

I

Zsmfssg Bildverarbeitung

BV-01 Einführung

Level Bildverarbeitung

Low Level → Pixel Operationen
Operatoren auf Regionen
Bildtransformationen
Änderungen an Farbe / evtl. Ort einzelner Pixel

Medium Level → Konturerfassung
Erkennen typischer Bildeigenschaften
Vorsegmentierung

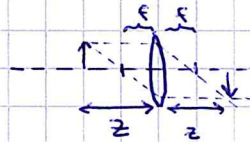
High Level → Segmentierung
Bildverstehen (KI)

Bildentstehung

Dünne Linsen

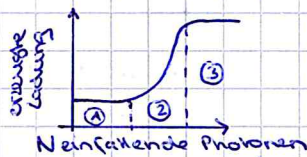
- Strahlen durch Brennpunkt verlassen Linse parallel zur Achse
- Strahlen parallel zur Achse gehen durch Brennpunkt

Linsengleichung $\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}$



Perspektivische Kamera

- Problem: Unschärfe durch Beugung $d = 2.44 \frac{\text{Abstand}}{\text{Lochgröße}} \lambda$
- Kennlinie von Film oder Detektor

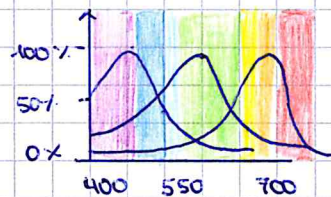


- ① Dunkelstrom
- ② Arbeitsbereich
- ③ Überbelichtung

Bild ist zweidimensionale Funktion!

- ↳ normalerweise 2D Helligkeitsverteilung (Leuchtdichte)
[Helligkeit über menschl. Sehen definiert]

Spektrale Empfindlichkeit
des menschl. Auges

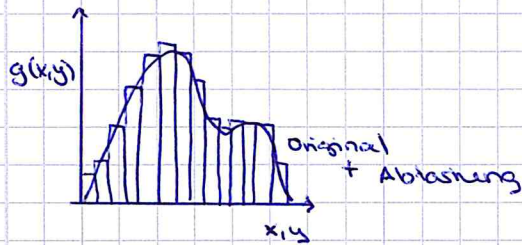


- ⇒ in realem Umfeld ist Helligkeit eine Funktion von Beleuchtung, Material, Oberfläche, Ausrichtung von Oberfläche zu Licht und zu Betrachter

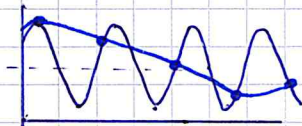
Sehen mit 2 Augen (Stereo), Adaptation nah-fern, hell-dunkel + Farbe

[BRUNNEN] [Größenverhältnisse S.32, QCIF → HD → 4K]

Abtastung & Quantisierung ↳ Probleme Auflösung, Rauschen, Aliasing



Aliasing → Fehler in Signalanalyse wenn im abzutastenden Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher sind als halbe Abtastfrequenz
→ bei periodischen Signalen



Abtastung Sinus signal mit Schritten, etwas kleiner als Wellenlänge
⇒ Resultat ↳ Signal mit viel höherer Wellenlänge

(Vermeidung im Abtasttheorem)

↳ befragt in welchem Abstand x_0 kontinuierliche Funktion oder Bild nach Objektiv abgetastet werden muss, damit keine Informationen verloren gehen

II

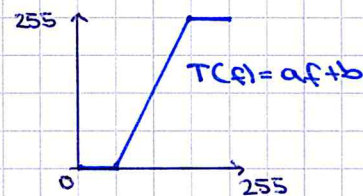
BV-02 Histogramm - Rauschen

Einfache Bildverbesserung mit zwei Zielen

→ Korrekturen u. Aufnahme Fehlern
→ Sichtbarmachen u. schlecht sichtbarer Information

[Helligkeitskorrekturen - nicht klausurrelevant! S-3-13]

Lokale Helligkeitskorrekturen



HISTOGRAMME

Histogrammequalization (Einebnung)

