ximalverschiebung $\Delta = 0,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ soll die Amplitude einer annähernd zyklischen Schwankung der Temperatur bei Thermostatregelung darstellen und nicht die Unsicherheit der mittleren Temperatur. Der Wert der mittleren Temperaturabweichung

$$\bar{\theta} = 19,9 \text{ }^{\circ}\text{C} - 20 \text{ }^{\circ}\text{C} = -0,1 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

hat laut Angabe wegen der Unsicherheit der mittleren Temperatur der Prüfhalterung eine eigene Unsicherheit

$$u(\bar{\theta}) = 0,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

während die zeitliche Schwankung eine U-förmige (Arcussinus-) Temperaturverteilung erzeugt, was zu einer Standardunsicherheit

$$u(\Delta) = (0,5 \text{ }^{\circ}\text{C}) / \sqrt{2} = 0,35 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

führt. Die Temperaturabweichung θ kann mit $\bar{\theta}$ gleichgesetzt werden; die Standardunsicherheit von θ erhält man durch

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0,165 \text{ }^{\circ}\text{C}^2$$

woraus folgt

$$u(\theta) = 0,41 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Da laut H.1.3 $c_{\theta} = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta \alpha = 0$, trägt diese Unsicherheit nicht zur Unsicherheit von l in der ersten Ordnung bei. Sie leistet jedoch einen Beitrag zweiter Ordnung, der in H.1.7 erläutert wird.

H.1.3.5 Unsicherheit $u(\delta \alpha)$ der Differenz der Ausdehnungskoeffizienten

$\delta \alpha$ hat geschätzte Streuungsgrenzen von $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, wobei jeder Wert von $\delta \alpha$ innerhalb dieser Grenzen die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Die Standardunsicherheit ist

$$u(\delta \alpha) = (1 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0,58 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

H.1.3.6 Unsicherheit $u(\delta \theta)$ der Temperaturdifferenz der Maße

Vom Normal- und zu prüfendem Endmaß wird erwartet, daß sie dieselbe Temperatur haben, doch könnte die Temperaturdifferenz mit gleicher Wahrscheinlichkeit an einer beliebigen Stelle in den geschätzten Grenzen von $-0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}$ bis $+0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}$ liegen. Die Standardunsicherheit ist

$$u(\delta \theta) = (0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}) / \sqrt{3} = 0,029 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

H.1.4 Kombinierte Standardunsicherheit

Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(l)$ wird nach Gleichung (H.5) errechnet. Die einzelnen Glieder werden gesammelt und in diesen Ausdruck wie folgt eingesetzt:

$$u_c^2(l) = (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 \quad (\text{H.6a})$$

$$+ (0,05 \text{ m})^2 (-0,1 \text{ }^{\circ}\text{C})^2 (0,58 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})^2$$

$$+ (0,05 \text{ m})^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})^2 (0,029 \text{ }^{\circ}\text{C})^2$$

$$= (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 \quad (\text{H.6b})$$

$$+ (2,9 \text{ nm})^2 + (16,6 \text{ nm})^2$$

$$= 1002 \text{ nm}^2$$

oder

$$u_c(l) = 32 \text{ nm} \quad (\text{H.6c})$$

Die dominante Unsicherheitskomponente ist offensichtlich die des Normals, $u(l_S) = 25 \text{ nm}$.

H.1.5 Endergebnis

Der Kalibrierschein des Normal-Endmaßes gibt $l_S = 50,000\,623 \text{ mm}$ als Länge bei $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ an. Der arithmetische Mittelwert $\bar{d}$ aus fünf mehrmaligen Beobachtungen der Längendifferenz zwischen dem unbekannten Endmaß und dem Normal-Endmaß beträgt 215 nm . Da $l = l_S + \bar{d}$ (siehe H.1.2), beträgt die Länge l des unbekannten Endmaßes bei $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ somit $50,000\,838 \text{ mm}$. Nach 7.2.2 läßt sich das Endergebnis der Messung wie folgt ausdrücken:

$l = 50,000\,838 \text{ mm}$ mit einer kombinierten Standardunsicherheit $u_c = 32 \text{ nm}$. Die entsprechende relative kombinierte Standardunsicherheit ist $u_c/l = 6,4 \times 10^{-7}$.

H.1.6 Erweiterte Unsicherheit

Es sei angenommen, daß eine erweiterte Unsicherheit $U_{99} = k_{99} u_c(l)$ gefordert ist, die ein Intervall mit einem Grad des Vertrauens von ca. 99% liefert. Es ist das in G.6.4 zusammengefaßt dargestellte Verfahren zu verwenden, wobei die erforderlichen Freiheitsgrade in Tabelle H.1 angegeben sind. Diese wurden wie folgt gewonnen:

- 1) Unsicherheit $u(l_S)$ der Kalibrierung des Normals [H.1.3.1]. Im Kalibrierschein sind die effektiven Freiheitsgrade der kombinierten Standardunsicherheit, aus der die angeführte erweiterte Unsicherheit gewonnen wurde, mit $\nu_{\text{eff}} = 18$ angegeben.

- 2) *Unsicherheit $u(d)$ der gemessenen Längendifferenz* [H.1.3.2]. Obwohl $\bar{d}$ aus fünf mehrmaligen Beobachtungen gewonnen wurde, ist $v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$ die Anzahl der Freiheitsgrade für $u(\bar{d})$, da $u(\bar{d})$ aus einer zusammengefaßten empirischen Standardabweichung gewonnen wurde (siehe H.3.6, Anmerkung). Für $u(d_1)$, die Unsicherheit aufgrund von zufälligen Komparatoreinflüssen, ist die Anzahl der Freiheitsgrade $v(d_1) = 6 - 1 = 5$, da d_1 aus sechs Beobachtungen gewonnen wurde. Die Unsicherheit von $\pm 0,02 \mu\text{m}$ aufgrund von systematischen Komparatoreinflüssen kann als bis zu 25% zuverlässig angesehen werden. Daher ist die Anzahl der Freiheitsgrade aus Gleichung (G.3) in G.4.2 $v(d_2) = 8$ (siehe das Beispiel in G.4.2). Die effektiven Freiheitsgrade von $u(d)$, $v_{\text{eff}}(d)$, werden dann aus Gleichung (G.2b) in G.4.1:

$$v_{\text{eff}}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}}$$

$$= \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{\frac{(5,8 \text{ nm})^4}{24} + \frac{(3,9 \text{ nm})^4}{5} + \frac{(6,7 \text{ nm})^4}{8}} = 25,6$$

- 3) *Unsicherheit $u(\delta\alpha)$ der Differenz der Ausdehnungskoeffizienten* [H.1.3.5]. Den geschätzten Grenzen von $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ für die Streuung von $\delta\alpha$ wird eine Zuverlässigkeit von 10% zugetraut. Hieraus ergibt sich $v(\delta\alpha) = 50$ nach Gleichung (G.3) in G.4.2.
- 4) *Unsicherheit $u(\delta\theta)$ der Temperaturdifferenz der Endmaße* [H.1.3.6]. Das geschätzte Intervall der Temperaturdifferenz $\delta\theta$ von $-0,05 \text{ }^\circ\text{C}$ bis $+0,05 \text{ }^\circ\text{C}$ wird als nur zu 50% zuverlässig angesehen, womit sich aus Gleichung (G.3) in G.4.2 $v(\delta\theta) = 2$ ergibt.

Die Berechnung von $v_{\text{eff}}(l)$ aus Gleichung (G.2b) in G.4.1 erfolgt auf genau dieselbe Weise wie oben unter 2) angeführte Berechnung von $v_{\text{eff}}(d)$. Aus den Gleichungen (H.6b) und (H.6c) und den in 1) bis 4) gegebenen Werten ergibt sich dann

$$v_{\text{eff}}(l) = \frac{(32 \text{ nm})^4}{\frac{(25 \text{ nm})^4}{18} + \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{25,6} + \frac{(2,9 \text{ nm})^4}{50} + \frac{(16,6 \text{ nm})^4}{2}}$$

$$= 16,7$$

Um die geforderte erweiterte Unsicherheit zu erhalten, wird dieser Wert zunächst auf die nächstniedrigere ganze Zahl abgerundet: $v_{\text{eff}}(l) = 16$. Aus Tabelle G.2 in Anhang G folgt dann $t_{99}(16) = 2,92$, daher ist $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2,92 \times (32 \text{ nm}) = 93 \text{ nm}$. Nach 7.2.4 läßt sich das Endergebnis der Messung wie folgt angeben:

$l = (50,000\,838 \pm 0,000\,093) \text{ mm}$, wobei die Zahl nach dem Formelzeichen $\pm$ den Zahlenwert einer erweiterten Unsicherheit $U = ku_c$ angibt; U errechnet sich aus einer kombinierten Standardunsicherheit $u_c = 32 \text{ nm}$ und einem Erweiterungsfaktor $k = 2,92$, der auf der t -Verteilung für $v = 16$ Freiheitsgrade beruht und ein Intervall angibt, das einen geschätzten Grad des Vertrauens von 99% hat. Die entsprechende relative kombinierte Standardunsicherheit ist $U/l = 1,9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Glieder zweiter Ordnung

In der Anmerkung zu 5.1.2 wird hervorgehoben, daß die im vorliegenden Beispiel benutzte Gleichung (10) zur Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(l)$ erweitert werden muß, wenn die Nichtlinearität der Funktion $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ so signifikant ist, daß die Glieder höherer Ordnung bei der Entwicklung der Taylor-Reihe nicht vernachlässigt werden dürfen. Das ist bei diesem Beispiel der Fall, weswegen die bisher dargestellte Berechnung von $u_c(l)$ unvollständig ist. Wenn man den in der Anmerkung zu 5.1.2 gegebenen Ausdruck auf Gleichung (H.3) anwendet, ergeben sich tatsächlich zwei deutliche, nicht vernachlässigbare Glieder zweiter Ordnung, die zu Gleichung (H.5) hinzugefügt werden müssen. Diese Glieder, die aus dem quadratischen Glied des Ausdrucks in der Anmerkung hervorgehen, lauten:

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

aber nur das erste dieser Glieder trägt signifikant zu $u_c(l)$ bei:

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0,05 \text{ m}) (0,58 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,41 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$= 11,7 \text{ nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0,05 \text{ m}) (1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,029 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$= 1,7 \text{ nm}$$

Die Glieder zweiter Ordnung erhöhen $u_c(l)$ von 32 nm auf 34 nm.

H.2 Gleichzeitige Wirk- und Blindwiderstandsmessung

Dieses Beispiel demonstriert die Behandlung mehrerer, gleichzeitig bei ein- und derselben Messung ermittelter Meßgrößen oder Ausgangsgrößen sowie die Korrelation ihrer Schätzwerte. Es werden nur die zufälligen Schwankungen der Beobachtungswerte betrachtet; in Wirklichkeit würden auch die Unsicherheiten der Korrekturen für systematische Einflüsse zur Unsicherheit der Meßergebnisse beitragen. Die Daten werden auf zweierlei Weise analysiert, wobei beide die gleichen Zahlenwerte ergeben.

H.2.1 Meßaufgabe

Der Wirkwiderstand R und der Blindwiderstand X einer Schaltung sind durch Messen der Amplitude V einer sinusförmigen Wechselspannung an ihren Ausgängen, der Amplitude I des durch sie hindurchgehenden Wechselstroms und der Phasenverschiebung ϕ der Wechselspannung gegenüber dem Wechselstrom zu ermitteln. Die drei Eingangsgrößen sind somit V , I und ϕ , die drei Ausgangsgrößen sind die drei Impedanzkomponenten R , X und Z . Da $Z^2 = R^2 + X^2$, gibt es nur zwei unabhängige Ausgangsgrößen.

H.2.2 Mathematisches Modell und Daten

Die Meßgrößen stehen zu den Eingangsgrößen durch das Ohmsche Gesetz in Beziehung:

$$R = \frac{V}{I} \cos \phi; \quad X = \frac{V}{I} \sin \phi; \quad Z = \frac{V}{I} \quad (\text{H.7})$$

Es werden fünf unabhängige, gleichzeitige Beobachtungen der drei Eingangsgrößen V , I , und ϕ unter gleichen Bedingungen durchgeführt (siehe B.2.15), wobei die in Tabelle H.2 aufgeführten Daten gesammelt werden. Weiterhin gegeben seien die arithmetischen Mittelwerte aus den Beobachtungen und die empirischen Standardabweichungen jener Mittelwerte, die nach Gleichung (3) und (5) in 4.2 errechnet wurden. Die Mittelwerte werden als beste Schätzwerte der Erwartungswerte der Eingangsgrößen genommen, die empirischen Standardabweichungen sind die Standardunsicherheiten dieser Mittelwerte.

Da die Mittelwerte $\bar{V}$, $\bar{I}$ und $\bar{\phi}$ aus gleichzeitigen Beobachtungen gewonnen werden, sind sie korreliert. Die Korrelationen müssen bei der Berechnung der Standardunsicherheiten der Meßgrößen R , X und Z berücksichtigt werden. Die dafür erforderlichen Korrelationskoeffizienten lassen sich leicht aus Gleichung (14) in 5.2.2 unter Verwendung der nach Gleichung (17) in 5.2.3 berechneten Werte von $s(\bar{V}, \bar{I})$, $s(\bar{V}, \bar{\phi})$ und $s(\bar{I}, \bar{\phi})$ ermitteln. Die Er-

gebnisse sind in Tabelle H.2 aufgeführt, wobei man daran denken muß, daß $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ und $r(x_i, x_i) = 1$.

H.2.3 Ergebnisse: Vorgehensweise 1

Vorgehensweise 1 ist in Tabelle H.3 zusammengefaßt.

Die Werte der drei Meßgrößen R , X und Z werden aus den Beziehungen in Gleichung (H.7) ermittelt, wobei man die Mittelwerte $\bar{V}$, $\bar{I}$ und $\bar{\phi}$ aus Tabelle H.2 für V , I , und ϕ einsetzt. Die Standardunsicherheiten von R , X und Z werden anhand von Gleichung (16) in 5.2.2 ermittelt, da die Eingangsgrößen $\bar{V}$, $\bar{I}$ und $\bar{\phi}$, wie bereits festgestellt, korreliert sind. Es sei zum Beispiel $Z = \bar{V}/\bar{I}$ betrachtet. Durch Identifizieren von $\bar{V}$ mit x_1 , $\bar{I}$ mit x_2 und $Z = \bar{V}/\bar{I}$ mit f ergibt Gleichung (16) in 5.2.2 für die kombinierte Standardunsicherheit von Z :

$$u_c^2(Z) = \left(\frac{1}{\bar{I}}\right)^2 u^2(\bar{V}) + \left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)^2 u^2(\bar{I}) \quad (\text{H.8a})$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{\bar{I}}\right) \left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right) u(\bar{V}) u(\bar{I}) r(\bar{V}, \bar{I})$$

$$= Z^2 \left(\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right)^2 + Z^2 \left(\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right)^2 \quad (\text{H.8b})$$

$$- 2Z^2 \left(\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right) \left(\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right) r(\bar{V}, \bar{I})$$

oder

$$u_{c,r}^2(\bar{Z}) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8c})$$

wobei $u(\bar{V}) = s(\bar{V})$, $u(\bar{I}) = s(\bar{I})$; der Index "r" im letzten Ausdruck zeigt an, daß es sich bei u um eine relative Unsicherheit handelt. Nach Einsetzen der entsprechenden Werte aus Tabelle H.2 in Gleichung (H.8a) ergibt sich $u_c(Z) = 0,236 \Omega$.

