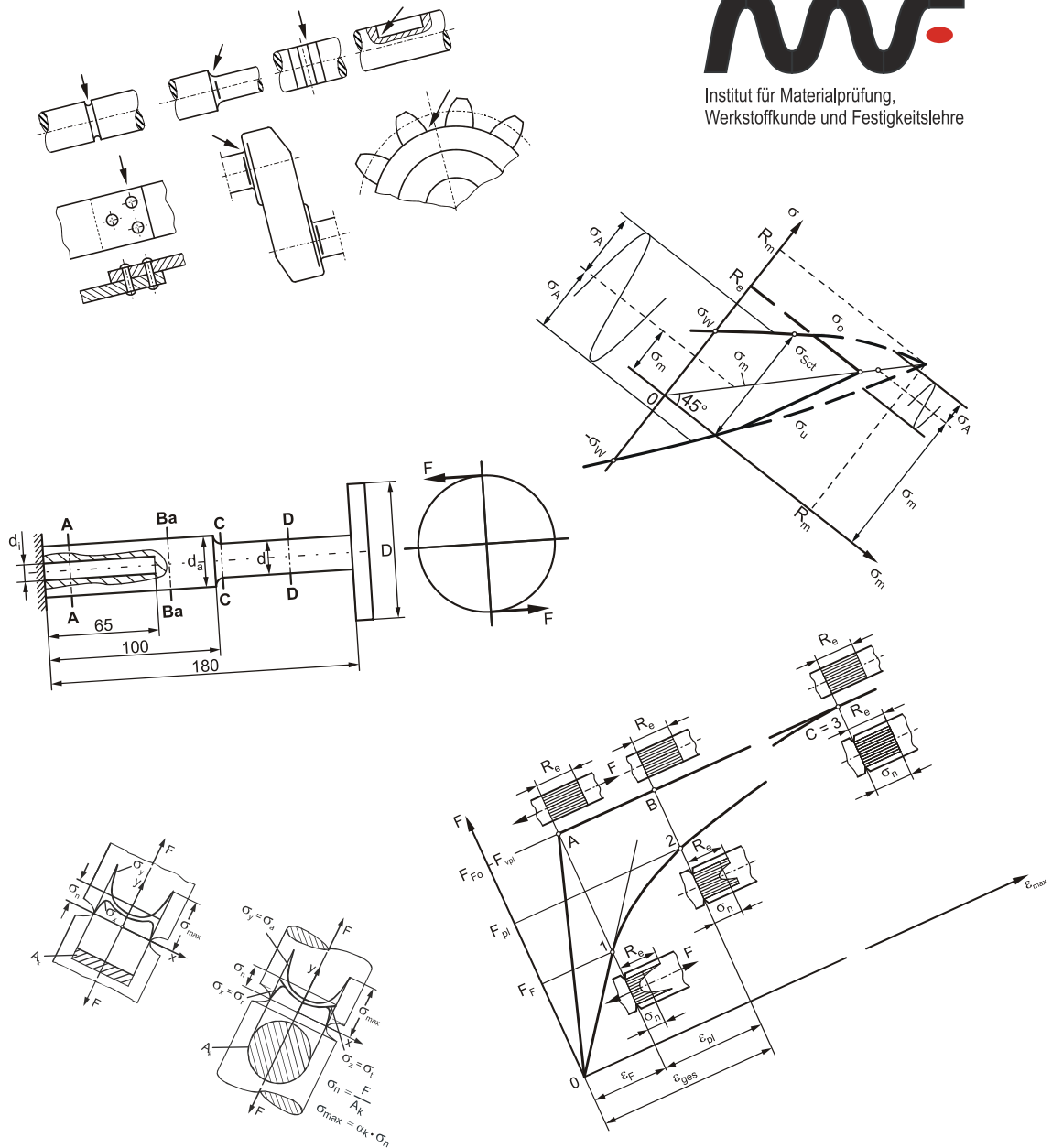




Einführung in die Festigkeitslehre

Institut für Materialprüfung, Werkstoffkunde und Festigkeitslehre
Professor Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder

Manuskript zur Vorlesung

Einführung in die Festigkeitslehre

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder



Institut für Materialprüfung,
Werkstoffkunde und Festigkeitslehre



Universität Stuttgart

Herausgeber: Institut für Materialprüfung, Werkstoffkunde und Festigkeitslehre
Universität Stuttgart

Auflage: 20 – 2016
(Alle Rechte vorbehalten)

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist als Arbeitsunterlage für die Mitarbeit in der Vorlesung gedacht. Im Verlauf der Vorlesung lassen sich durch die Studierenden die vorgesehenen Ergänzungen und Bemerkungen an geeigneter Stelle in das Manuskript einfügen. Der Vorlesungsstoff wird durch begleitende Übungsaufgaben ergänzt. Zur Erleichterung der Vorlesungsvorbereitung und einer späteren Repetition umfasst es die wesentlichen Grundlagen der Festigkeitslehre. Es kann jedoch kein Ersatz für den Besuch der Vorlesung sein.

Vorlesungsangebot des IMWF



- 1 Maschinenbau
- 2 Fahrzeug- und Motorentechnik
- 3 Verfahrenstechnik
- 4 Technologiemanagement

- 5 Technikpädagogik
- 6 Erneuerbare Energien
- 7 Technische BWL
- 8 Commas

- 9 Medizintechnik
- 10 Materialwissenschaft
- 11 Mechatronik
- 12 Energietechnik

- 13 Technische Kybernetik
- 14 Elektro- u. Informationstechnik
- 15 Werkstoff- u. Prod.technik
- 16 Nachhaltige Elektr. Energievers.

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines zur Festigkeitsberechnung	4
2	Zug und Druck	5
2.1	Gerader prismatischer Stab unter Zugbeanspruchung	5
2.2	Zugversuch und zulässige Spannung	5
2.3	Gerader prismatischer Stab unter Druckbeanspruchung	9
3	Biegung	13
3.1	Gerader prismatischer Balken unter Biegebeanspruchung	13
3.2	Zulässige Spannung	17
4	Schub	19
4.1	Prismatischer Körper unter Schubbeanspruchung	19
4.2	Zulässige Spannung	20
5	Torsion (Verdrehung)	21
5.1	Gerader kreiszylindrischer Stab unter Torsionsbeanspruchung	21
5.2	Zulässige Spannungen	23
6	Schwingende Beanspruchung	25
6.1	Spannungsermittlung	25
6.2	Werkstoffverhalten	26
6.3	Zulässige Spannungen	30
7	Allgemeiner Spannungs- und Verformungszustand	31
7.1	Spannungen an schrägen Schnitten	31
7.2	Verallgemeinertes Hookesches Gesetz	36
7.3	Festigkeitshypothesen	39
8	Kerbwirkung	43
8.1	Statische Beanspruchung: Formzahl	44
8.2	Schwingende Beanspruchung: Kerbwirkungszahl	48
9	Anhang	51
10	Übungsaufgaben	67
11	Lösungen	89
12	Kurzfragen zu den Kapiteln	93
13	Lösungen der Kurzfragen zu den Kapiteln	97

1 Allgemeines zur Festigkeitsberechnung

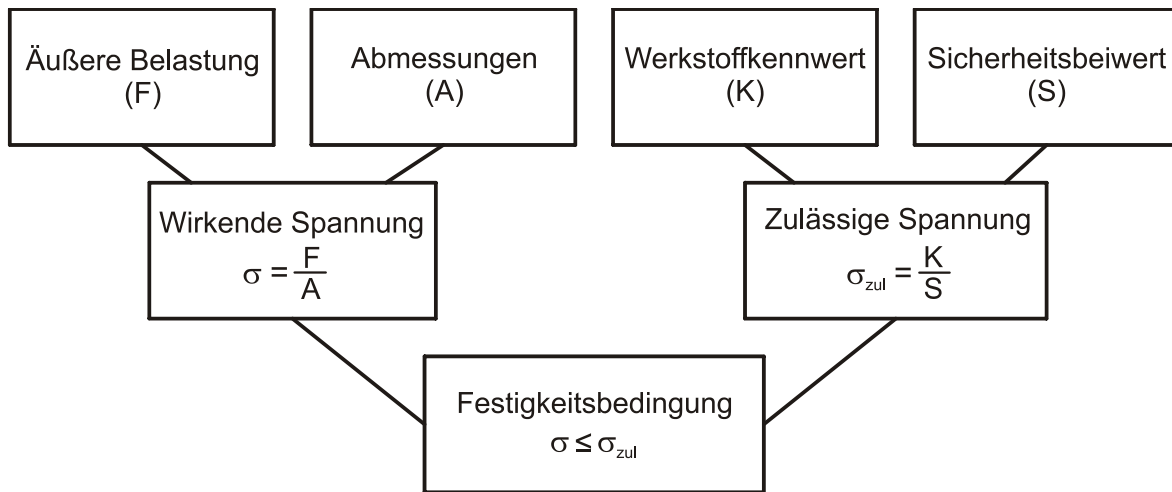


Bild 1.1: Schema einer Festigkeitsberechnung

Ziele der Festigkeitsberechnung (Grundaufgaben):

Gegeben:

Gesucht:

A, K, S	F	Zulässige äußere Belastung (Lastbegrenzung)
F, K, S	A	Erforderliche Abmessungen (Dimensionierung)
F, A, S	K	Erforderlicher Werkstoffkennwert (Werkstoffauswahl)
F, A, K	S	Vorhandene Sicherheit ($\geq 1,0$) (Sicherheitsanalyse)

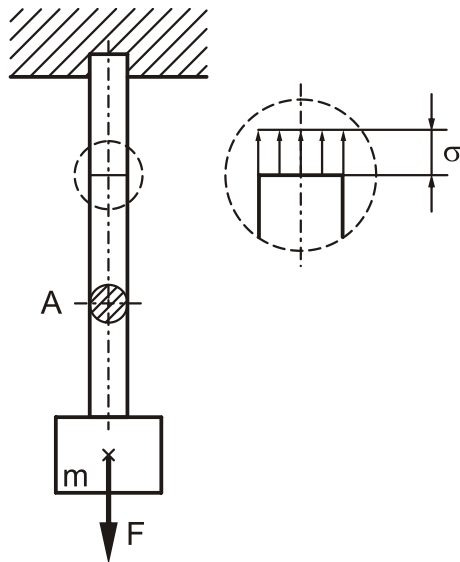
Zug			Dehnschraube
Druck			Pleuel
Biegung			Achsschenkel
Schub (Scherung)			Bolzen
Torsion			Welle

Bild 1.2: Grundbelastungsfälle

2 Zug und Druck

2.1 Gerader prismatischer Stab unter Zugbeanspruchung

Spannungsberechnung:



Äußere Belastung: F [N]

Querschnitt: A [mm²]

(Zug-) Spannung: $\sigma_z = \frac{F}{A}$ [MPa]

Spannung im Querschnitt konstant

Bild 2.1: Prismatischer Stab unter Zugbeanspruchung

2.2 Zugversuch und zulässige Spannung

Zugversuch DIN EN 10 002 (alte Bezeichnung DIN 50 145)

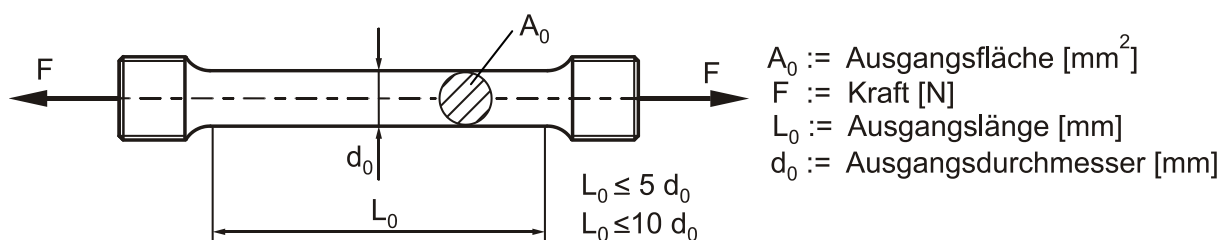


Bild 2.2: Zugprobe

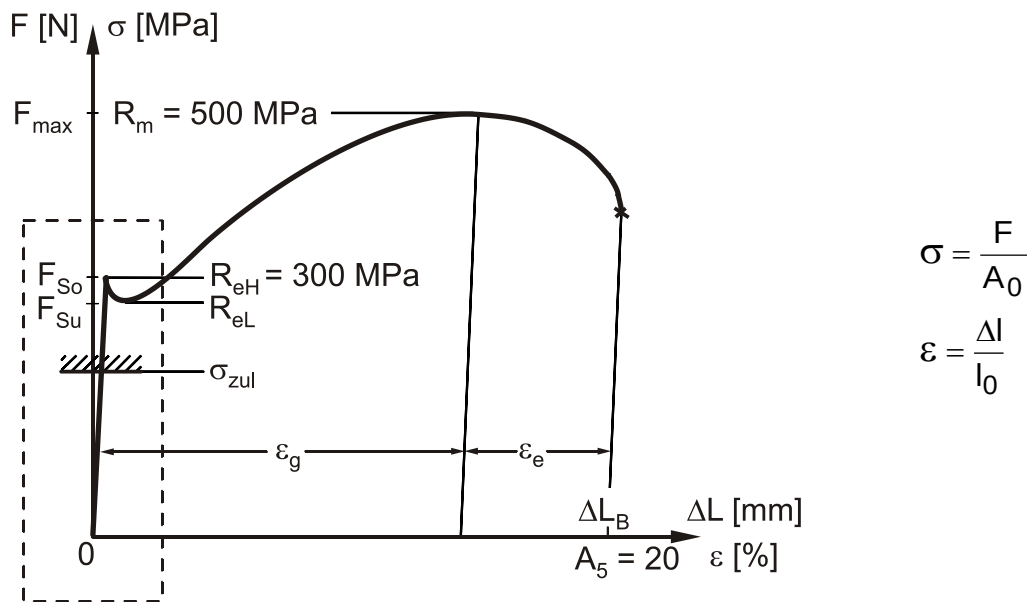


Bild 2.3: Kraft-Verlängerungs- bzw. Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Baustahl E295, früher St50)

- a) Festigkeitskennwerte:
- Zugfestigkeit: $R_m = \frac{F_{\max}}{A_0}$ [MPa]
 - Obere Streckgrenze: $R_{eH} = \frac{F_{S0}}{A_0}$ [MPa]
 - Untere Streckgrenze: $R_{eL} = \frac{F_{Su}}{A_0}$ [MPa]
 - Für Festigkeitsberechnung maßgebend: $R_{eH} = R_e$
- b) Verformungskennwerte:
- Bruchdehnung: $A = \frac{\Delta L_B}{L_0} \cdot 100$ [%]
 - Brucheinschnürung: $Z = \frac{A_0 - A_B}{A_0} \cdot 100$ [%]
 - (Querschnittsverminderung)
- c) Elastische Kennwerte:
- Elastizitätsmodul: E [MPa]
 - Querkontraktionszahl: μ [-]

Elastische Verformung:

Hookesches Gesetz: $\sigma = E \varepsilon$ Stahl: $E = 200000 \div 210000 \text{ MPa}$
 (Robert Hooke 1676) $= 200 \div 210 \text{ GPa}$

Poissonsches Gesetz: $\varepsilon_q = -\mu \varepsilon_l$ Stahl: $\mu = 0,3$

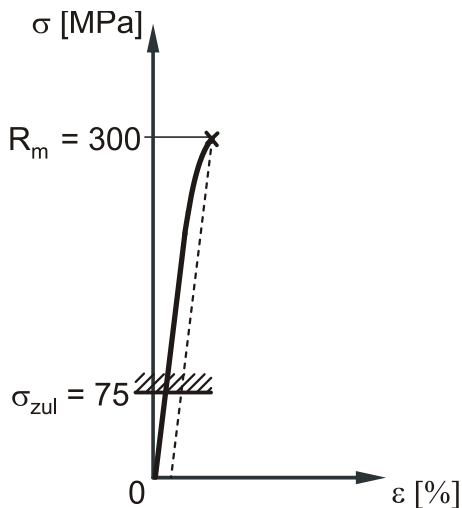


Bild 2.4: Spannungs-Dehnungs-Diagramm (EN-GJL-300)

Vergleich E295 - EN-GJL-300 (siehe auch Anhang):

Werkstoff:	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_5 [%]	Z [%]	E [MPa]	μ [%]	Eigenschaft
E295	min. 295	470 ÷ 610	20	60	210000	0,3	“zäh”
EN-GJL-300	–	260 ÷ 330	≈ 0	≈ 0	100000	0,25	“spröd”

Sicherheitsbeiwerte:

Werkstoff	Versagensart	Maßgebender Werkstoffkennwert	Sicherheitsbeiwert	Typischer Sicherheitsbeiwert
zäh	Fließen	$R_e (R_{p0,2})$	$S_F = 1,2 \div 2$	$S_F = 1,5$
	Bruch	R_m	$S_B = 2 \div 3$	$S_B = 2$
spröd	Bruch	R_m	$S_B = 4 \div 9$	$S_B = 4$

Zulässige Spannungen (gewählt: $S_F = 1,5$, $S_B = 2$ bzw. 4)

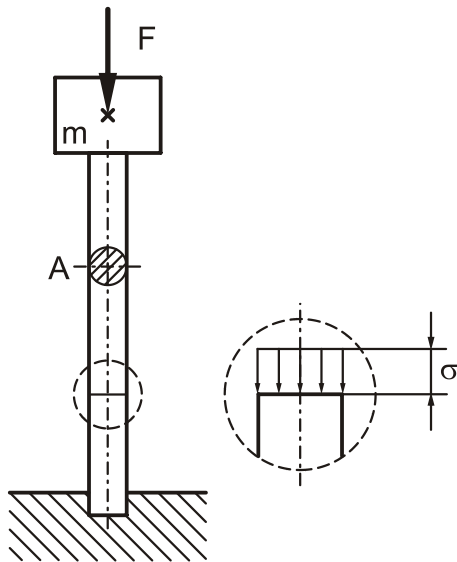
$$\text{E295:} \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} = \frac{300 \text{ MPa}}{1,5} = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{500 \text{ MPa}}{2} = 250 \text{ MPa}$$

$$\text{EN-GJL-300:} \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{300 \text{ MPa}}{4} = 75 \text{ MPa}$$

2.3 Gerader prismatischer Stab unter Druckbeanspruchung

Spannungsberechnung:



Äußere Belastung: F [N]

Querschnitt: A [mm²]

(Druck-) Spannung: $\sigma_d = -\frac{F}{A}$ [MPa]

Spannung im Querschnitt konstant

Bild 2.5: Prismatischer Stab unter Druckbeanspruchung

Druckversuch DIN 50 106

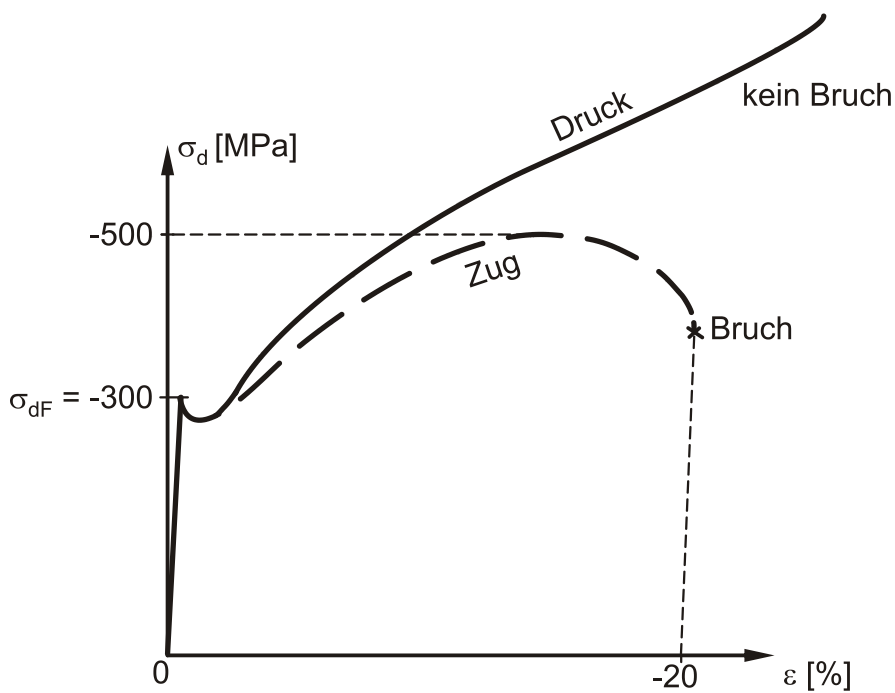


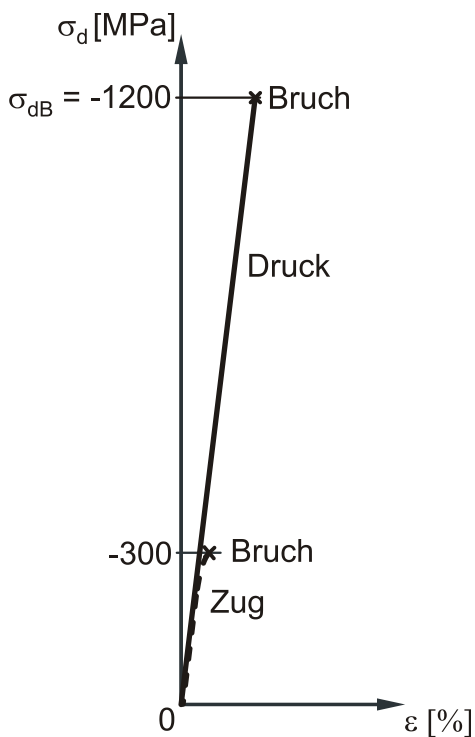
Bild 2.6: Spannungs-Dehnungsdiagramm (E295)

Kennwerte: Beispiel E295 (zäher Werkstoff)

Druckfließgrenze (Quetschgrenze):	$\sigma_{dF} = -300\text{MPa}$
Druckfestigkeit:	$\sigma_{dB} = (\text{kein Bruch})$
Elastizitätsmodul:	$E = 210000\text{MPa}$
Querkontraktionszahl:	$\mu = 0,3$
$ \sigma_{dF} = R_e, E_d = E_z, \mu_d = \mu_z$	

Kennwerte: Beispiel EN-GJL-300 (spröder Werkstoff)

Druckfließgrenze (Quetschgrenze):	$\sigma_{dF} = (\text{kein Fließen})$
Druckfestigkeit:	$\sigma_{dB} = -1200\text{MPa}$
Elastizitätsmodul:	$E = 100000\text{MPa}$
Querkontraktionszahl:	$\mu = 0,25$
$E_d \approx E_z, \mu_d = \mu_z$	
(Werte für σ_{dB} siehe Anhang)	

**Bild 2.7:** Spannungs-Dehnungs-Diagramm (EN-GJL-300)

Weitere Versagensart: Knicken

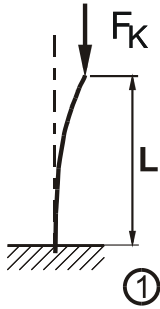
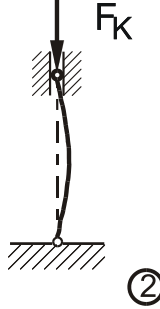
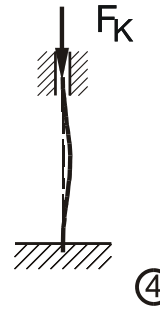
Knickfall (nach Euler)				
Knicklast F_K	$\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$

Bild 2.8: Knickfälle nach Euler

F_K :	Knicklast	[N]
I :	Trägheitsmoment des Querschnitts	[mm ⁴]
L :	Stablänge	[mm]
E :	Elastizitätsmodul	[MPa]

Knickschubspannung: $\sigma = -\frac{F_K}{A}$

zulässige Spannung: $\sigma_{K \text{ zul}} = \frac{\sigma_K}{S_K} = -\frac{F_K}{A \cdot S_K}$

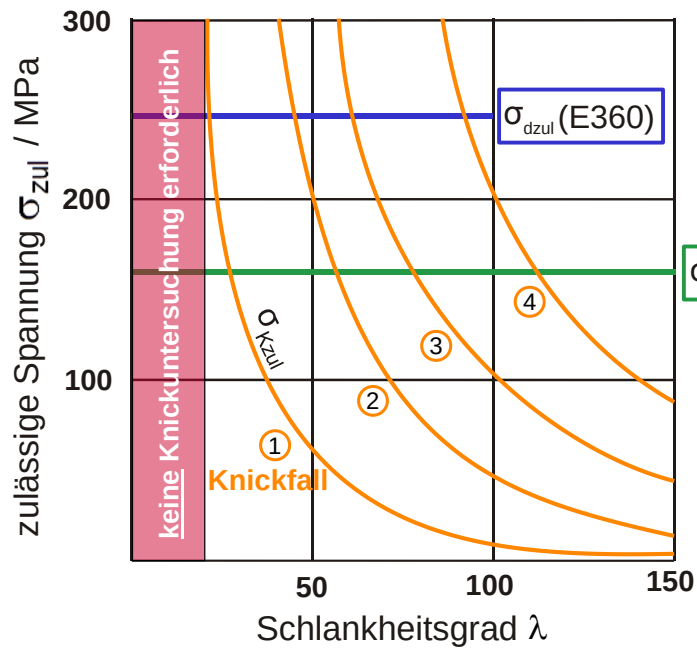
Sicherheitsbeiwert gegen Knicken: $S_K = 2,5 \div 5$

Zulässige Spannungen (mit $S_F = 1,5$ und $S_B = 4$):

E295: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} = -\frac{R_e}{S_F} = -\frac{300 \text{ MPa}}{1,5} = -200 \text{ MPa}$

EN-GJL-300: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B} = -\frac{1200 \text{ MPa}}{4} = -300 \text{ MPa}$

$\left. \begin{array}{l} \text{E295} \\ \text{EN-GJL-300} \end{array} \right\}:$ $\sigma_{K \text{ zul}} = -\frac{F_K}{A \cdot S_K}$



$$(S_F = 1,5 ; S_B = 4 ; \\ \lambda = L\sqrt{A/I})$$

Bild 2.9: Zulässige Spannung der Stähle S235 und E360 bei Druckbeanspruchung

3 Biegung

3.1 Gerader prismatischer Balken unter Biegebeanspruchung

Spannungsberechnung:

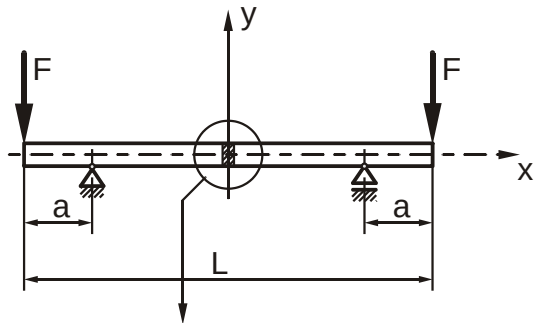


Bild 3.1: Balken mit Rechteckquerschnitt

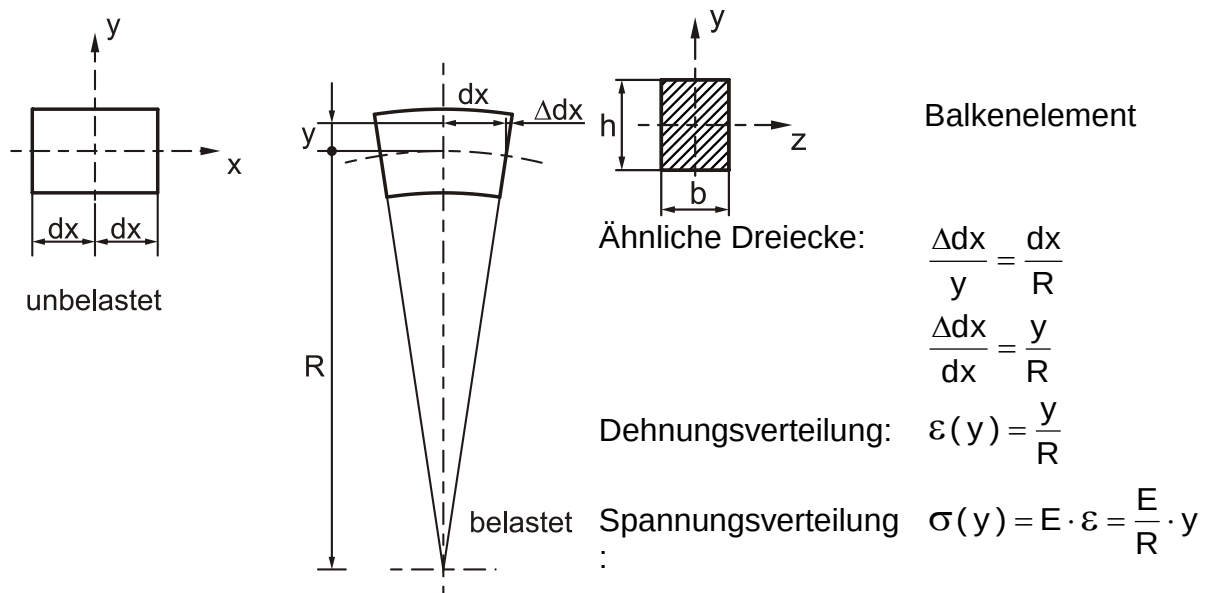


Bild 3.2: Balkenelement

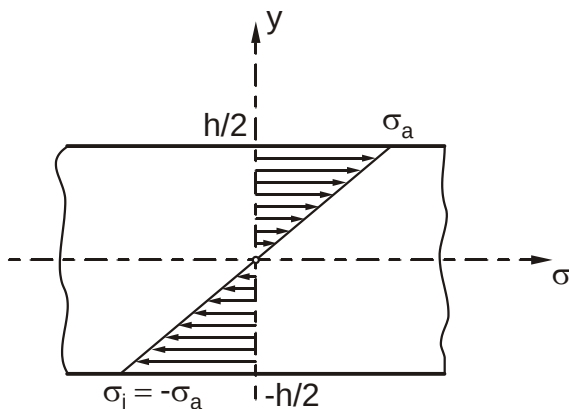


Bild 3.3: Spannungsverteilung

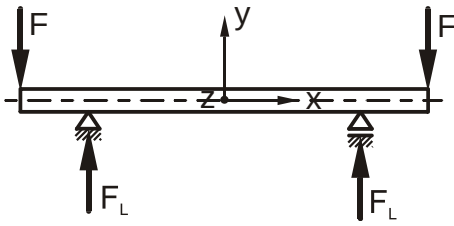


Bild 3.4: Bestimmung der Schnittgrößen

Lagerkräfte:

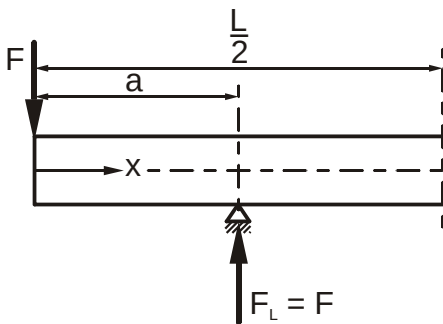
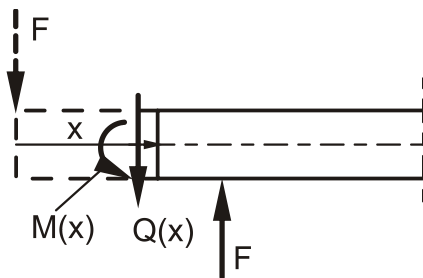
Gleichgewichtsbedingung der Kräfte:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \text{ (x-Richtung)} \\ \sum F_y = 0 \text{ (y-Richtung)} \\ \sum F_z = 0 \text{ (z-Richtung)} \end{cases}$$

Aus $\sum F_y = 0$:

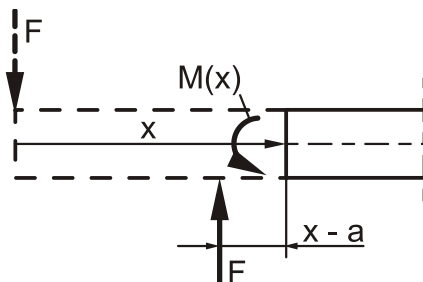
$$2F - 2F_L = 0$$

$$F_L = F$$

(Vorzeichen: $\downarrow +$)Je ein Schnitt zwischen F und F_L und zwischen F_L und Stabmittea) $0 \leq x \leq a$:

Querkraft: $Q(x) = F$

Biegemoment: $M(x) = Fx$

(Vorzeichen: $\curvearrowright +$)b) $a \leq x \leq L/2$:

Querkraft: $Q(x) = F - F = 0$

Biegemoment: $M(x) = Fx - F(x - a) = Fa$

Bild 3.5: Schnittgrößen

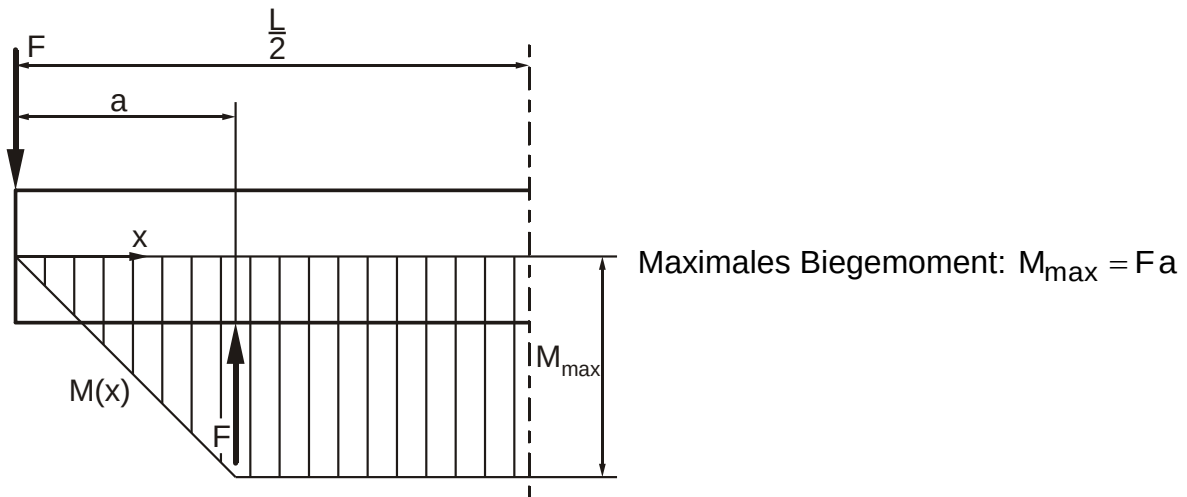


Bild 3.6: Momentenverlauf

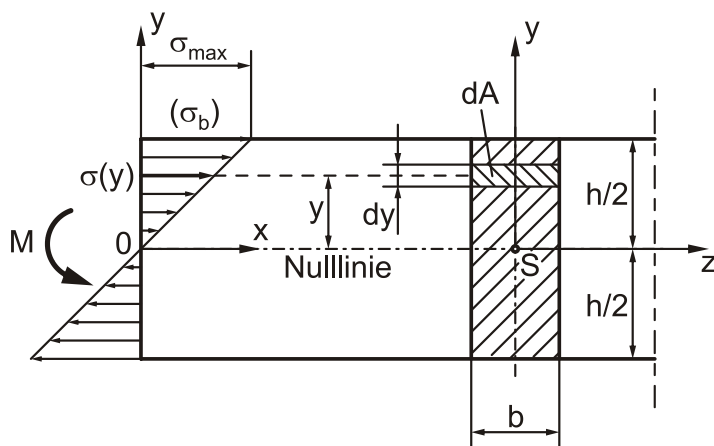


Bild 3.7: Spannungsbestimmung

Gleichgewichtsbedingung der Momente: $\sum \vec{M} = \vec{0}$ $\begin{cases} \sum M_x = 0 \text{ (x-Ebene = const)} \\ \sum M_y = 0 \text{ (y-Ebene = const)} \\ \sum M_z = 0 \text{ (z-Ebene = const)} \end{cases}$

Aus $\sum M_z = 0$: $dM = \sigma(y) \cdot dA \cdot y$

$$M = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y \quad (\text{„äußeres“ Moment} = \text{„inneres“ Moment})$$

Wo liegt $y = 0$?

Aus $\sum F_x = 0$: $\int_A \sigma \cdot dA = 0$

Mit $\sigma (= \sigma_x) = \frac{E}{R} \cdot y$ wird $\int_A y \cdot dA = 0$

y : Abstand von der Schwerpunktsachse (Nulllinie, neutrale Faserschicht)

Mit $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$ wird

$$M = \frac{E}{R} \cdot \underbrace{\int y^2 dA}_{I_z} = \frac{E}{R} \cdot I_z$$

I_z : axiales Trägheitsmoment [mm⁴]

Mit $\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$ wird

$$M = \frac{\sigma}{y} \cdot I_z$$

oder

$$\sigma(y) = \frac{M}{I_z} \cdot y$$

Größte Spannung:

$$\sigma_{\max} = \sigma(y_{\max}) = \sigma_b = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max}$$

$$\frac{I_z}{y_{\max}} = W_b$$

W_b : Axiales Widerstandsmoment [mm³]
(Widerstandsmoment gegen Biegung)

$y_{\max}$: Maximaler Faserabstand [mm]
(Abstand Randfaser zu neutraler Faser)

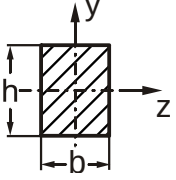
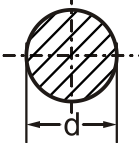
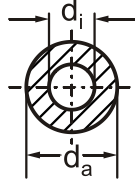
Damit wird:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

σ_b : Maximale Biegespannung [MPa]
(am Rand)

M_b : Biegemoment [MPa] (b = Biegung)

Axiale Trägheits- und Widerstandsmomente:

Rechteckquerschnitt		$I_z = \frac{bh^3}{12}$	$W_b = \frac{bh^2}{6}$
Kreisquerschnitt		$I = \frac{\pi}{64} d^4$	$W_b = \frac{\pi}{32} d^3$
Kreisringquerschnitt		$I = \frac{\pi}{64} (d_a^4 - d_i^4)$	$W_b = \frac{\pi}{32} \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$

3.2 Zulässige Spannung

Biegeversuch DIN 50 110 (Prüfung von Grauguss)

Werkstoffkennwerte: σ_{bF} : Biegefließgrenze ($\sigma_{bF} = R_e$) [MPa]

σ_{bB} : Biegefestigkeit [MPa]

Zulässige Spannung (mit $S_F = 1,5$; $S_B = 4$):

$$\text{E295:} \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F} = \frac{R_e}{S_F} = \frac{300 \text{ MPa}}{1,5} = 200 \text{ MPa}$$

$$\text{EN-GJL-300:} \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bB}}{S_B} = \frac{460 \text{ MPa}}{4} = 115 \text{ MPa}$$

4 Schub

4.1 Prismatischer Körper unter Schubbeanspruchung

Spannungsberechnung:

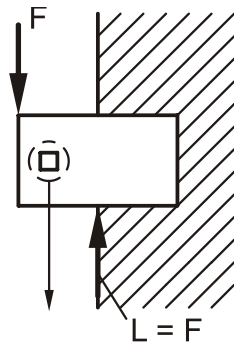
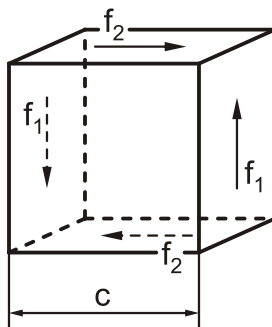


Bild 4.1: „Kurzer“ Schubbalken



Kräfte am Element:

$$\sum \vec{F} = 0: \quad f_1 - f_2 = 0$$

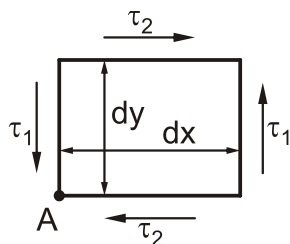
$$f_2 - f_1 = 0$$

$$\sum \vec{M} = 0: \quad cf_1 - cf_2 = 0$$

Bild 4.2: Kräfte am Balkenelement

Schubspannung: $\tau = \frac{f}{a} \quad (a = c^2)$

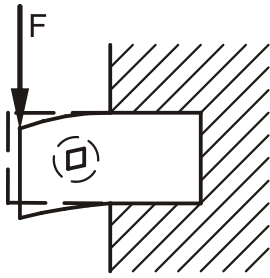
$$\boxed{\tau_m = \frac{F}{A}} \quad [\text{MPa}] \quad \tau_m : \text{Mittelwert}$$



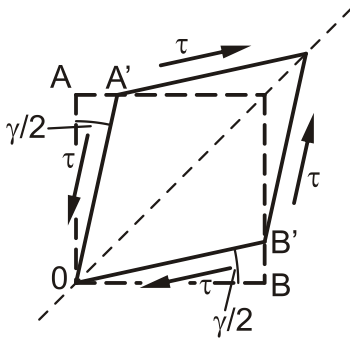
$$\sum M_{(A)} = 0: \quad \tau_1 \cdot dydz \cdot dx - \tau_2 \cdot dxdz \cdot dy = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 = \tau_2 \\ \tau_1 \perp \tau_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{„zugeordnete“} \\ \text{Schubspannungen} \end{array}$$

Bild 4.3: Zugeordnete Schubspannungen



Verformung: Rechteck $\Rightarrow$ Raute
(Winkeländerungen)



$$\tau = 0: \quad \text{Winkel}(\text{AOB}) = 90^\circ \triangleq \frac{\pi}{2}$$

$$\tau > 0: \quad \text{Winkel}(\text{A'OB'}) = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

Winkeländerung γ = Schiebung

Bild 4.4: Verformung von Rechteck und Raute

$$\frac{\tau}{\gamma} = \text{const.} = G$$

G: Schubmodul (Gleitmodul) [MPa]

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Elastizitätsgesetz für Schubbeanspruchung (für elastischen Werkstoffzustand)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Stahl ($E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$): $G = 80800 \text{ MPa}$

EN-GJL ($E = 100000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,25$): $G = 40000 \text{ MPa}$

4.2 Zulässige Spannung

Scherversuch DIN 50 141

Werkstoffkennwert: τ_{aB} (Ab-) Scherfestigkeit [MPa]

$$(a = \text{Abscheren}, \tau_{aB} = \frac{F_{\max}}{A_0})$$

$$(\text{Für Stahl: } \frac{\tau_{aB}}{R_m} = 0,65 \div 0,75)$$

Zulässige Spannung (mit $S_B = 2$):

$$\text{E295: } \tau_{\text{zul}} = \frac{\tau_{aB}}{S_B} \approx \frac{0,7 \cdot R_m}{S_B} = \frac{0,7 \cdot 500 \text{ MPa}}{2} = 175 \text{ MPa}$$

5 Torsion (Verdrehung)

5.1 Gerader kreiszylindrischer Stab unter Torsionsbeanspruchung

Spannungsberechnung:

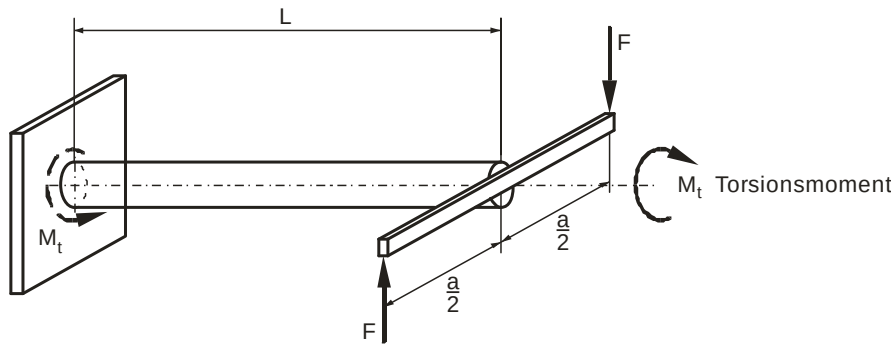


Bild 5.1: Stab unter Torsion

Torsionsmoment (Drehmoment):

$$M_t = 2 \cdot F \cdot \frac{a}{2} = F \cdot a \quad (t = \text{Torsion})$$

Zugeordnete Schubspannungen in einem Stab unter Torsion:

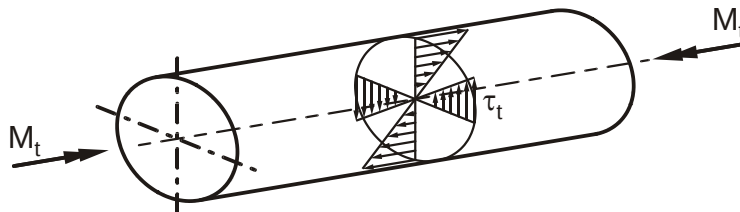
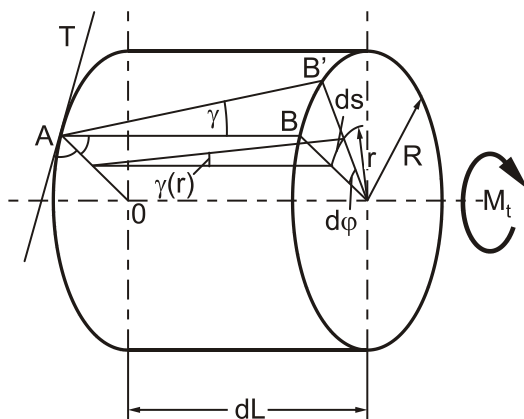


Bild 5.2: Zugeordnete Schubspannungen

Stabelement:



$$\begin{aligned} ds &= r \cdot d\varphi \\ ds &= dL \cdot \tan \gamma(r) \\ &\approx dL \cdot \gamma(r) \\ r d\varphi &= \gamma(r) dL \\ r \cdot \int_0^{\varphi} d\varphi &= \gamma(r) \cdot \int_0^L dL \\ r \varphi &= \gamma(r) \cdot L \end{aligned}$$

Bild 5.3: Stabelement

$$\begin{aligned}
 \text{Schiebung:} \quad \gamma(r) &= \frac{\varphi}{L} \cdot r \\
 \text{Schubspannung:} \quad \tau(r) &= G \cdot \gamma(r) = \frac{G\varphi}{L} \cdot r \\
 \text{Maximale Schubspannung:} \quad \tau_{\max} &= G \cdot \gamma(R) = \frac{G\varphi}{L} \cdot R
 \end{aligned}$$

Schubspannungen $\tau(r)$ in Querschnitten, zugeordnete Schubspannungen in Längsschnitten.

$$\begin{aligned}
 \text{Aus } \sum M = 0: \quad dM &= \tau(r) dA \cdot r \\
 M &= \int_A \tau dA \cdot r \quad (\text{„äußeres“ Moment} = \text{„inneres“ Moment})
 \end{aligned}$$

$$\text{Mit } \tau = \frac{G\varphi}{L} \cdot r \text{ wird } M = \frac{G\varphi}{L} \underbrace{\int_A r^2 dA}_{I_p} = \frac{G\varphi I_p}{L}$$

I_p : polares Trägheitsmoment [mm^4]

$$\text{Mit } \frac{G\varphi}{L} = \frac{\tau}{r} \text{ wird } M = \frac{\tau I_p}{r}$$

oder

$$\boxed{\tau(r) = \frac{M}{I_p} \cdot r}$$

Größte Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \tau(r_{\max}) = \tau_t = \frac{M}{I_p} r_{\max}$$

$$\frac{I_p}{r_{\max}} = W_t$$

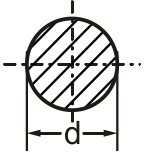
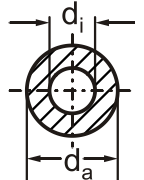
W_t : Polares Widerstandsmoment [mm^3]
(Widerstandsmoment gegen Torsion)

$r_{\max}$: Maximaler Faserabstand [mm]
(= Abstand der Randfaser zur Drehachse)

Damit wird:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

 τ_t : Maximale Schubspannung [MPa] (am Rand) M_t : Torsionsmoment [Nmm] (t = „Torsion“)Verdrehwinkel: $\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$ **Polare Trägheits- und Widerstandsmomente:**

Kreisquerschnitt		$I_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
Kreisringquerschnitt		$I_p = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$

5.2 Zulässige Spannungen

Verdrehversuch DIN 1602

Werkstoffkennwerte: τ_{tF} Torsionsfließgrenze [MPa] τ_{tB} Torsionsfestigkeit [MPa]

(Verdrehfestigkeit)

(Stahl: $\tau_{tF} \approx 0,58 R_e$; Stahl und EN-GJL: $\tau_{tB} \approx R_m$)Zulässige Spannung (mit $S_F = 1,5$; $S_B = 2$ bzw. 4)

$$\text{E295: } \tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \approx \frac{0,58 \cdot R_e}{S_F} = \frac{0,58 \cdot 300 \text{ MPa}}{1,5} = 116 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} \approx \frac{R_m}{S_B} = \frac{500 \text{ MPa}}{2} = 250 \text{ MPa}$$

$$\text{EN-GJL-300: } \tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} \approx \frac{R_m}{S_B} = \frac{300 \text{ MPa}}{4} = 75 \text{ MPa}$$

6 Schwingende Beanspruchung

6.1 Spannungsermittlung

Aus den Gleichgewichtsbetrachtungen zwischen äußerer Belastung und innerer Beanspruchung:

$$\text{Zug/Druck} \quad F \rightarrow \sigma = \frac{F}{A}$$

$$\text{Biegung} \quad M_b \rightarrow \sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

$$\text{Schub} \quad F \rightarrow \tau = \frac{F}{A}$$

$$\text{Torsion} \quad M_t \rightarrow \tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Spannungsberechnung bei statischer und schwingender Beanspruchung gleich.

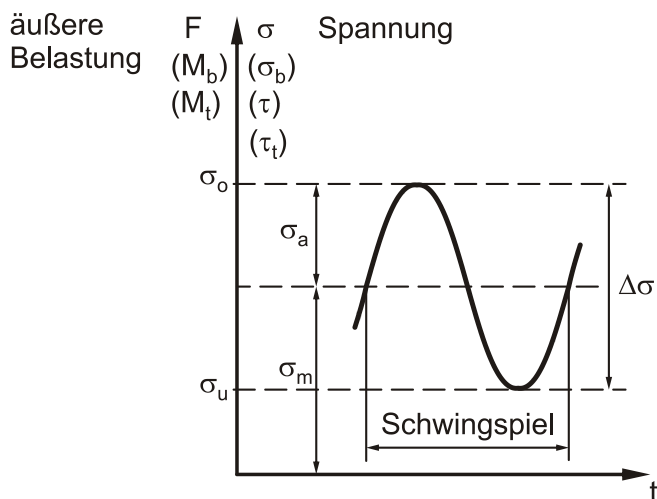


Bild 6.1: Schwingbeanspruchung – Definition

σ_o : Oberspannung

σ_u : Unterspannung

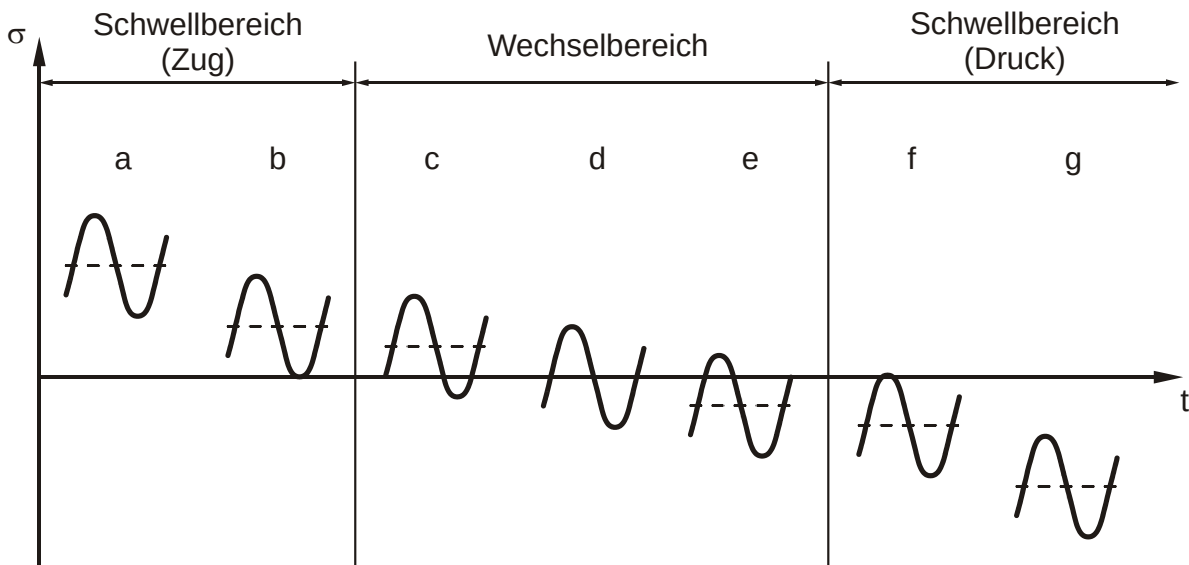
$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$ Mittelspannung

$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$ Spannungsamplitude (-ausschlag)

$\Delta\sigma = 2\sigma_a$ Schwingbreite der Spannung

$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$ Spannungsverhältnis

Spannungsschwingung ist festgelegt entweder durch σ_o und σ_u oder durch σ_m und σ_a .

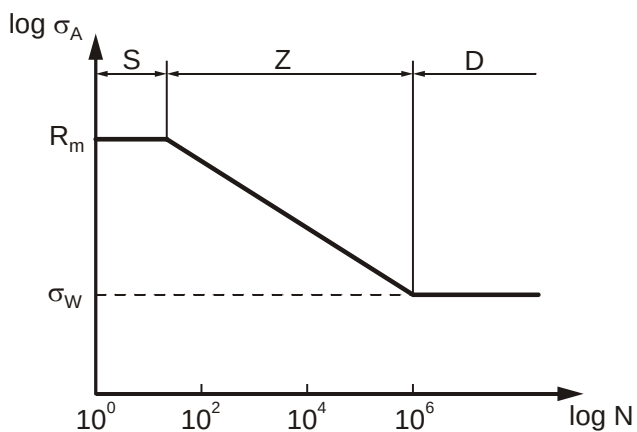


Fall	a	b	c	d	e	f	g
σ_o	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0
σ_m	> 0	$= \sigma_o/2$	> 0	$= 0$	< 0	$= \sigma_u/2$	< 0
σ_u	> 0	$= 0$	< 0	$= -\sigma_o$	< 0	< 0	< 0
R	$1 > R > 0$	$R = 0$	$0 > R > -1$	$R = -1$	$-1 > R > -\infty$	$R = -\infty$	$\infty > R > 1$

Bild 6.2: Schwingbeanspruchung – Einteilung

6.2 Werkstoffverhalten

Dauerschwingversuch DIN 50100 → Wöhlerkurve



Wöhlerkurve $\sigma_A = f(N)$
 Zug-Druck-
 Wechselbeanspruchung
 ($\sigma_m = 0$)
 (halblogarithmische bzw.
 doppelt logarithmische
 Darstellung)

Bereiche: S: statische Festigkeit, Z: Zeitfestigkeit, D: Dauerfestigkeit

Bild 6.3: Wöhlerkurve

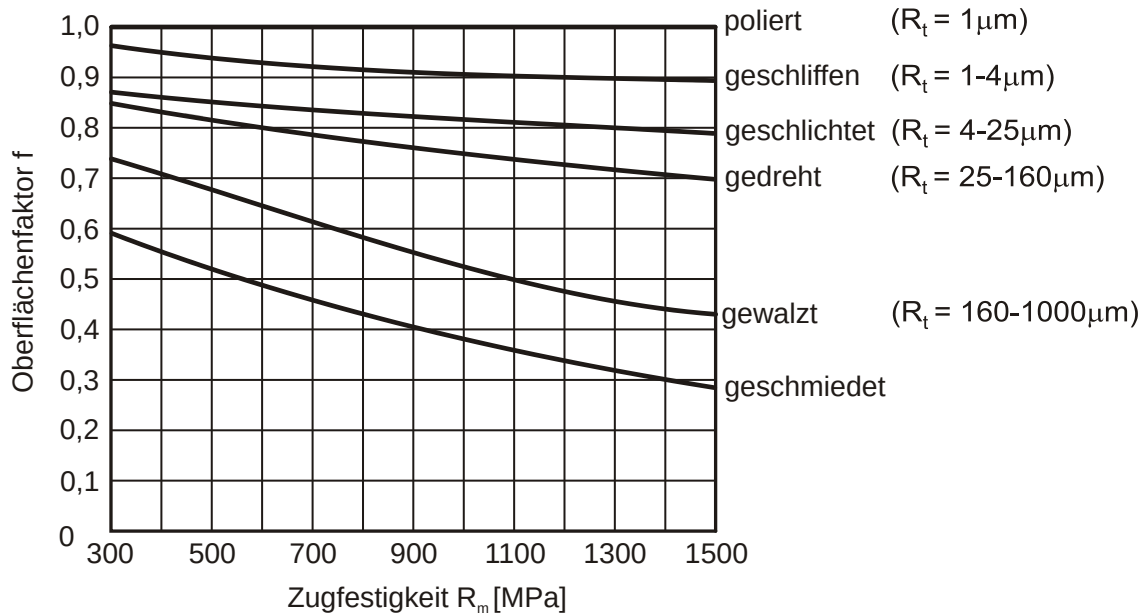


Bild 6.8: Oberflächenfaktor f in Abhängigkeit der Zugfestigkeit ($f = \frac{\sigma_W}{\sigma_{W \text{ poliert}}}$)

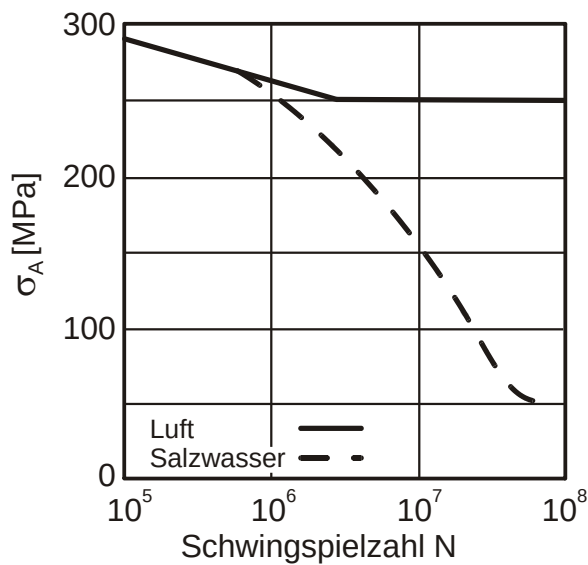


Bild 6.9: Einfluss von Korrosion durch Salzwasser auf Zug-/Druck-Wechsel-
festigkeit von C-Stahl

6.3 Zulässige Spannungen

a) Festigkeitsbedingung gegen Schwingungsbruch: $\sigma_a \leq \sigma_{a\text{zul}}$