Histogramm
$$h(i) = \sum_{m,n} \delta(f(m,n) - i)$$

↳ gibt für jede Intensität an, wie viele Punkte mit dieser Intensität im Bild vorkommen

→ automatische Kontrastanhebung, je mehr Pixel eine Intensität i haben ⇒ höherer Kontrast

d.h. resultierende Werte werden auseinandergezogen (auf größeren Intensitätsbereich verteilt)

Kontrast wird proportional zu $h(i)$ gewählt

$$T' \propto h(i) \Rightarrow T \propto \int h(i) di$$

$\int_0^i h(j) dj = \text{kumulatives Histogramm}$

- zählt alle Pixel, die Intensitätswerte $\leq i$ sind
- diskret mit Treppenschufen in T
(bei Auseinanderziehen Lücken im resultierenden Histogramm)

d.h. Helligkeitskorrektur (lokal) möglich durch

- lineare Fit
- Histogrammeinebnung

ABER HE nicht immer sinnvoll

- wenn großer Hintergrund = viele Pixel mit gleicher Intensität
↳ Beim Auseinanderziehen wird kleinster Hintergrundrauschen sichtbar und Kontrast an anderer Stelle schlechter
- Lösung adaptive Histogrammeinebnung
(lokale Intensitätskorrektur)

Adaptive Histogrammeinebnung

- = Unterteilung des Bildes in kleine Teilbilder
(Bsp 16×16 , 32×32)
- Transformation mit 4 Transformationsfunktionen aus den 4 am nächsten gelegenen Fenstern
- bilineare Interpolation der Ergebnisse

[sonstige Helligkeitskorrektur → Lookuptables für Pseudocolor]

ÜBUNG 1 zu Histogrammen

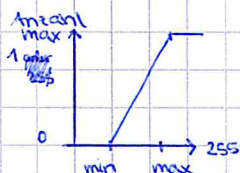
Histogramm zeigt die Helligkeits-Häufigkeitsverteilung eines best. Helligkeitswertes.

(Helligkeit X über Häufigkeit Y aufgetragen)

8 bit Bild = 256 versch. Helligkeitswerte

wenn Grauwertbereich nur begrenzt genutzt wird, kann durch

a) lineare Fit



gesamter Grauwertbereich von 0-255 nutzbar gemacht werden

$$y = mx + n \quad (\min H, 0), (\max H, 1)$$
$$m = \frac{1}{(\max - \min)} \quad \rightarrow n = -\frac{\min}{\max - \min}$$

ergibt neuen Kontrast für eingesehten Helligkeitswert x

= CONTRAST STRETCHING

b) Histogramm Equalization (Einebnung)

- erreicht, dass alle Grauwerte gleichverteilt dargestellt sind
- nach der Einebnung hat das neue kumulierte Histogramm einen nahezu linearen Anstieg
(Treppenschufen aufgrund diskreter Werte)

ausgeprägte Treppenschufen = häufig vorkommende Grauwerte
(zeigt Auseinanderziehen im Histogramm)

Code → normalized accumulated hist

Einfache Rauschfilterung

Was kann man gegen Rauschen tun?

- Akkumulieren Rauschen geht mit $\sqrt{\frac{1}{n}}$ gegen 0
- Versuch, gestörte Werte durch die Umgebung zu rekonstruieren
(nicht mehr lokaler Punktoperator, sondern Filter)

① MITTELWERTBILDUNG

- Mittelwert aus Bsp 3x3 (Boxfilter)
- allgemein: Filterung durch Faltung mit Filterkern g

Faltung
$$f'(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) \cdot g(x-s, y-t) ds dt$$

1D Exkurs Faltung
$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

2D

$$\begin{aligned} f(x,y) \circ g(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta) g(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha, y-\beta) f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = g(x,y) \circ f(x,y) \end{aligned}$$

Faltung

↳ Berechnung des Integrals nach „Drüberschieben“ der gespiegelten Funktion

⇓

Filterung mit Filtermaske = Multiplikation mit gespiegelter Filtermaske

S. 31

Boxfilter benutzt Filterkern

$$g(x,y) = \begin{cases} \text{const} & \text{für } |x| < a, |y| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Kanten verschlechtert