Da die drei Meßgrößen oder Ausgangsgrößen von denselben Eingangsgrößen abhängen, sind sie ebenfalls korreliert. Die Elemente der Kovarianzmatrix, die diese Korrelation beschreibt, können allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (\text{H.9})$$

Tabelle H.2: Werte der Eingangsgrößen V , I und ϕ , gewonnen aus fünf Blöcken von gleichzeitigen Beobachtungen

Beobachtung-Nr. k	Eingangsgrößen		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0483
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{V} = 4,9990$	$\bar{I} = 19,6610$	$\bar{\phi} = 1,044\ 46$
Empirische Standardabweichung des Mittelwerts	$s(\bar{V}) = 0,0032$	$s(\bar{I}) = 0,0095$	$s(\bar{\phi}) = 0,000\ 75$
Korrelationskoeffizienten			
$r(\bar{V}, \bar{I}) = -0,36$ $r(\bar{V}, \bar{\phi}) = 0,86$ $r(\bar{I}, \bar{\phi}) = -0,65$			

wobei $y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_N)$ und $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Gleichung (H.9) ist eine Verallgemeinerung von Gleichung (F.2) in F.1.2.3, wenn die q_l in diesem Ausdruck korreliert sind. Wie in Gleichung (14) in 5.2.2 angegeben, sind die geschätzten Korrelationskoeffizienten der Ausgangsgrößen gegeben durch $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m) / u(y_l)u(y_m)$. Es ist zu beachten, daß die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ die geschätzten Varianzen zu den Ausgangsgrößen y_l darstellen (siehe 5.2.2, Anmerkung 2) und daß Gleichung (H.9) für $m = l$ mit Gleichung (16) in 5.2.2 identisch ist.

Zur Anwendung von Gleichung (H.9) auf das vorliegende Beispiel werden folgende Identifikationen vorgenommen:

$$\begin{aligned} y_1 &= R & x_1 &= \bar{V} & u(x_i) &= s(x_i) \\ y_2 &= X & x_2 &= \bar{I} & N &= 3 \\ y_3 &= Z & x_3 &= \bar{\phi} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Berechnung von R , X und Z sowie ihrer geschätzten Varianzen und Korrelationskoeffizienten sind in Tabelle H.3 angegeben.

H.2.4 Ergebnisse: Vorgehensweise 2

Vorgehensweise 2 ist in Tabelle H.4 zusammengefaßt.

Da die Daten aus fünf Beobachtungsblöcken der drei Eingangsgrößen V , I und ϕ gewonnen wurden, ist es möglich, aus jedem Block von Eingangsdaten einen Wert für R , X und Z zu berechnen und dann den arithmetischen Mittelwert aus den fünf Einzelwerten zum Erhalt des besten Schätzwerts von R , X und Z zu bilden. Die empirische Standardabweichung der Mittelwerte (die deren kombinierte Standardunsicherheit darstellt) wird dann auf die übliche Weise aus den fünf Einzelwerten errechnet [Gleichung (5) in 4.2.3]. Die geschätzten Kovarianzen zu den drei Mittelwerten werden durch direkte Anwendung von Gleichung (17) auf die fünf Einzelwerte ermittelt, aus denen der Mittelwert gewonnen wurde. Mit Ausnahme von Einflüssen zweiter Ordnung wegen des Austauschs von Gliedern wie $\bar{V}/\bar{I}$ und $\cos \bar{\phi}$ durch $\bar{V}/\bar{I}$ und $\cos \bar{\phi}$ gibt es keine Unterschiede zwischen den beiden Vorgehensweisen in bezug auf Ausgangswerte, Standardunsicherheiten und geschätzte Kovarianzen.

Zur Demonstration dieses Vorgehens gibt Tabelle H.4 die aus den fünf Beobachtungsblöcken ermittelten Werte von R , X und Z an. Die arithmetischen Mittelwerte, Standardunsicherheiten und geschätzten Korrelationskoeffizienten werden dann direkt aus diesen Einzelwerten errechnet. Die auf diese Weise gewonnenen Zahlenwerte sind nur vernachlässigbar verschieden von den in Tabelle H.3 angegebenen Ergebnissen.

Tabelle H.3: Berechnete Werte der Ausgangsgrößen R , X und Z : Vorgehensweise 1

Meßgrößen- index l	Beziehung zwischen dem Schätzwert der Meßgröße y_l und den Eingangsschätzwerten x_i	Schätzwert y_l , der das Meßergebnis ist	kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y_l)$ des Meßergebnisses
1	$y_1 = R = (\bar{V}/\bar{I}) \cos \bar{\phi}$	$y_1 = R = 127,732 \, \Omega$	$u_c(R) = 0,071 \, \Omega$ $u_c(R)/R = 0,06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V}/\bar{I}) \sin \bar{\phi}$	$y_2 = X = 219,847 \, \Omega$	$u_c(X) = 0,295 \, \Omega$ $u_c(X)/X = 0,13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V}/\bar{I}$	$y_3 = Z = 254,260 \, \Omega$	$u_c(Z) = 0,236 \, \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,09 \times 10^{-2}$
Korrelationskoeffizienten $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0,588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0,485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = -0,993$			

Tabelle H.4: Berechnete Werte der Ausgangsgrößen R , X und Z : Vorgehensweise 2

Beobachtung Nr. k	Einzelwerte der Meßgrößen		
	$R = (V/I) \cos \phi$ (Ω)	$X = (V/I) \sin \phi$ (Ω)	$Z = (V/I)$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Arithmetischer Mittelwert	$y_1 = \bar{R} = 127,732$	$y_2 = \bar{X} = 219,847$	$y_3 = \bar{Z} = 254,260$
Empirische Standardabweichung des Mittelwerts	$s(\bar{R}) = 0,071$	$s(\bar{X}) = 0,295$	$s(\bar{Z}) = 0,236$
Korrelationskoeffizienten $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0,588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0,485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = -0,993$			

In den Begriffen der Anmerkung zu 4.1.4 ausgedrückt, ist Vorgehensweise 2 ein Beispiel für die Gewinnung des Schätzwerts y durch $\bar{Y} = (\sum_{k=1}^N Y_k)/n$, während Vorgehensweise 1 ein Beispiel zur Gewinnung von y aus $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ ist. Wie in dieser Anmerkung betont wird, liefern die beiden Vorgehensweisen im allgemeinen *identische* Ergebnisse, wenn f eine lineare Funktion der Eingangsgrößen ist (Voraussetzung ist, daß bei Vorgehensweise 1 die empirisch beobachteten Korrelationskoeffizienten berücksichtigt werden). Ist f keine lineare Funktion, dann weichen die Ergebnisse bei Vorgehensweise 1 von denen bei Vorgehensweise 2 ab, und zwar nach Maßgabe des Grades an Nichtlinearität sowie der geschätzten Varianzen und Kovarianzen der X_i . Dies wird aus dem folgenden Ausdruck ersichtlich:

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) \quad (H.10)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}_i \partial \bar{X}_j} u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) + \dots$$

wobei das zweite Glied auf der rechten Seite das Glied zweiter Ordnung der in den $\bar{X}_i$ ausgedrückten Entwicklung von f in eine Taylor-Reihe ist (siehe auch 5.1.2, Anmerkung). Im vorliegenden Fall ist Vorgehensweise 2 zu bevorzugen, denn es vermeidet die Näherung $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ und spiegelt das verwendete Meßverfahren besser wider: die Daten wurden tatsächlich in Blöcken erfaßt.

Andererseits wäre Vorgehensweise 2 ungeeignet, wenn die Daten aus Tabelle H.2 in folgender Reihenfolge ermittelt worden wären: $n_1 = 5$ Beobachtungen der elektrischen Spannung V , dann $n_2 = 5$ Beobachtungen der Stromstärke I , dann $n_3 = 5$ Beobachtungen der Phasenverschiebung ϕ ; völlig unmöglich wäre es bei $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (Es ist tatsächlich ein schlechtes Meßverfahren, wenn die Messungen in dieser Weise durchgeführt werden, denn die Spannung über eine feste Impedanz und der hindurchfließende Strom stehen in einem direkten Zusammenhang.)

Wenn die Daten aus Tabelle H.2 auf diese Weise uminterpretiert werden, daß Vorgehensweise 2 ungeeignet ist, und wenn angenommen wird, daß zwischen V , I und ϕ keine Korrelation existiert, dann haben die beobachteten Korrelationskoeffizienten keine Bedeutung und müssen gleich Null gesetzt werden. Wird dies in Tabelle H.2 getan, so reduziert sich Gleichung (H.9) auf das Äquivalent zu Gleichung (F.2) in F.1.2.3, nämlich:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i) \quad (H.11)$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf die Daten in Tabelle H.2 führt zu den in Tabelle H.5 angegebenen Veränderungen:

Tabelle H.5: Veränderungen in Tabelle H.3, wenn die Korrelationskoeffizienten aus Tabelle H.2 als Null angenommen werden

Kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ des Meßergebnisses	
$u_c(R) = 0,195 \, \Omega$	
$u_c(R)/R = 0,15 \times 10^{-2}$	
$u_c(X) = 0,201 \, \Omega$	
$u_c(X)/X = 0,09 \times 10^{-2}$	
$u_c(Z) = 0,236 \, \Omega$	
$u_c(Z)/Z = 0,09 \times 10^{-2}$	
Korrelationskoeffizienten $r(y_l, y_m)$	
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0,056$	
$r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0,527$	
$r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,878$	

H.3 Kalibrierung eines Thermometers

Dieses Beispiel zeigt, wie die Methode der kleinsten Quadrate zur Gewinnung einer linearen Kalibrierkurve angewendet wird, und wie die Parameter des Ausgleichs, der Achsenabschnitt und die Steigung, sowie deren geschätzten Varianzen und Kovarianz verwendet werden, um aus der Kurve den Wert und die Standardunsicherheit einer vorhergesagten Korrektur zu ermitteln.

H.3.1 Meßaufgabe

Ein Thermometer ist durch Vergleich von $n = 11$ Temperaturengaben t_k des Thermometers, die jeweils eine vernachlässigbare Unsicherheit haben, mit entsprechenden bekannten Referenztemperaturen $t_{R,k}$ im Temperaturbereich von 21 °C bis 27 °C zu kalibrieren, wobei die Korrekturen $b_k = t_{R,k} - t_k$ zu den Ausgaben zu ermitteln sind. Die gemessenen Korrekturen b_k und die gemessenen Temperaturen t_k sind die Eingangsgrößen der Berechnung. Eine lineare Kalibrierkurve

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \quad (\text{H.12})$$

wird an die gemessenen Korrekturen und Temperaturen nach der Methode der kleinsten Quadrate angepaßt. Die Parameter y_1 und y_2 , die den Achsenabschnitt bzw. die Steigung der Kalibrierkurve bezeichnen, sind die beiden zu ermittelnden Meßgrößen oder Ausgangsgrößen. Die Temperatur t_0 ist eine passend gewählte, genaue Referenztemperatur und kein unabhängiger Parameter, der durch einen Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln ist. Wenn y_1 und y_2 sowie deren Varianzen und Kovarianz einmal gefunden sind, können Wert und Standardunsicherheit der an jeden Temperaturwert t des Thermometers anzubringenden Korrektur mit Hilfe von Gleichung (H.12) vorhergesagt werden.

H.3.2 Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate

Anhand der Methode der kleinsten Quadrate sowie der Annahmen aus H.3.1 ermittelt man die Ausgangsgrößen y_1 und y_2 und ihre geschätzten Varianzen und Kovarianz durch Minimierung der Summe

$$S = \sum_{k=1}^n [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen für y_1 , y_2 , ihre empirischen Varianzen $s^2(y_1)$ und $s^2(y_2)$ und ihren geschätzten Korrelationskoeffizienten $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / (s(y_1)s(y_2))$, wobei $s(y_1, y_2)$ die geschätzte Kovarianz ist:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.13a})$$

$$y_2 = \frac{n \sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.13b})$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \quad (\text{H.13c})$$

$$s^2(y_2) = n \frac{s^2}{D} \quad (\text{H.13d})$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}} \quad (\text{H.13e})$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n-2} \quad (\text{H.13f})$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 \quad (\text{H.13g})$$

$$= n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2$$

wobei alle Summen von $k = 1$ bis n laufen, $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ und $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ ist die Differenz zwischen der gemessenen oder beobachteten Korrektur b_k bei der Temperatur t_k und der durch die angepaßte Kurve $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ bei t_k vorhergesagte Korrektur $b(t_k)$. Die Varianz s^2 ist ein Maß der globalen Unsicherheit des Ausgleichs, wobei der Nenner $n - 2$ die Tatsache widerspiegelt, daß zwei Parameter y_1 und y_2 durch n unabhängige Beobachtungen ermittelt werden (siehe G.3.3), so daß für s^2 die Anzahl der Freiheitsgrade $\nu = n - 2$ beträgt.

H.3.3 Berechnung der Ergebnisse

Die anzupassenden Daten sind in der zweiten und dritten Spalte von Tabelle H.6 angeführt. Bei einer Referenztemperatur $t_0 = 20$ °C ergibt die Anwendung der Gleichungen (H.13a) bis (H.13g):

$$y_1 = -0,1712 \text{ °C} \quad s(y_1) = 0,0029 \text{ °C}$$

$$y_2 = 0,002 \text{ 18} \quad s(y_2) = 0,000 \text{ 67}$$

$$r(y_1, y_2) = -0,930 \quad s = 0,0035 \text{ °C}$$

Die Steigung y_2 ist mehr als dreimal größer als ihre Standardunsicherheit. Das deutet darauf hin, daß eine Kalibrierkurve erforderlich ist und keine feste Durchschnittskorrektur.

Die Kalibrierkurve läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$b(t) = -0,1712(29) \text{ °C} + 0,002 \text{ 18}(67) (t - 20 \text{ °C}) \quad (\text{H.14})$$

Tabelle H.6: Daten zur Ermittlung einer linearen Kalibrierkurve für ein Thermometer nach der Methode der kleinsten Quadrate

Nummer der Ablesung k	Thermometerausgabe t_k (°C)	Beobachtete Korrektur $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°C)	Vorhergesagte Korrektur $b(t_k)$ (°C)	Differenz zwischen beobachteter und vorhergesagter Korrektur $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	-0,171	-0,1679	-0,0031
2	22,012	-0,169	-0,1668	-0,0022
3	22,512	-0,166	-0,1657	-0,0003
4	23,003	-0,159	-0,1646	+0,0056
5	23,507	-0,164	-0,1635	-0,0005
6	23,999	-0,165	-0,1625	-0,0025
7	24,513	-0,156	-0,1614	+0,0054
8	25,002	-0,157	-0,1603	+0,0033
9	25,503	-0,159	-0,1592	+0,0002
10	26,010	-0,161	-0,1581	-0,0029
11	26,511	-0,160	-0,1570	-0,0030

wobei die in Klammern gesetzten Zahlen die Zahlenwerte für die Standardunsicherheiten, bezogen auf die entsprechenden letzten Stellen der angegebenen Ergebnisse für Achsenabschnitt und Steigung sind (siehe 7.2.2). Diese Gleichung liefert den Vorhersagewert der Korrektur $b(t)$ für jede Temperatur t und insbesondere den Wert $b(t_k)$ für $t = t_k$. Diese Werte sind in Spalte 4 der Tabelle angegeben, während die letzte Spalte die jeweilige Differenz zwischen Meß- und Vorhersagewert $b_k - b(t_k)$ angibt. Eine Analyse dieser Differenzen läßt sich zur Prüfung der Gültigkeit des linearen Modells verwenden; es gibt auch formale Tests (siehe Literaturhinweis [8]), doch werden diese hier nicht berücksichtigt.