σ_a : wirkende Spannungsamplitude

$\sigma_{a\text{zul}}$: zulässige Spannungsamplitude $\sigma_{a\text{zul}} = \frac{\sigma_A}{S_D}$

σ_A : ertragbare Spannungsamplitude
($\sigma_A = f(\sigma_m)$ aus DFS mit $\sigma_w = f \cdot \sigma_{w\text{poliert}}$)

S_D : Sicherheitsbeiwert gegen Schwingungsbruch ($S_D = 1,5 \div 2,5$)

b) Festigkeitsbedingung gegen Fließen und / oder Gewaltbruch: $\sigma_o \leq \sigma_{o\text{zul}}$

σ_o : Oberspannung (= Maximalspannung, $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$)

$\sigma_{o\text{zul}}$: zulässige Oberspannung $\sigma_{o\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_m}{S_B}$

7 Allgemeiner Spannungs- und Verformungszustand

7.1 Spannungen an schrägen Schnitten

1. Flachstab mit Rechteckquerschnitt unter Zugbeanspruchung (einachsig) durch F

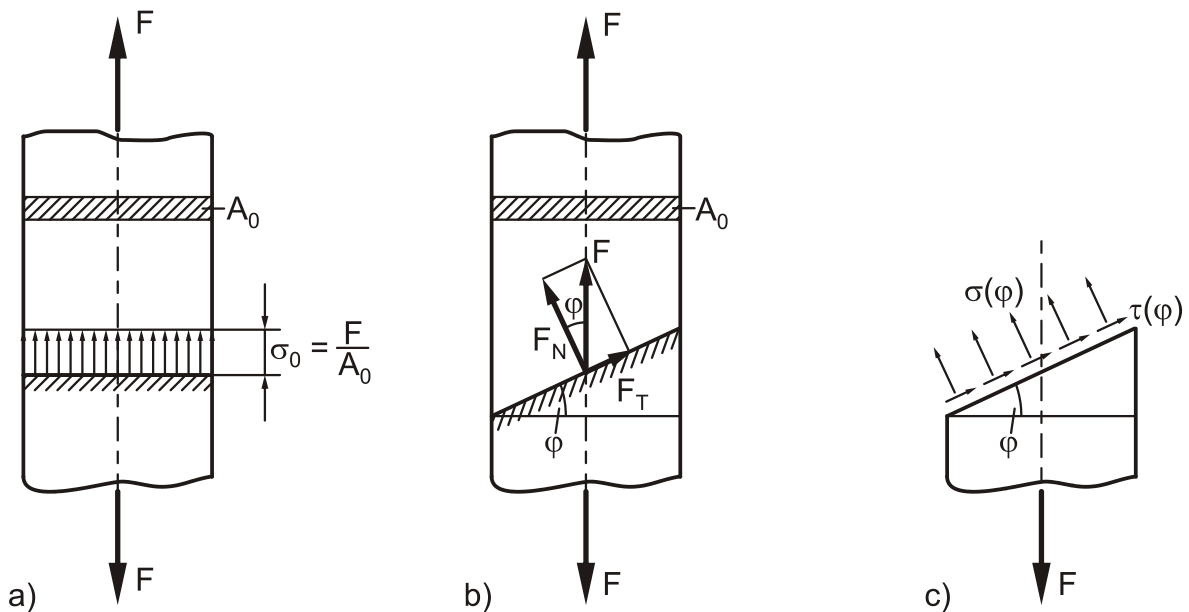


Bild 7.1: Flachstab unter Zugbeanspruchung

a) Querschnitt ($\varphi = 0$): $\sigma_0 = \frac{F}{A_0}$

b) Schräger Schnitt ($\varphi > 0$):

Normalkraft: $F_N = F \cos \varphi$

Tangentialkraft: $F_T = F \sin \varphi$

Schnittfläche: $A = \frac{A_0}{\cos \varphi}$

c) Spannungen:

Normalspannungen: $\sigma(\varphi) = \frac{F_N}{A} = \frac{F \cos \varphi}{A_0 / \cos \varphi} = \frac{F}{A_0} \cos^2 \varphi = \sigma_0 \cos^2 \varphi$

Schubspannungen: $\tau(\varphi) = \frac{F_T}{A} = \frac{F \sin \varphi}{A_0 / \cos \varphi} = \frac{F}{A_0} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\varphi$

Graphische Darstellung:

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cos^2 \varphi = \sigma_{\max} \cos^2 \varphi = \frac{\sigma_{\max}}{2} (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\varphi = \frac{\sigma_{\max}}{2} \sin 2\varphi$$

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_{\max}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\max}}{2} \cos 2\varphi \right)^2$$

$$\tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_{\max}}{2} \sin 2\varphi \right)^2$$

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_{\max}}{2} \right)^2 + \tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_{\max}}{2} \right)^2 \cdot \underbrace{(\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)}_{=1}$$

Kreis: Mittelpunkt M: $\left(\frac{\sigma_{\max}}{2}, 0 \right)$

Radius: $R = \frac{\sigma_{\max}}{2}$

Mohrscher Spannungskreis:

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_1}{2} \right)^2 + \tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2} \right)^2$$

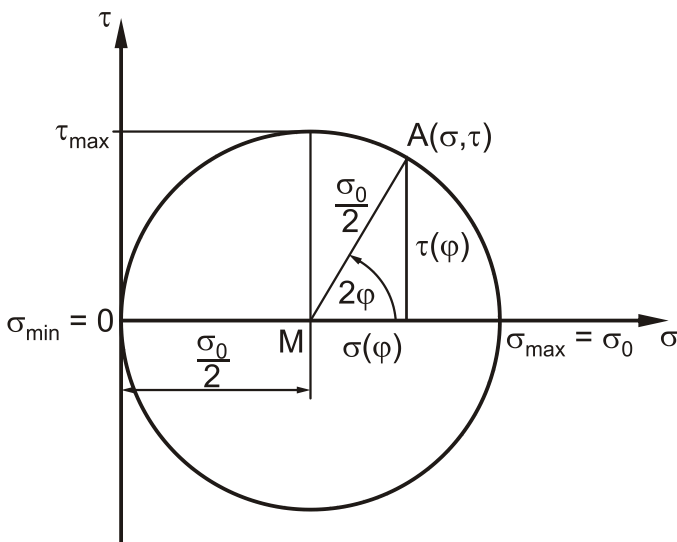


Bild 7.2: Mohrscher Spannungskreis für einachsige Zugbelastung

2. Scheibe unter Zug durch F_1 und F_2 (zweiachsige oder ebene Zugbeanspruchung)

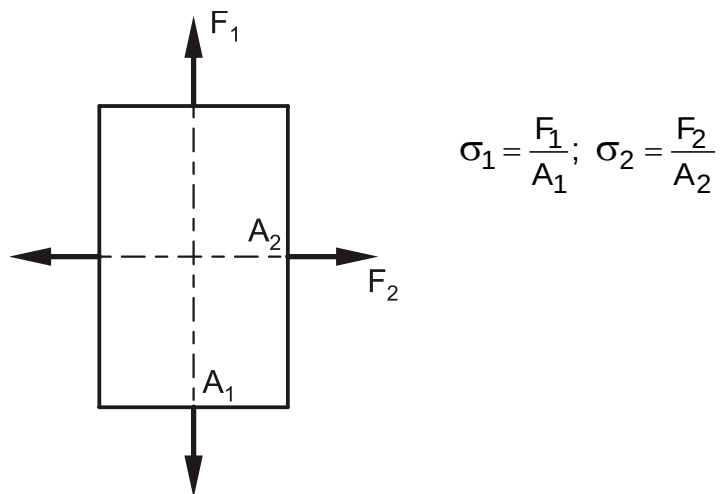


Bild 7.3: Scheibe unter ebener Zugbeanspruchung

Mohrscher Spannungskreis für zweiachsige Zugbeanspruchung:

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

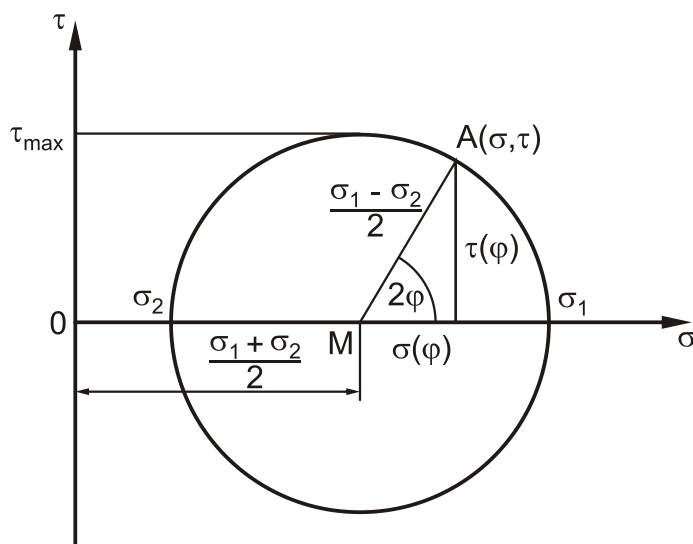


Bild 7.4: Mohrscher Spannungskreis für zweiachsige Zugbelastung

3. Stab unter Torsionsbeanspruchung

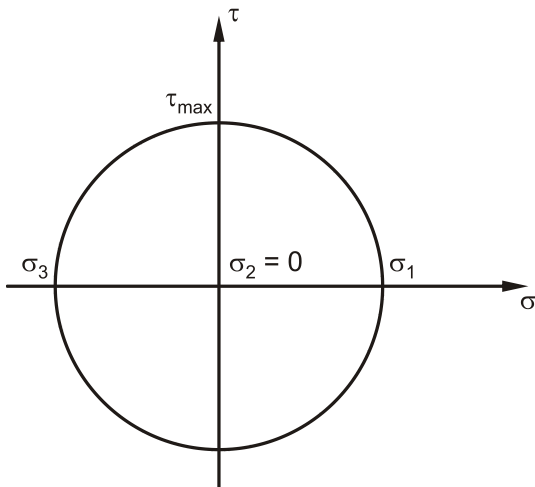


Bild 7.5: Mohrscher Spannungskreis für Torsion

4. Körper unter dreiachsiger oder räumlicher Belastung

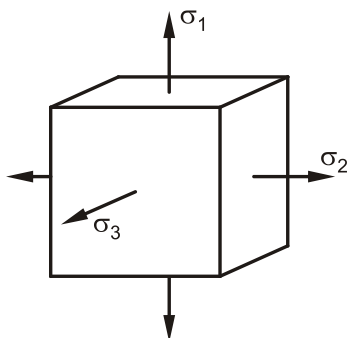


Bild 7.6: Körper unter räumlicher Belastung

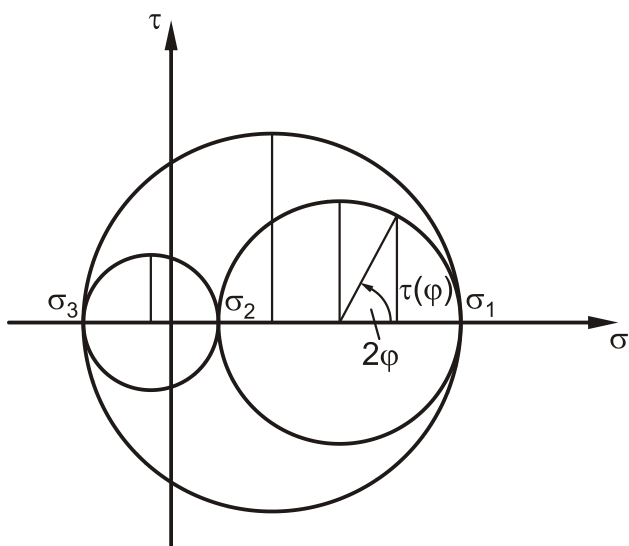


Bild 7.7: Mohrscher Spannungskreis für räumliche Belastung

$\tau = 0 \rightarrow \sigma = \text{Max. oder Min.} \rightarrow$ Hauptspannungen
(Hauptspannungsrichtungen, Hauptebenen)

Allgemeiner Fall: 3 Hauptspannungen

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Aus Mohrschen Spannungskreisen:

$$\sigma_1 \perp \sigma_2 \perp \sigma_3$$

Übliche Indizierung:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Einteilung von Spannungszuständen nach Hauptspannungen:

Einachsiger Spannungszustand: Eine Hauptspannung ungleich Null

$$\text{z.B.: } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

Zweiachsiger Spannungszustand: Zwei Hauptspannungen ungleich Null

$$\text{z.B.: } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$$

Dreiachsiger Spannungszustand: Drei Hauptspannungen ungleich Null

$$\text{z.B.: } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$$

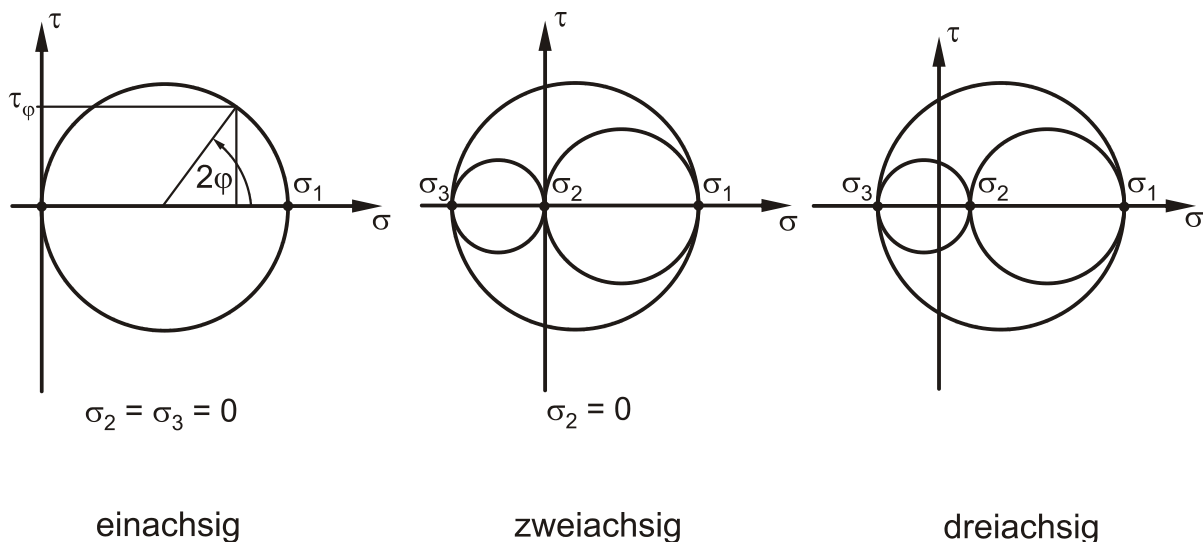


Bild 7.8: Mohrsche Spannungskreise für den ein-, zwei- und dreiachsigen Spannungszustand

7.2 Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

1. Normalspannungen:

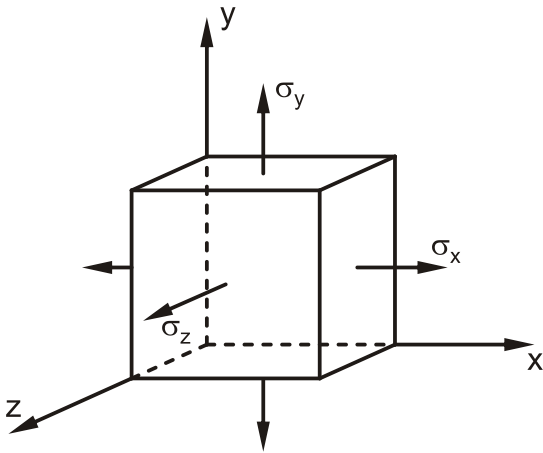


Bild 7.9: Räumlicher Körper mit Normalspannungen

- a) Beanspruchung in x-Richtung ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$)
(Zugversuch, spezieller Fall)

Spannungen: $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ $\sigma_y = 0$ $\sigma_z = 0$

Dehnungen: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$

- b) Beanspruchung in x-, y- und z-Richtung ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\sigma_z \neq 0$)
(räumliche Beanspruchung, allgemeiner Fall)

Aus Superposition: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$ usw.

Dehnungen: $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Spannungen:
$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right]$$

mit
$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ (Volumendehnung)}$$

- c) Beanspruchung in x- und y-Richtung ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\sigma_z = 0$)
(ebene Beanspruchung)

Aus b) mit $\sigma_z = 0$:

Dehnungen:
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Spannungen:
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y]$$

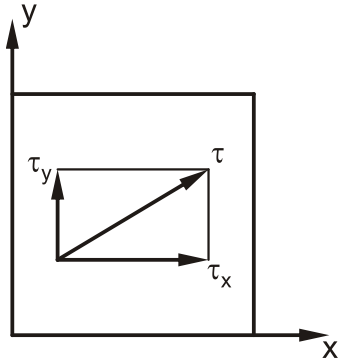
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x]$$

$$\sigma_z = 0$$

2. Schubspannungen:

Aus Grundbelastung Schub: $\tau = G\gamma$

Zerlegung:

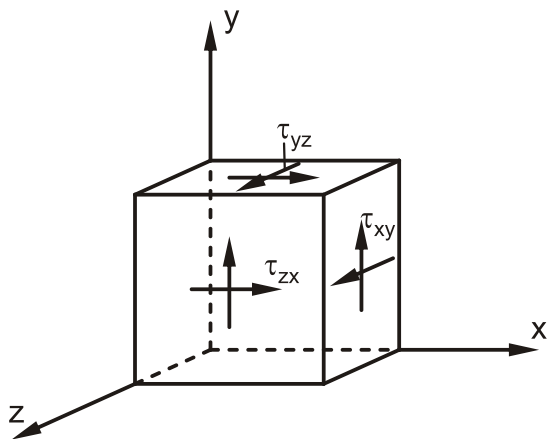


Indizierung der Schubspannungen:

1. Index: Richtung der Flächennormalen
2. Index: Richtung der Schubspannungen

Bild 7.10: Indizierung der Schubspannungen

Schubspannungen und Schiebungen:



$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Bild 7.11: Schubspannungen am räumlichen Körper

7.3 Festigkeitshypothesen

Festigkeitsbedingung einachsig:

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma \leq \sigma_{zul} = \begin{cases} R_e / S_F \\ R_m / S_B \\ \sigma_W / S_D \end{cases}$$



einachsig

einachsig

(Zug, Druck, Biegung)

(Zugversuch, Dauerschwingversuch)

Mehrachsiger Spannungszustand:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\}$$



Festigkeits-
hypothesen

→ σ_v (Vergleichsspannung)



dreiachsig

fiktiv einachsig

Festigkeitsbedingung mehrachsig:

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul}$$

Festigkeitshypothesen:

1. Normalspannungshypothese (NH)

$$\sigma_v = \sigma_{\max} = \sigma_1$$

Versagen, wenn $\sigma_v = R_m$ bzw. $\sigma_{va} = \sigma_W$

Anwendung: spröde Werkstoffe

2. Schubspannungshypothese (SH)

$$\sigma_v = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2 \tau_{\max}$$

Versagen, wenn $\sigma_v = R_e$ bzw. $\sigma_{va} = \sigma_W$

Anwendung: zähe Werkstoffe

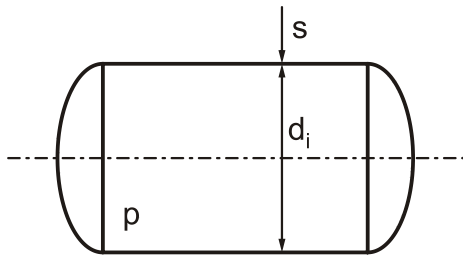
3. Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

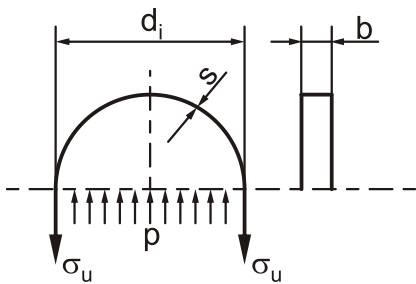
Versagen, wenn $\sigma_v = R_e$ bzw. $\sigma_{va} = \sigma_W$

Anwendung: zähe Werkstoffe

Vergleichsspannung nach NH, SH und GEH für 2- und 3-achsigen Spannungszustand siehe Anhang.

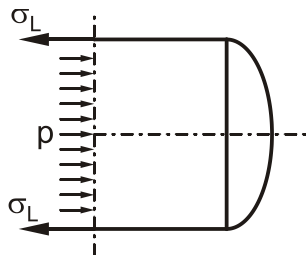
Anwendungsbeispiel: Dünnwandiger Hohlzylinder unter Innendruck

Annahme:
Spannungen sind konstant
über der Wanddicke s
(zulässig für $\frac{d_a}{d_i} \leq 1,2$)

Bild 7.12: Dünnwandiger Hohlzylinder*Umfangsspannung:*

$$p \cdot d_i b = \sigma_u \cdot 2 s b$$

$$\sigma_u = \frac{p d_i}{2 s}$$

Bild 7.13: Umfangsspannung am Hohlzylinder*Längsspannung:*

$$p \cdot \frac{\pi}{4} d_i^2 = \sigma_L \cdot \pi d_m s \quad (d_m \approx d_i)$$

$$\sigma_l = \frac{p d_i}{4 s}$$

Bild 7.14: Längsspannung am Hohlzylinder*Radialspannung:*

$$\sigma_r = -p \quad (\text{Innenseite})$$

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} \quad (\text{Wandmitte})$$

$$\sigma_r = 0 \quad (\text{Außenseite})$$

Normalspannungen in Symmetrieebenen von Form und Belastung sind Hauptspannungen:

$$\sigma_u = \sigma_1$$

$$\sigma_l = \sigma_2$$

$$\sigma_r = \sigma_3$$

Zahlenbeispiel: $d_i = 500 \text{ mm}$, $s = 25 \text{ mm}$, $p = 100 \text{ bar} = 10 \text{ MPa}$

$$\sigma_u = \sigma_1 = \frac{p d_i}{2s} = \frac{10 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm}}{2 \cdot 25 \text{ mm}} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = \sigma_2 = \frac{p d_i}{4s} = \frac{10 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm}}{4 \cdot 25 \text{ mm}} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = \sigma_3 = -\frac{p}{2} = -\frac{10 \text{ MPa}}{2} = -5 \text{ MPa} \quad (\text{Wandmitte})$$

Vergleichsspannungen:

$$\text{NH:} \quad \sigma_v = \sigma_1 = 100 \text{ MPa}$$

$$\text{SH:} \quad \sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3 = 100 - (-5) = 105 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \text{GEH:} \quad \sigma_v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{50^2 + 55^2 + (-105)^2} = 91 \text{ MPa} \end{aligned}$$

DIN 2413: Berechnung von Stahlrohren

$$\sigma_v(\text{SH}) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_u - \sigma_r$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p \cdot d_i}{2s} - \left(-\frac{p}{2} \right) \\ &= \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{d_i}{s} + 1 \right) \\ &= \frac{p}{2} \cdot \frac{d_i + s}{s} \\ &= \frac{p \cdot d_m}{2s} \quad \text{„Kesselformel“} \end{aligned}$$

$$\text{Festigkeitsbedingung:} \quad \sigma_v(\text{SH}) \leq \sigma_{\text{zul}}, \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{R_m}{S_B}$$

$$\Rightarrow \text{erforderliche Wanddicke: } s = \frac{p \cdot d_m}{2 \cdot \sigma_{\text{zul}}}$$

8 Kerbwirkung

Konstruktive Kerben: Rillen, Nuten, Absätze, Einstiche, Bohrungen, usw.

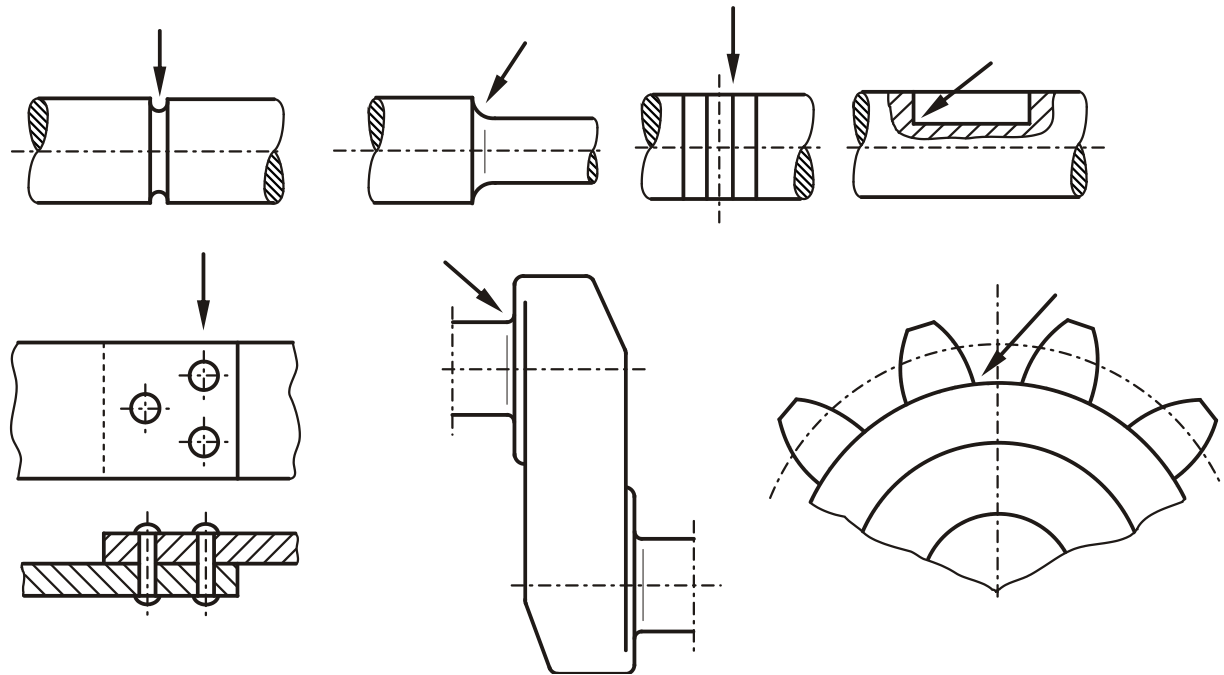


Bild 8.1: Beispiele konstruktiver Kerben

Vorstellungshilfe:

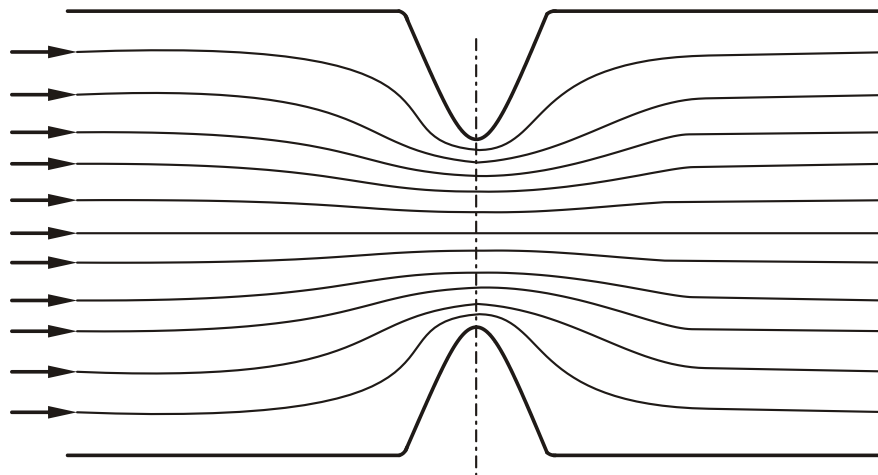


Bild 8.2: Stromlinienbild

8.1 Statische Beanspruchung: Formzahl

Ohne Kerbe: Gleichmäßige bzw. lineare Spannungsverteilung:

Zug:	$\sigma = F/A$	} Nennspannungen
Druck:	$\sigma = -F/A$	
Schub:	$\tau = F/A$	
Biegung:	$\sigma_b = M_b / W_b$	
Torsion:	$\tau_t = M_t / W_t$	