Lösungsmöglichkeiten

- Mittelwert nur aus ähnlichen Werten
- Mittelwert, nur wenn keine zu große Abweichung vom vorherigen
- rotating mask filtering

↓

Rotating mask filtering

- Berechnung der Varianz für alle rotierten Masken
- Auswahl Maske mit kleinster Varianz
- Berechnung des Ausgabewerts mit dieser Maske

Rank filtering

- Werte nach Größe sortiert und mit Rang zugeordneten Gewichtungsfaktor multipliziert
(Bsp Min, Max, Median)

⇒ Medianfilter

↳ durch mittleren Wert aus Umgebung
↳ dünne Linien und Ecken zerstört

- Lösung - kreuzförmige Maske für Erhalt senkrechter und waagerechter Linien
 - Mehrfachnennung des zentralen Wertes

[MEDIAN FILTER FÜR SALT & PEPPER NOISE]

durch Nachbarschaftsoperationen
 Ausreißer wie S&P Noise!
 überschreiben

ÜBUNG 2 FILTER

- ① Multi image denoising
 ↳ averages pixels of n images to reduce noise
 (⚠ Achtung nur für unbewegte Bilder, sonst Unschärfe!)

$$\text{fimg} = (\text{img0} + \text{img1} + \dots + \text{imgn}) / n;$$

- ② Mean Filter
 ↳ box surrounding pixel
 calculate mean

- ③ Median Filter
 ↳ Box Filter für Impulsrauschen, aber Ecken und dünne Kanten verschwinden

Median stabiler
 gegenüber Ausreißern
 (Salt & Pepper Noise)
 ↳ dünne Linien weg
 Bsp 3×3 alle Linien < 2 Pixel

$$\text{Medianposition} \quad \text{med} = \text{ceil}(((2 \cdot w + 1)^2) / 2);$$

- ④ Gauss Filter
 ↳ gauss-Kernel $2D \quad h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$
 normalisieren
 ↳ gausskernel auf Box angewendet, Summe der Box ergibt neuen Wert

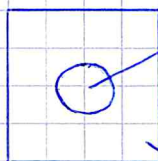
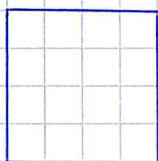
Gauss-Filter zur Glättung oder Weichzeichnung eines Bildes verwendet

= TIEFPASSFILTER

Kleine Strukturen gehen verloren, größere bleiben erhalten
 (Details im Ortsraum = hohe Frequenzen im Frequenzraum)

- ⑤ Bilateral Filter
 - domain - Ortsdifferenz } weighted average in terms of
 range = Farbdifferenz } neighboring pixels
 - reduziert Rauschen, aber erhält Kanten