H.3.4 Unsicherheit eines Vorhersagewerts

Der Ausdruck für die kombinierte Standardunsicherheit des Vorhersagewerts einer Korrektur läßt sich leicht durch Anwendung des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes, Gleichung (16) in 5.2.2, auf Gleichung (H.12) gewinnen. Wenn man $b(t) = f(y_1, y_2)$ setzt und $u(y_1) = s(y_1)$ sowie $u(y_2) = s(y_2)$ schreibt, erhält man

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2) \quad (\text{H.15})$$

Die geschätzte Varianz $u_c^2[b(t)]$ hat ein Minimum bei $t_{\min} = u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$, im vorliegenden Fall bei $t_{\min} = 24,0085$ °C.

Als Beispiel für die Anwendung von Gleichung (H.15) sei der Fall betrachtet, daß man eine Thermometer-Korrektur

und ihre Unsicherheit für $t = 30$ °C benötigt, wobei dieser Wert außerhalb des Bereichs liegt, für den das Thermometer eigentlich kalibriert wurde. Nach dem Einsetzen von $t = 30$ °C in Gleichung (H.14) ergibt sich

$$b(30 \text{ °C}) = -0,1494 \text{ °C}$$

während Gleichung (H.15) folgende Form annimmt:

$$u_c^2[b(30 \text{ °C})] = (0,0029 \text{ °C})^2 + (10 \text{ °C})^2(0,00067)^2 + 2(10 \text{ °C})(0,0029 \text{ °C})(0,00067)(-0,930) = 17,1 \times 10^{-6} \text{ °C}^2$$

oder

$$u_c[b(30 \text{ °C})] = 0,0041 \text{ °C}$$

Somit beträgt die Korrektur $-0,1494$ °C für 30 °C bei einer kombinierten Standardunsicherheit $u_c = 0,0041$ °C mit $\nu = n - 2 = 9$ Freiheitsgraden für u_c .

H.3.5 Eliminierung der Korrelation von Steigung und Achsenabschnitt

Gleichung (H.13e) für den Korrelationskoeffizienten $r(y_1, y_2)$ impliziert $r(y_1, y_2) = 0$, wenn t_0 so gewählt wird, daß $\sum_{k=1}^n \theta_k = \sum_{k=1}^n (t_k - t_0) = 0$. Dann sind y_1 und y_2 unkorreliert, wodurch sich die Berechnung der Standardunsicherheit einer vorhergesagten Korrektur vereinfacht. Da $\sum_{k=1}^n \theta_k = 0$ bei $t_0 = \bar{t} = (\sum_{k=1}^n t_k)/n$ und $\bar{t} = 24,0085$ °C im vorliegenden Fall, würde ein wiederholter Ausgleich

nach der Methode der kleinsten Quadrate bei $t_0 = \bar{t} = 24,0085^\circ\text{C}$ zu unkorrelierten Werten von y_1 und y_2 führen. (Die Temperatur $\bar{t}$ ist auch die Temperatur, bei der $u^2[b(t)]$ ein Minimum erreicht; siehe H.3.4). Der Ausgleich muß jedoch nicht wiederholt werden, da gezeigt werden kann, daß

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \quad (\text{H.16a})$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \quad (\text{H.16b})$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \quad (\text{H.16c})$$

wobei

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

und beim Schreiben von Gleichung (H.16b) $u(y_1') = s(y_1')$ und $u(y_2) = s(y_2)$ eingesetzt wurden [siehe Gleichung (H.15)].

Bei Anwendung dieser Beziehungen auf die Ergebnisse in H.3.3 folgen:

$$b(t) = -0,1625(11) + 0,002\,18(67)(t - 24,0085^\circ\text{C}) \quad (\text{H.17a})$$

$$u_c^2[b(t)] = (0,0011)^2 + (t - 24,0085^\circ\text{C})^2 (0,00\,67)^2 \quad (\text{H.17b})$$

Daß diese Ausdrücke dieselben Ergebnisse liefern wie die Gleichungen (H.14) und (H.15), läßt sich überprüfen, indem man die Berechnung von $b(30^\circ\text{C})$ und $u_c[b(30^\circ\text{C})]$ wiederholt. Die Einsetzung von $t = 30^\circ\text{C}$ in die Gleichungen (H.17a) und (H.17b) ergibt

$$b(30^\circ\text{C}) = -0,1494^\circ\text{C}$$

$$u_c[b(30^\circ\text{C})] = 0,0041^\circ\text{C}$$

was mit den in H.3.4 erhaltenen Ergebnissen übereinstimmt. Die geschätzte Kovarianz zwischen zwei vorhergesagten Korrekturen $b(t_1)$ und $b(t_2)$ erhält man aus Gleichung (H.9) in H.2.3.

H.3.6 Weitere Überlegungen

Mit der Methode der kleinsten Quadrate lassen sich Kurven höherer Ordnung an Meßpunkte anpassen. Ebenso kann sie angewandt werden, wenn einzelne Meßpunkte Unsicherheiten aufweisen. Einzelheiten sind den Standardtexten zu diesem Thema [8] zu entnehmen. Die folgenden Beispiele veranschaulichen hingegen zwei Fälle, in denen die gemessenen Korrekturen b_k nicht als genau bekannt angenommen werden.

1) Die Unsicherheit aller t_k sei vernachlässigbar, jeder der n Werte $t_{R,k}$ sei aus einer Reihe von m mehrmaligen Ableisungen gewonnen worden, und der auf einer großen Menge von über mehrere Monate hinweg gesammelten Daten beruhende zusammengefaßte Schätzwert der Varianz solcher Ableisungen sei mit s_p^2 bezeichnet. Die geschätzte Varianz zu jedem $t_{R,k}$ ist somit $s_p^2/m = u_0^2$, wobei alle beobachteten Korrekturen $b_k = t_{R,k} - t_k$ dieselbe Standardunsicherheit u_0 haben. Unter diesen Umständen (sowie in der Annahme, daß es keinen Grund gibt, das lineare Modell als falsch anzusehen) steht u_0^2 in den Gleichungen (H.13c) und (H.13d) für s^2 .

ANMERKUNG: Einen aus N unabhängigen Beobachtungen derselben Zufallsgröße gewonnenen zusammengefaßten Schätzwert s_p^2 der Varianz erhält man aus folgendem Ausdruck:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i}$$

wobei s_i^2 die empirische Varianz der i -ten Reihe aus n_i mehrmaligen unabhängigen Beobachtungen [Gleichung (4) in 4.2.2] ist und $v_i = n_i - 1$ Freiheitsgrade hat. Die Anzahl der Freiheitsgrade von s_p^2 ist $v = \sum_{i=1}^N v_i$. Die empirische Varianz s_p/m (und die empirische Standardabweichung $s_p/\sqrt{m}$) des arithmetischen Mittelwerts aus m unabhängigen Beobachtungen, die durch den zusammengefaßten Schätzwert der Varianz s_p^2 charakterisiert werden, hat ebenfalls v Freiheitsgrade.

2) Die Unsicherheit aller t_k sei vernachlässigbar, eine Korrektur ε_k werde an jeden der n Werte $t_{R,k}$ angebracht, und jede Korrektur habe dieselbe Standardunsicherheit u_a . Dann ist die Standardunsicherheit für alle $b_k = t_{R,k} - t_k$ ebenfalls u_a , $s^2(y_1)$ wird durch $s^2(y_1) + u_a^2$ und $s^2(y_1')$ durch $s^2(y_1') + u_a^2$ ersetzt.

H.4 Aktivitätsmessung

Dieses Beispiel ähnelt Beispiel H.2, der gleichzeitigen Wirk- und Blindwiderstandsmessung, darin, daß die Daten auf zweierlei Weise analysiert werden können, beide Vorgehensweisen aber im wesentlichen den gleichen Zahlenwert ergeben. Die erste Vorgehensweise zeigt ein weiteres Mal, wie wichtig es ist, die beobachtete Korrelation zwischen den Eingangsgrößen zu berücksichtigen.

H.4.1 Meßaufgabe

Die unbekannte Aktivitätskonzentration von Radon (^{222}Rn) in einer Wasserprobe wird durch Zählen mit einem Flüssigkeits-Szintillator im Vergleich zu einer Radon-Wasser-Normalprobe mit bekannter Aktivitätskonzentration ermittelt. Die unbekannte Aktivitätskonzentration erhält man durch Messung dreier Zählquellen, die aus etwa 5 g Wasser und 12 g organischer Emulsion als Szintillator in Ampullen mit einem Volumen von 22 mL bestehen:

- Quelle (a) *Normal* der Masse m_S einer Normallösung mit bekannter Aktivitätskonzentration;
- Quelle (b) *Blindwasserprobe* gleicher Masse ohne radioaktives Material zur Ermittlung der Nulleffekt-Zählrate;
- Quelle (c) *Probe* mit der Masse m_x und unbekannter Aktivitätskonzentration.

An den drei Zählquellen wurden sechs Meßzyklen in folgender Reihenfolge vorgenommen: Normal - Blindprobe - Probe. Jede totzeitkorrigierte Zähldauer T_0 beträgt 60 Minuten für jede Quelle und in allen sechs Zyklen. Obwohl die Nulleffekt-Zählrate nicht als konstant über das gesamte Zählintervall (65 Stunden) angenommen werden kann, wird angenommen, daß die gezählte Anzahl für jede Blindprobe als Repräsentant der Nulleffekt-Zählrate bei

der Messung von Normal und Probe im selben Zyklus dienen kann. Die Daten sind in Tabelle H.7 aufgeführt, wobei

t_S, t_B, t_x jeweils die Zeiten von der Referenzzeit $t = 0$ bis zum Mittelpunkt der totzeitkorrigierten Zählintervalle der Dauer $T_0 \approx 60$ min für Normal-, Blind- und Probeampullen sind; dabei wird t_B für die Analyse nicht benötigt und nur der Vollständigkeit halber angegeben;

C_S, C_B, C_x die Anzahlen der im totzeitkorrigierten Intervall der Dauer $T_0 \approx 60$ min registrierten Zählungen für Normal-, Blind- bzw. Probeampullen bedeuten;

Die beobachteten Zählungen lassen sich wie folgt ausdrücken:

$$C_S = C_B + \epsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda_S} \quad (\text{H.18a})$$

$$C_x = C_B + \epsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda_x} \quad (\text{H.18b})$$

wobei

ϵ die Nachweiswahrscheinlichkeit des Flüssigkeits-Szintillators für ^{222}Rn bei einer gegebenen Quellenzusammensetzung ist, die als unabhängig vom Aktivitätsniveau angenommen wird;

A_S die Aktivitätskonzentration des Normals zur Referenzzeit $t = 0$ ist;

A_x die Meßgröße ist, die als unbekannte Aktivitätskonzentration einer Probe zur Referenzzeit $t = 0$ definiert ist;

m_S die Masse der Normallösung angibt;

Tabelle H.7: Zählraten zur Ermittlung der Aktivitätskonzentration einer unbekannten Probe

Zyklus k	Normal		Blindprobe		Probe	
	t_S (min)	C_S (-)	t_B (min)	C_B (-)	t_x (min)	C_x (-)
1	243,74	15 380	305,56	4054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1046,10	3922	1107,66	38 706
3	1723,87	14 394	1785,43	4200	1846,99	35 860
4	2463,17	13 254	2524,73	3830	2586,28	32 238
5	3217,56	12 516	3279,12	3956	3340,68	29 640
6	3956,83	11 058	4018,38	3980	4079,94	26 356

m_x den Masseanteil der Probe angibt;

λ die Zerfallskonstante für ^{222}Rn ist: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1,258\,94 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$ ($T_{1/2} = 5505,8 \text{ min}$).

Die Gleichungen (H.18a) und (H.18b) deuten darauf hin, daß weder die in Tabelle H.7 angegebenen sechs Einzelwerte von C_S noch die von C_x direkt gemittelt werden können, da der Aktivitätsabfall von Normal und Probe exponentiell verläuft und von Zyklus zu Zyklus leichte Schwankungen bei der Nulleffekt-Zählung auftreten. Statt dessen muß man die zerfallskorrigierten oder nulleffekt-korrigierten Zählungen (oder Zählraten, definiert als Anzahl der Zählungen dividiert durch $T_0 = 60 \text{ min}$) verwenden. Damit empfiehlt sich eine Kombination von Gleichung (H.18a) und (H.18b) zur Ermittlung der unbekannten Konzentration aus den bekannten Mengen:

$$\begin{aligned} A_x &= f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}} \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_S - C_B)} e^{\lambda(t_x - t_S)} \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

wobei $(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}$ und $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ jeweils die nulleffekt-korrigierten Zählungen der Probe und des Normals zur Referenzzeit $t = 0$ und für das Zeitintervall der Dauer $T_0 = 60 \text{ min}$. Alternativ hierzu ließe sich auch einfach schreiben:

$$\begin{aligned} A_x &= f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \end{aligned} \quad (\text{H.20})$$

wobei die nulleffekt-korrigierten und zerfallskorrigierten Zählraten R_x und R_S gegeben sind durch

$$R_x = [(C_x - C_B)/T_0] e^{\lambda t_x} \quad (\text{H.21a})$$

$$R_S = [(C_S - C_B)/T_0] e^{\lambda t_S} \quad (\text{H.21b})$$

H.4.2 Datenanalyse

Tabelle H.8 faßt die Werte der nulleffekt-korrigierten und zerfallskorrigierten Zählraten R_S und R_x zusammen, die nach Gleichung (H.21a) und (H.21b) mit Hilfe von Tabelle H.7 und dem oben angegebenen Wert von $\lambda = 1,258\,94 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$ errechnet wurden. Es ist zu beachten, daß sich das Verhältnis $R = R_x/R_S$ ganz einfach aus dem Ausdruck

$$[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)] e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

errechnen läßt.

Die arithmetischen Mittelwerte $\bar{R}_S$, $\bar{R}_x$ und $\bar{R}$ sowie ihre empirischen Standardabweichungen $s(\bar{R}_S)$, $s(\bar{R}_x)$ und $s(\bar{R})$ werden auf die übliche Weise berechnet [Gleichung (3) und (5) in 4.2]. Der Korrelationskoeffizient $r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)$ wird aus Gleichung (17) in 5.2.3 und Gleichung (14) in 5.2.2 errechnet.

Wegen der vergleichsweise geringen Streuung der Werte von $\bar{R}_x$ und $\bar{R}_S$ sind das Verhältnis der Mittelwerte $\bar{R}_x/\bar{R}_S$ und die Standardunsicherheit $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ dieses Verhältnisses nahezu gleich dem in der letzten Spalte von Tabelle H.8 angegebenen mittleren Verhältnis $\bar{R}$ und seiner empirischen Standardabweichung $s(\bar{R})$ [siehe H.2.4 und Gleichung (H.10) in diesem Abschnitt]. Dennoch muß bei der Berechnung der Standardunsicherheit $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ die durch den Korrelationskoeffizienten $r(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ ausgedrückte Korrelation von R_x und R_S mit Hilfe von Gleichung (16) in 5.2.2 berücksichtigt werden. [Diese Gleichung ergibt die letzten drei Glieder von Gleichung (H.22b) für die relative geschätzte Varianz von $\bar{R}_x/\bar{R}_S$].