Mit Kerbe: Ungleichmäßige Spannungsverteilung, Spannungsspitze

Beispiel: Zugstab

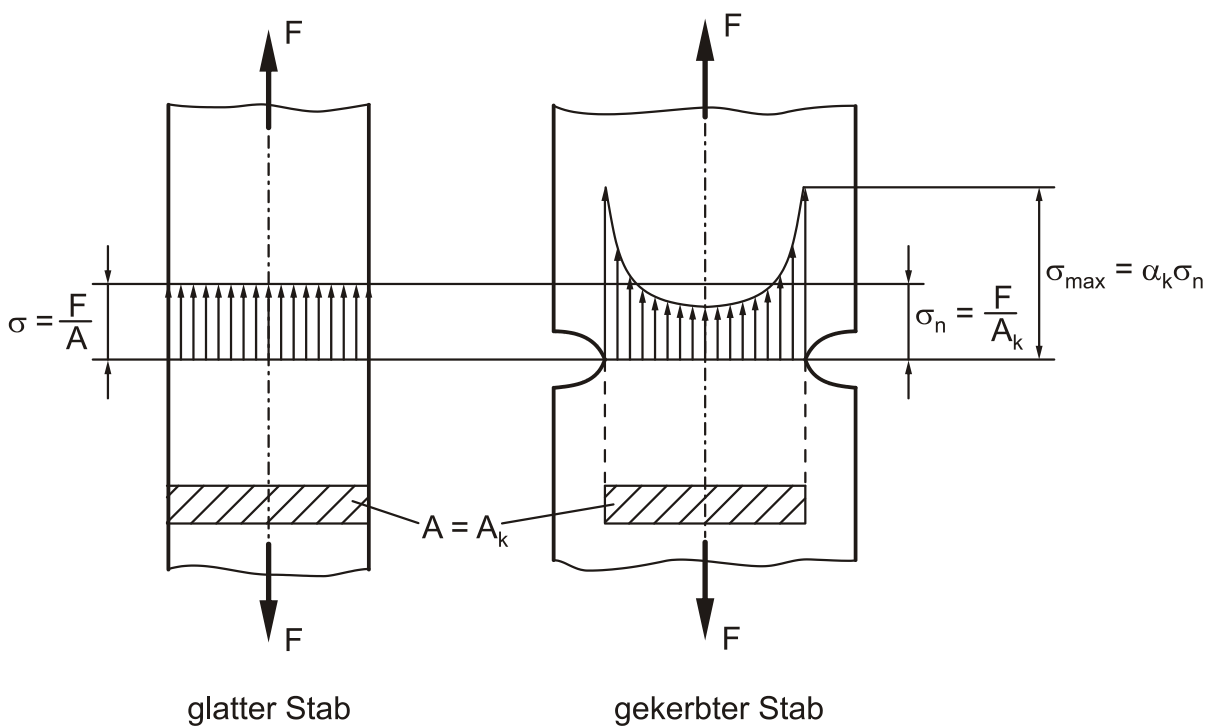


Bild 8.3: Zugstab in glatter und gekerbter Ausführung

Nennspannung: $\sigma_n = \frac{F}{A_k} = \frac{\int \sigma \, dA}{A_k}$

Formzahl: $\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}$

Maximalspannung
im Kerbgrund:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$$

} für elastischen Werkstoffzustand
($\sigma_{\max} < R_e$)

$$\alpha_k \begin{cases} = f(\text{Kerbform, Beanspruchungsart}) \\ \neq f(\text{Werkstoff, Beanspruchungshöhe}) \end{cases}$$

α_k aus Formzahldiagrammen (siehe Anhang)

Auswirkung auf das Festigkeitsverhalten:

Ziel: Aufstellen von Festigkeitsbedingungen

Modell: Kerbstab

Spröder Werkstoff: Versagen durch Bruch

(Gewalt-) Bruch bei:

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{\max} = R_m$$

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

↓

↓

$$\alpha_k \sigma_n \leq \frac{R_m}{S_B}$$

Zäher Werkstoff: Versagen durch Fließen

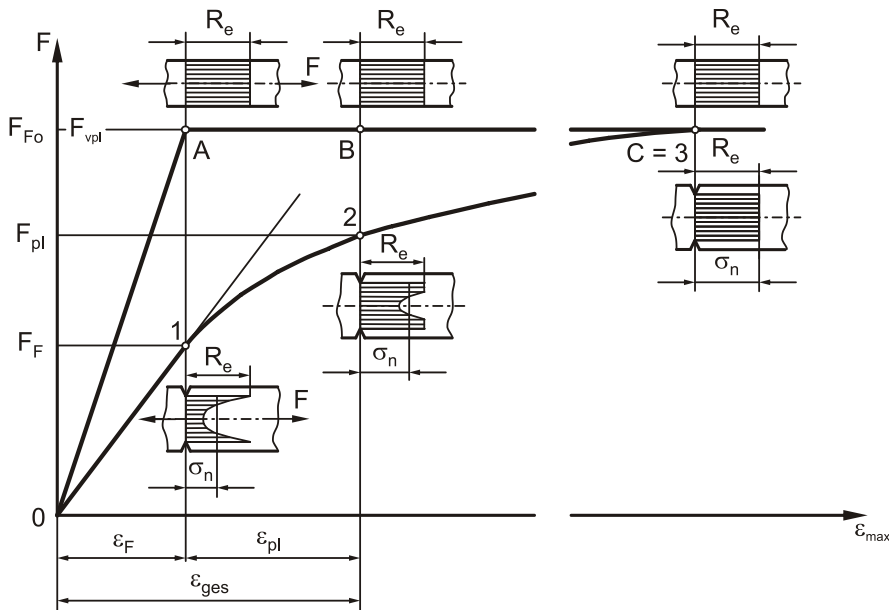


Bild 8.4: Bauteil-Fließkurve

1. Ungekerbter Stab

(gleichmäßige Spannungsverteilung, homogene Beanspruchung)

Fließen bei: $\sigma = R_e$ (Stelle A)Fließlast: $\frac{F_{F0}}{A} = R_e \rightarrow F_{F0} = R_e A$

2. Gekerbter Stab

(ungleichmäßige Spannungsverteilung, inhomogene Beanspruchung)

Fließbeginn bei: $\sigma_{\max} = R_e$ Last bei Fließbeginn: $\alpha_k \frac{F_F}{A} = R_e \rightarrow F_F = \frac{R_e A}{\alpha_k}$ (Stelle 1)Vollplastischer Zustand bei: $\sigma_n (= \sigma_{\max}) = R_e$ Last für vollplast. Zustand: $\frac{F_{vpl}}{A} = R_e \rightarrow F_{vpl} = R_e A$ (Stelle 3)

Teilplastischer Zustand: $\varepsilon_{pl} \rightarrow F_{pl}, \frac{F_{pl}}{F_F} = n_{pl}$ (Stützziffer)

Last für teilplast. Zustand: $F_{pl} = n_{pl} F_F = n_{pl} R_e \frac{A}{\alpha_k}$ (Stelle 2)

Teilplastischer Zustand bis: $\alpha_k \frac{F_{pl}}{A} = n_{pl} R_e$

Festigkeitsbedingung: $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$

$$\alpha_k \sigma_n \leq n_{pl} \frac{R_e}{S_F}$$

Bestimmung der Stützziffer:

$n_{pl} = f(\varepsilon_{pl})$ aus Bauteil-Fließkurve $F = f(\varepsilon_{max})$

Näherung:
$$n_{pl} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}}$$

Richtwerte: Ferritisch-perlitische Stähle: $\varepsilon_{ges} = 0,5\%$

Austenitische Stähle: $\varepsilon_{ges} = 1\%$

Zäher Werkstoff: Versagen durch Bruch

a) Ungekerbter Stab:

(Gewalt-) Bruch bei:
$$\sigma_n = R_m \left(R_m = \frac{F_{max}}{A_0} \right)$$

b) Gekerbter Stab:

(Gewalt-) Bruch bei:
$$\sigma_n = R_{mk} \left(R_{mk} = \frac{F_{max}}{A_k} \right)$$

 (R_{mk} : Kerbzugfestigkeit, $R_{mk} \geq R_m$)

Festigkeitsbedingung: $\sigma_n \leq \sigma_{zul}$

↓

$$\sigma_n \leq \frac{R_m}{S_B}$$

8.2 Schwingende Beanspruchung: Kerbwirkungszahl

Werkstoffverhalten:

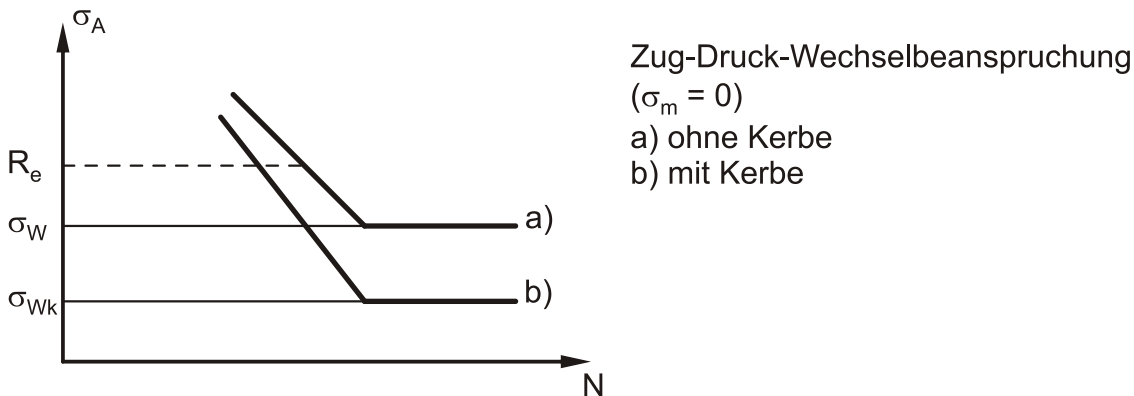


Bild 8.5: Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung

ungekerbt:

Schwingungsbruch, wenn $\sigma_a = \sigma_W$

gekerbt:

Schwingungsbruch, wenn $\sigma_{amax} = \sigma_W$

mit $\sigma_{amax} = \alpha_k \sigma_{an} (\sigma_W < R_e)$: $\alpha_k \sigma_{an} = \sigma_W$

Nennspannung bei Bruch: $\sigma_{an} = \sigma_{Wk}$

Bruch theoretisch bei: $\sigma_{Wk} = \frac{\sigma_W}{\alpha_k}$

Bruch experimentell bei: $\sigma_{Wk} = \frac{\sigma_W}{\beta_k}$

Kerbwirkungszahl ($\sigma_m = 0$): $\beta_k = \frac{\sigma_W}{\sigma_{Wk}}$

Kerbwirkungszahl allgemein: $\beta_k = \frac{\sigma_A}{\sigma_{Ak}}$

Maximale Spannungsamplitude: $\sigma_{amax} = \beta_k \sigma_{an}$

$$\beta_k = f(\underbrace{\text{Kerbform, Beanspruchungsart, Werkstoff, ...}}_{\alpha_k})$$

Theoretische Grenzwerte: $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$

$(\sigma_{Wk} = \sigma_W)$
kerbunempfindliche
Werkstoffe

$(\sigma_{Wk} = \sigma_W / \alpha_k)$
voll kerbempfindliche
Werkstoffe

Berechnung von β_k nach Siebel: $\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi}$

n_χ : dynamische Stützziffer

$$n_\chi = f(\chi^+, R_e \text{ bzw. } R_m)$$

$$n_\chi = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha_k \sigma_n}{\beta_k \sigma_{an}} = \frac{\sigma_{\max th}}{\sigma_{a \max eff}}$$

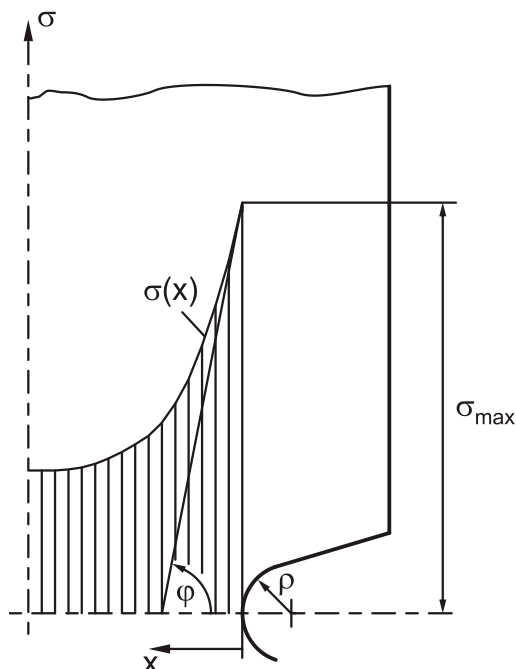
Bezogenes Spannungsgefälle an der
höchstbeanspruchten Stelle:

$$\chi^+ = \frac{1}{\sigma_{\max}} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)_{\max}$$

$$\chi^+ = \chi_0^+ + \chi_k^+$$

χ_0^+ = Bezogenes Spannungsgefälle aus
Beanspruchungsart (Biegung, Torsion)

χ_k^+ = Bezogenes Spannungsgefälle aus
Kerbe



Bestimmung von χ^+ und n_χ :
siehe Anhang

Bild 8.6: Spannungsgefälle an der Kerbe

Näherung für ferritisch-perlitische Stähle:

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{C}{\rho}}}$$

R_e : Streckgrenze in [MPa]

ρ : Kerbradius in [mm]

$C=2$: bei Zug/Druck und Biegung

$C=1$: bei Torsion

Auswirkung auf das Festigkeitsverhalten:

Schwingungsbruch bei:

$$\sigma_{\text{amax}} = \sigma_A$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{\text{amax}} = \sigma_{\text{azul}}$$

$$\beta_k \sigma_{\text{an}} \leq \frac{\sigma_A}{S_D}$$

(für zähe und spröde Werkstoffe)

Oberflächeneinfluss kann bei Kerben im Allgemeinen vernachlässigt werden.

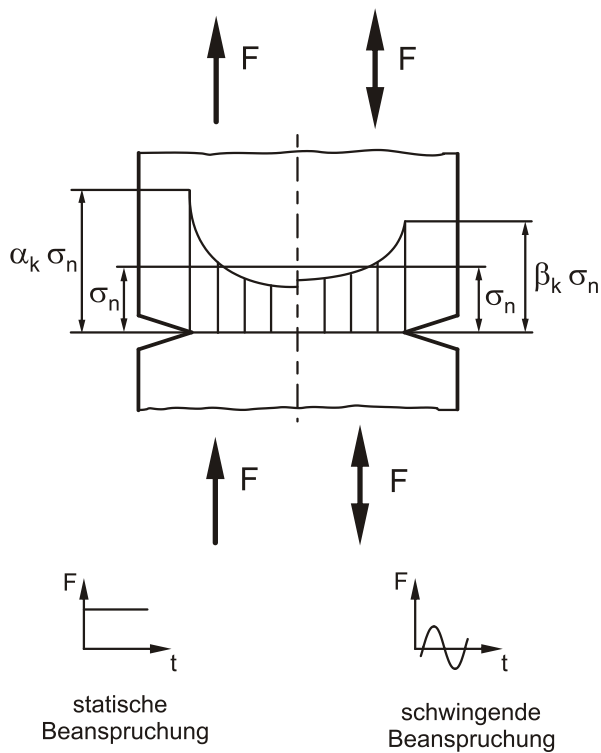


Bild 8.7: Kerbwirkung bei statischer und schwingender Beanspruchung

9 Anhang

Geänderte Zeichen für den Zugversuch:

Mit der Ausgabe Mai 1975 der DIN 50 145 (heute DIN EN 10 002) wurden die in der untenstehenden Tabelle zusammengestellten neuen Kurzzeichen eingeführt. Sie sollen der Vereinheitlichung der Symbole im internationalen Gebrauch dienen. Die neuen Zeichen gelten bisher jedoch nur für die Kennwerte des Zugversuchs. Alle übrigen Werkstoffkennwerte werden noch nach der früheren Bezeichnungsweise gebildet. So heißt z.B. die Zugfestigkeit R_m (früher σ_B), während die Druckfestigkeit mit σ_{dB} , die Biegefestigkeit mit σ_{bB} usw. bezeichnet wird.

Bezeichnung	Kurzzeichen		Einheit
	früher	neu	
Streckgrenze	σ_S	R_e	MPa
Ersatzstreckgrenze	$\sigma_{0,2}$	$R_{p0,2}$	MPa
Zugfestigkeit	σ_B	R_m	MPa
Bruchdehnung	δ	A	%
Brucheinschnürung	ψ	Z	%

Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl verschiedener Werkstoffe

Werkstoff	Elastizitätsmodul [MPa]	Querkontraktionszahl
Eisen	210 000	0,29
Ferritisch-perlitischer Stahl	200 000 - 210 000	0,3
Austenitischer Stahl	190 000 - 203 000	0,3
Grauguss mit lamellarem Graphit	80 000 - 130 000	0,25 - 0,27
Grauguss mit Kugelgraphit	165 000 - 185 000	0,27 - 0,29
Aluminiumlegierungen	60 000 - 80 000	0,33
Magnesiumlegierungen	40 000 - 45 000	0,3
Titanlegierungen	112 000 - 130 000	0,32 - 0,38
Messing	80 000 - 125 000	0,35
Bronze	110 000 - 125 000	0,35

Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

	Alte Bezeichnung	Neue Bezeichnung (seit 1993)	$R_e, R_{p0,2}$ MPa min.	R_m MPa	A_5 % min.
Stähle für den Stahlbau (S) neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 Maschinenbau- stähle (E)	St 33	S185	185	290 - 510	28
	St 37	S235	235	340 - 470	26
	St 42	S260	260	420 - 500	22
	St 44	S275	275	410 - 560	22
	St 52	S355	355	490 - 630	22
	St 50	E295	295	470 - 610	20
	St 60	E335	335	570 - 710	16
	St 70	E360	360	670 - 830	11
Vergütungs- Stähle neu: DIN EN 10083 alt: DIN 17200	C 35	C35	430	600 - 750	19
	C 45	C45	490	650 - 800	16
	C 55	C55	550	800 - 950	12
	41 Cr 4	41Cr4	800	900 - 1100	12
	42 CrMo 4	42CrMo4	900	1000 - 1200	11
	34 CrNiMo 6	34CrNiMo6	1000	1100 - 1300	10
Federstähle DIN 17221 (nicht ersetzt)	38 Si 6	38Si6	1030	1180 - 1370	6
	60 SiMn 5	60SiMn5	1050	1350 - 1550	6
	58 CrV 4	58CrV4	1350	1500 - 1700	6
Nichtrostende Stähle neu: DIN EN 10088 alt: DIN 17440	X 7 Cr 13	X7Cr13	250	450 - 650	20
	X 12 CrNi 18 8	X12CrNi18-8	250	500 - 700	50
	X 10 CrNiMoTi 18 10	X10CrNiMoTi18-8	230	500 - 750	40

- Unlegierte Baustähle: S bzw. E + Zahl: Mindeststreckgrenze [MPa] für kleinste Erzeugnisdicke, bisher Angabe der Zugfestigkeit
- Vergütungs-, Feder-, nichtrostende Stähle: Zahlen beziehen sich auf die chemische Zusammensetzung
- Weitere Informationen durch Zusatzsymbole (Kerbschlagarbeit, Wärmebehandlung, Verwendung)

	Alte Bezeichnung	Neue Bezeichnung	R_m MPa	σ_{bB} MPa	σ_{dB} MPa
Gusseisen mit lamellarem Graphit DIN 1691 (bleibt erhalten)	GG-10	EN-GJL-100	100	250	500 – 600
	GG-15	EN-GJL-150	110 - 230	270 - 340	550 – 700
	GG-20	EN-GJL-200	160 - 280	330 - 410	600 – 830
	GG-25	EN-GJL-250	210 - 330	390 - 460	700 – 1000
	GG-30	EN-GJL-300	260 - 330	450 - 480	850 – 1200
	GG-35	EN-GJL-350	310 - 380	510 - 540	950 – 1400
	GG-40	EN-GJL-400	360 - 400	570 - 600	1100 – 1400

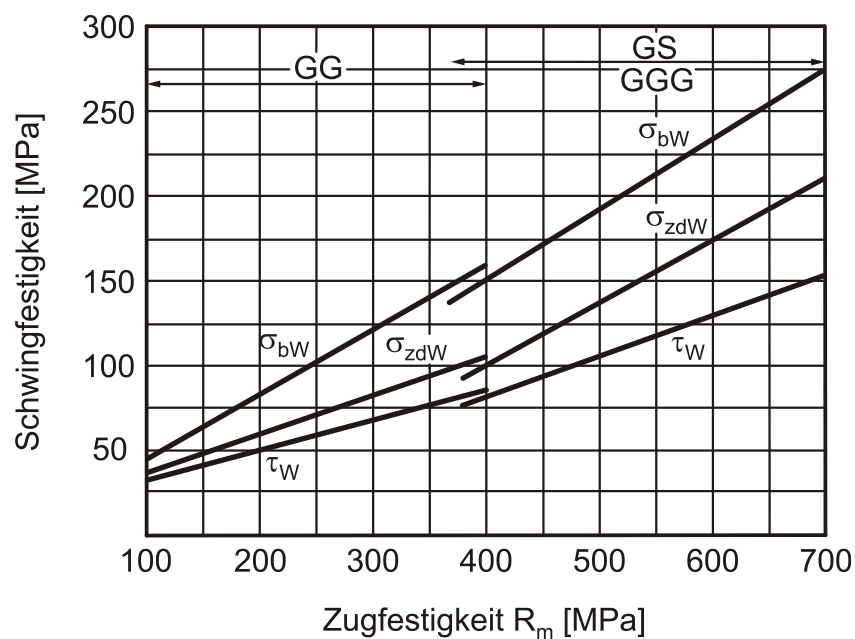


Bild A 1: Wechselfestigkeit von Gusswerkstoffen in Abhängigkeit der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)

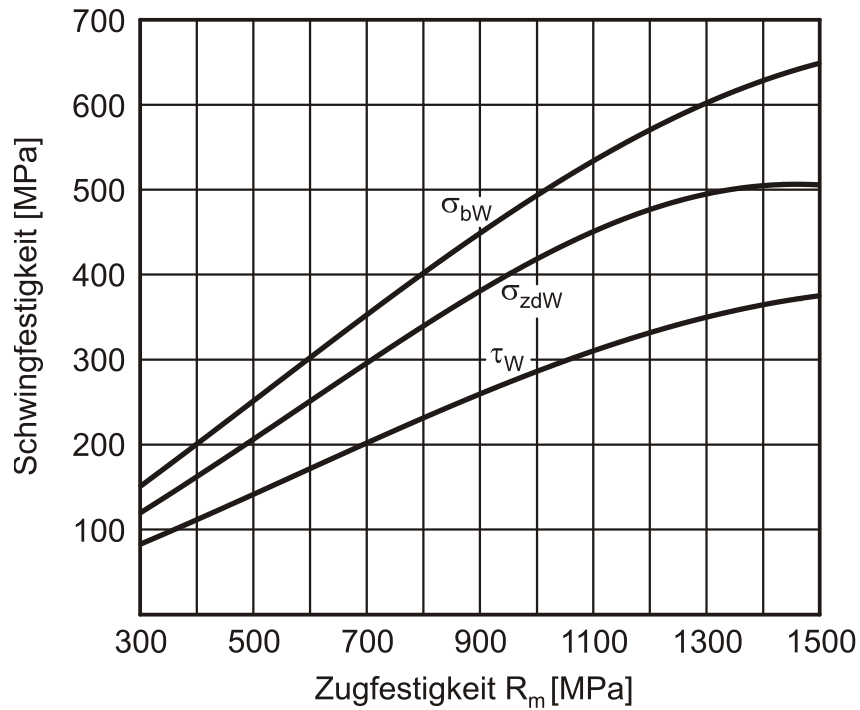


Bild A 2: Wechselfestigkeit von Stahl in Abhängigkeit der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)

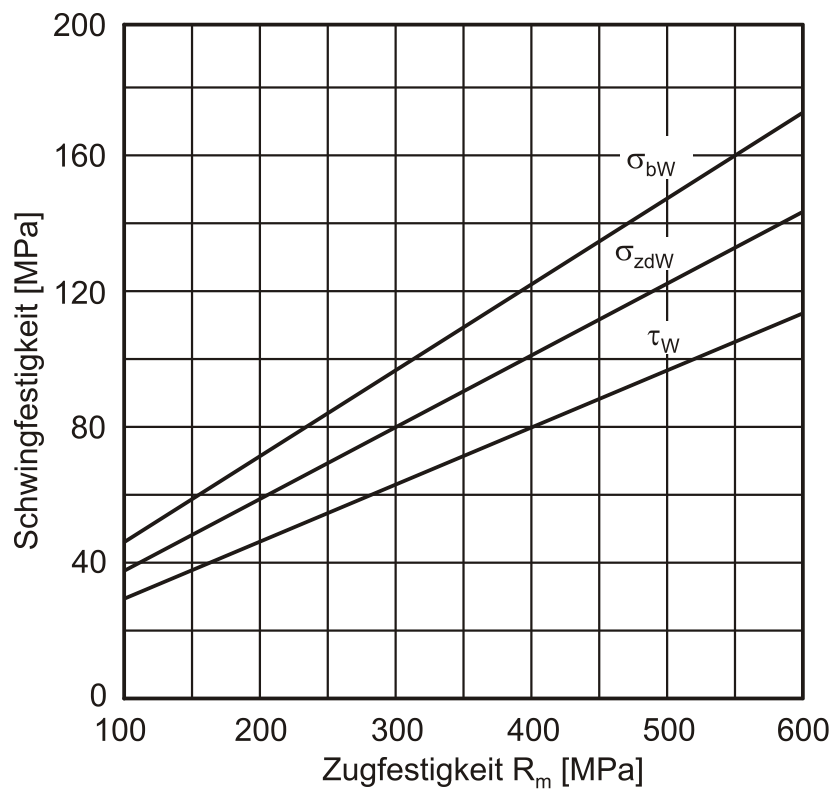


Bild A 3: Wechselfestigkeit von Leichtmetallen in Abhängigkeit der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)

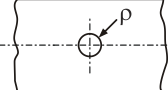
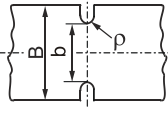
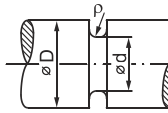
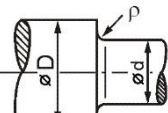
Kerbform	Beanspruchungsart	$\chi^+ = \chi_0^+ + \chi_k^+$ [mm ⁻¹]
	Zug-Druck	$\frac{2}{\rho}$
	Zug-Druck Biegung	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{b} + \frac{2}{\rho}$
	Zug-Druck Biegung Torsion	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{d} + \frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{d} + \frac{1}{\rho}$
	Zug-Druck Biegung Torsion	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{4}{D+d} + \frac{2}{\rho}$ $\frac{4}{D+d} + \frac{1}{\rho}$

Bild A 5: Bezogenes Spannungsgefälle für verschiedene Kerbformen und Beanspruchungsarten

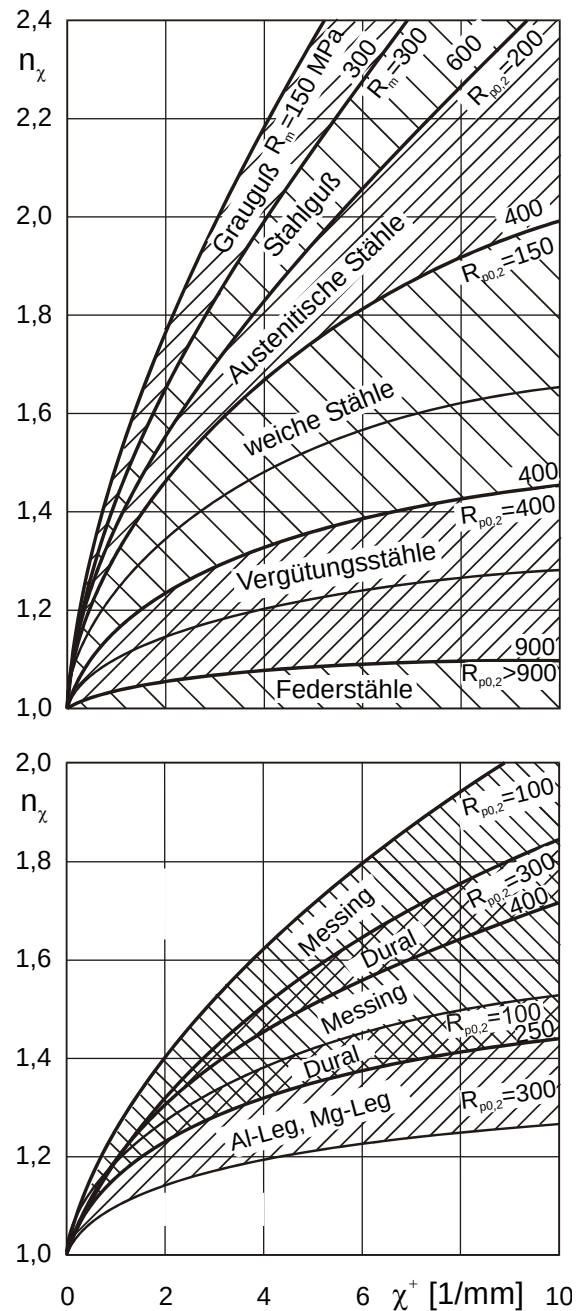


Bild A 4: Dynamische Stützziffer in Abhängigkeit vom Spannungsgefälle ($R_{p0,2}$ und R_m in MPa);

oben: Stähle (allgemein),
unten: NE- Metalle

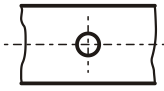
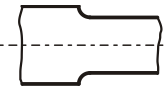
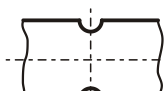
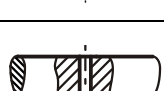
Bauteilform		Belastung		
		Zug bzw. Druck	Biegung	Torsion
Flachstab mit Kreisloch		Seite 56	-	-
Abgesetzter Flachstab		Seite 57	Seite 57	-
Flachstab mit Außenkerben		Seite 58	Seite 58	-
Abgesetzter Rundstab		Seite 59	Seite 59	Seite 60
Rundstab mit Umdrehungskerbe		Seite 60	Seite 61	Seite 61
Rundstab mit Querbohrung		Seite 62	Seite 62	Seite 62

Bild A 6: Formzahldiagramme (Übersicht)