Ortsraum VS Fourierraum



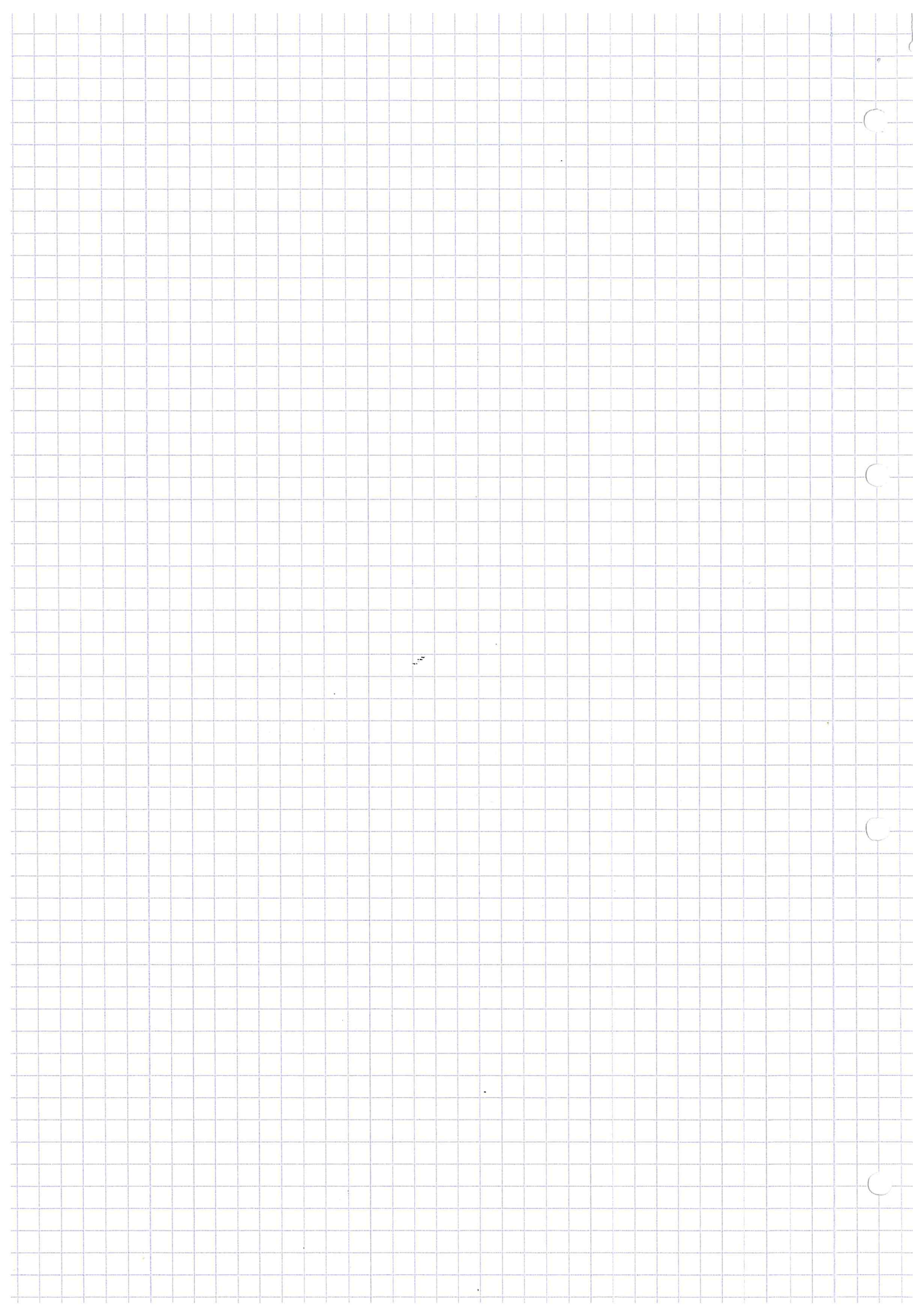
tiefe Frequenzen

Kontrast ?

hohe Frequenzen

Kontur ?

Vom Mittelpunkt der Matrix aus werden die Frequenzen nach außen hin ansteigend dargestellt.



VI

BVO6 - Lineare Operatoren

Lineare Bildfilterung

- allgemeine lineare Operationen
- Verschieben
- Linearkombinationen $\rightarrow$ Blending
(Ändern von Kontrast, Helligkeitsänderung, Farbsättigung, Defokussieren und dazu inverse Operation)
- FIR / IIR - Filter

Lineare Operationen

$n \times m$ Bildmatrix

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$$

ist Ergebnis $n \times m$ Bild $\rightarrow$ so kann A als $(n \cdot m) \times (n \cdot m)$ Matrix dargestellt werden

Wichtige Linearkombination $\Rightarrow$ BLENDING

$$f_{out}(x,y) = (1-\alpha)f_{in0}(x,y) + \alpha f_{in1}(x,y)$$

Verschieben von Bildern

- ist lineare Operation $f_{out}(x,y) = f_{in}(x+a, y+b)$

Lineare Verschiebungsvariante

$\rightarrow$ LSI = linear shift invariant System

(Abbildungen (auch Bildfehler), die durch eine Faltung beschrieben werden können sind eine spezielle Klasse linearer Operationen)