Es sollte dabei beachtet werden, daß die jeweilige empirische Standardabweichung von $\bar{R}_x$ und $\bar{R}_S$, $\sqrt{6}s(\bar{R}_x)$ bzw. $\sqrt{6}s(\bar{R}_S)$, auf eine Streuung dieser Größen hindeuten, die zwei- bis dreimal größer ist, als sie die Poisson-Statistik des Zählprozesses mit sich bringt; letztere ist in die beobachtete Streuung der Zählungen eingeschlossen und braucht nicht gesondert berücksichtigt zu werden.

H.4.3 Berechnung der Endergebnisse

Zum Erhalt der unbekannten Aktivitätskonzentration A_x und ihrer kombinierten Standardunsicherheit $u_c(A_x)$ aus Gleichung (H.20) benötigt man A_S , m_x und m_S sowie deren Standardunsicherheiten. Diese sind wie folgt gegeben:

$$A_S = 0,1368 \text{ Bq/g}$$

$$u(A_S) = 0,0018 \text{ Bq/g}; \quad u(A_S)/A_S = 1,32 \times 10^{-2}$$

$$m_S = 5,0192 \text{ g}$$

$$u(m_S) = 0,005 \text{ g}; \quad u(m_S)/m_S = 0,10 \times 10^{-2}$$

$$m_x = 5,0571 \text{ g}$$

$$u(m_x) = 0,0010 \text{ g}; \quad u(m_x)/m_x = 0,02 \times 10^{-2}$$

Weitere mögliche Unsicherheitsquellen werden als vernachlässigbar angesehen:

- Standardunsicherheiten der Zerfallszeiten $u(t_{S,k})$ und $u(t_{x,k})$;
- Standardunsicherheit der Zerfallskonstante von ^{222}Rn , $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7} \text{ min}^{-1}$. (Die signifikante Größe ist der Zerfallsfaktor $\exp[\lambda(t_x - t_S)]$, der zwischen 1,015 63 für die Zyklen $k = 4$ bis 6 und 1,015 70 für Zyklus $k = 1$ schwankt. Die Standardunsicherheit für diese Werte beträgt $u = 1,2 \times 10^{-5}$).

Tabelle H.8: Berechnung der zerfalls- und nulleffektkorrigierten Zählraten

Zyklus k	R_x (min^{-1})	R_S (min^{-1})	$(t_x - t_S)$ (min)	$R = R_x/R_S$
1	652,46	194,65	123,63	3,3520
2	666,48	208,58	123,13	3,1953
3	665,80	211,08	123,12	3,1543
4	655,68	214,17	123,11	3,0615
5	651,87	213,92	123,12	3,0473
6	623,31	194,13	123,11	3,2107
	$\bar{R}_x = 652,60$ $s(\bar{R}_x) = 6,42$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0,98 \times 10^{-2}$	$\bar{R}_S = 206,09$ $s(\bar{R}_S) = 3,79$ $s(\bar{R}_S)/\bar{R}_S = 1,84 \times 10^{-2}$		$\bar{R} = 3,170$ $s(\bar{R}) = 0,046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1,44 \times 10^{-2}$
$\bar{R}_x/\bar{R}_S = 3,167$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 0,045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 1,42 \times 10^{-2}$				
Korrelationskoeffizient				
$r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) = 0,646$				

- Unsicherheit im Zusammenhang mit der möglichen Abhängigkeit der Nachweiswahrscheinlichkeit des Szintillationszählers von der verwendeten Quelle (Normal, Blindprobe, Probe);
- Unsicherheit der Korrektur für die Totzeit des Zählers und der Korrektur für die Abhängigkeit der Nachweiswahrscheinlichkeit vom Aktivitätsniveau.

H.4.3.1 Ergebnisse: Vorgehensweise 1

Wie bereits angedeutet, können A_x und $u_c(A_x)$ auf zweierlei Weise aus Gleichung (H.20) ermittelt werden. Bei der ersten Vorgehensweise wird A_x mit Hilfe der arithmetischen Mittelwerte $\bar{R}_x$ und $\bar{R}_S$ wie folgt berechnet:

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_S} = 0,4300 \text{ Bq/g} \quad (\text{H.22a})$$

Wendet man Gleichung (16) aus 5.2.2 auf diesen Ausdruck an, so ergibt dies für die kombinierte Varianz $u_c^2(A_x)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} &= \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} \\ &\quad + \frac{u^2(\bar{R}_x)}{\bar{R}_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_S)}{\bar{R}_S^2} \\ &\quad - 2r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) \frac{u(\bar{R}_x)u(\bar{R}_S)}{\bar{R}_x \bar{R}_S} \end{aligned} \quad (\text{H.22b})$$

wobei die letzten drei Glieder, wie in H.4.2 vermerkt, die geschätzte relative Varianz $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S)^2$ von $\bar{R}_x/\bar{R}_S$ angeben. In Übereinstimmung mit der Diskussion in H.2.4 zeigen die Ergebnisse in Tabelle H.8, daß $\bar{R}$ nicht genau gleich $\bar{R}_x/\bar{R}_S$ ist, und daß die Standardunsicherheit

$u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ von $\bar{R}_x/\bar{R}_S$ nicht genau gleich der Standardunsicherheit $s(\bar{R})$ von $\bar{R}$ ist.

Werden die Werte der relevanten Größen in die Gleichungen (H.22a) und (H.22b) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1,93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0,0083 \text{ Bq/g}$$

Das Meßergebnis kann dann wie folgt angegeben werden:

$A_x = 0,4300 \text{ Bq/g}$ mit einer kombinierten Standardunsicherheit $u_c = 0,0083 \text{ Bq/g}$.

H.4.3.2 Ergebnisse: Vorgehensweise 2

Bei der zweiten Vorgehensweise, bei der die Korrelation von $\bar{R}_x$ und $\bar{R}_S$ vermieden wird, wird A_x mit Hilfe des arithmetischen Mittelwerts $\bar{R}$ berechnet. Somit gilt:

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \bar{R} = 0,4304 \text{ Bq/g} \quad (\text{H.23a})$$

Der Ausdruck für $u_c^2(A_x)$ lautet einfach

$$\begin{aligned} \frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} &= \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} \\ &+ \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R})}{\bar{R}^2} \end{aligned} \quad (\text{H.23b})$$

mit dem Ergebnis

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1,95 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0,0084 \text{ Bq/g}$$

Das Meßergebnis kann dann wie folgt angegeben werden:

$A_x = 0,4304 \text{ Bq/g}$ mit einer kombinierten Standardunsicherheit $u_c = 0,0084 \text{ Bq/g}$.

Die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade von u_c läßt sich mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Formel auf die in H.1.6 gezeigte Weise berechnen.

Wie im Beispiel H.2 ist das letztere der beiden Ergebnisse zu bevorzugen, da hier die Näherung des Mittelwerts des Quotienten zweier Größen durch den Quotienten der Mittelwerte der beiden Größen vermieden wird; zudem widerspiegelt es das verwendete Meßverfahren besser, weil die Daten tatsächlich in zwei getrennten Zyklen erfaßt wurden.

Dennoch ist die Differenz zwischen den auf diese beiden Weisen ermittelten Werten von A_x deutlich klein, verglichen mit der ihnen zugeschriebenen Standardunsicherheit, und die Differenz zwischen den Standardunsicherheiten kann gänzlich vernachlässigt werden. Eine solche Übereinstimmung zeigt, daß beide Vorgehensweisen gleichwertig sind, wenn die beobachteten Korrelationen richtig einbezogen werden.

H.5 Varianzanalyse

Dieses Beispiel gibt eine kurze Einführung in die Varianzanalyseverfahren (ANOVA-Verfahren). Diese statistischen Verfahren werden zur Erkennung und quantitativen Ermittlung einzelner *Zufallseinflüsse* auf eine Messung verwendet, so daß sie bei der Ermittlung der Unsicherheit des Meßergebnisses entsprechend berücksichtigt werden können. Obwohl ANOVA-Verfahren auf eine große Vielfalt von Messungen anwendbar sind, zum Beispiel auf die Kalibrierung von Referenznormalen wie dem Zener-Spannungsnormal und Massenormalen sowie zur Zertifizierung von Referenzmaterialien, sind sie nicht geeignet, möglicherweise vorhandene systematische Einflüsse zu ermitteln.

Mit der allgemeinen Bezeichnung ANOVA werden viele verschiedene Modelle zusammengefaßt. Bei dem hier wegen seiner Bedeutung diskutierten speziellen Modell handelt es sich um den ausgewogen geschachtelten Ansatz. Die Zahlenwerte in diesem Beispiel beziehen sich auf die Kalibrierung eines Zener-Spannungsnormalen; die Analyse kann für eine Reihe von praktischen Meßsituationen von Bedeutung sein.

ANOVA-Verfahren sind von besonderer Bedeutung bei der Zertifizierung von Referenzmaterialien (RM) durch Prüfungen, an denen mehrere Laboratorien beteiligt sind, was recht detailliert in der ISO-Richtlinie 35 [19] beschrieben ist (siehe eine kurze Beschreibung einer solchen RM-Zertifizierung in H.5.3.2). Da das in Richtlinie 35 enthaltene Material breit anwendbar ist, kann man diese Broschüre wegen weiterer Einzelheiten über ANOVA einschließlich der unausgewogen geschachtelten Ansätze zu Rate ziehen. Gleiches gilt für die Literaturangaben [15] und [20].

H.5.1 Meßaufgabe

Betrachtet sei ein Zener-Spannungsnormal mit 10 V Nennspannung, daß über einen Zeitraum von zwei Wochen an einer stabilen Referenzspannung kalibriert wird. An jedem der J Tage dieses Zeitraums erfolgen K mehrmalige unabhängige Beobachtungen der Spannung V_S des Normalen. Wenn V_{jk} der k -te Beobachtungswert von V_S ($k = 1, 2, \dots, K$) am j -ten Tag ($j = 1, 2, \dots, J$) bezeichnet, dann ist der beste Schätzwert der Spannung des Normalen der arithmetische Mittelwert $\bar{V}$ aus den JK Beobachtungswerten [siehe Gleichung (3) in 4.2.1]:

$$\bar{V}_S = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk} = \bar{V} \quad (\text{H.24a})$$

Die empirische Standardabweichung $s(\bar{V})$ des Mittelwerts, die ein Maß für die Unsicherheit von $\bar{V}$ als Schätz-

wert der Spannung des Normalen darstellt, wird wie folgt ermittelt [siehe Gleichung (5) in 4.2.3]:

$$s^2(\bar{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V})^2 \quad (\text{H.24b})$$

ANMERKUNG: Es wird für das gesamte Beispiel angenommen, daß alle an den Beobachtungswerten angebrachten Korrekturen zur Kompensierung systematischer Einflüsse entweder zu vernachlässigenden Unsicherheiten oder solche Unsicherheiten aufweisen, die am Ende der Analyse berücksichtigt werden können. Eine Korrektur der zweiten Kategorie, die ihrerseits am Ende der Analyse an den Mittelwert der Beobachtungswerte angebracht werden kann, ist die Differenz zwischen dem Zertifizierungswert (für den eine gegebene Unsicherheit angenommen wird) und dem Arbeitswert der stabilen Referenzspannung, an der das Zener-Spannungsnormal kalibriert wird. Damit ist der statistisch aus den Beobachtungswerten ermittelte Schätzwert der Spannung des Normalen nicht unbedingt das Endergebnis der Messung, und die empirische Standardabweichung dieses Schätzwerts ist nicht unbedingt die kombinierte Standardunsicherheit des Endergebnisses.

Die aus Gleichung (H.24b) erhaltene empirische Standardabweichung $s(\bar{V})$ des Mittelwerts ist nur dann ein geeignetes Maß für die Unsicherheit von $\bar{V}$, wenn die Schwankungen der Beobachtungswerte von Tag zu Tag gleich den Schwankungen an einem einzigen Tag sind. Wenn es Hinweise dafür gibt, daß die Schwankungen zwischen Tagen erheblich größer sind als die während eines Tages, kann die Verwendung jenes Ausdrucks zu einer deutlich zu niedrigen Angabe der Unsicherheit von $\bar{V}$ führen. Somit ergeben sich zwei Fragen: Wie läßt sich entscheiden, ob die Schwankungen zwischen Tagen (gekennzeichnet durch eine Tag-zu-Tag-Komponente der Varianz) im Vergleich zu den Schwankungen während eines Tages (gekennzeichnet durch eine Tageskomponente der Varianz) signifikant sind und, wenn dies der Fall ist, wie ermittelt man die Standardabweichung des Mittelwerts?

H.5.2 Numerisches Beispiel

H.5.2.1 Daten, die eine Behandlung der genannten Fragen erlauben, sind in Tabelle H.9 angegeben, wobei

$J = 10$ die Anzahl der Tage ist, an denen Spannungsbeobachtungen vorgenommen wurden;

$K = 5$ die Anzahl der an jedem Tag vorgenommenen Spannungsbeobachtungen ist;

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_{jk} \quad (\text{H.25a})$$

Tabelle H.9: Resümee der über $J = 10$ Tage ermittelten Kalibrierdaten für ein Spannungsnormale, wobei alle Tagesmittelwerte $\bar{V}_j$ und empirischen Standardabweichungen $s(V_{jk})$ auf $K = 5$ mehrmaligen unabhängigen Beobachtungen beruhen

Tag, j	1	2	3	4	5
Größe					
$\bar{V}_j/\text{V}$	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106
$s(V_{jk})/\mu\text{V}$	60	77	111	101	67
Tag, j	6	7	8	9	10
Größe					
$\bar{V}_j/\text{V}$	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})/\mu\text{V}$	93	80	73	88	86
$\bar{V} = 10,000\,097\,\text{V}$ $s_a^2 = K s^2(\bar{V}_j) = 5(57\,\mu\text{V})^2 = (128\,\mu\text{V})^2$ $s_b^2 = s^2(V_{jk}) = (85\,\mu\text{V})^2$					

der arithmetische Mittelwert aus den $K = 5$ Spannungsbeobachtungswerten am j -ten Tag ist (es gibt $J = 10$ solche Tagesmittelwerte);

$$\bar{V} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{V}_j$$

$$= \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk}$$

der arithmetische Mittelwert aus den $J = 10$ Tagesmittelwerten und somit der Gesamtmittelwert aus den $JK = 50$ Beobachtungswerten ist;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \quad (\text{H.25c})$$

die empirische Varianz zu den am j -ten Tag ermittelten $K = 5$ Beobachtungswerten ist (es gibt $J = 10$ solche Schätzwerte der Varianz); und

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \quad (\text{H.25d})$$

die empirische Varianz zu den $J = 10$ Tagesmittelwerten ist (es gibt nur einen solchen Schätzwert der Varianz)

H.5.2.2 Die Konsistenz der Schwankungen während eines Tages und der Schwankungen zwischen Tagen bei den Beobachtungswerten läßt sich durch Vergleich zweier unabhängiger Schätzwerte der Tageskomponente der Va-

rianz σ_W^2 (das heißt, der Varianz zu den an einem Tag erhaltenen Beobachtungswerten) ermitteln.