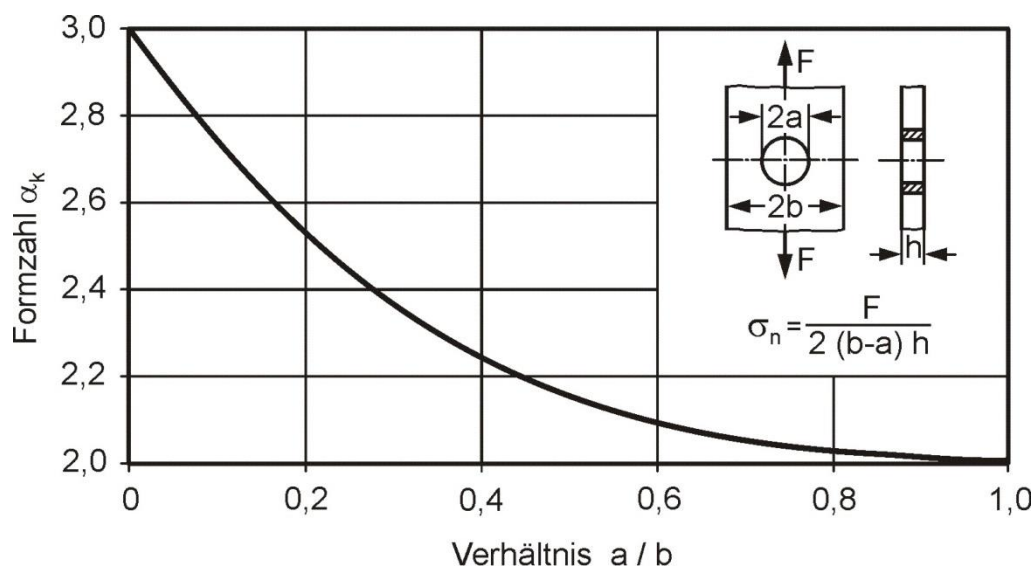
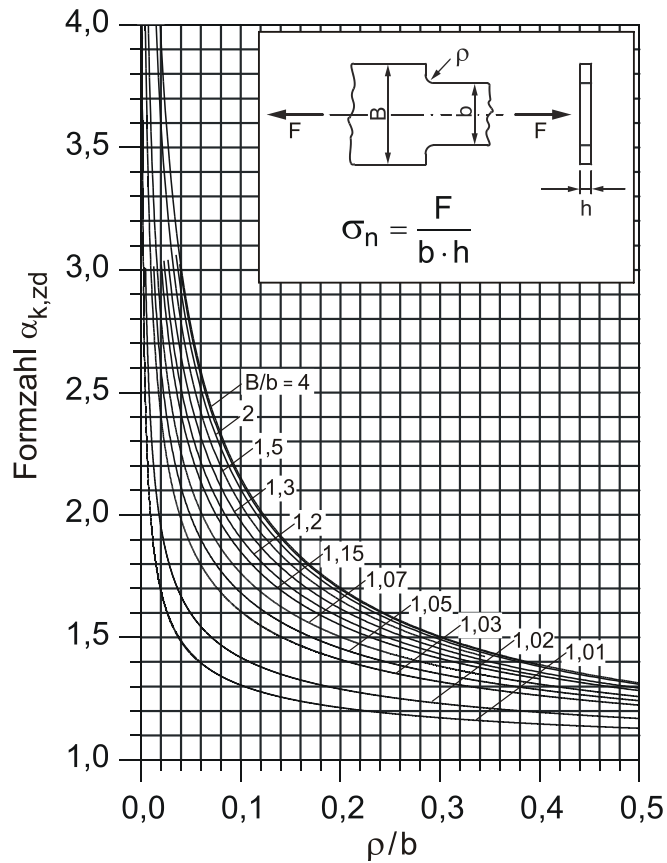
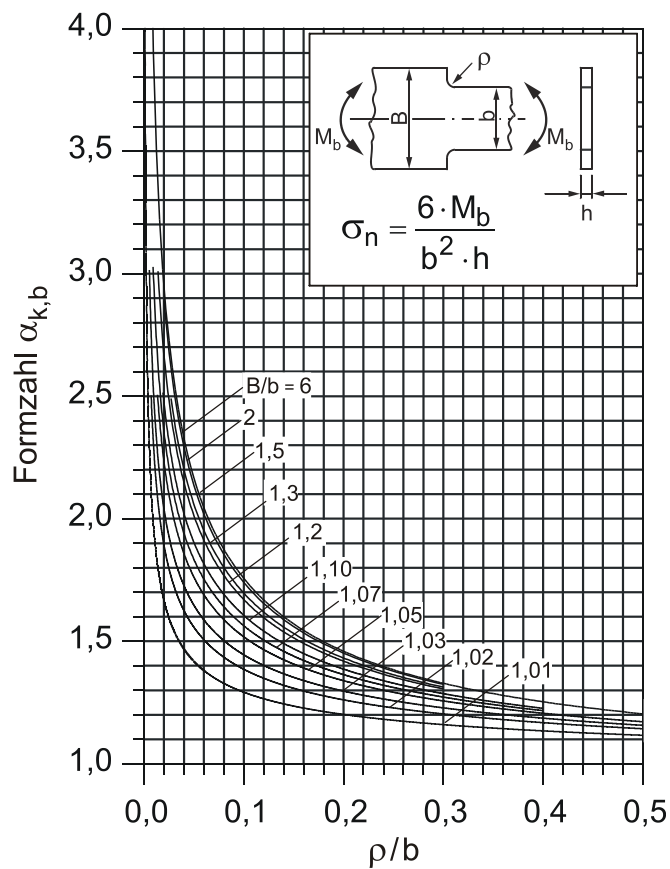


Bild A 7: Formzahlen für Lochstäbe unter Zugbeanspruchung

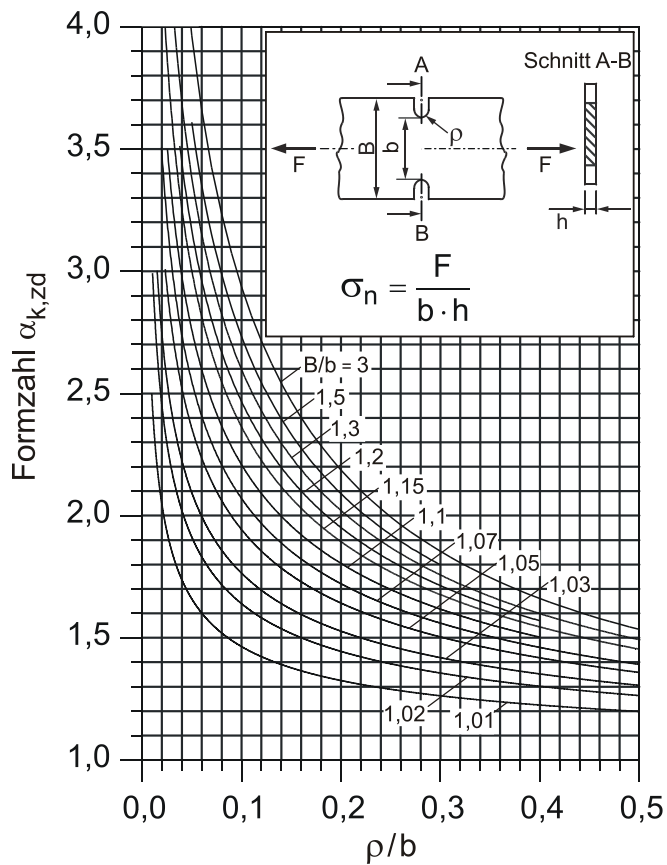


$$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{(B-b)} + 5 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{b}\right)^2}}$$

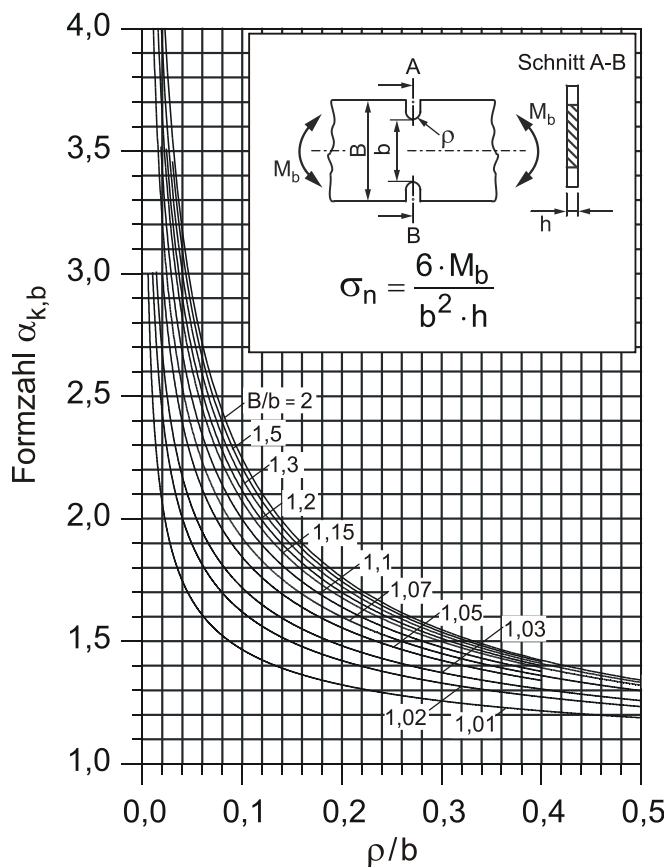


$$\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{(B-b)} + 12 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{b}\right)^2}}$$

Bild A 8: Formzahlen für abgesetzte Flachstäbe

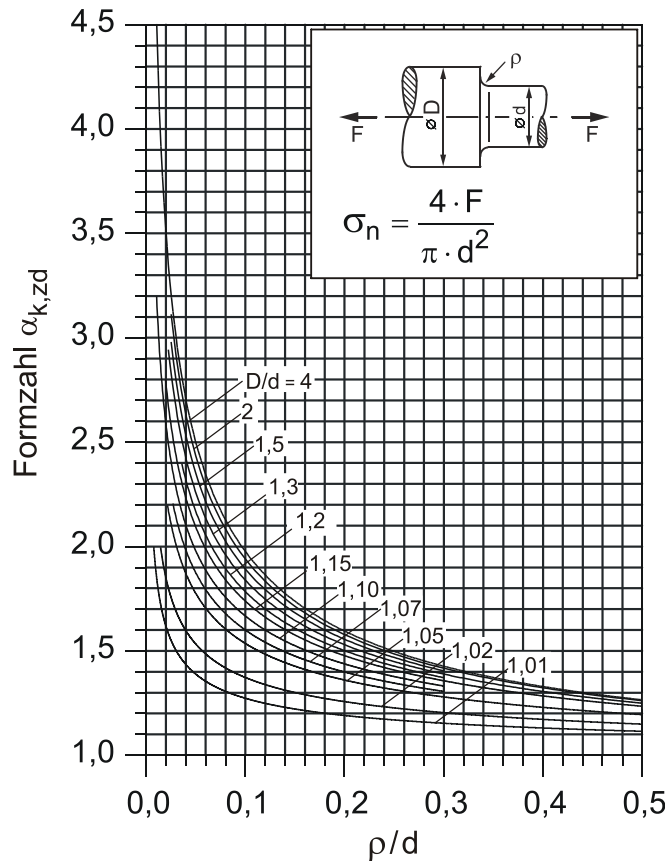


$$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,44 \cdot \frac{\rho}{(B-b)} + 1,7 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{b}\right)^2}}$$

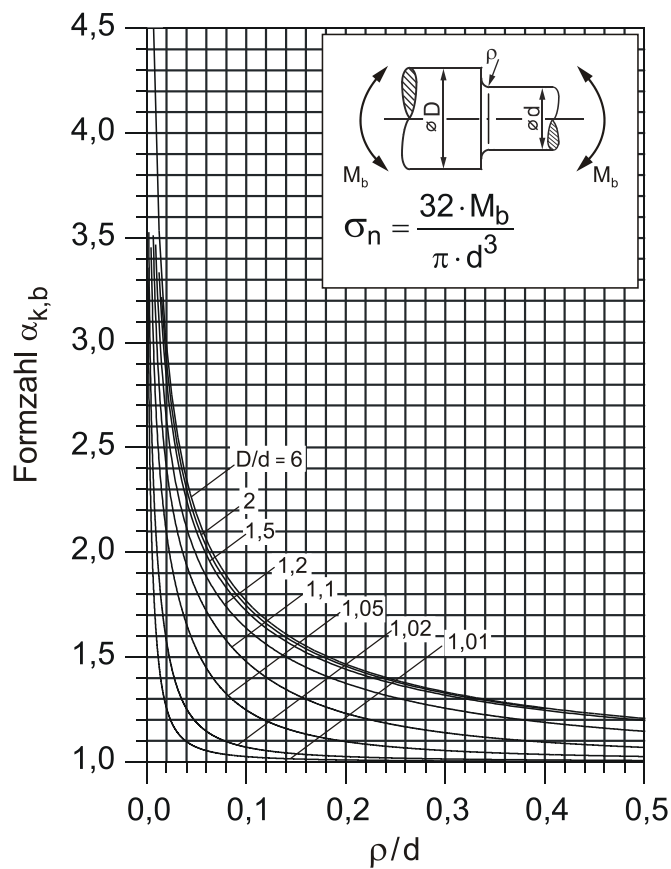


$$\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,4 \cdot \frac{\rho}{(B-b)} + 4,2 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{b}\right)^2}}$$

Bild A 9: Formzahlen für Flachstäbe mit Außenkerbe

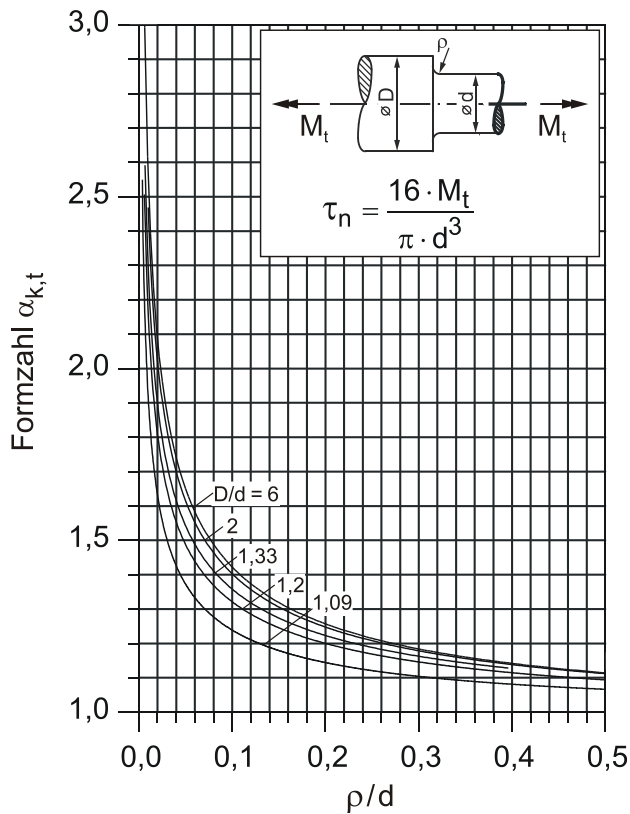


$$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{124 \cdot \frac{\rho}{(D-d)} + 7 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2}}$$



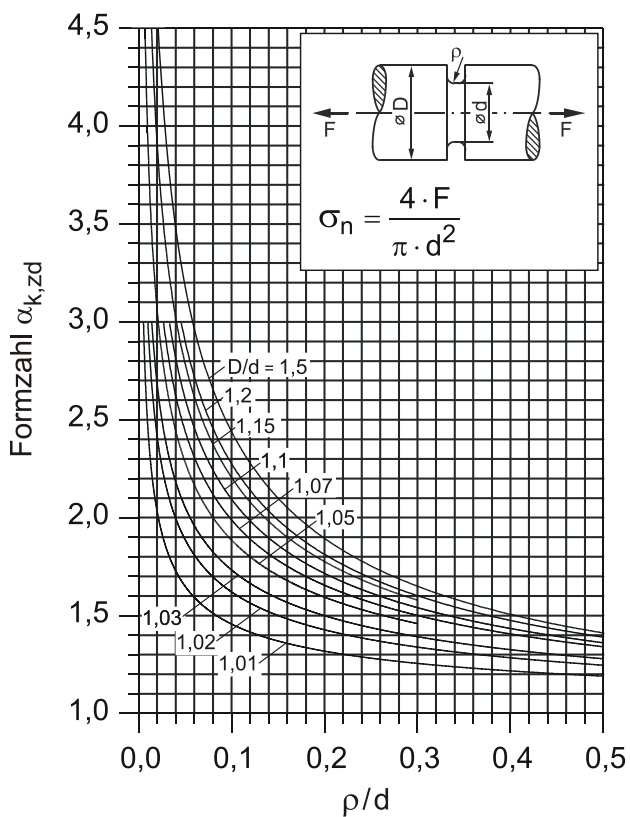
$$\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{124 \cdot \frac{\rho}{D-d} + 11,6 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2 + 0,2 \cdot \left(\frac{2\rho}{D-d}\right)^3 \cdot \frac{d}{D}}}$$

Bild A 10: Formzahlen für abgesetzte Rundstäbe



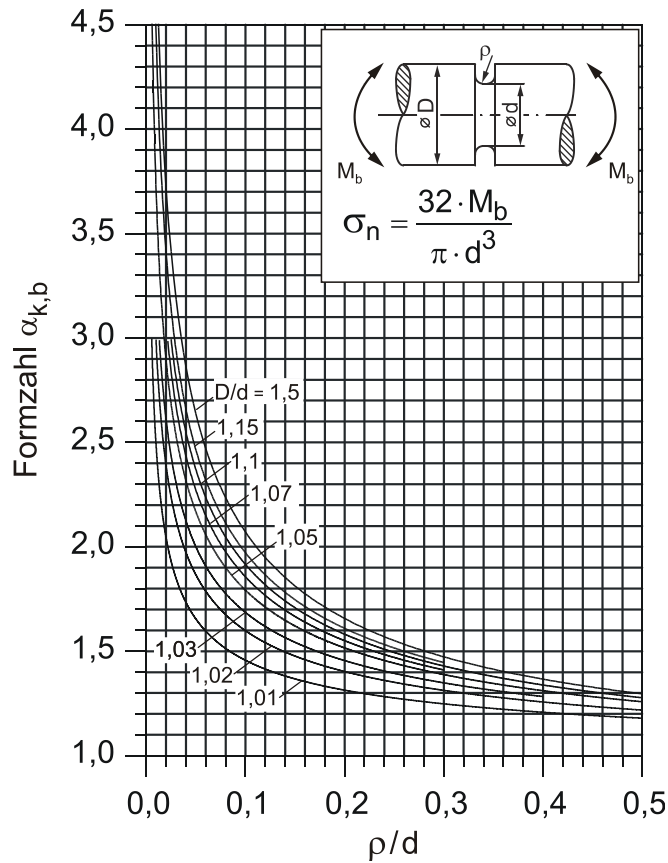
$$\alpha_{k,t} = 1 + \frac{1}{\sqrt{6,8 \cdot \frac{\rho}{D-d} + 38 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2 + \left(\frac{2\rho}{D-d}\right)^2 \cdot \frac{d}{D}}}$$

Bild A 11: Formzahlen für abgesetzte Rundstäbe

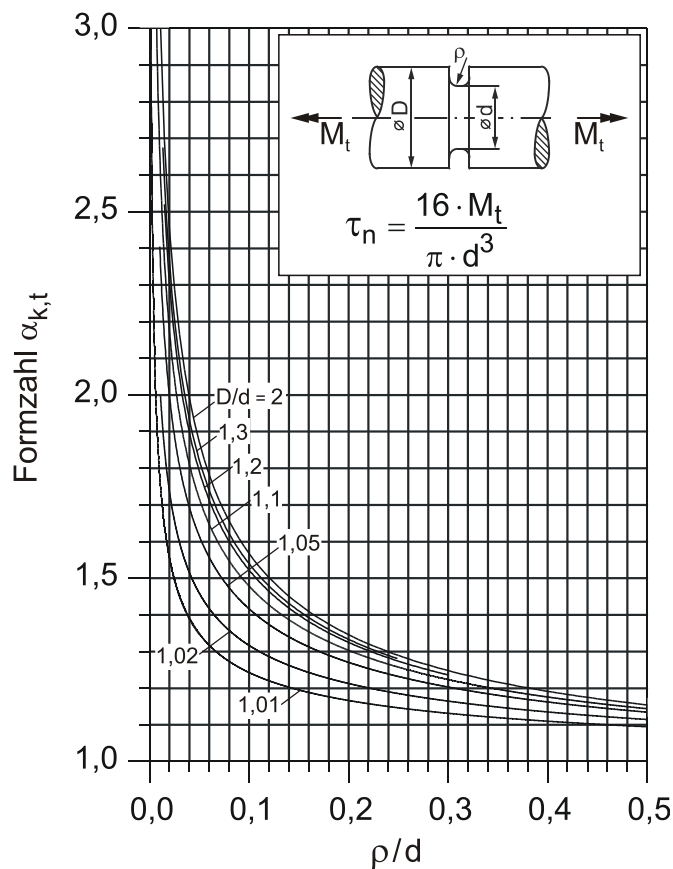


$$\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,44 \cdot \frac{\rho}{(D-d)} + 2,74 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2}}$$

Bild A 12: Formzahlen für Rundstäbe mit Umdrehungskerbe

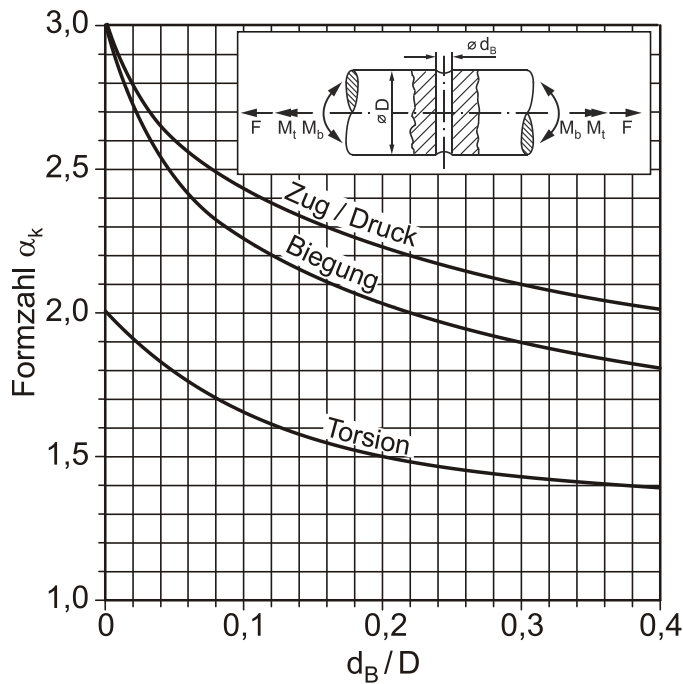


$$\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,4 \cdot \frac{\rho}{(D-d)} + 5,5 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2}}$$



$$\alpha_{k,t} = 1 + \frac{1}{\sqrt{14 \cdot \frac{\rho}{(D-d)} + 20,6 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + \frac{2\rho}{d}\right)^2}}$$

Bild A 13: Formzahlen für Rundstäbe mit Umdrehungskerbe



$$A \approx \frac{\pi \cdot D^2}{4} - D \cdot d_B$$

$$W_b = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{d_B \cdot D^2}{6}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{d_B \cdot D^2}{6}$$

Bild A 14: Formzahlen für quergebohrte Rundstäbe

Vergleichsspannungen				
Spannungszustand				
Hypo- these	dreiachsrig	zweiachsrig		
	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0^{+)}$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	σ_b, τ_t
NH	σ_1 (Zug) bzw. σ_3 (Druck)	σ_1	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\frac{\sigma_b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$
SH	$\sigma_1 - \sigma_3$	σ_1	$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}^{++)}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$
GEH	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$

⁺⁾ Für die Fälle $\sigma_1 > 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$ bzw. $\sigma_1 = 0; \sigma_2 < 0; \sigma_3 < 0$ ergibt sich σ_v aus Spalte 1

⁺⁺⁾ gilt nur für $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$; für $\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ ist σ_v (SH) = σ_v (NH)

Bild A 15: Festigkeitshypothesen NH, SH, GEH

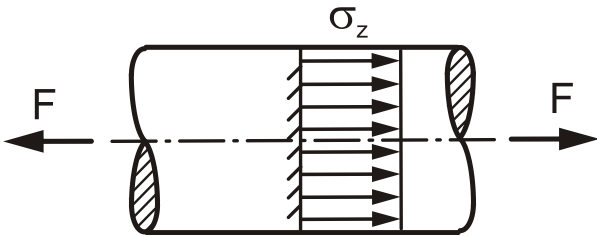
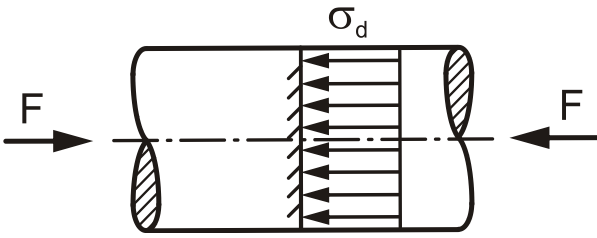
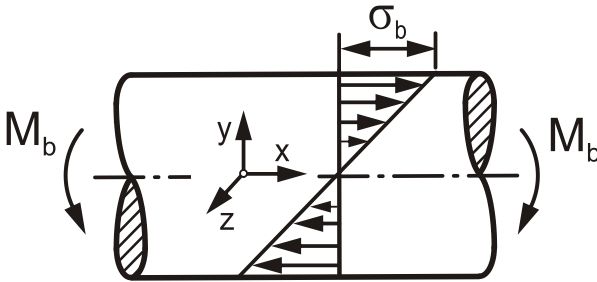
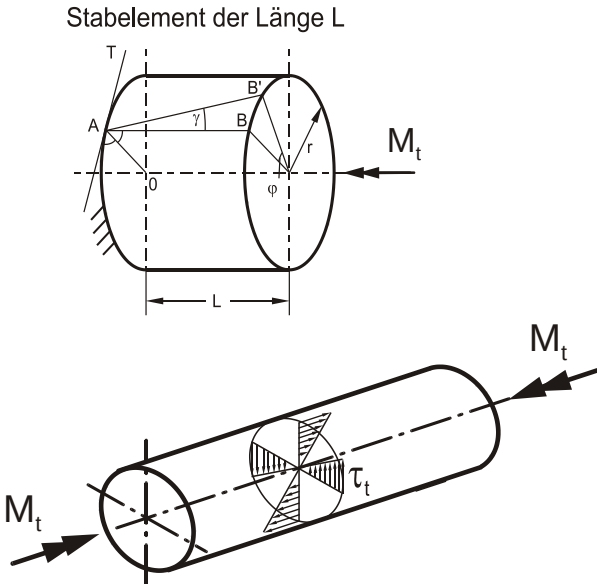
Beanspruchung	Spannungsverteilung	Maximalspannung
Zug		$\sigma_z = \frac{F}{A}$
Druck		$\sigma_d = -\frac{F}{A}$
Biegung		$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$
Torsion	Stabelement der Länge L 	$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$

Bild A 16: Grundbelastungsfälle

Lastfall \ Werkstoff	duktil		spröd
	Fließen	Bruch	Bruch
Zug	$\frac{R_e}{S_F}$	$\frac{R_m}{S_B}$	$\frac{R_m}{S_B}$
Druck	$-\frac{R_e}{S_F}$	-	$\frac{-\sigma_{dB}}{S_B}$
Knicken	$\frac{-F_K}{A \cdot S_K}$	-	$\frac{-F_K}{A \cdot S_K}$
Biegung	$\frac{R_e}{S_F}$	-	$\frac{\sigma_{dB}}{S_B}$
Schub	-	$0,7 \cdot \frac{R_m}{S_B}$	-
Torsion	$0,58 \cdot \frac{R_e}{S_F}$	$\frac{R_m}{S_B}$	$\frac{R_m}{S_B}$
Sicherheitsbeiwerte*	1,2 bis 2,0	2,0 bis 3,0	4,0 bis 9,0
typisch*	1,5	2	4

* $S_K = 2,5 \div 5$ (3,5)

Bild A 17: Zulässige Spannungen und Besonderheiten

Beanspruchungsart	Spannung	Werkstoffkennwert		
		Bezeichnung	Zeichen	Ersatzwert bei Stahl
Zug	$\sigma = \frac{F}{A}$	Streckgrenze Fließgrenze 0,2-Dehngrenze Zugfestigkeit	R_e $R_{p0,2}$ R_m	
Druck ¹⁾	$\sigma_d = -\frac{F}{A}$	Druckfließgrenze (Stauchgrenze) Druckfestigkeit	σ_{dF} σ_{dB}	R_e bzw. $R_{p0,2}$
Biegung	$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$	Biegefließgrenze Biegefestigkeit	σ_{bF} σ_{bB}	R_e bzw. $R_{p0,2}$
Schub	$\tau = \frac{F}{A}$	Scherfestigkeit	τ_{aB}	$(0,65 - 0,75) \cdot R_m$
Torsion	$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$	Torsionsfließgrenze Torsionsfestigkeit	τ_{tF} τ_{tB}	$0,58 \cdot R_e$ bzw. $0,58 \cdot R_{p0,2}$ R_m

1) Bei Druckbeanspruchung muss stets die Versagensmöglichkeit Knicken beachtet werden

Bild A 18: Spannungen und Werkstoffkennwerte für statische Beanspruchung bei Raumtemperatur

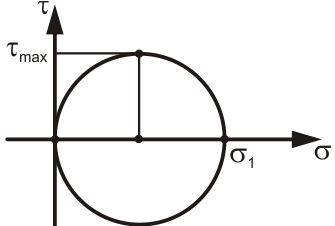
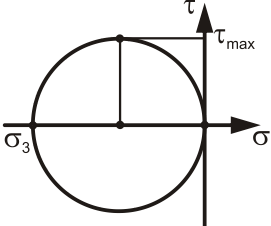
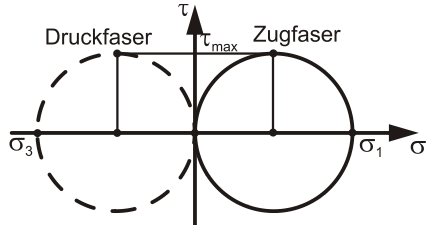
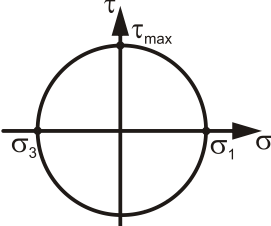
Beanspruchungsart	Spannungszustand	Mohrscher Spannungskreis
Zug	einachsig $\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$	
Druck	einachsig $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 < 0$	
Biegung	einachsig Druckfaser Zugfaser $\sigma_1 = 0$ $\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 < 0$ $\sigma_3 = 0$	
Torsion	zweiachsig $\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 < 0$	

Bild A 19: Mohrsche Spannungskreise für die Grundbelastungsfälle

Beanspruchung	Dehnungen	Spannungen	Schubspannungs-Schiebungs-Beziehungen:
σ_x	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x$ $\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E} \cdot \sigma_x$ $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot \sigma_x$	$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ $\sigma_y = 0$ $\sigma_z = 0$	
σ_x, σ_y ($\sigma_z = 0$)	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$ $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$	$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x)$ $\sigma_z = 0$	
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z))$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z))$ $\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y))$	$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} e \right)$ $\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} e \right)$ $\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} e \right)$ $(e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$	$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$ $\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$ $\tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}$ $\left(G = \frac{E}{2(1+\mu)} \right)$

Bild A 20: Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

Nennspannungen: Zug/Druck: $\sigma_n = \pm F / A$ Biegung: $\sigma_{bn} = M_b / W_b$ Torsion: $\tau_{tn} = M_t / W_t$			
Beanspruchung	Werkstoff	Versagensart	Festigkeitsbedingung
statisch	zäh	Fließen	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$
			$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$ $\sigma_{\text{zul}} = n_{\text{pl}} R_e / S_F$
		Bruch	$\sigma_n \leq \sigma_{\text{zul}}$
			$\sigma_{\text{zul}} = R_m / S_B$
	spröd	Bruch	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$
			$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$ $\sigma_{\text{zul}} = R_m / S_B$
schwingend	zäh/spröd	Schwingbruch	$\sigma_{\text{amax}} \leq \sigma_{\text{azul}}$
			$\sigma_{\text{amax}} = \beta_k \cdot \sigma_{\text{an}}$ $\sigma_{\text{a zul}} = \sigma_A / S_D$

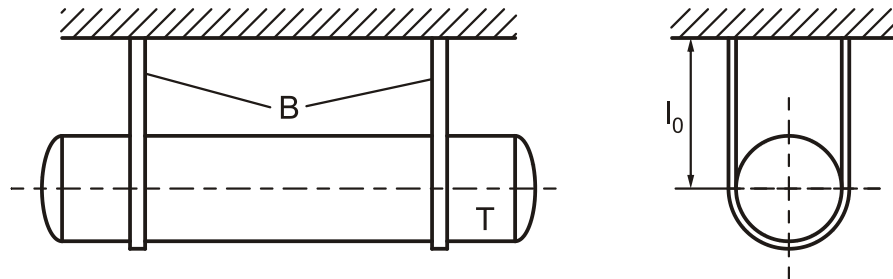
Bild A 21: Festigkeitsberechnung von Bauteilen mit „Kerben“

10 Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Eine Reaktionstrommel T ist an zwei Stahlbändern B aus S260 aufgehängt (siehe Skizze). Die Masse der leeren Trommel beträgt $m_T = 1600 \text{ kg}$, die der gefüllten Trommel $m_{\text{ges}} = 3400 \text{ kg}$. Die Stahlbänder haben den Querschnitt $20 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$.