LSI:

- Faltungsmaske entspricht sog. Punktkantwort
- (PSF) - dem Resultat der Faltung mit Punktbild
- Frequenzraum ist Eigenvektorraum für solche verschiebungsinvarianten Filter
- Äquivalente Darstellung durch Transferfunktion im Frequenzraum (Faltungssatz)

Beispiele LSI Systeme

- Defokussierung - Lochblende (annäherungsweise)
- Verwackeln
- Änderung von Helligkeit, Kontrast, Farbsättigung
- Aufnahme mit Sensor (rechteckige Pixel, hier mit zusätzlich Abtastung)

$\rightarrow$ Helligkeit: Blending mit schwarzem Bild

Kontrast: Blending mit Bild mit durchschnittlichem Grauwert

Farbsättigung: Blending mit SW-Bild

Schärfe: Extrapolation von unscharfem und normalem Bild

FIR & IIR-Filter

FIR = Finite Impulse Response

$\hookrightarrow$ normale Faltung mit ~~endlichem~~ Kern

IR = Infinite Impulse Response

↳ Faltung mit unendlich ausgedehntem Kern

- Realisierung durch rekursive Filter: Ergebnisse von bereits berechneten Punkten werden einbezogen

Punktantwort unendlich ausgedehnt! (nicht unbedingt stabil)



Berechnung durch Multiplikation der Fouriertransformierten mit der Transferfunktion

$$G_u = H_u F_u$$

$$h(x) = \alpha^x (1 - \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$H_u = \frac{1 - \alpha}{2\pi i u - \ln \alpha}$$

alternativ mit rekursivem Filter

Berechnung des Frequenzgangs $G(u) = \frac{C(u)}{1 - D(u)} F(u)$

(Berechnung des Frequenzgangs aus Koeff. einfach,
Berechnung der Koeff. aus Frequenzgang ist schwierig)

BVO7 - Kantendetektion

Kantendetektion durch Ableitung

- Ableitung erster Ordnung Maximum od. Minimum
- Ableitung zweiter Ordnung Nulldurchgang
- ↳ Probleme: Isotropie
Rauschen

- Ableitungen 1. Ordnung sind richtungsabhängig
Betragbildung nötig (nicht linear)
- Laplace-Operator ist richtungsunabhängig

Problem: Rauschen Lösung: glätten
also glätten mit Gauss, dann ∇^2 (Laplace)

Ableitung 1. Ordnung

- nicht richtungsunabhängig (nicht isotrop)
- partielle Ableitung bilden Gradientenvektor
- Betrag ist isotrop (aber kein linearer Operator)

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}$$

Ableitungsoperatoren sind lineare Operatoren

Bsp $\partial/\partial x \hat{=}$ Faltung

und im Frequenzraum Multiplikation mit $\hat{h}(u) = 2\pi i u$

Diskrete Näherung für Gradienten

Operatoren

$$+D_x/MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-D_x/MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haben die Transferfunktion

$$\pm D_x = e^{\pm i\pi u/M} 2i \sin(\pi u/M)$$

→ resultieren jeweils in einer Verschiebung der detektierten Kante um $\pm 1/2$ Pixel (Phasenfehler)

→ Anwendung oft in Summe

$$\text{Operator } \frac{1}{2} (+D_x + -D_x)/MN = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Transferfunktion $\hat{D}_{2x} = i \sin(2\pi u/M)$

↳ aber Nachteil: großer Betrag- und daher Winkelfehler gegenüber richtiger Ableitung (bei hohen Frequenzen)

→ resultierende Kanten breiter

Roberts Operator (Robert-Cross)

$$D_{x-y}/MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{x+y}/MN = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Vorteil: diagonale Kanten besser detektiert