Der erste Schätzwert von σ_W^2 wird mit s_a^2 bezeichnet und aus der beobachteten Schwankung der Tagesmittelwerte $\bar{V}_j$ gewonnen. Da $\bar{V}_j$ der Mittelwert aus K Beobachtungswerten ist, ist seine geschätzte Varianz $s^2(\bar{V}_j)$ unter der Annahme, daß die Tag-zu-Tag-Komponente der Varianz Null beträgt, σ_W^2/K . Aus Gleichung (H.25d) folgt dann

$$\begin{aligned} s_a^2 &= K s^2(\bar{V}_j) \\ &= \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \end{aligned} \quad (\text{H.26a})$$

Das ist der Schätzwert von σ_W^2 mit $\nu_a = J - 1 = 9$ Freiheitsgraden.

Der zweite Schätzwert von σ_W^2 , bezeichnet mit s_b^2 , ist der aus $J = 10$ Einzelwerten von $s^2(V_{jk})$ mit der Gleichung aus der Anmerkung zu H.3.6 erhaltene zusammengefaßte Schätzwert der Varianz, wobei die zehn Einzelwerte aus Gleichung (H.25c) errechnet wurden. Da jedem dieser Werte $\nu_i = K - 1$ Freiheitsgrade zukommen, stellt der sich daraus ergebende Ausdruck s_b^2 lediglich deren Durchschnitt dar. Somit gilt:

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s^2(V_{jk}) \quad (\text{H.26b})$$

$$= \frac{1}{J(K-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2$$

als Schätzwert von σ_W^2 mit $\nu_b = J(K-1) = 40$ Freiheitsgraden.

Die durch die Gleichungen (H.26a) und (H.26b) gegebenen Schätzwerte von σ_W^2 lauten $s_a^2 = (128 \mu\text{V})^2$ und $s_b^2 = (85 \mu\text{V})^2$ (siehe Tabelle H.9). Da der Schätzwert s_a^2 auf der Schwankung der Tagesmittelwerte beruht, während der Schätzwert s_b^2 die Schwankungen der täglichen Beobachtungswerte zur Grundlage hat, deutet ihre Differenz auf das mögliche Vorhandensein eines Einflusses an, der zwar von Tag zu Tag variiert, jedoch bei den Beobachtungswerten innerhalb eines Tages jeweils im wesentlichen konstant bleibt. Mit dem F -Test wird diese Möglichkeit und somit die Annahme überprüft, daß die Tag-zu-Tag-Komponente der Varianz gleich Null ist.

H.5.2.3 Die F -Verteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verhältnisses $F(\nu_a, \nu_b) = s_a^2(\nu_a) / s_b^2(\nu_b)$ zweier unabhängiger Schätzwerte der Varianz σ^2 einer normalverteilten Zufallsgröße [15], nämlich $s_a^2(\nu_a)$ und $s_b^2(\nu_b)$. Bei den Parametern ν_a und ν_b handelt es sich jeweils um die Anzahl der Freiheitsgrade der beiden Schätzwerte, und es gilt $0 \leq F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Die Werte von F sind für unterschiedliche Werte von ν_a und ν_b sowie für verschiedene Quantile der F -Verteilung tabelliert. Ein Wert von $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,95}$ oder $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (kritischer Wert) wird normalerweise als Indikator dafür interpretiert, daß $s_a^2(\nu_a)$ statistisch signifikant größer ist als $s_b^2(\nu_b)$ und daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert F gleich dem beobachteten Wert ist, bei gleicher Varianz der beiden Schätzwerte geringer ist als 0,05 bzw. 0,025. (Es können auch andere kritische Werte wie zum Beispiel $F_{0,99}$ gewählt werden.)

H.5.2.4 Bei Anwendung des F -Tests auf das vorliegende Zahlenbeispiel ergibt sich

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{K s^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} \quad (\text{H.27})$$

$$= \frac{5(57 \mu\text{V})^2}{85 \mu\text{V})^2} = 2,25$$

mit $\nu_a = J-1 = 9$ Freiheitsgraden im Zähler und $\nu_b = J(K-1) = 40$ Freiheitsgraden im Nenner. Da $F_{0,95}(9,40) = 2,12$ und $F_{0,975}(9,40) = 2,45$, wird auf einen statistisch signifikanten Einfluß zwischen Tagen auf dem

Signifikanzniveau von 5%, jedoch nicht auf dem von 2,5% geschlossen.

H.5.2.5 Wird das Vorhandensein eines Einflusses zwischen Tagen verworfen, weil die Differenz zwischen s_a^2 und s_b^2 nicht als statistisch signifikant angesehen wird (eine unvoreilhaftete Entscheidung, die zu einer Unterschätzung der Unsicherheit führen kann), muß die geschätzte Varianz $s^2(\bar{V})$ zu $\bar{V}$ aus Gleichung (H.24b) errechnet werden. Diese Beziehung ist gleichwertig mit der Zusammenfassung der Schätzwerte s_a^2 und s_b^2 (das heißt, Bildung eines gewichteten Mittelwerts aus s_a^2 und s_b^2 , jeweils gewichtet nach den Freiheitsgraden ν_a und ν_b ; siehe H.3.6, Anmerkung), wenn es um die Gewinnung des besten Schätzwerts der Varianz der Beobachtungswerte oder, nach Division dieses Schätzwerts durch JK (Anzahl der Beobachtungen), um die Gewinnung des besten Schätzwerts $s^2(\bar{V})$ der Varianz des Mittelwerts der Beobachtungswerte geht. Nach diesem Verfahren erhält man:

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} \quad (\text{H.28a})$$

$$= \frac{9(128 \mu\text{V})^2 + 40(85 \mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)}$$

$$= (13 \mu\text{V})^2, \text{ oder } s(\bar{V}) = 13 \mu\text{V} \quad (\text{H.28b})$$

wobei $JK-1 = 49$ Freiheitsgrade zu $s(\bar{V})$ gehören.

Nimmt man an, daß alle Korrekturen für systematische Einflüsse bereits berücksichtigt wurden und daß alle übrigen Unsicherheitskomponenten unwesentlich sind, kann das Ergebnis der Kalibrierung angegeben werden zu $V_S = \bar{V} = 10,000\,0097 \text{ V}$ (siehe Tabelle H.9) mit einer kombinierten Standardunsicherheit $s(\bar{V}) = u_c = 13 \mu\text{V}$, wobei 49 Freiheitsgrade zu u_c gehören.

ANMERKUNGEN:

1 In der Praxis gäbe es mit großer Wahrscheinlichkeit weitere signifikante Unsicherheitskomponenten, die daher mit der statistisch aus den Beobachtungen ermittelten Unsicherheitskomponente kombiniert werden müßten (siehe H.5.1, Anmerkung).

2 Es läßt sich nachweisen, daß Gleichung (H.28a) für $s^2(\bar{V})$ gleichwertig mit Gleichung (H.24b) ist, indem man die mit S bezeichnete Doppelsomme wie folgt schreibt:

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(V_{jk} - \bar{V}_j) + (\bar{V}_j - \bar{V})]^2$$

$$= (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Wenn das Vorhandensein eines Einflusses zwischen Tagen anerkannt (eine kluge Entscheidung, da sie eine mögliche Unterschätzung der Unsicherheit verhin-

dert) und dieser als zufällig angenommen wird, dann schätzt die nach Gleichung (H.25d) aus $J = 10$ Tagesmittelwerten errechnete Varianz $s^2(\bar{V}_j)$ nicht wie in H.5.2.2 σ_W^2/K , sondern $\sigma_W^2/K + \sigma_B^2$, wobei σ_B^2 die zufällige Tag-zu-Tag-Komponente der Varianz ist. Dies impliziert, daß

$$s^2(\bar{V}_j) = s_W^2/K + s_B^2 \quad (\text{H.29})$$

wobei σ_W^2 durch s_W^2 und σ_B^2 durch s_B^2 geschätzt wird. Da das aus Gleichung (H.26b) errechnete $\overline{s^2(V_{jk})}$ nur von den Schwankungen der Beobachtungswerte eines Tages abhängt, läßt sich $s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$ ansetzen. Somit verändert sich der für den F -Test in H.5.2.4 verwendete Quotient $Ks^2(\bar{V}_j)/\overline{s^2(V_{jk})}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} F &= \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} \\ &= \frac{5(57\mu\text{V})^2}{(85\mu\text{V})^2} = 2,25 \end{aligned} \quad (\text{H.30})$$

was dann zu

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{Ks^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \\ &= (43\mu\text{V})^2 \text{ oder } s_B = 43\mu\text{V} \end{aligned} \quad (\text{H.31a})$$

$$s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\mu\text{V})^2, \text{ oder } s_W = 85\mu\text{V} \quad (\text{H.31b})$$

führt.

Die geschätzte Varianz von $\bar{V}$ erhält man aus $s^2(\bar{V})$ nach Gleichung (H.25d), denn $s^2(\bar{V})$ widerspiegelt sowohl die zufälligen Tageskomponenten als auch die zufälligen Tag-zu-Tag-Komponenten der Varianz [siehe Gleichung (H.29)]. Somit gilt

$$\begin{aligned} s^2(\bar{V}) &= s^2(\bar{V}_j)/J \\ &= (57\mu\text{V})^2/10, \text{ oder } s(\bar{V}) = 18\mu\text{V} \end{aligned} \quad (\text{H.32})$$

wobei $J - 1 = 9$ Freiheitsgrade zu $s(\bar{V})$ gehören.

Die Anzahl der Freiheitsgrade von s_W^2 (und somit von s_W) beträgt $J(K - 1) = 40$ [siehe Gleichung (H.26b)]. Die Anzahl der Freiheitsgrade von s_B^2 (und somit von s_B) ist die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade der Differenz $s_B^2 = s^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ [Gleichung (H.31a)], doch ist deren Schätzung problematisch.

H.5.2.7 Der beste Schätzwert der Spannung des Spannungsnormals beträgt dann $V_S = \bar{V} = 10,000\,097\text{ V}$ mit $s(\bar{V}) = u_c = 18\mu\text{V}$ wie in Gleichung (H.32). Dieser Wert von u_c und seine 9 Freiheitsgrade müssen mit dem in H.5.2.5 [Gleichung (H.28b)] erhaltenen Ergebnis, also mit $u_c = 13\mu\text{V}$ und seinen 49 Freiheitsgraden verglichen werden, wenn das Vorhandensein von Einflüssen zwischen Tagen verworfen wurde.

Bei einer wirklichen Messung muß der offenkundige Einfluß zwischen Tagen nach Möglichkeit weiter untersucht werden, um dessen Ursachen zu ermitteln und herauszufinden, ob ein systematischer Einfluß vorhanden ist, der den Einsatz von ANOVA-Verfahren verbietet. Wie zu Beginn dieses Beispiels betont wurde, sind ANOVA-Verfahren dafür vorgesehen, aus zufälligen Einflüssen erwachsende Unsicherheitskomponenten zu erkennen und zu berechnen; sie sind nicht geeignet, um Erkenntnisse über aus systematischen Einflüssen stammende Komponenten zu gewinnen.

H.5.3 Rolle von ANOVA-Verfahren beim Messen

H.5.3.1 Das hier dargestellte Beispiel eines Spannungsnormals veranschaulicht, was allgemein als einstufig geschachtelter Ansatz bezeichnet wird. Es handelt sich um einen ausgewogen geschachtelten Ansatz, weil es eine Ebene der "Schachtelung" der Beobachtungswerte gibt, wobei ein Faktor - der Beobachtungstag - bei den Messungen verändert wird. Er ist ausgewogen, da an jedem Tag die gleiche Anzahl von Beobachtungen erfolgt. Die im Beispiel angeführte Analyse kann dazu benutzt werden, das Vorhandensein eines "Beobachter-Einflusses", eines "Meßgeräte-Einflusses" eines "Laboratorium-Einflusses", eines "Probeneinflusses" oder sogar eines "Verfahrenseinflusses" bei einer bestimmten Messung festzustellen. Es ließe sich bei dem angeführten Beispiel vorstellen, daß man die Anzahl der Beobachtungstage J ersetzt durch J verschiedene Beobachter; die Tag-zu-Tag-Komponente der Varianz wird dann zu einer Varianzkomponente aufgrund verschiedener Beobachter.

H.5.3.2 Wie in H.5 angemerkt, finden ANOVA-Verfahren breite Anwendung bei der Zertifizierung von Referenzmaterialien (RM) durch Prüfungen in mehreren Laboratorien. Zu einer solchen Zertifizierung gehört normalerweise, daß Proben eines Materials in einer Anzahl von unabhängigen, gleichermaßen kompetenten Laboratorien auf die Eigenschaft hin untersucht werden, die dem Material bescheinigt werden soll. Es wird allgemein angenommen, daß die Unterschiede zwischen den Einzelergebnissen sowohl innerhalb eines Laboratoriums als auch von Laboratorium zu Laboratorium unabhängig von ihrer Ursache statistischen Charakter haben. Jeder Labormittelwert wird als erwartungstreuer Schätzwert der Materialeigenschaft angesehen; der ungewichtete Mittelwert aus den Labormittelwerten gilt dann als der beste Schätzwert für diese Eigenschaft.

In eine RM-Zertifizierung können I verschiedene Laboratorien einbezogen sein, von denen jedes die in Frage stehende Eigenschaft an J verschiedenen Materialproben mißt und jede Messung einer Probe aus K mehrmaligen unabhängigen Beobachtungen besteht. Somit ist IJK die Gesamtzahl der Beobachtungswerte und IJ ist die Gesamtzahl der Proben. Hier handelt es sich um einen zweistufigen ausgewogen geschachtelten Ansatz analog zu dem einstufigen Beispiel mit dem Spannungsnorm. In diesem Fall gibt es zwei "Schachtelungs"-Ebenen der Beobachtungswerte, wobei zwei Faktoren - Probe und Laboratorium - beim Messen verändert werden. Der Ansatz ist ausgewogen, weil jede Probe in jedem Laboratorium gleichviele Male (K) beobachtet wird und jedes Laboratorium die gleiche Probenanzahl untersucht (J). Analog zum Beispiel mit dem Spannungsnorm besteht der Zweck der Analyse auch im RM-Fall darin, das mögliche Vorhandensein eines Einflusses zwischen den einzelnen Proben und eines Einflusses zwischen den einzelnen Laboratorien zu untersuchen sowie die Unsicherheit zu ermitteln, die dem besten Schätzwert des Wertes der zu bescheinigenden Eigenschaft zuzuordnen ist. Im Sinne des vorhergehenden Absatzes wird dieser Schätzwert als Mittel aus I Labormittelwerten aufgefaßt, welcher zugleich der Mittelwert aus den IJK Beobachtungswerten ist.

H.5.3.3 Wie wichtig eine Veränderung der ein Meßergebnis beeinflussenden Eingangsgrößen ist, so daß seine Unsicherheit auf statistisch berechneten Beobachtungsdaten beruht, wurde in 3.4.2 hervorgehoben. Geschachtelte Ansätze und die Analyse der so gewonnenen Daten mittels ANOVA-Verfahren können in vielen praktischen Meßsituationen mit Erfolg angewandt werden.