S260: $R_e = 260 \text{ MPa}$, $R_m = 420 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$



1. Wie groß ist die Spannung in den Bändern bei leerer und voller Trommel?
2. Wie groß ist die Sicherheit der Bänder gegen gleichzeitiges Versagen im Bereich l_0 ?
3. Um welchen Betrag senkt sich die Trommel beim Füllen, wenn die freie Länge der Bänder bei leerer Trommel $l_0 = 1,2 \text{ m}$ beträgt (siehe Skizze)?

Aufgabe 2:

1. Zeichnen Sie (soweit möglich maßstäblich) die Spannungs-Dehnungs-Diagramme von S210 und EN-GJL-350
2. Wie groß ist bei der erreichten Höchstlast die elastische und die plastische Dehnung für die beiden Werkstoffe?

S210: $R_e = 210 \text{ MPa}$, $R_m = 340 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 28\%$,
 $A_{gt} \approx 2/3 A_5$

EN-GJL-350: $R_m = 350 \text{ MPa}$, $E = 100000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,25$

Aufgabe 3:

Ein Stab mit Kreisquerschnitt aus dem Werkstoff C35 soll als Zuganker verwendet werden. Er hat eine statische Betriebskraft von $F = 12500 \text{ N}$ aufzunehmen.

C35: $R_e = 430 \text{ MPa}$, $R_m = 630 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 19\%$

1. Mit welchem Durchmesser ist der Zuganker auszuführen?
2. Wie groß ist die auftretende Dehnung?
3. Bei welcher Zugkraft wäre mit einem Bruch zu rechnen?

Aufgabe 4:

An einem Baugerüst werden Rohre (Länge $L = 4,20 \text{ m}$, Außendurchmesser $D = 60 \text{ mm}$, Wanddicke $s = 5 \text{ mm}$) aus S235 als Stützen verwendet, die statisch auf Druck beansprucht sind. Sie sind so eingebaut, dass beide Enden als fest eingespannt betrachtet werden können.

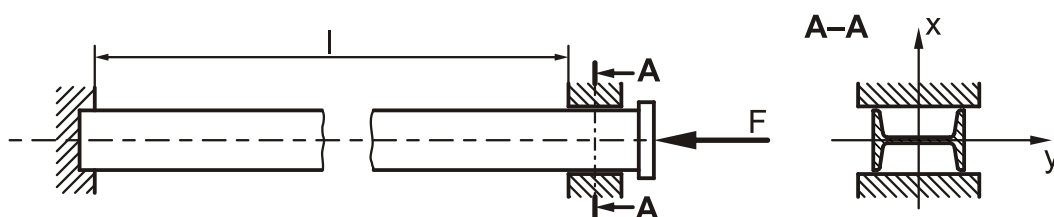
S235: $R_e = 235 \text{ MPa}$, $R_m = 400 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 26\%$

1. Wodurch könnte eine solche Stütze versagen?
2. Wie groß ist die zulässige Druckbelastung einer Stütze?
3. Um welchen Betrag wird die Stütze dadurch zusammengedrückt?

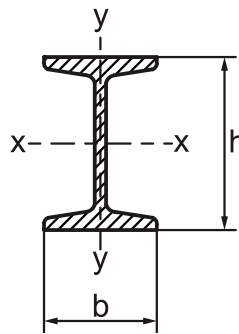
Aufgabe 5:

Ein Träger aus E295 mit dem Profil I 100 und der freien Länge $l = 2,05 \text{ m}$ ist durch die Druckkraft $F = 92 \text{ kN}$ belastet. Die Einspannbedingungen sind aus der Skizze ersichtlich. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen? Ist sie ausreichend?

E295: $R_e = 295 \text{ MPa}$, $R_m = 540 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 20\%$

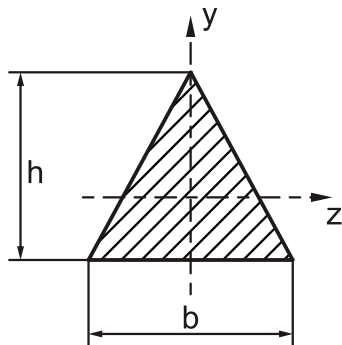


PROFIL I 100
DIN 1025



$h = 100 \text{ mm}$
 $b = 50 \text{ mm}$
 $A = 10,6 \text{ cm}^2$
 $I_x = 171 \text{ cm}^4$
 $I_y = 12,2 \text{ cm}^4$

Aufgabe 6:

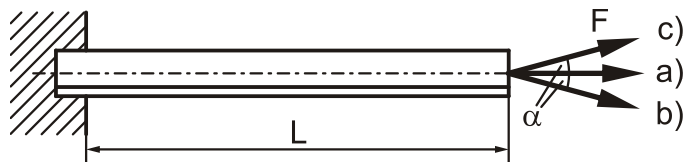


1. Man berechne das axiale Trägheitsmoment I_z und das Widerstandsmoment W_{bz} eines Trägers, dessen Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Höhe h und der Breite b ist (siehe Skizze).
2. Wie groß ist I_z und W_{bz} für ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge b ?

Aufgabe 7:

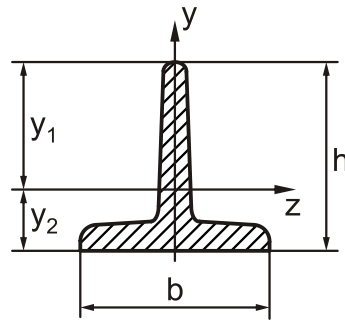
Ein hochstegiger T-Träger (Profil T50) aus Stahl S210 mit der Länge $L = 350 \text{ mm}$ ist an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft F belastet, deren Richtung sich in dem Winkelbereich $\alpha = \pm 10^\circ$ gegen die Achsrichtung ändern kann (siehe Skizze).

S210: $R_e = 210 \text{ MPa}$, $R_m = 340 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 28\%$



Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für
 a) $\alpha = 0^\circ$ b) $\alpha = 10^\circ$ nach unten c) $\alpha = 10^\circ$ nach oben

Profil T50



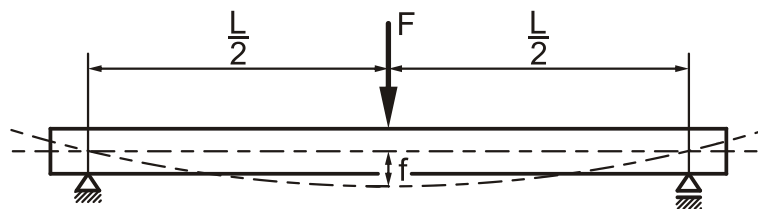
$$\begin{aligned}
 b &= h = 50 \text{ mm} \\
 A &= 5,66 \text{ cm}^2 \\
 y_1 &= 36,1 \text{ mm} \\
 y_2 &= 13,9 \text{ mm} \\
 I_z &= 12,1 \text{ cm}^4 \\
 W_{bz} &= 3,36 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Ein Rohr (Länge $L = 2000 \text{ mm}$, Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$, Wanddicke $s = 5 \text{ mm}$), das an beiden Enden gelenkig gelagert ist, wird in der Mitte durch die Kraft F belastet (siehe Skizze).

EN-GJL-400: $R_m = 400 \text{ MPa}$, $E = 110000 \text{ MPa}$, $\sigma_{b,B} = 600 \text{ MPa}$

S260: $R_e = 260 \text{ MPa}$, $R_m = 420 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$
 $\sigma_{b,F} = 260 \text{ MPa}$, $\sigma_{b,b} = 420 \text{ MPa}$



Auf welchen Betrag ist die maximale Durchbiegung f zu begrenzen, wenn als Rohrwerkstoff

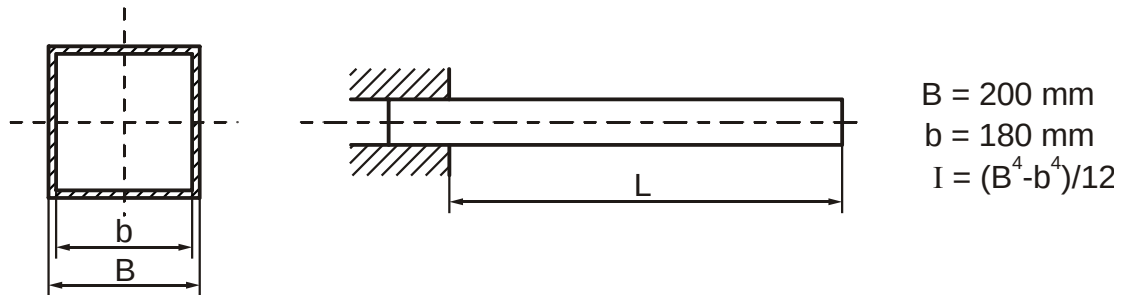
1. EN-GJL-400
2. S260

gewählt wird? (Hinweis: $f = FL^3 / 48EI$)

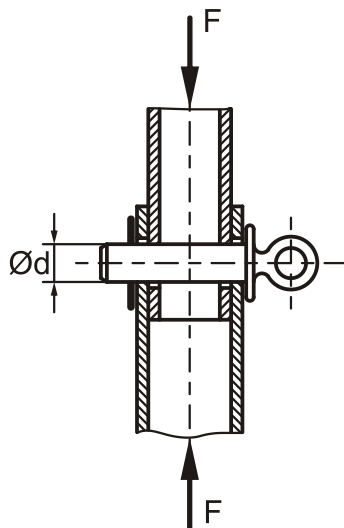
Aufgabe 9:

Ein Kastenträger aus S355 mit quadratischem Querschnitt wird beim Bau einer Brücke freitragend vorgeschoben (siehe Skizze).

S355: $R_e = 355\text{MPa}$, $R_m = 520\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$



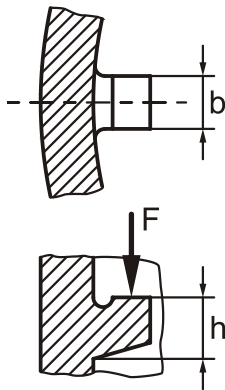
Wie groß ist die freie Länge L , bei der infolge des Eigengewichtes die ersten bleibenden Verformungen auftreten, wenn die Masse des Trägers $59,3\text{ kg/m}$ beträgt?

Aufgabe 10:

Zur Verlängerung von druckbeanspruchten Rohrstützen sollen Bolzen aus dem Stahl C22 mit $d = 15\text{ mm}$ Durchmesser verwendet werden (siehe Skizze).

Ist die Sicherheit gegen Abscheren der Bolzen ausreichend, wenn die Druckkraft auf die Stützen $F = 55\text{ kN}$ beträgt?

C22: $R_e = 360\text{MPa}$, $R_m = 610\text{MPa}$,
 $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$

Aufgabe 11:

An der Innenoberfläche eines zylindrischen Reaktionsgefäßes aus X12CrNi18-8 sind zur Auflage eines Zwischenbodens 3 um 120° gegeneinander versetzte Nocken von je 80 mm Breite angegossen (siehe Skizze).

Wie groß muss die Höhe h mindestens sein, wenn mit einer Auflagekraft bis zu 2000 kN zu rechnen ist und eine Sicherheit von 2,5 verlangt wird?

X12CrNi18-8: $R_{p0,2} = 220\text{MPa}$, $R_m = 500\text{MPa}$,
 $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 50\%$

Aufgabe 12:

Ein Rohr aus S355 mit dem Außendurchmesser $d_a = 40\text{ mm}$ und der Wanddicke $s = 5\text{ mm}$ ist durch ein Moment M_t auf Torsion beansprucht.

S355: $R_e = 360\text{MPa}$, $R_m = 520\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$

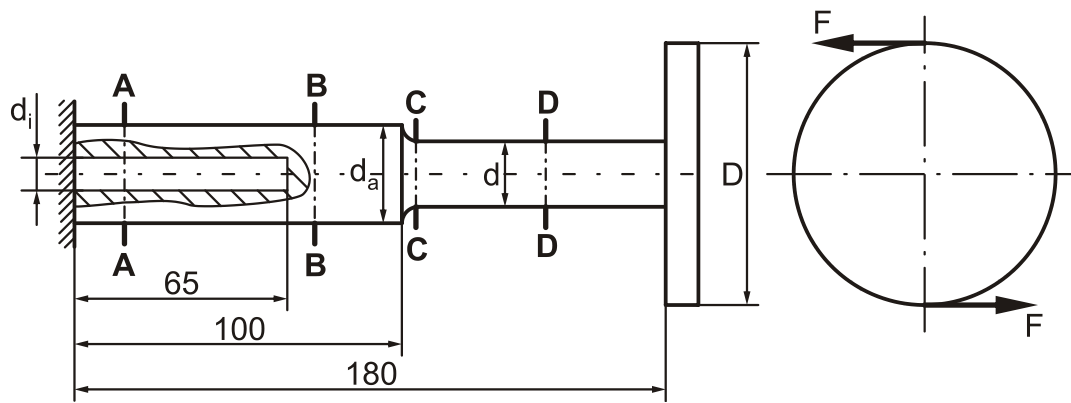
1. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf über dem Querschnitt.
2. Wie groß ist das maximal zulässige Torsionsmoment?
3. Wie groß ist hierfür die maximale Schubspannung und die zugehörige Schiebung?

Aufgabe 13:

Ein kreiszylindrischer Stab aus Vergütungsstahl 41Cr4 mit den in der Skizze angegebenen Abmessungen ist an einem Ende fest eingespannt und trägt am anderen Ende eine kreisförmige Scheibe, die durch ein tangential angreifendes Kräftepaar F verdreht wird.

41Cr4: $R_{p0,2} = 800\text{MPa}$, $R_m = 1000\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 12\%$

1. Welche Kräfte F sind nötig, um die Scheibe um 3° zu verdrehen?
2. Wie groß ist dabei die größte Schubspannung $\tau_{\max}$?
Ist diese Beanspruchung zulässig?



$$\begin{array}{lll}
 l_1 = 65 \text{ mm} & l_2 = 35 \text{ mm} & l_3 = 80 \text{ mm} \\
 d_a = 30 \text{ mm} & d_i = 10 \text{ mm} & d = 20 \text{ mm} \quad D = 80 \text{ mm}
 \end{array}$$

Aufgabe 14:

Ein Rundstab aus Gusseisen EN-GJL-400 mit dem Durchmesser $d = 30 \text{ mm}$ und geschliffener Oberfläche unterliegt einer schwingenden Zug-Druck-Belastung. Wie groß ist die höchste, beliebig oft ertragbare Last bei:

EN-GJL-400: $R_m = 400 \text{ MPa}$, $E = 110000 \text{ MPa}$, $\sigma_{w(\text{poliert})} = 85 \text{ MPa}$

1. (rein) schwellender Zugbeanspruchung?
2. (rein) schwellender Druckbeanspruchung?
3. schwingender Zugbeanspruchung mit einer statischen Vorspannung von $\sigma = 150 \text{ MPa}$?

Aufgabe 15:

Eine Torsionsfeder aus Federstahl 38Si6 ist als kreiszylindrischer Stab mit dem Durchmesser $d = 20 \text{ mm}$ und der Länge $l = 800 \text{ mm}$ ausgebildet.

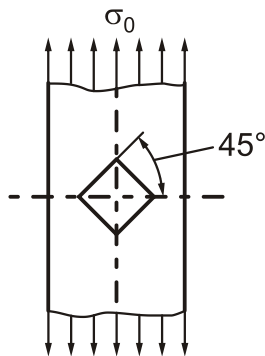
38Si6: $R_{p0,2} = 1050 \text{ MPa}$, $R_m = 1200 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 6\%$

1. Welches statische Torsionsmoment ist für den Federstahl zulässig?
2. Welches (rein) wechselnde Torsionsmoment ist für den Federstahl zulässig? (Oberfläche geschliffen)
3. Um welchen Winkel verdreht sich der Stab in den Fällen 1. und 2.?

Aufgabe 16:

Ein Zuganker aus E360 mit Kreisquerschnitt und geschliffener Oberfläche steht im Zylinderblock eines Motors unter einer statischen Vorlast von $F_1 = 15000 \text{ N}$. Bei jedem Arbeitstakt wird er zusätzlich schwellend mit $F_2 = 30000 \text{ N}$ belastet. Wie groß ist der erforderliche Durchmesser des Zugankers, wenn als Sicherheit gegen Fließen 1,5, gegen Bruch 2,0 und gegen Schwingungsbruch 2,2 gefordert ist?

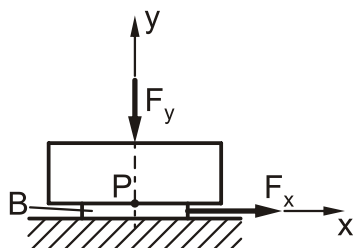
E360: $R_e = 370 \text{ MPa}$, $R_m = 700 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 11\%$

Aufgabe 17:

1. Welche Spannungen wirken an den Schnittträgern einer quadratischen Scheibe, die gemäß Skizze unter 45° zur Achse eines Blechstreifens liegen, der unter der Spannung σ_0 steht?
2. Man konstruiere aus den Schnittspannungen den Mohrschen Spannungskreis.

Aufgabe 18:

Eine Blechscheibe B wird gemäß Skizze zwischen zwei Pressplatten mit der Kraft F_y zusammengedrückt. Gleichzeitig wirkt noch die Zugkraft F_x auf die Scheibe. Dabei entstehen im Punkt P an der Oberfläche der Scheibe folgende Zugspannungen:



aus Zug: $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$

aus Druck: $\sigma_y = -100 \text{ MPa}$

aus Reibung: $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$

1. Wie groß ist die größte Zug- bzw. Druckspannung im Punkt P?
2. Unter welchen Winkeln α_1 und α_2 zur x-Richtung treten diese Spannungen auf?

Aufgabe 19:

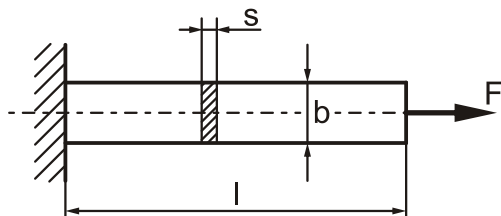
Ein Stahlrohr (Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$, Wanddicke $s = 10 \text{ mm}$) ist durch die Zugkraft $F = 425 \text{ kN}$ und das Torsionsmoment $M_t = 9250 \text{ Nm}$ statisch belastet.

1. Man zeichne den Mohrschen Spannungskreis für die höchstbeanspruchte Stelle.
2. Welches sind die Extremwerte der auftretenden Normalspannungen (=Hauptspannungen) und Schubspannungen?
3. In welchen Schnittflächen treten sie auf?
4. Welche Schnittflächen sind frei von Schubspannungen, welche sind frei von Normalspannungen?

Aufgabe 20:

Eine einseitig eingespannte Platte aus Duraluminium AlCuMg1 mit der Länge $l = 650 \text{ mm}$, der Breite $b = 150 \text{ mm}$ und der Dicke $s = 5 \text{ mm}$ wird in Längsrichtung durch die Kraft $F = 112,5 \text{ kN}$ belastet (siehe Skizze).

AlCuMg1: $R_{p0,2} = 250 \text{ MPa}$, $R_m = 380 \text{ MPa}$, $E = 72000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,33$

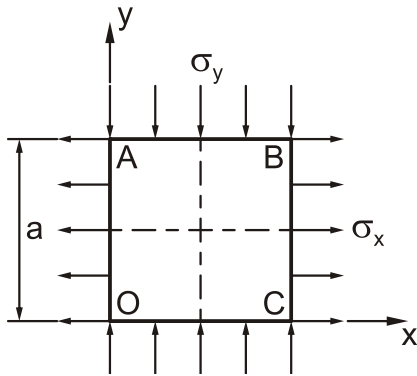


1. Um welchen Betrag verlängert sich die Platte?
2. Wie ändert sich die Verlängerung, wenn die Längskanten so geführt sind, dass die Breite b gleich bleibt?

Aufgabe 21:

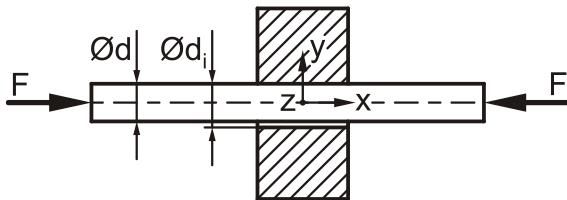
Eine quadratische Scheibe aus Stahl S355 mit der Kantenlänge $a = 180 \text{ mm}$ und der Dicke $s = 6 \text{ mm}$ ist durch die Spannungen $\sigma_x = 125 \text{ MPa}$ und $\sigma_y = -125 \text{ MPa}$ beansprucht (siehe Skizze).

S355: $R_e = 355 \text{ MPa}$, $R_m = 520 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$



1. Wie groß sind die Kräfte F_x und F_y , durch welche die Spannungen σ_x und σ_y erzeugt werden?
2. Wie groß sind die Längenänderungen der Scheibe in x- und y-Richtung?
3. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Beanspruchung der Scheibe (Maßstab: $100 \text{ MPa} \triangleq 40 \text{ mm}$). Wie lautet die Gleichung dieses Kreises? Wie ist der Spannungszustand in der Scheibe?
4. Welche Spannungen wirken an den diagonalen Schnittflächen OB und AC?
5. Bei welchem Grundbelastungsfall tritt auch eine derartige Belastung auf?

Aufgabe 22:



Auf einem polierten Rundstab aus Walzbronze CuSn6 ($R_{p0,2} = 250 \text{ MPa}$, $R_m = 450 \text{ MPa}$, $E = 116 \text{ GPa}$, $\mu = 0,35$) mit dem Durchmesser $d = 40,00 \text{ mm}$ gleitet ein Ring mit dem Innendurchmesser $d_i = 40,01 \text{ mm}$. Der Stab ist durch eine axiale Druckkraft F belastet.

Bei welcher Kraft wird die Gleitbewegung des Ringes blockiert?

CuSn6: $R_{p0,2} = 250 \text{ MPa}$, $R_m = 450 \text{ MPa}$
 $E = 116000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,35$

Aufgabe 23:

An der höchstbeanspruchten Stelle der Oberfläche eines Gehäuses aus S235 wurden unter statischer Belastung die Hauptdehnungen $\varepsilon_1 = 0,050\%$ und $\varepsilon_2 = -0,022\%$ gemessen.

S235: $R_e = 240\text{MPa}$, $R_m = 400\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 26\%$

EN-GJL-350: $R_m = 350\text{MPa}$, $E = 100000\text{MPa}$, $\mu = 0,25$

1. Wie groß sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ?
2. Wie groß ist die größte Schubspannung $\tau_{\max}$?
3. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen?
4. Wie groß wären die Hauptspannungen und die Sicherheit gegen Versagen, wenn das Gehäuse aus EN-GJL-350 bestünde und die gleichen Dehnungen gemessen würden?

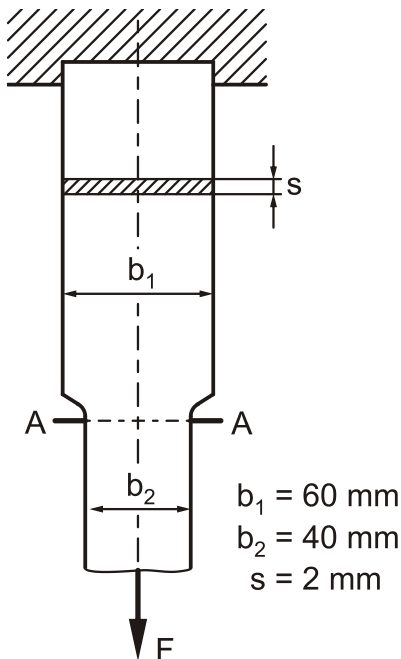
Aufgabe 24:

Auf eine vertikale Turbinenwelle mit dem Durchmesser $d = 90\text{ mm}$ aus Stahl C45V wirkt im Betrieb ein statisches Torsionsmoment von $M_t = 19750\text{ Nm}$ und eine statische Zugkraft von $F = 1350\text{ kN}$.

C45V: $R_e = 490\text{MPa}$, $R_m = 710\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 16\%$

30CrMoV9: $R_{p0,2} = 1050\text{MPa}$, $R_m = 1450\text{MPa}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 6\%$

1. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen?
2. Um ein höheres Torsionsmoment aufnehmen zu können, wird eine vergütete Welle aus 30CrMoV9 eingebaut. Auf welchen Betrag kann dadurch das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft und gleicher Sicherheit gesteigert werden?

Aufgabe 25:

Ein kaltgewalztes Stahlband aus C35 ist am oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende durch die statische Kraft F belastet (siehe Skizze). Bei der Kraft $F = 9600 \text{ N}$ wurde an der höchstbeanspruchten Stelle A am Querschnittsübergang in Achsrichtung die Dehnung $\varepsilon = 0,1143 \%$ gemessen.

C35: $R_e = 430 \text{ MPa}$, $R_m = 630 \text{ MPa}$,
 $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 19\%$

1. Wie groß ist die Formzahl α_k des Querschnittsübergangs?
2. Wie groß ist die Sicherheit gegen Fließbeginn?
3. Bei welcher Kraft beginnt der Stab zu fließen?
4. Bei welcher Kraft ist (annähernd) eine plastische Dehnung von $0,3 \%$ an der höchstbeanspruchten Stelle erreicht?
5. Bei welcher Last wird im kritischen Querschnitt vollplastischer Zustand erreicht?

Aufgabe 26:

Ein Rundstab aus EN-GJL-400 mit $D = 30 \text{ mm}$ Durchmesser und einer Querbohrung von $d = 6 \text{ mm}$ Durchmesser ist auf Torsion beansprucht. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei

EN-GJL-400: $R_m = 400 \text{ MPa}$, $E = 110000 \text{ MPa}$

1. statischer Beanspruchung?
2. wechselnder Beanspruchung?