Wie in 3.4.1 angemerkt, ist eine Veränderung aller Eingangsgrößen allerdings aus Zeitgründen und wegen begrenzter Hilfsmittel kaum durchführbar. Im besten Fall ist es in den meisten praktischen Meßsituationen gerade möglich, einige wenige Unsicherheitskomponenten mit ANOVA-Verfahren zu berechnen. Wie in 4.3.1 hervorgehoben, müssen viele Komponenten durch ein wissenschaftlich begründetes Urteil unter Verwendung aller verfügbaren Informationen über die mögliche Streuung der jeweiligen Eingangsgrößen ermittelt werden. In vielen Fällen läßt sich eine zum Beispiel aus "Probeneinflüssen", "Laboratorium-Einflüssen", "Meßgeräte-Einflüssen" oder "Beobachter-Einflüssen" erwachsende Unsicherheitskomponente nicht durch eine statistische Analyse von Reihen von Beobachtungswerten errechnen, sondern muß anhand der verfügbaren Informationen ermittelt werden.

Nur für die Norm

H.6 Messungen auf einer Referenzskale: Härte

Die Härte ist ein Beispiel für einen physikalischen Begriff, der sich nicht ohne Bezug auf ein Meßverfahren quantitativ bestimmen läßt. Es gibt für sie keine vom Meßverfahren unabhängige Einheit. Somit verhält sich die Größe "Härte" anders als klassische Meßgrößen, da sie sich nicht in algebraische Gleichungen einsetzen und zur Definition anderer meßbarer Größen verwenden läßt (mit Ausnahme ihrer gelegentlichen Verwendung in empirischen Gleichungen, mit denen die Härte für eine Gruppe von Materialien auf eine andere Eigenschaft bezogen wird). Ihr Größenwert wird durch eine herkömmliche Messung ermittelt, nämlich der Messung der Maße des Eindrucks in einen *Prüfkörper* aus dem zu untersuchenden Material. Die Messung erfolgt auf der Grundlage einer schriftlich fixierten Norm, die eine Beschreibung des "Eindringkörpers", den Aufbau der Maschine, mit der der Eindringkörper angewendet wird, und die Bedienweise der Maschine umfaßt. Es gibt nicht nur eine schriftlich fixierte Norm und nicht nur eine Härteskala.

Die angegebene Härte ist eine (skalenabhängige) Funktion des gemessenen Maßes. Bei dem Beispiel in diesem Abschnitt ist sie eine lineare Funktion des arithmetischen Mittelwerts oder Durchschnitts aus der Tiefe von fünf Eindrücken, doch ist diese Funktion bei einigen anderen Skalen nichtlinear.

Die Ausführungsform des Normalgerätes basiert auf einer nationalen Norm (es gibt keine international gültige Normalausführung); der Vergleich eines einzelnen Gerätes mit dem *nationalen Normal* erfolgt mit einer *Härtevergleichsplatte* als *Transfornormal*.

H.6.1 Meßaufgabe

Im vorliegenden Beispiel wird die Härte eines Prüfkörpers nach der "Rockwell C"-Skale mit einem an dem nationalen Normalgerät kalibrierten Gerät ermittelt. Die Skaleneinheit der Rockwell-C-Härte beträgt 0,002 mm, wobei die Härte auf dieser Skale definiert ist als $100 \times (0,002 \text{ mm})$ minus der in mm gemessenen Durchschnittstiefe von fünf Eindrücken. Der Wert dieser Größe, dividiert durch die Rockwell-Skaleneinheit von 0,002 mm, heißt "HRC-Härteindex". Im vorliegenden Beispiel wird diese Größe einfach "Härte" genannt und mit dem Formelzeichen $h_{\text{Rockwell C}}$ bezeichnet; der Zahlenwert der in Rockwell-Längeneinheiten ausgedrückten Härte heißt "Härteindex" und hat das Formelzeichen $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Mathematisches Modell

An die Durchschnittstiefe der Eindrücke in den Prüfkörper mit Hilfe des zur Härtemessung verwendeten Gerätes oder *Normalgerätes* müssen Korrekturen angebracht werden, um die Durchschnittstiefe der Eindrücke zu er-

mitteln, die das nationale Normalgerät im selben Prüfkörper erzeugt hätte. Es gilt:

$$h_{\text{Rockwell C}} = f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_s) \\ = 100 (0,002 \text{ mm}) - \bar{d} \quad (\text{H.33a})$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} / (0,002 \text{ mm}) \quad (\text{H.33b})$$

wobei

$\bar{d}$ Durchschnittstiefe aus fünf Eindrücken des Normalgerätes in den Prüfkörper;

Δ_c Korrektur, gewonnen aus einem Vergleich des Normalgerätes mit dem nationalen Normalgerät mit Hilfe einer Härtevergleichsplatte, die gleich der Durchschnittstiefe aus 5m Eindrücken des nationalen Normalgerätes in den Prüfkörper minus der Durchschnittstiefe aus 5n Eindrücken des Normalgerätes in denselben Prüfkörper ist;

Δ_b als Null angenommene Härte Differenz (ausgedrückt als Differenz aus den Durchschnittstiefen der Eindrücke) zwischen den beiden Teilen der Härtevergleichsplatte, die jeweils für die Eindrücke durch die beiden Maschinen verwendet wurden und

Δ_s Abweichung mangels Wiederholbarkeit bei dem nationalen Normalgerät und der unvollständigen Definition der Größe Härte. Obwohl Δ_s als Null angenommen werden muß, hat sie eine zugehörige Standardunsicherheit $u(\Delta_s)$.

Da die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial \bar{d}$, $\partial f / \partial \Delta_c$, $\partial f / \partial \Delta_b$ und $\partial f / \partial \Delta_s$ der Funktion in Gleichung (H.33a) alle gleich -1 sind, ist die kombinierte Standardunsicherheit $u_c^2(h)$ der von dem Normalgerät gemessenen Härte des Prüfkörpers einfach gegeben durch

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) \\ + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_s) \quad (\text{H.34})$$

wobei der einfachen Darstellung halber gilt:

$$h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$$

H.6.3 Beiträge zur Varianz

H.6.3.1 Unsicherheit $u(\bar{d})$ der durchschnittlichen Eindrucktiefe $\bar{d}$ eines Prüfkörpers

Unsicherheit mehrmaliger Beobachtungen. Die genaue Wiederholung einer Beobachtung ist nicht möglich, weil an der Stelle eines früheren Eindrucks kein neuer Eindruck erfolgen kann. Da jeder Eindruck an einer anderen Stelle erfolgen muß, schließt eine Streuung der Ergebnisse den Einfluß der Härteunterschiede zwischen verschiedenen Stellen ein. Somit gilt für die Standardunsicherheit $u(\bar{d})$ der Durchschnittstiefe aus fünf Eindrücken des Normalgerätes in einen Prüfkörper: $s_p(d_k)/\sqrt{5}$ wobei $s_p(d_k)$ die zusammengefaßte empirische Standardabweichung der durch "wiederholte" Messungen ermittelten Eindrucktiefen in einen Block von bekanntermaßen einheitlicher Härte ist (siehe 4.2.4).

Unsicherheit der Anzeige. Wenngleich die Korrektur für $\bar{d}$ aufgrund der Anzeige des Normalgerätes gleich Null ist, gibt es eine Unsicherheit von $\bar{d}$ wegen der Tiefenanzeige aufgrund der Auflösung δ der Anzeige, die durch $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (siehe F.2.2.1) gegeben ist. Für die geschätzte Varianz zu $\bar{d}$ gilt somit

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \quad (\text{H.35})$$

H.6.3.2 Unsicherheit $u(\Delta_c)$ der Korrektur für die Differenz aus den beiden Maschinen

Wie in H.6.2 angegeben, ist Δ_c die Korrektur für die Differenz zwischen dem nationalen Normalgerät und dem Normalgerät. Diese Korrektur läßt sich als $\Delta_c = z'_S - z'$ ausdrücken, wobei $z'_S = (\sum_{i=1}^m \bar{z}_{S,i})/m$ die Durchschnittstiefe aus $5m$ Eindrücken des nationalen Normalgerätes in die Härtevergleichsplatte und $z' = (\sum_{i=1}^n \bar{z}_i)/n$ die Durchschnittstiefe aus $5n$ Eindrücken des Normalgerätes in denselben Block ist. Wenn man für den Vergleich also annimmt, daß die Unsicherheit aufgrund der Auflösung der Anzeige jeder Maschine vernachlässigbar ist, gilt für die geschätzte Varianz von Δ_c

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} \quad (\text{H.36})$$

wobei

$s_{av}^2(\bar{z}_S) = [(\sum_{i=1}^m \bar{z}_{S,i})/m]$ der Durchschnitt aus den empirischen Varianzen der Mittelwerte jeder aus der Reihe von m Eindrücken $z_{S,ik}$ des Normalgerätes ist;

$s_{av}^2(\bar{z}) = [(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i)/n]$ der Durchschnitt aus den empirischen Varianzen der Mittelwerte jeder aus der Reihe von n Eindrücken z_{ik} des Normalgerätes ist;

ANMERKUNG: Die Varianzen $s_{av}^2(\bar{z}_S)$ und $s_{av}^2(\bar{z})$ sind zusammengefaßte Schätzwerte der Varianz; siehe die Diskussion zu Gleichung (H.26b) in H.5.2.2.

H.6.3.3 Unsicherheit $u(\Delta_b)$ der Korrektur aufgrund von Härteunterschieden in der Härtevergleichsplatte

Die internationale Empfehlung R 12 der OIML mit dem Titel *Prüfung und Kalibrierung von genormten Rockwell-C-Härtevergleichsplatten* fordert, daß die Differenz zwischen maximaler und minimaler Eindrucktiefe bei fünf Messungen an der Härtevergleichsplatte nicht größer als ein Bruchteil x der Durchschnittstiefe der Eindrücke sein darf, wobei x eine Funktion der Härte ist. Die maximale Differenz zwischen den Eindrucktiefen auf dem gesamten Prüfkörper sei daher mit xz' bezeichnet, wobei z' in H.6.3.2 mit $n = 5$ definiert ist. Die Maximaldifferenz sei außerdem durch die Dreieckverteilung der Wahrscheinlichkeit um den Mittelwert $xz'/2$ beschrieben (unter der sinnvollen Annahme, daß die Werte im zentralen Bereich wahrscheinlicher sind als die Extremwerte - siehe hierzu 4.3.9). Dann ist mit $d = xz'/2$ in Gleichung (9b) in 4.3.9 die geschätzte Varianz der Korrektur zur Durchschnittstiefe des Eindrucks aufgrund von Härteunterschieden bei Normal- und nationalem Normalgerät gegeben durch

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \quad (\text{H.37})$$

Wie in 6.2 angedeutet, wird angenommen, daß der beste Schätzwert für die Korrektur Δ_b selbst gleich Null ist.

H.6.3.4 Unsicherheit $u(\Delta_S)$ des nationalen Normalgerätes und der Härtedefinition

Die Unsicherheit des nationalen Normalgerätes wird gemeinsam mit der Unsicherheit aufgrund einer unvollständigen Definition der Größe Härte als geschätzte Standardabweichung $u(\Delta_S)$ angegeben (eine Größe der Dimension Länge).

H.6.4 Kombinierte Standardunsicherheit $u_c(h)$

Die Erfassung der einzelnen in H.6.3.1 bis H.6.3.4 diskutierten Glieder und ihre Einsetzung in Gleichung (H.34) ergibt für die geschätzte Varianz zur Härtemessung (wobei die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(h)$ ist):

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \quad (\text{H.38})$$

Tabelle H.10: Zusammenfassung der Daten zur Ermittlung der Härte eines Prüfkörpers nach der Rockwell-C-Skala

Quelle der Unsicherheit	Wert
Durchschnittstiefe $\bar{d}$ aus 5 Eindrücken des Normalgerätes in den Prüfkörper: 0,072 mm	36,0 Rockwell-Skaleneinheit
Angezeigter Härteindex des Prüfkörpers aus den 5 Eindrücken: $H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} / (0,002 \text{ mm}) =$ $[100(0,002 \text{ mm}) - 0,072 \text{ mm}] / (0,002 \text{ mm})$ (siehe H.6.1)	64,0 HRC
Zusammengefaßte empirische Standardabweichung $s_p(d_k)$ der von dem Normalgerät in einer Platte mit einheitlicher Härte erzeugten Eindrücktiefen	0,45 Rockwell-Skaleneinheit
Auflösung δ der Anzeige des Normalgerätes	0,1 Rockwell-Skaleneinheit
$s_{av}(\bar{z}_s)$, Quadratwurzel des Durchschnitts aus den empirischen Varianzen der Mittelwerte aus einer Reihe von m Eindrücken des Normalgerätes in die Härtevergleichsplatte	0,10 Rockwell-Skaleneinheit, $m = 6$
$s_{av}(\bar{z})$, Quadratwurzel des Durchschnitts aus den empirischen Varianzen der Mittel aus einer Reihe von n Eindrücken des Normalgerätes in die Härtevergleichsplatte	0,11 Rockwell-Skaleneinheit, $n = 6$
Zulässige Änderung x der Eindringtiefe in die Härtevergleichsplatte	$1,5 \times 10^{-2}$
Standardunsicherheit $u(\Delta_S)$ des nationalen Normalgerätes und der Härtedefinition	0,5 Rockwell-Skaleneinheit

H.6.5 Numerisches Beispiel

Die Daten für das folgende Beispiel sind in Tabelle H.10 zusammengefaßt.

Die verwendete Skala ist die mit HRC bezeichnete Rockwell-C-Skala. Eine Rockwell-Skaleneinheit beträgt 0,002 mm, so daß die folgenden Angaben von (zum Beispiel) "36,0 Rockwell-Skaleneinheit" als $36,0 \times (0,002 \text{ mm}) = 0,072 \text{ mm}$ zu verstehen sind, wobei es sich nur um eine bequeme Weise des Ausdrucks von Daten und Ergebnissen handelt.

Werden die Werte für die in Tabelle (H.10) angegebenen relevanten Größen in Gleichung (H.38) eingesetzt, so erhält man die folgenden beiden Ausdrücke:

$$u_c^2(h) = \left(\frac{0,45^2}{5} + \frac{0,1^2}{12} + \frac{0,10^2}{6} + \frac{0,11^2}{6} + \frac{(0,015 \times 36,0)^2}{24} + 0,5^2 \right) (\text{Rockwell-Skaleneinh.})^2$$

$$= 0,307 (\text{Rockwell-Skaleneinh.})^2$$

$$u_c(h) = 0,55 \text{ Rockwell-Skaleneinheit} = 0,0011 \text{ mm}$$

wobei es zweckmäßig ist, zur Berechnung der Unsicherheit $z' = \bar{d} = 36,0$ Rockwell-Skaleneinheit anzunehmen.

Für die Härte des Prüfkörpers gilt bei der Annahme, daß $\Delta_c = 0$:

$$h_{\text{Rockwell C}} = 64,0 \text{ Rockwell-Skaleneinheit oder } 0,1280 \text{ mm mit einer kombinierten Standardunsicherheit } u_c = 0,55 \text{ Rockwell-Skaleneinheit oder } 0,0011 \text{ mm.}$$

Der Härteindex des Prüfkörpers beträgt $h_{\text{Rockwell C}} / (0,002 \text{ mm}) = (0,1280 \text{ mm}) / (0,002 \text{ mm})$ oder

$$H_{\text{Rockwell C}} = 64,0 \text{ HRC mit einer kombinierten Standardunsicherheit } u_c = 0,55 \text{ HRC.}$$

Zusätzlich zur Unsicherheitskomponente aufgrund des nationalen Normalgerätes und der Härtedefinition $u(\Delta_S) = 0,5$ Rockwell-Skaleneinheit gehören die Wiederholpräzision des Gerätes $s_p(d_k) / \sqrt{5} = 0,20$ Rockwell-Skaleneinheit und die Härteunterschied der Härtevergleichsplatte mit $(xz')^2 / 24 = 0,11$ Rockwell-Skaleneinheit zu den signifikanten Unsicherheitskomponenten. Die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade von u_c läßt sich mit der Welch-Satterthwaite-Formel auf die in H.1.6 beschriebene Weise berechnen.