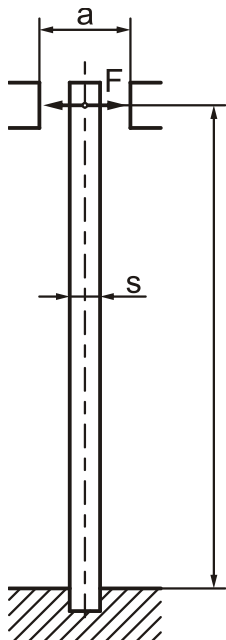
(Das bezogene Spannungsgefälle beträgt $\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{3}{\rho}$, die Torsionswechselfestigkeit für die vorliegende Oberfläche ist $\tau_{tW} = 80 \text{ MPa}$).

Aufgabe 27:

Eine Welle aus Vergütungsstahl 42CrMo4 mit 30 mm Durchmesser enthält eine halbkreisförmige Eindrehung auf 25 mm Durchmesser. Die Welle ist auf Biegung durch das Moment $M_b = 185 \text{ Nm}$ beansprucht. Die Oberfläche ist poliert.

42CrMo4: $R_e = 900 \text{ MPa}$, $R_m = 1100 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 11\%$

1. Wie groß ist die maximale Spannung bei stillstehender Welle?
2. Wie groß ist die Sicherheit im Betrieb bei umlaufender Welle? Reicht sie aus?

Aufgabe 28:

Eine fest eingespannte Blattfeder aus vergütetem Federstahl 38Si6 mit Rechteckquerschnitt (Breite $b = 20 \text{ mm}$, Dicke $s = 6 \text{ mm}$) von der Länge $l = 10 \text{ m}$ schwingt unter der Einwirkung der Kraft F zwischen zwei Anschlägen (siehe Skizze).

38Si6: $R_{p0,2} = 1050 \text{ MPa}$, $R_m = 1200 \text{ MPa}$
 $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 6\%$

1. Wie groß ist der Abstand a zu wählen, damit ein Versagen der Feder mit Sicherheit auszuschließen ist? (Oberfläche warmgewalzt)
2. Wie groß ist dann die Kraft F am Anschlag?

Aufgabe 29:

An einem beidseitig geschlossenen Rohr aus S260, das unter statischem Innendruck steht, werden in Tangential- und Axialrichtung Dehnungsmessungen durchgeführt. Der Außendurchmesser des Rohres ist $d_a = 150 \text{ mm}$ und die Wanddicke $s = 5 \text{ mm}$.

S260: $R_e = 260 \text{ MPa}$, $R_m = 420 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$

1. Wie groß ist der Innendruck p_1 , wenn $\varepsilon_{t1} = 0,0453 \%$ und $\varepsilon_{a1} = 0,0107 \%$ ist?

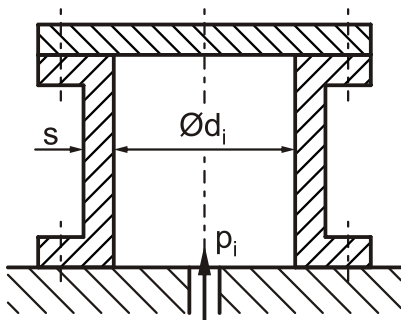
2. Welche statische Zugbelastung F_1 in Axialrichtung des Rohres kann dem Innendruck aus Frage 1 bei ausreichender Sicherheit noch überlagert werden? (Rechnung mit SH)
3. Bei einer zweiten Belastung durch den Innendruck p_2 und die Längskraft F_2 werden die Dehnungen $\varepsilon_{t2} = 0,0221\%$ und $\varepsilon_{a2} = 0,0274\%$ gemessen. Wie groß war der Innendruck p_2 und die Längskraft F_2 ?

Aufgabe 30:

Ein Zylinder mit dem Innendurchmesser $d_i = 120 \text{ mm}$ und der Wanddicke $s = 10 \text{ mm}$ soll in eine hydraulische Anlage eingebaut werden (siehe Skizze a)).

GS-38: $R_e = 190 \text{ MPa}$, $R_m = 380 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 25\%$

EN-GJL-200: $R_m = 200 \text{ MPa}$, $E = 100000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,25$

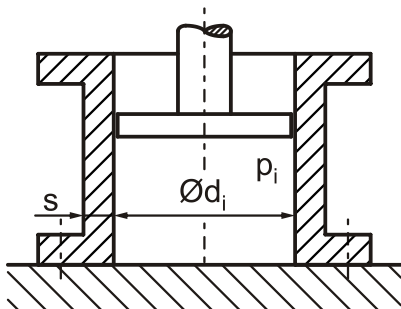


1. Welcher statische Innendruck p_i kann in dem Zylinder zugelassen werden, wenn er

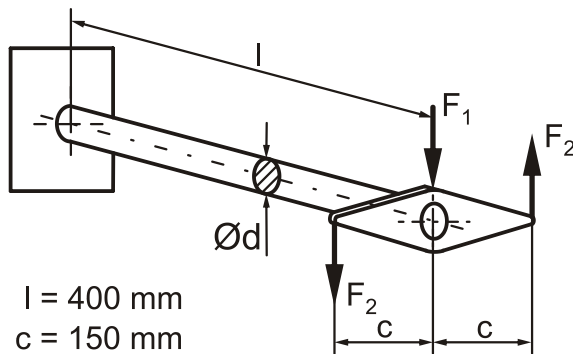
a) aus GS-38

b) aus EN-GJL-200

gefertigt ist? Wie groß ist dabei jeweils die Aufweitung des mittleren Zylinderdurchmessers?



2. Wie groß werden die Spannungen und die mittlere Durchmesser- aufweitung bei dem Zylinder aus GS38, wenn der Deckel an der oberen Zylinderöffnung entfernt und der unter 1. errechnete Druck durch einen beweglichen Kolben gemäß Skizze b) erzeugt wird?

Aufgabe 31:

Der abgebildete Rundstab mit Kreisquerschnitt aus dem Werkstoff E335 (warmgewalzt) ist auf der einen Seite in ein dickwandiges Bauteil eingeschweißt und trägt am freien Ende eine Querlasche, an der als äußere Belastung die Einzelkraft F_1 und das Kräftepaar F_2 angreifen können. Zu untersuchen sind folgende Lastfälle:

E335: $R_e = 340 \text{ MPa}$, $R_m = 640 \text{ MPa}$

$E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 16\%$

1. $F_1 = 10000 \text{ N}$ (statisch); $F_2 = 0$

Wie ist der Stab beansprucht? Wo tritt die höchste Beanspruchung auf? Wie groß muss der Durchmesser d des Stabes sein, damit die Belastung mit Sicherheit aufgenommen werden kann?

2. $F_1 = 0$; a) $F_2 = 10000 \text{ N}$ (statisch); b) $F_2 = \pm 10000 \text{ N}$ (wechselnd)

Wie ist der Stab beansprucht? Wie groß ist mit einem gewählten Stabdurchmesser von $d = 60 \text{ mm}$ die Sicherheit im Fall a) gegen Fließen und im Fall b) gegen Schwingungsbruch? Sind diese Sicherheitsbeiwerte ausreichend?

3. Die Kräfte F_1 und F_2 treten gleichzeitig auf, wobei stets $F_1 = F_2$ ist. Wie groß sind die zulässigen Kräfte $F_1 = F_2 = F_{zul}$, die von dem Stab mit dem Durchmesser $d = 60 \text{ mm}$ mit Sicherheit aufgenommen werden können, wenn F_1 und F_2

a) beide statisch bzw. b) beide (synchron) wechselnd wirken?

(Anmerkung: Die Kerbwirkungen an der Einspannstelle und die Schweißnähte brauchen nicht berücksichtigt werden.)

Aufgabe 32:

Ein beiderseits verschlossenes rohrförmiges Gehäuse aus EN-GJL-400 mit dem Innendurchmesser $d_i = 350 \text{ mm}$ wird durch Innendruck beansprucht. Dabei können verschiedene Lastfälle auftreten, die untersucht werden sollen:

EN-GJL-400: $R_m = 400 \text{ MPa}$, $E = 110000 \text{ MPa}$

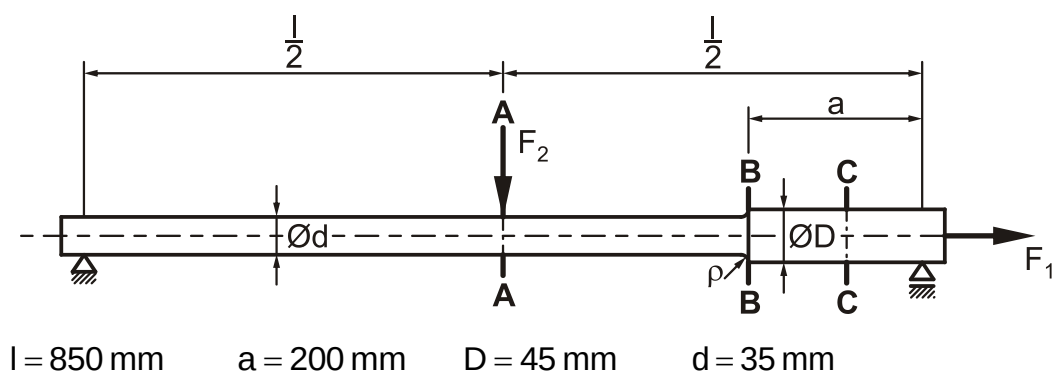
1. Der Innendruck wirkt statisch: $p_{\text{stat}} = 40 \text{ bar}$. Hierfür ist eine Wanddicke von $s = 12 \text{ mm}$ vorgesehen.
 - (a) Welche Spannungen σ_u in Umfangsrichtung und σ_l in Längsrichtung treten in der Gehäusewand auf? Wie sieht der Mohrsche Spannungskreis in der von σ_u und σ_l aufgespannten Ebene aus? Wie groß ist die maximale Schubspannung τ_{max} in dieser Ebene?
 - (b) Wie groß sind die Dehnungen ε_u und ε_l in Umfangs- bzw. Längsrichtung an der Außenoberfläche?
 - (c) Auf welche Weise könnte das Gehäuse versagen? Wie groß ist die Sicherheit gegen ein solches Versagen? Ist das Gehäuse ausreichend dimensioniert?
2. Der Innendruck wirkt zwischen 0 und 40 bar periodisch schwellend: $p_{\text{sch}} = 40 \text{ bar}$. Wie groß muss dafür die Wanddicke s des Gehäuses mindestens sein, wenn die Wechselfestigkeit bei der vorliegenden Oberfläche $\sigma_W = 80 \text{ MPa}$ beträgt und ein Sicherheitsbeiwert gegen Schwingungsbruch von $S_D = 2,5$ vorgeschrieben ist?
3. Der Innendruck setzt sich aus dem statischen Anteil $p_{\text{stat}} = 50 \text{ bar}$ und einem überlagerten, periodisch wechselnden Anteil p_w zusammen. Auf welche Größe ist die Amplitude von p_w bei einer Wanddicke von $s = 17,5 \text{ mm}$ zu begrenzen, damit ein Versagen durch Gewalt- oder Schwingungsbruch mit Sicherheit vermieden wird?

Aufgabe 33:

An einem Konstruktionsteil ist eine Dehnschraube aus dem Werkstoff S235 zu überprüfen. Der gefährdete Querschnitt liegt im zylindrischen Teil des Schraubenbolzens und hat den Durchmesser $d = 10 \text{ mm}$. Folgende Lastfälle sind zu untersuchen:

S235: $R_e = 240 \text{ MPa}$, $R_m = 370 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 26\%$

1. Im unbelasteten Zustand der Konstruktion ist der Schraubenbolzen durch eine statische Zugkraft von $F_1 = 1260 \text{ N}$ vorgespannt. Welche Versagensmöglichkeit ist hierfür in Betracht zu ziehen? Wie groß ist die Sicherheit gegen ein solches Versagen?
2. Beim Anziehen der Schraube entsteht ein Torsionsmoment, das zusammen mit der Zugkraft F_1 (die als konstant angenommen werden darf) den Bolzen beansprucht. Bei welchem Moment M_t beginnt der Werkstoff unter dieser Beanspruchung zu fließen?
3. Im Betriebszustand tritt zusätzlich zu F_1 noch eine schwellende Belastung mit dem Höchstwert $F_2 = 7850 \text{ N}$ auf. Bestimmen Sie die Sicherheit gegen Fließen und Schwingungsbruch (Oberfläche poliert). Sind diese Sicherheitsbeiwerte ausreichend?

Aufgabe 34:

E335: $R_e = 340 \text{ MPa}$, $R_m = 600 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 16\%$

Eine Spindel aus E335 (Oberfläche poliert) mit den in der Skizze angegebenen Abmessungen kann durch die beiden Kräfte F_1 und F_2 belastet werden. Untersuchen Sie folgende Lastfälle:

1. Stillstehende Welle, $F_1 = 42500 \text{ N}$ (statisch), $F_2 = 0$.
Wie groß ist die Spannung in den Querschnitten I und II? Um welchen Betrag verlängert sich die Welle? (Ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung am Wellenabsatz). Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen in den Querschnitten I und II?
2. Stillstehende Welle, $F_1 = 0$, $F_2 = 4200 \text{ N}$ (statisch).
Wie groß ist die maximale Spannung im Querschnitt I? Wie groß ist die Nennspannung im Querschnitt III unmittelbar vor dem Wellenabsatz? Wie groß muss der Ausrundungsradius ρ am Wellenabsatz mindestens sein, wenn die Maximalspannung im Querschnitt III nicht größer werden darf als jene im Querschnitt I?
3. Umlaufende Welle, $F_1 = 42500 \text{ N}$ (statisch).
Welche zusätzliche (statische) Kraft F_2 vermag die Welle im Hinblick auf die Beanspruchung im Querschnitt I mit angemessener Sicherheit sowohl gegen Fließen als auch gegen Schwingungsbruch aufzunehmen?

Aufgabe 35:

Als Werkstoff für eine Rohrleitung (Innendurchmesser $d_i = 200 \text{ mm}$, Wanddicke $s = 6 \text{ mm}$) stehen der Stahl S240 und der Grauguss EN-GJL-350 zur Auswahl. Die Rohrleitung wird durch Innendruck beansprucht, der statisch oder schwellend wirken kann.

S240: $R_e = 240 \text{ MPa}$, $R_m = 350 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 25\%$

EN-GJL-350: $R_m = 350 \text{ MPa}$, $E = 100000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,25$

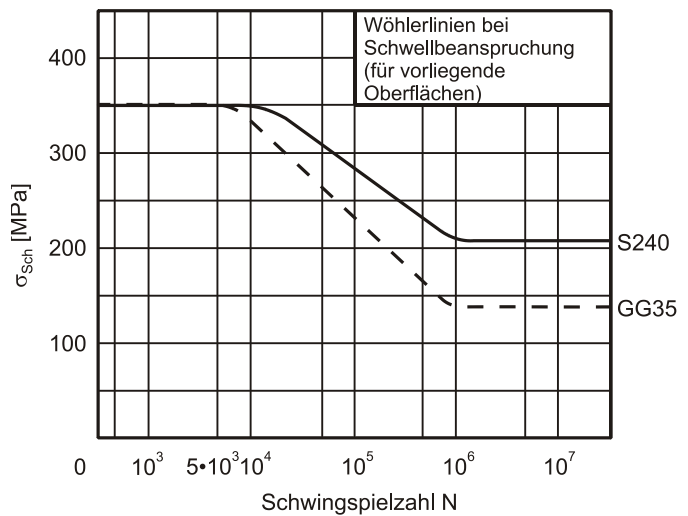
Man bestimme jeweils für beide Werkstoffe:

1. Bei statischem Innendruck $p_{\text{stat}} = 50 \text{ bar}$
 - a) die Spannung σ_u (in Umfangsrichtung), σ_l (in Längsrichtung) und σ_r (in Radialrichtung) in der Rohrwand.
 - b) die Dehnung ε_u und ε_l in Umfangs- bzw. Längsrichtung an der Außenoberfläche des Rohres.
 - c) die Vergrößerung von Außenumfang und Außendurchmesser gegenüber dem drucklosen Zustand.

- d) die vorhandene Sicherheit gegenüber der jeweils in Betracht zu ziehenden Versagensmöglichkeit (ist sie ausreichend?).

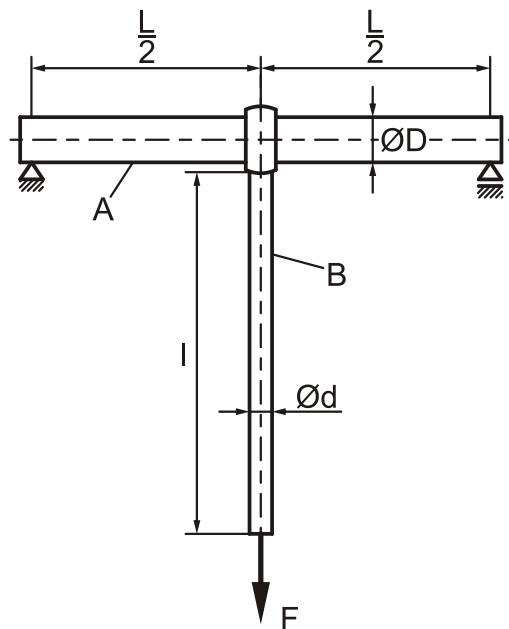
2. Bei schwellendem Innendruck p_{sch}

- a) die Größe von p_{sch} , wenn die Rohrleitung mit einer Sicherheit von $S_D = 2,0$ dauerschwingfest sein soll.
- b) die Größe von p_{sch} , wenn die Rohrleitung mit der gleichen Sicherheit für 100000 Lastspiele ausgelegt werden soll.
- c) die Wanddicke, die erforderlich wäre, damit die Rohrleitung den statischen Innendruck von 50 bar auch schwellend beliebig oft mit einer Sicherheit von $S_D = 2,0$ ertragen könnte.



Aufgabe 36:

Ein Rundstab A (Werkstoff E295) wird über den Zuganker B (Werkstoff S235) gemäß Skizze belastet. Alle Oberflächen sind geschliffet. Folgende Lastfälle sind zu untersuchen:



$$\begin{aligned} D &= 45 \text{ mm} \\ L &= 500 \text{ mm} \\ d &= 10 \text{ mm} \\ l &= 400 \text{ mm} \end{aligned}$$

E295: $R_e = 300 \text{ MPa}$, $R_m = 540 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 20\%$

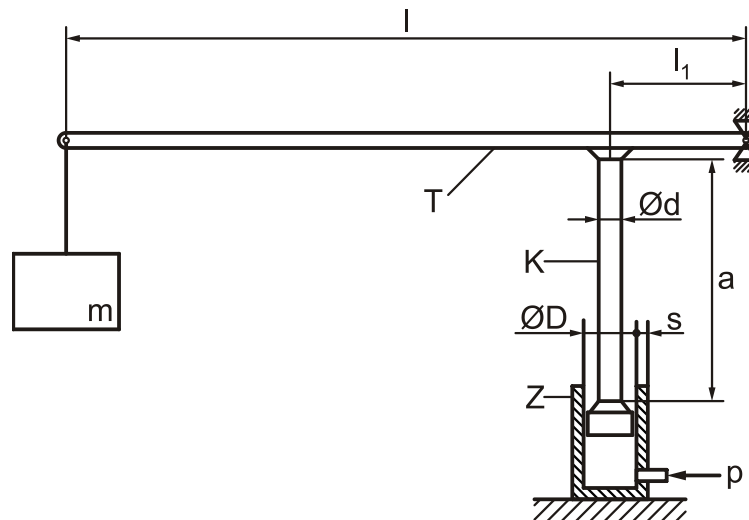
S235: $R_e = 240 \text{ MPa}$, $R_m = 370 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 26\%$

1. Da die Kraft F nicht genau bekannt ist, werden an dem Zuganker Dehnungsmessungen durchgeführt. Dabei misst man in Längsrichtung eine zeitlich konstante Dehnung von $\varepsilon = 0,0715 \%$.
 - a) Wie groß ist die Spannung in B und die Kraft F ?
 - b) Um welchen Betrag verlängert sich B?
 - c) Wie ist A beansprucht? In welchem Querschnitt tritt die größte Spannung auf? Wie groß ist sie?
 - d) Wenn die Kraft weiter zunimmt, welches Teil würde zuerst versagen, A oder B?
2. Bei einem anderen Betriebszustand setzt sich die Kraft F aus dem statischen Anteil $F_m = 8000 \text{ N}$ und einem überlagerten Anteil von $F_a = 4000 \text{ N}$ zusammen.
 - a) Welche Versagensmöglichkeiten kommen hierbei für den Zuganker B in Betracht?

- b) Wie groß sind die Sicherheiten gegen diese Versagensmöglichkeiten? Sind sie ausreichend?
3. In dem Zuganker muss nachträglich eine Querbohrung von 0,8 mm Durchmesser angebracht werden. Welche rein wechselnde Last $\pm F_a$ ($F_m = 0$) ist hierfür zulässig?

Aufgabe 37:

Ein I-Träger (T) aus dem Stahl S260 mit der Länge $l = 5$ m ist am rechten Ende gelenkig gelagert und trägt an seinem freien Ende die Masse $m = 400$ kg (siehe Skizze). Im Abstand $l_1 = 1$ m vom Gelenk wird der Träger durch einen Kolben (K), der in einem Zylinder (Z) aus dem Grauguss EN-GJL-260 mittels Druckluft bewegt werden kann, periodisch (langsam) angehoben und abgesenkt. Folgende Lastfälle sind zu untersuchen:



S260: $R_e = 260 \text{ MPa}$, $R_m = 420 \text{ MPa}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $A_5 = 22\%$

EN-GJL-260: $R_m = 260 \text{ MPa}$, $\sigma_w = 45 \text{ MPa}$, $\sigma_{sch} = 67 \text{ MPa}$ für die vorhandene Oberfläche

1. Der Träger soll in der horizontalen Ruhelage gehalten werden.
 - a) Mit welcher Kraft muss die Kolbenstange gegen den Träger drücken?
 - b) Welcher Druck p im Zylinder ist hierfür erforderlich, wenn der Kolbendurchmesser $D = 80$ mm beträgt?

- c) Wo tritt die höchste Beanspruchung des Trägers auf? Wie groß muss sein Widerstandsmoment mindestens sein, damit ein Versagen mit angemessener Sicherheit ausgeschlossen werden kann?
- d) Wie groß muss der Durchmesser d der Kolbenstange (K) aus dem Stahl E295 mit der Länge $a = 2\text{ m}$ mindestens sein, damit mit Sicherheit kein Versagen auftritt?

(Für die Berechnung können die Stangenenden als gelenkig gelagert angesehen werden)

2. Der Träger wird im Betrieb ständig leicht angehoben und abgesenkt. Dazu wird der Luftdruck im Zylinder gegenüber dem konstanten Druck p nach 1b) jeweils um 15 % erhöht bzw. erniedrigt. (Falls 1b) nicht gelöst, mit $p = 40\text{ bar}$ weiterrechnen)

- a) Welche Versagensmöglichkeiten des Zylinders sind dabei in Betracht zu ziehen?
- b) Wie groß sind die entsprechenden Sicherheiten, wenn die Wanddicke des Graugusszylinders $s = 6\text{ mm}$ beträgt?

(Das Eigengewicht von Träger und Kolbenstange darf vernachlässigt werden.)

11 Lösungen

Nachfolgend sind die Ergebnisse der Lösungen aller Aufgaben zusammengestellt. In Klammern sind die dabei gegebenenfalls verwendeten Werkstoffkennwerte, Sicherheitsbeiwerte und Festigkeitshypothesen aufgeführt.

- Aufgabe 1:**
1. leer: $\sigma = 65,4 \text{ MPa}$ voll: $\sigma = 139,0 \text{ MPa}$
 2. $S_F = 1,87, S_B = 3,02$ ($R_e = 260 \text{ MPa}; R_M = 420 \text{ MPa}$)
 3. $\Delta l = 0,42 \text{ mm}$

- Aufgabe 2:**
2. S210: $\varepsilon_{el} = 0,162\%$ $\varepsilon_{pl} = 18,538\%$
 EN-GJL-350: $\varepsilon_{el} = 0,35\%$ $\varepsilon_{pl} = 0\%$

- Aufgabe 3:**
1. $d = 7,5 \text{ mm}$ ($S_F = 1,5; R_e = 430 \text{ MPa}$)
 2. $\varepsilon = 0,135\%$
 3. $F_{\max} = 27832 \text{ N}$ ($R_m = 630 \text{ MPa}$)

- Aufgabe 4:**
1. Fließen, Knicken
 2. $F_{zul} = 44229 \text{ N}$ ($S_F = 1,5; S_K = 3,5; R_e = 235 \text{ MPa}$)
 3. $\Delta L = -10 \text{ mm}$
 $|\Delta L| = 10 \text{ mm}$

- Aufgabe 5:** $S_F = 3,46 \text{ ausr.}, S_{KX} = 2,62 \text{ ausr.}, S_{KY} = 2,29 \text{ nichtausr.}$
 ($R_e = 300 \text{ MPa}$)

- Aufgabe 6:**
1. $I_Z = bh^3 / 36, W_{bz} = bh^2 / 24$
 2. $I_Z = 0,0180 \cdot b^4, W_{bz} = 0,0313 \cdot b^3$

- Aufgabe 7:**
1. $F_F = 118,9 \text{ kN}$ ($R_e = 210 \text{ MPa}$)
 2. $F_F = 10,6 \text{ kN}$
 3. $F_F = 12,8 \text{ kN}$

- Aufgabe 8:**
1. $f_{zul} = 10,0 \text{ mm}$ ($S_B = 4; \sigma_{bB} = 600 \text{ MPa}$) $F = 10129 \text{ N}$
 2. $f_{zul} = 5,5 \text{ mm}$ ($S_F = 1,5; \sigma_{bF} = R_e = 260 \text{ MPa}$) $F = 11699 \text{ N}$

- Aufgabe 9:** $L = 23,66 \text{ m}$ ($\sigma_{b\max} = R_e = 355 \text{ MPa}$)

- Aufgabe 10:** $S_B = 2,74 \text{ ausr.}$ ($\tau_{aB} \approx 0,7 \cdot R_m; R_m = 610 \text{ MPa}$)

- Aufgabe 11:** $h = 59,5 \text{ mm}$ ($\tau_{aB} \approx 0,7 \cdot R_m; S_B = 2,5$)

Aufgabe 12: 2. $M_t = 1196 \text{ Nm}$ ($S_F = 15$; $S_B = 2$; $R_e = 360 \text{ MPa}$; $R_m = 520 \text{ MPa}$)

3. $\gamma_{\max} = 0,09875^\circ$ $\left(G = \frac{E}{2(1+\mu)} \right)$

Aufgabe 13: 1. $F = 8,31 \text{ kN}$ $\left(G = \frac{E}{2(1+\mu)} \right)$

3. $\tau_{\max} = 423,2 \text{ MPa}$, $S_F = 11$ nicht ausr.
($R_{p0,2} = 800 \text{ MPa}$; $R_m = 1000 \text{ MPa}$)

Aufgabe 14: 1. $F_{\text{Zsch}} = 88,3 \text{ kN}$ ($R_m = 400 \text{ MPa}$; $\sigma_W = 74 \text{ MPa}$)

2. $F_{\text{dsch}} = 128,4 \text{ kN}$

3. $F_o = 138,8 \text{ kN}$

Aufgabe 15: 1. $M_t = 628 \text{ Nm}$

($S_F = 15$; $S_B = 3$; $R_{p0,2} = 1050 \text{ MPa}$; $R_m = 1200 \text{ MPa}$; $A_5 = 6\%$)

2. $M_t = 233 \text{ Nm}$ ($S_D = 2,0$)

3. $\varphi_a = 22,7^\circ$; $\varphi_b = \pm 8,4^\circ$

Aufgabe 16: 1. $d_{\text{erf}} = 15,24 \text{ mm}$

($R_e = 370 \text{ MPa}$; $R_M = 700 \text{ MPa}$; $\sigma_W = 290 \text{ MPa}$; $f = 0,92$)

Aufgabe 17: 1. $\sigma_{(\varphi)} = \sigma/2$, $\tau_{(\varphi)} = \sigma/2$

Aufgabe 18: $\alpha_1 = (-)7,47^\circ$, $\alpha_2 = (-)97,47^\circ$, $\sigma_1 = 205,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 105,2 \text{ MPa}$

Aufgabe 19: 2. $\sigma_1 = 184,5 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -34,5 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = \pm 109,5 \text{ MPa}$

3. $\varphi_1 = -23,3^\circ$, $\varphi_2 = -113,3^\circ$, $\varphi_{r1} = 21,7^\circ$, $\varphi_{r2} = 111,7^\circ$

4. $\varphi_1 = -23,3^\circ$, $\varphi_2 = -113,3^\circ$, $\alpha_1 = 43,4^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$

Aufgabe 20: 1. $\Delta l = 135 \text{ mm}$

2. $\Delta l = 121 \text{ mm}$

Aufgabe 21: 1. $F_x = 135 \text{ kN}$, $F_y = -135 \text{ kN}$

2. $\Delta l_x = 0,139 \text{ mm}$, $\Delta l_y = -0,139 \text{ mm}$

3. $\sigma^2 + \tau^2 = (125 \text{ MPa})^2$, zweiachsiger Spannungszustand

4. $\overline{OB}$: $\sigma = 0$, $\tau = -125 \text{ MPa}$, $\overline{AC}$: $\sigma = 0$, $\tau = 125 \text{ MPa}$