Anhang J

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

a	Halbe Weite einer Rechteckverteilung möglicher Werte der Eingangsgröße X_i : $a = (a_+ - a_-) / 2$	k	Erweiterungsfaktor zur Berechnung der erweiterten Unsicherheit $U = k u_c(y)$ des Ausgangsschätzwerts y aus dessen kombinierter Standardunsicherheit $u_c(y)$, wobei U einen Bereich $Y = y \pm U$ angibt, der einen hohen Grad des Vertrauens aufweist
a_+	Obere Schranke (obere Grenze) der Eingangsgröße X_i		
a_-	Untere Schranke (untere Grenze) der Eingangsgröße X_i	k_p	Erweiterungsfaktor zur Berechnung der erweiterten Unsicherheit $U_p = k u_c(y)$ des Ausgangsschätzwerts y aus dessen kombinierter Standardunsicherheit $u_c(y)$, wobei U_p einen Bereich $Y = y \pm U_p$ angibt, der einen definierten hohen Grad p des Vertrauens aufweist
b_+	Obere Schranke (obere Grenze) für die Abweichung der Eingangsgröße X_i vom Schätzwert x_i : $b_+ = a_+ - x_i$		
b_-	Untere Schranke (untere Grenze) für die Abweichung der Eingangsgröße X_i vom Schätzwert x_i : $b_- = x_i - a_-$	n	Anzahl der Beobachtungen
c_i	Partielle Ableitung oder Empfindlichkeitskoeffizient: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	N	Anzahl der Eingangsgrößen X_i , von denen die Meßgröße Y abhängt
		p	Wahrscheinlichkeit; Grad des Vertrauens: $0 \leq p \leq 1$
f	Funktionsbeziehung zwischen der Meßgröße Y und den Eingangsgrößen X_i , von denen Y abhängt, sowie zwischen dem Ausgangsschätzwert y und den Eingangsschätzwerten x_i , von denen y abhängt	q	Durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschriebene, zufällig schwankende Größe
		$\bar{q}$	Arithmetischer Mittelwert oder Durchschnitt aus n voneinander unabhängigen Beobachtungen q_k der Zufallsvariablen q ; Schätzwert des Erwartungswerts oder Mittelwerts μ_q der Wahrscheinlichkeitsverteilung von q
$\partial f / \partial x_i$	Partielle Ableitung mit Bezug auf die Eingangsgröße X_i der Funktionsbeziehung f zwischen der Meßgröße Y und den Eingangsgrößen X_i , von denen Y abhängt, berechnet mit den Eingangsschätzwerten x_i für X_i : $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial x_i _{x_1, x_2, \dots, x_N}$	$r(x_i, x_j)$	Geschätzter Korrelationskoeffizient zu den Eingangsschätzwerten x_i und x_j , die Schätzwerte der Eingangsgrößen X_i und X_j sind: $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) / (u(x_i)u(x_j))$

$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	Geschätzter Korrelationskoeffizient der Eingangsmittelwerte $\bar{X}_i$ und $\bar{X}_j$, ermittelt aus n voneinander unabhängigen Paaren von gleichzeitigen Beobachtungen $X_{i,k}$ und $X_{j,k}$ von X_i und X_j ; $r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) / (s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j))$		
$r(y_i, y_j)$	Geschätzter Korrelationskoeffizient zu den Ausgangsschätzwerten y_i und y_j , wenn in ein und derselben Messung zwei oder mehrere Meßgrößen oder Ausgangsschätzwerte ermittelt werden		
s_p^2	Kombinierter oder zusammengefaßter Schätzwert der Varianz	$s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	Schätzwert der Kovarianz zu den Eingangsmittelwerten $\bar{X}_i$ und $\bar{X}_j$, die aus n voneinander unabhängigen Paaren von gleichzeitigen Beobachtungen $X_{i,k}$ und $X_{j,k}$ von X_i und X_j ermittelt wurden; geschätzte Kovarianz, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält
s_p	Zusammengefaßte empirische Standardabweichung, ist gleich der positiven Quadratwurzel aus s_p^2		
$s^2(\bar{q})$	Empirische Varianz des Mittelwertes $\bar{q}$; Schätzwert der Varianz σ^2/n von $\bar{q}$; $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k) / n$; empirische Varianz, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält	$t_p(v)$	t -Faktor aus einer t -Verteilung für v Freiheitsgrade entsprechend einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p
$s(\bar{q})$	Empirische Standardabweichung des Mittelwertes $\bar{q}$, ist gleich der positiven Quadratwurzel aus $s^2(\bar{q})$; $s(\bar{q})$ ist ein nicht erwartungstreuer Schätzer von $\sigma(\bar{q})$ (siehe C.2.2.1, Anmerkung); Standardunsicherheit, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält	$t_p(v_{\text{eff}})$	t -Faktor aus einer t -Verteilung für v_{eff} Freiheitsgrade entsprechend einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p , mit dem die erweiterte Unsicherheit U_p berechnet wird
$s^2(q_k)$	Aus n voneinander unabhängigen Beobachtungen q_k von q ermittelte empirische Varianz; Schätzwert der Varianz σ^2 der Wahrscheinlichkeitsverteilung von q	$u^2(x_i)$	Geschätzte Varianz, zum Eingangsschätzwert x_i , mit dem die Eingangsgröße X_i geschätzt wird ANMERKUNG: Wenn x_i aus dem arithmetischen Mittelwert oder Durchschnitt von n Beobachtungen ermittelt wird, dann ist $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ eine geschätzte Varianz, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält.
$s(q_k)$	Empirische Standardabweichung gleich der positiven Quadratwurzel aus $s^2(q_k)$; $s(q_k)$ ist ein nicht erwartungstreuer Schätzer der Standardabweichung σ der Wahrscheinlichkeitsverteilung von q	$u(x_i)$	Standardunsicherheit des Eingangsschätzwerts x_i , mit dem die Eingangsgröße X_i geschätzt wird; sie ist gleich der positiven Quadratwurzel aus $u^2(x_i)$ ANMERKUNG: Wenn x_i aus dem arithmetischen Mittelwert oder Durchschnitt von n Beobachtungen ermittelt wird, dann ist $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ eine Standardunsicherheit, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält.
$s^2(\bar{X}_i)$	Aus n voneinander unabhängigen Beobachtungen $X_{i,k}$ von X_i ermittelte empirische Varianz zum Eingangsmittelwert $\bar{X}_i$; empirische Varianz, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält		
$s(\bar{X}_i)$	Empirische Standardabweichung zum Eingangsmittelwert $\bar{X}_i$, ist gleich der positiven Quadratwurzel aus $s^2(\bar{X}_i)$; Standardunsi-	$u(x_i, x_j)$	Geschätzte Kovarianz, zu den beiden Eingangsschätzwerten x_i und x_j , mit denen die Eingangsgrößen X_i und X_j geschätzt werden

ANMERKUNG: Wenn x_i und x_j aus n voneinander unabhängigen Paaren von gleichzeitigen Beobachtungen ermittelt werden, dann ist $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ eine geschätzte Kovarianz, die man aus einer Berechnung nach Methode A erhält.

$u_c^2(y)$ Kombinierte Varianz zum Ausgangsschätzwert y

$u_c(y)$ Kombinierte Standardunsicherheit des Ausgangsschätzwerts y , die gleich der positiven Quadratwurzel aus $u_c^2(y)$ ist

$u_{cA}(y)$ Kombinierte Standardunsicherheit des Ausgangsschätzwerts y , die aus ausschließlich nach Methode A berechneten Standardunsicherheiten und empirischen Kovarianzen ermittelt wurde

$u_{cB}(y)$ Kombinierte Standardunsicherheit des Ausgangsschätzwerts y , die aus ausschließlich nach Methode B berechneten Standardunsicherheiten und empirischen Kovarianzen ermittelt wurde

$u_c(y_i)$ Kombinierte Standardunsicherheit des Ausgangsschätzwerts y_i , wenn in ein und derselben Messung zwei oder mehrere Meßgrößen oder Ausgangsschätzwerte ermittelt werden

$u_i^2(y)$ Komponente der kombinierten Varianz $u_c^2(y)$ zum Ausgangsschätzwert y , die durch die geschätzte Varianz $u^2(x_i)$ zum Eingangsschätzwert x_i zustandekommt: $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$

$u_i(y)$ Komponente der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ zum Ausgangsschätzwert y , die durch die Standardunsicherheit zum Eingangsschätzwert x_i zustandekommt: $u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$

$u(y_i, y_j)$ Geschätzte Kovarianz zu den beiden Ausgangsschätzwerten y_i und y_j , die durch ein und dieselbe Messung ermittelt wurden

$u(x_i)/|x_i|$ Relative Standardunsicherheit des Eingangsschätzwerts x_i

$u(y_i)/|y_i|$ Relative Standardunsicherheit des Ausgangsschätzwerts y

$[u(x_i)/x_i]^2$ Geschätzte relative Varianz zum Eingangsschätzwert x_i

$[u_c(y)/y]^2$ Relative kombinierte Varianz zum Ausgangsschätzwert y

$\frac{u(x_i, x_j)}{|x_i, x_j|}$ Geschätzte relative Kovarianz zu den Eingangsschätzwerten x_i und x_j

U Erweiterte Unsicherheit des Ausgangsschätzwerts y , die einen Bereich $Y = y \pm U$ angibt, der einen hohen Grad des Vertrauens aufweist und gleich dem Produkt aus dem Erweiterungsfaktor k und der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ von y ist: $U = k u_c(y)$

U_p Erweiterte Unsicherheit des Ausgangsschätzwerts y , die einen Bereich $Y = y \pm U_p$ angibt, der einen definierten hohen Grad des Vertrauens p aufweist und gleich dem Produkt aus dem Erweiterungsfaktor k_p und der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ von y ist: $U_p = k_p u_c(y)$

Schätzwert der Eingangsgröße X_i

ANMERKUNG: Wenn x_i aus dem arithmetischen Mittelwert oder Durchschnitt aus n voneinander unabhängigen Messungen ermittelt wurde, gilt $x_i = \bar{X}_i$.

X_i i -te Eingangsgröße, von der die Meßgröße Y abhängt

ANMERKUNG: X_i kann sowohl die physikalische Größe als auch eine Zufallsgröße sein (siehe 4.1.1, Anmerkung 1).

$\bar{X}_i$ Schätzwert des Werts der Eingangsgröße X_i , der gleich dem arithmetischen Mittelwert oder Durchschnitt aus n voneinander unabhängigen Beobachtungen $X_{i,k}$ von X_i ist

$X_{i,k}$ k -te unabhängige Beobachtung von X_i

y Schätzwert der Meßgröße Y ; Meßergebnis; Ausgangsschätzwert

y_i Schätzwert der Meßgröße Y ; wenn in ein und derselben Messung zwei oder mehrere Meßgrößen oder Ausgangsschätzwerte ermittelt werden

Y	Meßgröße	σ^2	Varianz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, zum Beispiel für eine Zufallsgröße q , die durch $s^2(q_k)$ geschätzt wird
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	Geschätzte relative Unsicherheit der Standardunsicherheit $u(x_i)$ des Eingangsschätzwerts x_i	σ	Standardabweichung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die gleich der positiven Quadratwurzel aus σ^2 ist; $s(q_k)$ ist ein nicht erwartungstreuer Schätzer für σ
μ_q	Erwartungswert oder Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße q	$\sigma^2(\bar{q})$	Varianz von $\bar{q}$ gleich σ^2 / n , geschätzt durch $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k) / n$
ν	Anzahl der Freiheitsgrade (allgemein)	$\sigma(\bar{q})$	Standardabweichung von $\bar{q}$, die gleich der positiven Quadratwurzel aus $\sigma^2(\bar{q})$ ist; $s(\bar{q})$ ist ein nicht erwartungstreuer Schätzer für $\sigma(\bar{q})$
ν_i	Anzahl der Freiheitsgrade oder effektiven Freiheitsgrade der Standardunsicherheit $u(x_i)$ des Eingangsschätzwerts x_i	$\sigma^2[s(\bar{q})]$	Varianz der empirischen Standardabweichung $s(\bar{q})$ von $\bar{q}$
ν_{eff}	Anzahl der effektiven Freiheitsgrade von $u_c(y)$ zur Gewinnung von $t_p(\nu_{\text{eff}})$ für die Berechnung der erweiterten Unsicherheit U_p	$\sigma[s(\bar{q})]$	Standardabweichung der empirischen Standardabweichung $s(\bar{q})$ von $\bar{q}$, die gleich der positiven Quadratwurzel aus $\sigma^2[s(\bar{q})]$ ist
ν_{effA}	Anzahl der effektiven Freiheitsgrade einer kombinierten Standardunsicherheit, die aus ausschließlich nach Methode A berechneten Standardunsicherheiten ermittelt wurde		
ν_{effB}	Anzahl der effektiven Freiheitsgrade einer kombinierten Standardunsicherheit, die aus ausschließlich nach Methode B berechneten Standardunsicherheiten ermittelt wurde		

Nur für die Normung

Anhang K

Literaturverzeichnis

- [1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* 48, C1-C30 (in französischer Sprache); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. Intl. Poids et Mesures (Sèvres, Frankreich) (in englischer Sprache)
- [2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* 49, A1-A12 (in französischer Sprache); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* 17, 73-74 (in englischer Sprache).
- [5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods - Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, International Organisation for Standardization (Genf, Schweiz).

ANMERKUNG: Diese Norm wird zur Zeit überarbeitet. Die überarbeitete Fassung trägt den Titel: "Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results" und besteht aus sechs Teilen.

ANMERKUNG: Die in der Einleitung zum vorliegenden Leitfaden (siehe 0.7) angeführte deutsche Übersetzung der Empfehlung INC-1 (1980) gibt den Text der Endfassung wieder und basiert auf einer englischen Fassung aus einem internen BIPM-Bericht. Sie stimmt mit dem verbindlichen französischen Originaltext überein, wie er in *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* 49 veröffentlicht und in A.1, Anhang A, im vorliegenden Leitfaden nachgedruckt ist. Die in *Metrologia* 17 enthaltene englische Übersetzung der Empfehlung INC-1 (1980) basiert auf einem Entwurf und weicht daher leicht von der Fassung des internen BIPM-Berichts und somit von der in 0.7 ab.

- [3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* 49, 8-9, 26 (in französischer Sprache); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* 18, 43-44 (in englischer Sprache).
- [4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* 54, 14,35 (in französischer Sprache); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* 24, 49-50 (in englischer Sprache).

- [6] *International vocabulary of basic and general terms in metrology*, second edition, 1993, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).

Der Kurztitel für dieses Wörterbuch lautet VIM.