5. Torsion eines kreiszylindrischen Stabes

Aufgabe 22: $F = -104,1 \text{ kN}$

- Aufgabe 23:**
1. $\sigma_1 = 100,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -16,2 \text{ MPa}$
 2. $\tau_{\max} = 58,2 \text{ MPa}$
 3. $S_F = 2,06$ ausreichend (S_H ; $R_e = 240 \text{ MPa}$)
 4. $\sigma_1 = 47,5 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -10,1 \text{ MPa}$, $S_B = 7,37$ ausreichend
(NH ; $E = 100000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,25$; $R_m = 350 \text{ MPa}$)
- Aufgabe 24:**
1. $S_F = 1,53$, $S_B = 2,22$ (GEH ; $R_e = 490 \text{ MPa}$; $R_m = 710 \text{ MPa}$)
 2. $M_{tzul} = 51503 \text{ Nm}$ ($C45V$: $A_5 = 14\%$; $30CrMoV9$: $A_5 = 6\%$)
- Aufgabe 25:**
1. $\alpha_k = 2$
 2. $S_F = 1,79$ ($R_e = 430 \text{ MPa}$)
 3. $F_{FB} = 17200 \text{ N}$
 4. $F_{pl} = 27004 \text{ N}$
 5. $F_{plv} = 34400 \text{ N}$
- Aufgabe 26:**
1. $M_t = 239,4 \text{ Nm}$ ($R_m = 400 \text{ MPa}$; $S_B = 4$)
 2. $M_{ta} = 164,4 \text{ Nm}$ ($R_m = 400 \text{ MPa}$; $S_D = 2$)
- Aufgabe 27:**
1. $\sigma_{\max} = 241,2 \text{ MPa}$ ($\alpha_k = 2,0$)
 2. $S_D = 2,317$ ausreichend ($R_e = 900 \text{ MPa}$; $R_m = 1100 \text{ MPa}$)
- Aufgabe 28:**
1. $a = 150,8 \text{ mm}$ ($f = fl^3 / 3EI$; $S_D = 2$)
 2. $F = 16,4 \text{ N}$
- Aufgabe 29:**
1. $p_1 = 80 \text{ bar}$
 2. $F_1 = 258 \text{ kN}$ ($S_F = 1,5$)
 3. $p_2 = 50 \text{ bar}$, $F_2 = 99,1 \text{ kN}$
- Aufgabe 30:**
1. GS-38: $p = 195 \text{ bar}$ ($S_F = 1,5$), $\Delta d_m = 0,0742 \text{ mm}$
($R_m = 380 \text{ MPa}$; $R_e = 190 \text{ MPa}$)
EN-GJL-200: $p = 83 \text{ bar}$, $\Delta d_m = 0,0580 \text{ mm}$
($R_m = 200 \text{ MPa}$; $E = 100000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,25$; $S_B = 4$)
 2. $\sigma_u = 117 \text{ MPa}$, $\sigma_r = -9,75 \text{ MPa}$, $\sigma_l = 0 \text{ MPa}$, $\Delta d_m = 0,0742 \text{ mm}$
- Aufgabe 31:**
1. $d = 56,4 \text{ mm}$ ($R_e = 340 \text{ MPa}$; $S_F = 1,5$)
 2. $S_F = 2,78$ ausreichend, $S_D = 1,58$ ausreichend
 3. a) $F_{zul} = 10,1 \text{ kN}$ ($S_F = 1,5$)
b) $F_{zul} = 4,3 \text{ kN}$ ($S_D = 2$)
- Aufgabe 32:**
1. a) $\sigma_u = 58,3 \text{ MPa}$, $\sigma_l = 29,15 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 14,6 \text{ MPa}$
(NH ; $R_m = 400 \text{ MPa}$)
b) $\epsilon_u = 0,0510\%$, $\epsilon_l = 0,0146\%$

- c) $S_B = 6,86$ ausreichend
- 2. $s_{\min} = 11,7 \text{ mm}$
- 3. $p_W = 28,0 \text{ bar}$ ($S_B = 5$, $S_D = 2,5$)

- Aufgabe 33:**
- 1. $S_F = 15$ ($R_e = 240 \text{ MPa}$)
 - 2. $M_t = 27,2 \text{ Nm}$ (GEH)
 - 3. $S_F = 2,07$ ausreichend; $S_D = 2,72$ ausreichend
($R_m = 370 \text{ MPa}$; $f = 1$)

- Aufgabe 34:**
- 1. $\sigma_I = 44,2 \text{ MPa}$, $\sigma_{II} = 26,7 \text{ MPa}$, ($R_e = 340 \text{ MPa}$)
 $\varepsilon_I = 0,0210\%$, $\varepsilon_{II} = 0,0127\%$, $\Delta l = 0,1619 \text{ mm}$
 $S_{FI} = 7,69$, $S_{FII} = 12,7$
 - 2. $\sigma_{bl} = 212,0 \text{ MPa}$, $\sigma_{bnIII} = 99,8 \text{ MPa}$, $\rho_{\min} = 14 \text{ mm}$
 - 3. $F_{2zul} = 2859 \text{ N}$ ($S_F = 15$, $S_D = 2$, $R_e = 340 \text{ MPa}$, $R_m = 600 \text{ MPa}$)

- Aufgabe 35:**
- 1. a) $\sigma_u = 83,3 \text{ MPa}$, $\sigma_I = 41,7 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 2,5 \text{ MPa}$
 b) S240: $\varepsilon_u = 0,0337\%$, $\varepsilon_I = 0,0796\%$
 EN-GJL-350: $\varepsilon_u = 0,0729\%$, $\varepsilon_I = 0,0209\%$
 c) S240: $\Delta U_a = 0,224 \text{ mm}$, $\Delta d_a = 0,0714 \text{ mm}$
 EN-GJL-350: $\Delta U_a = 0,486 \text{ mm}$, $\Delta d_a = 0,0155 \text{ mm}$
 d) S240: $S_F = 2,8$ ausr. ($R_e = 240 \text{ MPa}$)
 EN-GJL-350: $S_B = 4,2$ ausr.
 - 2. a) S240: $p_{schzul} = 61,2 \text{ bar}$, EN-GJL-350: $p_{schzul} = 42 \text{ bar}$
 b) S240: $p_{schzul} = 81,6 \text{ bar}$, EN-GJL-350: $p_{schzul} = 70,5 \text{ bar}$
 c) S240: $s = 4,88 \text{ mm}$

- Aufgabe 36:**
- 1. a) $\sigma = 150,2 \text{ MPa}$, $F = 118 \text{ kN}$
 b) $\Delta l = 0,286 \text{ mm}$
 c) $\sigma_{b\max} = 164,8 \text{ MPa}$
 - 2. b) $S_F = 1,57$ ausreichend, $S_D = 2,18$ ausreichend
 ($R_e = 240 \text{ MPa}$, $R_m = 370 \text{ MPa}$)
 - 3. $F_a = 2792 \text{ N}$

- Aufgabe 37:**
- 1. a) $F = 19,6 \text{ N}$
 b) $p = 39 \text{ bar}$
 c) $W_b = 90554 \text{ mm}^3$ ($R_e = 260 \text{ MPa}$; $S_F = 1,5$)
 d) $d \geq 41,9 \text{ mm}$ ($S_F = 1,5$, $S_K = 4$)
 - 2. a) $S_B = 8,70$ ($R_m = 260 \text{ MPa}$)
 b) $S_D = 9,36$

12 Kurzfragen zu den Kapiteln

Kapitel 2:

- 2.01: Woher leiten sich die Namen E295 und EN-GJL-300 (GG30) ab?
- 2.02: Was bedeuten elastischer und plastischer Bereich?
- 2.03: Charakterisieren Sie die Begriffe spröder und zäher Werkstoff!
- 2.04: Was versteht man unter einem geraden prismatischen Stab?
- 2.05: Wie lautet die Festigkeitsberechnung für spröde / duktile Werkstoffe?
- 2.06: Nennen Sie den Zusammenhang zwischen R_e und A_5 !
- 2.07: Nennen Sie E-Moduln und μ von E295 und EN-GJL-300 (GG30)!
- 2.08: Nennen Sie σ_{zul} für E295 und EN-GJL-300 (GG30)!
- 2.09: Welche Versagensarten unter Druckbelastung gibt es?
- 2.10: Wie groß ist der Sicherheitsfaktor S_K beim Knicken?
- 2.11: Welche Kennwerte werden im Druckversuch ermittelt?
- 2.12: Wie lautet das Verhältnis / der Unterschied zwischen R_m und σ_{dB} (spröd)?
- 2.13: Wie groß ist der Anteil der elastischen Dehnung an der Gesamtdehnung?
- 2.14: Gibt es in Abhängigkeit vom Spannungszustand unterschiedliche elastische Dehnungsanteile bei der Verformung eines Werkstoffes?

Kapitel 3:

- 3.01: Was versteht man unter einem Biegebalken?
- 3.02: Wie sind verschiebbare und nicht verschiebbare Lager symbolisiert?
- 3.03: Wo treten Maximal-, Minimalspannung und neutrale Faser im Biegebalken auf?
- 3.04: Wie ist die Spannungsverteilung über dem Querschnitt bei Biegung?
- 3.05: Wie groß ist das maximale Biegemoment und wodurch lässt es sich beeinflussen?

- 3.06:** Wie groß sind die Lagerkräfte bei 4-Pkt.-Biegung mit eingeleiteten Kräften F ?
- 3.07:** Wie erhält man das Gesamtmoment bei der Biegebeanspruchung?
- 3.08:** Wie lautet die Spannung im Biegebalken (an der Stelle y) durch die äußere Belastung M ?
- 3.09:** Kann I_z und W_b bei zusammengesetzten Querschnittsformen additiv gebildet werden?

Kapitel 4:

- 4.01:** Welche Belastungen treten bei kurzen Biegebalken auf?
- 4.02:** Über welche Proportionalitätskonstante hängen Schubspannung und Schiebung im elastischen Bereich zusammen?
- 4.03:** Wie heißen die senkrecht zu einer Schubspannung wirkenden Schubspannungen gleicher Größe?

Kapitel 5:

- 5.01:** Unterscheidet sich die Belastung in verschiedenen Querschnitten eines auf Torsion beanspruchten Stabes mit Kreisquerschnitt?
- 5.02:** Wie groß sind die Schiebung $\gamma(r)$ und die maximale Schubspannung bei Torsion?
- 5.03:** Welches Versagen ist bei Torsion eines Stabes mit Kreisquerschnitt zu erwarten?

Kapitel 6:

- 6.01:** Welchen Unterschied gibt es bezüglich der Spannungsberechnung zwischen statischer und schwingender Beanspruchung?
- 6.02:** Wodurch sind die Spannungsschwingungen bei Annahme sinusförmiger Schwingungen festgelegt?
- 6.03:** Was kennzeichnet das Spannungsverhältnis $R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$?
- 6.04:** Was versteht man unter σ_A , σ_{zSch} , σ_W , σ_D , σ_{dSch} , σ_a ?
- 6.05:** Wie wird das Wöhlerdiagramm dargestellt?

- 6.06:** Wie werden bei den Dauerfestigkeitsschaubildern nach Haigh bzw. Smith die Achsen bezeichnet?
- 6.07:** Welche Näherungskonstruktionen gibt es für die Dauerfestigkeitsschaubilder?

Kapitel 7:

- 7.01:** Was bedeutet der Mohrsche Spannungskreis?
- 7.02:** Was bedeutet ein Punkt auf dem Mohrschen Spannungskreis?
- 7.03:** Wieso ist der Punkt im Mohrschen Spannungskreis durch 2φ gegeben?
- 7.04:** Inwiefern können Mohrsche Spannungskreise bei 3-dimensionalen Beanspruchung hilfreich sein?
- 7.05:** Liegt der Mohrsche Spannungskreis immer symmetrisch zur σ -Achse?
- 7.06:** Kann man die Normalspannungen des verallg. Hookeschen Gesetzes durch Superposition aus 3-achsigen Versuchen erhalten?
- 7.07:** Gibt es eine Kopplung zwischen Normalspannungen und Schiebung beim verallg. Hookeschen Gesetz?
- 7.08:** Wie lautet die Indizierungsregel bei Schubspannungen und Schiebung?
- 7.09:** Wie lautet der Unterschied in der Festigkeitsbedingung zwischen dem einachsigen und dem mehrachsigen Spannungszustand?
- 7.10:** Wie lautet die Festigkeitsbedingung für Torsionsbelastung?
- 7.11:** Wie bestimmt man eine Vergleichsspannung?
- 7.12:** Was ist der Vorteil der Schubspannungshypothese (SH)?
- 7.13:** Wann wendet man welche Festigkeitshypothese an?
- 7.14:** Welche Festigkeitshypothese beschreibt i.d.R. den Zusammenhang zwischen Torsionsfließgrenze τ_{IF} und Streckgrenze R_e am besten?
- 7.15:** Wie drückt man einen allg. 3-achsigen Spannungszustand am einfachsten aus?
- 7.16:** Wie groß ist die maximale Abweichung zwischen GEH und SH?

Kapitel 8:

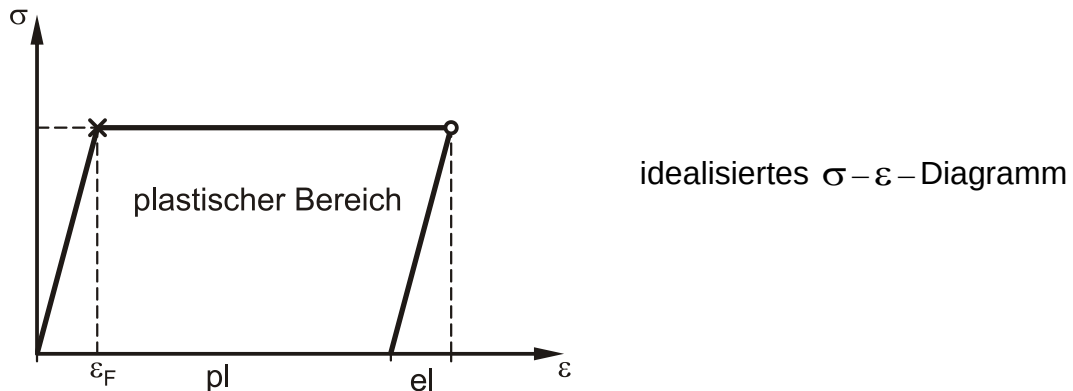
- 8.01:** Weshalb ist sowohl $\sigma_V(\text{NH}) = \sigma_1$ als auch $\sigma_V(\text{SH}) = \sigma_1$ bei $\sigma_3 = 0$ (2-achsiger Spannungszustand)?
- 8.02:** Wie kommt man auf die Vergleichsspannungen in den unterschiedlichen Festigkeitshypothesen bei kombinierter Biege- und Torsionsbeanspruchung (Tabelle A9, letzte Spalte)?
- 8.03:** Wie berechnet man die Vergleichsspannung bei vorliegender Zug- und Torsionsspannung?
- 8.04:** Welche Vorstellungshilfe gibt ein Stromlinienbild (Stromlinienanalogie)?
- 8.05:** Wie ist die Formzahl α_k definiert?
- 8.06:** Wovon hängt α_k ab, wovon nicht?
- 8.07:** Wie lautet die Festigkeitsbedingung, wenn Kerben vorliegen?
- 8.08:** Wie verläuft die Ausbreitung der plastischen Verformung bei
- a) einem Kerbstab?
 - b) einem Biegebalken?
 - c) einem Behälter unter Innendruck?
 - d) einem Stab unter Torsion?
- 8.09:** Kann man σ_{Wk} aus σ_W und α_k errechnen?
- 8.10:** Was ist der Grund für $\beta_k \leq \alpha_k$?
- 8.11:** Was bedeutet $\beta_k = 1$, was $\beta_k \leq \alpha_k$?
- 8.12:** Wie lauten die Verfahren zur Bestimmung von β_k ?
- 8.13:** Wie lautet die Festigkeitsbedingung für schwingbeanspruchte, gekerbte Bauteile?

13 Lösungen der Kurzfragen zu den Kapiteln

Kapitel 2:

2.01: E295 = Stahl mit $R_e \geq 300$ (295) MPa
 EN-GJL-300 = Grauguss mit $R_m = 260 \div 330$ MPa

2.02:



2.03: spröd: fast ausschließlich elastische Verformung
 zäh: elastische und mehr oder weniger plastische Verformung

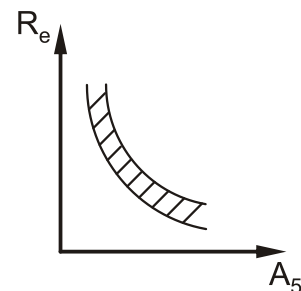
2.04: gerade: nicht gekrümmt
 prismatisch: Querschnitt ändert sich nicht über Länge
 Stab: Querschnitt deutlich kleiner als Länge

2.05: spröd: Bruch $\sigma \leq \frac{R_m}{S_B}$ $S_B = 4; (4 \div 9)$
 zäh: Fließen $\sigma \leq \frac{R_e}{S_F}$ $S_F = 1,5; (1,2 \div 2)$
 Bruch $\sigma \leq \frac{R_m}{S_B}$ $S_B = 2; (2 \div 3)$

2.06:

$$R_e \sim \frac{1}{A_5}$$

(R_e steigt tendenziell mit fallendem A_5)



2.07: E295: $E = 210000$ MPa; $\mu = 0,3$
 EN-GJL-300: $E = 100000$ MPa; $\mu = 0,25$

2.08: E295:
$$\sigma_{zul} = \min \left\{ \underbrace{\frac{R_e}{S_F} = \frac{300}{1,5}}_{\text{Fließen}} ; \underbrace{\frac{R_m}{S_B} = \frac{500}{2}}_{\text{Bruch}} \right\} = 200 \text{ MPa}$$

EN-GJL-300:
$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{300}{4} = 75 \text{ MPa}$$

2.09: Fließen (duktil), Bruch (spröd), Knicken

2.10: $S_K = 3,5; (2,5 \div 5)$

2.11: Druckfließgrenze (Quetschgrenze) $\sigma_{dF} = -\sigma_{zF} = -R_e (= -R_{eH})$: duktiler Werkstoff

Druckfestigkeit σ_{dB} (duktil: kein Bruch): spröder Werkstoff
 $-1200 \text{ MPa (EN-GJL-300)}$

$$E_d \approx E_z, \mu_d = \mu_z$$

2.12: $|\sigma_{dB}| \cong (2 \div 4) \cdot R_m$

2.13: spröd : $\approx 100 \%$

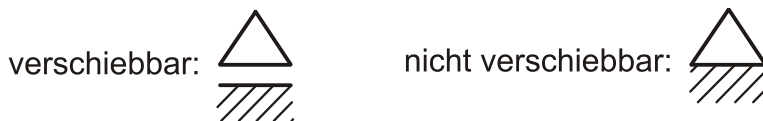
duktil : $\approx 0 \%$

2.14: Im Allgemeinen ja; z.B. ist im Allgemeinen $\varepsilon_{el}(R_m) > \varepsilon_{el}(R_e)$

Kapitel 3:

3.01: Ein langgestrecktes Gebilde, dessen Querschnittsabmessung (rund, rechteckig,...) klein gegen die Länge ist. Die Kraft greift senkrecht zur Achse an und ruft eine Biegebeanspruchung hervor.

3.02:



3.03: Maximalspannung: Außenseite (Zugbereich)
 Minimalspannung: Außenseite (Druckbereich)
 Neutrale Faser: dazwischen (nicht notwendigerweise in der Mitte sondern durch den Schwerpunkt gehend). In der Mitte bei Querschnittsformen die symmetrisch zur Biegeachse sind.

3.04: linear: $\sigma = \frac{E \cdot y}{R}$ (R: Biegeradius, y: Koordinate vom Schwerpunkt über die Balkenhöhe)

3.05: $M_{\max} = F \cdot a$ durch F und a (Abstand zwischen Krafteinleitung und Lager)

3.06: $L = F$ an jedem Lager

3.07: $M = \int_A \underbrace{s(y)}_{\text{Kraft}} dA \cdot \overset{\text{Weg}}{y} = \int dM$

3.08: $\sigma(y) = \frac{M_b}{I_z} \cdot y$ $I_z = \text{Trägheitsmoment bzgl. der z-Achse}$
 $M_b = \text{Biegemoment}$

3.09: I_z : ja; W_b : nein

Kapitel 4:

4.01: Biegespannung, Schub

4.02: Schubmodul $G = \frac{\tau}{\gamma}$; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

4.03: zugeordnete Schubspannungen

Kapitel 5:

5.01: Nein, alle Querschnitte sind durch das Torsionsmoment M_t gleich belastet

5.02: $\gamma(r) = \frac{\varphi}{L} \cdot r$; $\tau_{\max} = G \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot R = \frac{M_t}{W_t}$; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

5.03: Fließen
 Bruch in Torsionsfläche und senkrecht dazu

Kapitel 6:

6.01: Die Spannungsberechnung ist bei beiden Beanspruchungen gleich.

6.02: Entweder durch σ_o und σ_u oder durch σ_a und σ_m

6.03: Die Art der Beanspruchung, nicht die Größe; z.B. ist
 $R = 0$: reine Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$),
 $R = -1$: Wechselbeanspruchung ($\sigma_m = 0$),
 $R = -\infty$: Druckschwellbeanspruchung ($\sigma_o = 0$)

- 6.04:** $\sigma_A =$ ertragbare Spannungsamplitude bei Mittelspannung σ_m
 $\sigma_{Sch} = \sigma_{zSch} = 2\sigma_A$ ($R = 0$) Zug-Schwellfestigkeit
 $\sigma_W =$ Wechselfestigkeit (dauernd ertragbare Spannungsamplitude bei $\sigma_m = 0$; σ_A ($R = -1$))
 $\sigma_D =$ Dauerschwingfestigkeit ($\sigma_W(\sigma_m)$)
 $\sigma_{dSch} = -2\sigma_A$ ($R = -\infty$) Druck-Schwellfestigkeit
 $\sigma_a =$ wirkende Spannungsamplitude

- 6.05:** Halblogarithmisch: σ_A über $\log(N)$
Doppelt logarithmisch: $\log(\sigma_A)$ über $\log(N)$

- 6.06:** Haigh: σ_A über σ_m
Smith: σ_o, σ_u über σ_m

- 6.07:** Grafisch: $\left. \begin{array}{l} \text{a) aus } R_m, \sigma_W, \sigma_{Sch} \\ \text{b) aus } R_m, \sigma_W, R_e \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{duktil} \\ \text{spröd: } R_m, \sigma_W \end{array}$
Analytisch: $\sigma_A = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$ für zähe Werkstoffe
 $\sigma_A = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$ für spröde Werkstoffe

Kapitel 7:

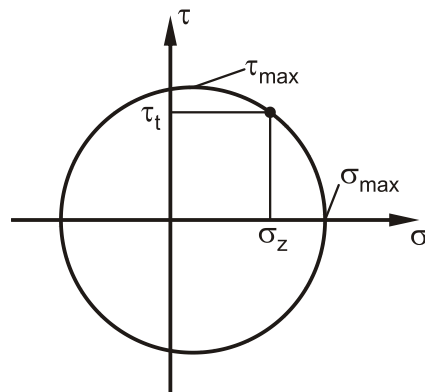
- 7.01:** Der Mohrsche Spannungskreis kennzeichnet alle Normal- und Schubspannungen eines vorgegebenen zweiachsigen Spannungszustandes.
- 7.02:** Jeder Punkt auf einem Mohrschen Spannungskreis stellt die für die zugehörige Orientierung φ gegebene Normal- (σ_φ) und Schubspannung (τ_φ) dar.
- 7.03:** Die analytische Darstellung des Mohrschen Spannungskreises führt aufgrund trigonometrischer Umformungen zum Winkel 2φ (sowohl bei 1-dim. als auch bei 2-dim. Belastung)
- 7.04:** Durch Auffinden der für die Festigkeitsbetrachtung relevanten maximalen Normal- und Schubspannung.
- 7.05:** Ja, wegen der Gleichstellung positiver und negativer Schubspannungen und der Position maximaler und minimaler Normalspannungen auf der σ -Achse (= $x-x$ -Achse)
- 7.06:** Nein, da Querdehnungen unberücksichtigt blieben.
- 7.07:** Nein (siehe Tabelle!)
- 7.08:** 1.Index: Richtung der Flächennormalen
2.Index: Richtung der Schubspannung

- 7.09:** 1-achsig: $\sigma \leq \sigma_{zul}$ (Zug, Druck, Biegung)
 mehr-achsig: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ (σ_v = Vergleichsspannung fiktiv-einachsig)
- 7.10:** $\tau_t \leq \tau_{zul}$; Behandlung wie bei einachsiger Beanspruchung
 (zähe Werkstoffe, $\tau_k \leq \sigma_k$ in der Regel)
- 7.11:** Mit Hilfe von Festigkeitshypothesen NH, SH, GEH
- 7.12:** Leicht anwendbar, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bekannt sind
- 7.13:** NH: spröde Werkstoffe; Versagen: $\sigma_v = R_m$ bzw. $\sigma_{va} = \sigma_A$
 SH, GEH: duktile Werkstoffe; Versagen: $\sigma_v = R_e$ bzw. $\sigma_{va} = \sigma_A$
- 7.14:** GEH
- 7.15:** Mit den Hauptspannungen: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
- 7.16:** 15,5 %; SH weicht zur konservativen Seite hin ab.

Kapitel 8:

- 8.01:** $\sigma_v(NH)^{3-achsig} = \sigma_1^{2-achsig} = \sigma_1$; $\sigma_v(SH)^{3-achsig} = (\sigma_1 - \sigma_3)^{2-achsig} = \sigma_1$
- 8.02:** Aus der vorletzten Spalte und mit $\tau_t = \tau_{xy}$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_b = \sigma_x$.
- 8.03:** $\sigma_v(SH) = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$ $\sigma_v(GEH) = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$

σ_z = Zugspannung ($\neq \sigma_{max}$)
 τ_t = Torsionsspannung ($\neq \tau_{max}$)
 (Der Spannungszustand σ_{max}, τ_{max} existiert nicht)



- 8.04:** Hilfestellung zur Vorstellung der Spannungen an Kerben.
 Stromlinien $\triangleq$ Kraftflusslinien
 Strömungsgeschwindigkeit $\triangleq$ Spannung
- 8.05:** $\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$ (im elastischen Bereich)
- 8.06:** $= f$ (Kerbgeometrie, Beanspruchungsart);
 $\neq f$ (Werkstoff, Beanspruchungshöhe)

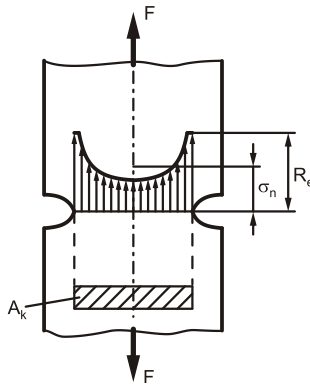
8.07: Spröde Werkstoffe, Bruch: $\alpha_k \sigma_n = \sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B}$

Duktile Werkstoffe, Bruch: $\sigma_n \leq \frac{R_m}{S_B}$; $\alpha_k \leq 4$ ($R_m \leq R_{mk}$)

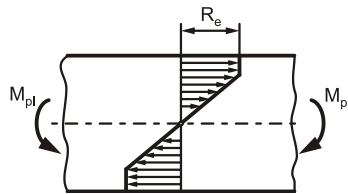
Duktile Werkstoffe, Fließen: $\alpha_k \sigma_n = \sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{\eta_{pl} R_e}{S_F} = \frac{R_e'}{S_F}$;

$$\text{mit } \eta_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{ges}}}{\varepsilon_F}}$$

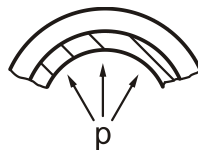
8.08: a) einem Kerbstab: vom Kerbgrund



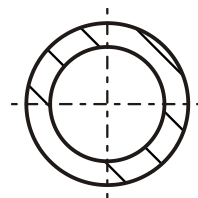
b) einem Biegebalken: von Oberfläche



c) einem Behälter unter Innendruck: von Innenoberfläche



d) einem Stab unter Torsion: von Außenoberfläche



8.09: Nein, die Praxis zeigt, dass $\sigma_{Wk} \neq \frac{\sigma_W}{\alpha_k}$, sondern $\sigma_{Wk} = \frac{\sigma_W}{\beta_k}$ mit

$\beta_k \leq \alpha_k$; α_k = Formzahl; β_k = Kerbwirkungszahl

$$\beta_k = \frac{\sigma_W}{\sigma_{Wk}} \quad (\text{für } \sigma_m = 0) = \frac{\sigma_A}{\sigma_{Ak}} \quad (\text{für } \sigma_m \neq 0)$$

8.10: Irreversible Abgleitungen im mikroplastischen Bereich

8.11: $\beta_k = 1$: Kerbunempfindliche Werkstoffe

$\beta_k = \alpha_k$: Voll kerbempfindliche Werkstoffe

8.12: a) Dietmann: $\beta_k = \frac{\alpha_k}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{C}{\rho}}}$; R_e = Streckgrenze; ρ = Kerbradius,

$C = 2$ für Zug/Druck, Biegung; $C = 1$ für Torsion
(für unlegierte bzw. niedriglegierte C-Stähle)

b) Siebel: $\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi}$; $n_\chi = f(\chi^+, R_e \text{ bzw. } R_m)$, (n_χ = dyn. Stützziffer aus

Diagramm, $\chi^+ =$ bezog. Spannungsgefälle aus Tabelle)

8.13: $\sigma_{\text{amax}} \leq \sigma_{\text{azul}} \left(\beta_k \sigma_{\text{an}} \leq \frac{\sigma_A}{S_D} \right)$ Nur gegen Bruch, da Schwingungsbruch
makroskopisch spröde ist.