ANMERKUNGEN

- 1 Die in Anhang B angeführten Definitionen basieren auf dem überarbeiteten englischen Text des VIM in seiner Endfassung vor der Veröffentlichung.
- 2 Die zweite Auflage des VIM wurde von der Internationalen Organisation für Normung (ISO) im Namen der folgenden sieben Organisationen herausgegeben, die sich an der Arbeit der Technischen Beratergruppe 4 (TAG 4) beteiligen und an der Entstehung des VIM mitgewirkt haben: Internationales Büro für Maß und Gewicht (BIPM), Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC), Internationale Föderation für klinische Chemie (IFCC), ISO, Internationale Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC), Internationale Union für reine und angewandte Physik (IUPAP) und Internationale Organisation für gesetzliches Meßwesen (OIML).
- 3 Die erste Auflage des VIM wurde 1984 von der ISO im Namen von BIPM, IEC, ISO und OIML veröffentlicht.

- [7] ISO 3534:1993, *Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms*, International Organisation for Standardization (Genf, Schweiz).
- [8] FULLER, W. A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N.Y.).
- [9] ALLAN, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654.
- [10] DIETRICH, C. F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, second edition, Adam-Hilger (Bristol).
- [11] MÜLLER, J. W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251.
- [12] MÜLLER, J. W. (1984), in *Precision measurement and fundamental constants II*, Taylor, B. N. und Phillips, W. D. (Hrsg.), Natl. Bur. Stand (U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.), 375-381.
- [13] JEFFREYS, H. (1983), *Theory of probability*, third edition, Oxford University Press (Oxford).
- [14] PRESS, S. J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.).
- [15] BOX, G. E. P., HUNTER, W. G., and HUNTER, J. S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.).
- [16] WELCH, B. L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ebd.* **34**, 28-35.
- [17] FAIRFIELD-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australia)* **9**(3), 211.
- [18] SATTERTHWAIT, F. E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114.
- [19] ISO Guide 35:1989, *Certification of reference materials - General and statistical principles*, second edition, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).
- [20] BARKER, T. B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N.Y.).

Nur für die Normung

Stichwortverzeichnis

Stichwortverzeichnis

A-priori-Verteilung 4.1.6
Abweichungskurve F.2.4.2
Allen-Varianz 4.2.7
ANOVA-Verfahren H.5
Anteilsbereich, statistischer C.2.30
Arbeitsgruppe zur Angabe
von Meßunsicherheiten Vorwort
Arbeitsgruppe 3 Vorwort
arithmetischer Mittelwert 4.1.4, 4.2.1, C.2.19
asymmetrische Verteilung 4.3.8, F.2.4.4, G.5.3
Aufgabenstellung für
diese Arbeitsgruppe Vorwort
Ausgangsgröße 4.1.2
Ausgangsschätzwert 4.1.4
ausgewogen geschachtelter Ansatz H.5.3.1

Bearbeitungsfehler 3.4.7
Bedarf der Ermittlungsmethode B F.2.1
Beispiele H
Beobachtungen, mehrmalige 3.1.5, ..
berichtigtes Meßergebnis B.2.13
bestmögliche Messung D.3.4
Bias 3.2.3
BIPM Vorwort, 0.5, A.1, A.2
Bureau International des
Poids et Mesures Vorwort

CIPM Vorwort, 0.5, A.1, A.2, A.3
Comité International des
Poids et Mesures Vorwort

Dreieckverteilung 4.3.9
Durchschnitt 4.1.4, 4.2.1, C.2.19

effektive Freiheitsgrade 6.3.3
Einflußgröße B.2.10
Einflußgrößen 3.1.5
Eingangsgröße 4.1.2
Eingangsschätzwert 4.1.4
Eingangswert, fremder F.2.3.1
Einheitensystem, Internationales 0.3
einseitiger Vertrauensbereich C.2.28
Empfehlung 1 (1980) 0.5, A.1
Empfehlung 1 (CI-1981) 0.5, A.2
Empfehlung 1 (CI-1986) 0.5, A.3
Empfindlichkeitskoeffizient 5.1.3, 5.1.4
empirische Standardabweichung 4.2.2, B.2.17

empirische Standardabweichung
des Mittelwerts 4.2.3, B.2.17
empirische Standardabweichung,
zusammengefaßte 4.2.4
empirische Varianz des Mittelwerts 4.2.3
Ergebnis, Meß- B.2.11
Ermittlung der Meßabweichung 3.4.5
Ermittlungsmethode A 2.3.2, 4.2
Ermittlungsmethode A für die Kovarianz 5.2.3
Ermittlungsmethode B 2.3.3, 4.3
Ermittlungsmethode B, Bedarf der F.2.1
Erwartungswert 3.2.2, C.2.9, C.3.1
erweiterte Meßunsicherheit 2.3.5
erweiterte Unsicherheit 6.2.1, 7.2.3
erweiterte Vergleichspräzision B.2.16
Erweiterungsfaktor 2.3.6

F-Test H.5.2.2, H.5.2.4
F-Verteilung H.5.2.3
Faltung 4.3.9
Fehler, Bearbeitungs- 3.4.7
Fehlerfortpflanzungsgesetz 5.2.2
Fehlerrechnung 0.2
Fortpflanzung von Standardabweichungen E.3
Fortpflanzung von Vertrauensbereichen E.3.3
Freiheitsgrade 4.2.6, C.2.31, G
Freiheitsgrade, effektive 6.3.3
fremder Eingangswert F.2.3.1

Genauigkeit, Meß- 3.1.3, 3.4.1, B.2.14
gesetzliches Meßwesen 3.4.5
gesetzliches Meßwesen, Internationale
Organisation für Vorwort
Glieder höherer Ordnung 5.1.2
Grad des Vertrauens 6.2.2, G
graphische Darstellung D.6
graphische Darstellung der
Berechnung der Standardunsicherheit 4.4
Grenze für maximale Abweichung E.4.1
Grenzwertsatz, zentraler G.1.6, G.2.1, G.2.2,
G.2.3
Größe, Einfluß- B.2.10
Größe, Meß- B.2.9, D.1.1
Größe, meßbare B.2.1
Größe, realisierte D.2
Größenwert B.2.2
Grundgesamtheit C.2.16

Stichwortverzeichnis

- Häufigkeit C.2.17
Häufigkeit, relative E.3.5
Häufigkeitsverteilung 3.3.5, C.2.18
Histogramm 4.4.3
höchstzulässige Abweichungen F.2.4.2
- IEC Vorwort, A.3
IFCC Vorwort
International vocabulary of basic and
general terms in metrology 2.1
Internationale Elektrotechnische
Kommission Vorwort
Internationale Föderation für
klinische Chemie Vorwort
Internationale Organisation für
gesetzliches Meßwesen Vorwort
Internationale Organisation für
Normung Vorwort, A.3
Internationale Union für reine und
angewandte Chemie Vorwort
Internationale Union für reine und
angewandte Physik Vorwort
Internationales Büro für
Maß und Gewicht Vorwort
Internationales Einheitensystem 0.3
Internationales Komitee für
Maß und Gewicht Vorwort, A.1, A.2, A.3
Internationales Wörterbuch der Metrologie 2.1
ISO Vorwort, A.3
ISO/TAG 4/WG 3 Vorwort
IUPAC Vorwort
IUPAP Vorwort
- Kalibrierkette 4.2.8
Kalibrierkurve F.2.4.2, F.2.4.5
Kalibrierkurve, lineare H.3
Kenngröße 4.2.3, C.2.23
kombinierte Standardunsicherheit 2.3.4, 3.3.6,
4.1.5, 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.2.2, 6.1.1,
7.2.1, D.6.1, E.3.6
kombinierte Varianz 3.3.6, 5.1.3
Korrektur 3.2.3, 3.2.4, B.2.23
Korrekturfaktor 3.2.3, B.2.24
Korrelation 5.2.1, 5.2.2, C.2.8
Korrelationskoeffizient 5.2.2, C.3.6
Korrelationskoeffizienten, Matrix der 7.2.5,
C.3.6
- korreliert 5.1
Kovarianz 3.3.6, C.3.4
Kovarianzmatrix 3.1.7, C.3.5
- Laplace-Gauß-Verteilung C.2.14
lineare Kalibrierkurve H.3
- Matrix, Kovarianz- 3.1.7, C.3.5
mathematisch determinierte Verteilung F.2.2
mathematisches Modell 3.1.6, 4.1
Matrix der Korrelationskoeffizienten 7.2.5,
C.3.6
maximale Entropie, Prinzip der 4.3.8
mehrmalige Beobachtungen 3.1.5
Merkmal C.2.15
Messung 3.1.1, B.2.5
Messung, bestmögliche D.3.4
Messung, Modell der 4.1
Meßabweichung 0.2, 3.2.1, B.2.19, D.4
Meßabweichung, Ermittlung der 3.4.5
Meßabweichung, relative B.2.20
Meßabweichung, systematische B.2.22
Meßabweichung, zufällige B.2.21
meßbare Größe B.2.1
Meßergebnis 3.1.2, B.2.11
Meßergebnis, berichtigtes B.2.13
Meßergebnis, unberichtigtes B.2.12
Meßgenauigkeit 3.1.3, 3.4.1, B.2.14
Meßgröße 3.1.1, B.2.9, D.1.1
Meßhierarchie 7.1.1
Meßmethode 3.1.1, B.2.7
Meßprinzip B.2.6
Meßunsicherheit 0.1, 0.2, 2.2, 2.2.1, 2.2.3,
B.2.18
Meßunsicherheit, erweiterte 2.3.5
Meßverfahren B.2.8
Meßverfahren 3.1.1, B.2.8
Methode der kleinsten Quadrate 4.2.5
Mindestvertrauensniveau F.2.3.2
Mittelwert der Grundgesamtheit C.2.9
Mittelwert, arithmetischer 4.1.4, 4.2.1, C.2.19
Modell der Messung 4.1
- nationales metrologisches Institut Vorwort
nichtlineare Funktion 4.1.4
Normalverteilung 4.3.4, C.2.14

Stichwortverzeichnis

OIML Vorwort, A.3

Parameter C.2.7

partielle Ableitung 5.1.3

Präzision B.2.14

Prinzip der maximalen Entropie 4.3.8

realisierte Größe D.2

realistische Unsicherheitsberechnung E.2

Rechteckverteilung 4.3.7

relative erweiterte Unsicherheit 7.2.3

relative Häufigkeit E.3.5

relative kombinierte Standardunsicherheit 5.1.6

relative kombinierte Varianz 5.1.6

relative Meßabweichung B.2.20

relative Standardunsicherheit 5.1.6

relative Varianz 5.1.6

richtiger Wert B.2.4

Schätzer 4.2.7, C.2.25

Schätzung C.2.24

Schätzwert 3.1.2, C.2.26

Schranke 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9, 4.4.5

SI 0.3

sicher E.1.2

Sicherheitsgrenzwert 6.3.1

Spektrum von Messungen 1.1

spezielle Größe 3.1.1, B.2.1

Standardabweichung 3.3.5, C.2.12, C.2.21, C.3.3

Standardabweichung des Mittelwerts, empirische 4.2.3, B.2.17

Standardabweichung, empirische 4.2.2, B.2.17

Standardabweichungen, Fortpflanzung von E.3

Standardunsicherheit 2.3.1

Standardunsicherheit vom Typ A 3.3.5,

Standardunsicherheit vom Typ B 3.3.5

Standardunsicherheit, Ermittlungsmethode A 4.2

Standardunsicherheit, Ermittlungsmethode B 4.3

Standardunsicherheit, kombinierte 2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.2.2, 6.1.1,

7.2.1, D.6.1, E.3.6

statistischer Anteilbereich C.2.30

Student-Verteilung C.3.8, G.3.2, G.3.4

subjektive Wahrscheinlichkeit 3.3.5, C.2.1

systematisch 3.2.1, 3.2.3, 3.3.3, B.2.22, E.1.3

t-Faktor E.3.3

t-Verteilung C.3.8, G.3.2, G.3.4

TAG 4 Vorwort

Taylor-Reihe 5.1.2

Technische Beratergruppe Metrologie Vorwort

Trapezverteilung 4.3.9

Überdeckungswahrscheinlichkeit 6.2.2

überwachte Größe F.2.4.3

unabhängig 5.1

unabhängige Paare mehrmaliger gleichzeitiger Beobachtungen 5.2.3

unabhängige Wiederholungen F.1.1.2

Unabhängigkeit C.3.7

unberichtigtes Meßergebnis B.2.12

Unsicherheit D.5

Unsicherheit, erweiterte 7.2.3

Unsicherheit, kombinierte 2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.2.2, 6.1.1, 7.2.1, D.6.1, E.3.6

Unsicherheit, Meß- 2.2.1, 2.2.3, B.2.18

Unsicherheit, Standard- 2.3.1

Unsicherheitsberechnung, realistische E.2

Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz 3.3.6, E.3, E.3.2

Varianz 3.1.3.1.7, C.2.11, C.2.20, C.3.2

Varianz des Mittelwerts 4.2.3

Varianz, Allen- 4.2.7

Varianz, kombinierte 3.3.6, 5.1.3

Varianzanalyse 4.2.8, H.5

Vergleichpräzision, erweiterte B.2.16

Vergleichskalibrierung F.1.2.3

Verteilung, Dreieck- 4.3.9

Verteilung, F- H.5.2.3

Verteilung, Laplace-Gauß- C.2.14

Verteilung, mathematisch determinierte F.2.2

Verteilung, Normal- 4.3.4, C.2.14

Verteilung, Rechteck- 4.3.7

Verteilung, Student- C.3.8, G.3.2, G.3.4

Verteilung, t- C.3.8, G.3.2, G.3.4

Verteilung, Trapez- 4.3.9

Verteilungsfunktion C.2.4

Vertrauen, Grad des 6.2.2

Vertrauensbereich 6.2.2, C.2.27, C.2.28

Vertrauensniveau 6.2.2, C.2.29

VIM 2.1

Stichwortverzeichnis

- wahrer Wert B.2.3, D.3
Wahrscheinlichkeit C.2.1
Wahrscheinlichkeit, subjektive 3.3.5, C.2.1
Wahrscheinlichkeit, Überdeckungs- 6.2.2
Wahrscheinlichkeitsdichte 3.3.5, C.2.5
Wahrscheinlichkeitsfunktion C.2.6
Wahrscheinlichkeitsverteilung 3.3.4, C.2.3
Welch-Satterthwaite-Formel G.4.1
Wert 3.1.1, B.2.2
Wert, berichtiger D.3
Wert, richtiger B.2.4
Wert, wahrer B.2.3, D.3
Wiederholbedingungen 3.1.4, B.2.15
Wiederholpräzision B.2.15
Wiederholungen, unabhängige F.1.1.2
zentraler Grenzwertsatz G.1.6, G.2.1, G.2.2, G.2.3
zentrales Moment der Ordnung q C.2.13, C.2.22, E.3.1
zentrierte Zufallsgröße C.2.10
zufällig 3.2.1, 3.2.2, 3.3.3, B.2.21, E.1.3
zufällige Streuung 4.2.7
Zufälligkeit F.1.1
Zufallsgröße 4.2.1, G.2.2
Zufallsgröße, zentrierte C.2.10
Zusammenfassung 8
zusammengefaßte empirische Standardabweichung 4.2.4
zusammengefaßter Schätzwert der Varianz 4.2.4
zweiseitiger Vertrauensbereich C.2.27

Nur für die Normung