→ Nachteil: Verschiebung der Kante (0.5, 0.5) Betrag- und Winkelfehler

Sobel-Operator

= diskrete Ableitung erster Ordnung

→ Kombination mit Glättung senkrecht zur Ableitungsrichtung

→ Gradient als Mittelwert der Gradienten zu einzelnen Nachbarn

$$\left(\text{Filtermasken } \begin{array}{l} \text{X-Richtung} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Y-Richtung} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Vorteile: besser bei Rauschen

kleinere Fehler in Richtung und Betrag des Gradienten

Sobeloperator

$$G_x = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

detektiert vertikale Kanten

$$G_y = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

detektiert horizontale Kanten

durch Kombination $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ → richtungsunabhängige Information

Vorteile: besser bei Rauschen

kleinerer Fehler in Richtung / Betrag des Gradienten

Optimierter Sobel-Operator (Scharf)

$$\frac{1}{16} D_{2x} (12B_y^2 + 4I) / MN = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Vorteil: kleinere Fehler in Richtung / Betrag des gradierten
Optimierung bzgl. versch. Eigenschaften möglich

["Compass-Operator" S.16
↳ Kombination richtungsabhängiger Hoch- und Tiefpass Filter]

Ableitung 2. Ordnung

Ableitung 2. Ordnung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

≡ im Ortsraum Faltung mit $h(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \delta(x-\epsilon) - 2\delta(x) + \delta(x+\epsilon)$

im Ortsfrequenzraum Multiplikation mit $\hat{h}(u) = -4\pi^2 u^2$

Laplaceoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

mit der Transferfunktion $h_{\Delta}(u,v) = -(2\pi u)^2 - (2\pi v)^2$

Laplaceoperator

$$D_{x^2} / MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = (D_{x^2} + D_{y^2}) / MN = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kantendetektion mit Laplace-Operator

- Zero Crossing
- Finden der Nullstellen
 - Finden der Grenzen zwischen gebieten mit pos/neg Werten
 - grundsätzlich geschlossene Kanten

für Rauschunterdrückung, Wahl des Maßstabs (scale)
⇒ Kombination des Laplaceoperator mit Glättung

→ Laplacian of Gaussian (Marr-Hildreth)

glätten mit Gauss OR: Faltung $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$

+

FR: Multiplikation $\hat{g}(u) = e^{-\sigma^2 u^2}$

Laplaceoperator

OR: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

FR: Multiplikation $\hat{g}(u) = -(2\pi u)^2$

LOG → Vertauschen bei Multiplikation möglich

LOG (Laplacian of Gaussian) = Marr-Hildreth = Mexican Hat

Mexican Hat $\hat{=}$ Difference of Gaussians

DOG im Frequenzraum (Outlaw der Laplace-Pyramide, Betrag normiert)

→ Übung 5 Marr-Hildreth

- ① Difference of Gaussian as fast approximation of Laplacian of Gaussian (Mexican Hat)

DOG applied to image

Final output image by finding zero crossings in DOG filtered image

Intensitätsgewichtete Gradientenverfahren

- weitere Möglichkeit, Auswirkung von Rauschen zu minimieren:
 - Kantenpunkte haben wahrsch. Helligkeit zw. innen und Außen
 - Berechnung von Histogramm von Konturpunkten und Gesamtbild - man erhält die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt mit Helligkeit i Kantenpunkt ist

$$p_k(i) = \frac{h_k(i)}{h(i)}$$

!! CANNY - VERFAHREN

- Algorithmus:
- Gradient und Gaussfilterung
 - Betrag des Gradienten
 - Non Maxima Suppression in Normalenrichtung (Richtung des Gradienten)
 - Hysteresis Threshold: Konturverfolgung mit 2 Schwellwerten (Start bei großem Betrag und Abbruch bei kleinerem Betrag)

Canny kann nur auf Graubildern arbeiten

→ Kanten $\hat{=}$ großen Helligkeitsschwankungen zw. Pixeln (Unstetigkeit der Grauwertfunktion)

→ Unstetigkeiten können auch durch Rauschen auftreten, daher Glättung des Bildes (Gauss)

(Wikipedia)

→ Non maxima Suppression

soll sicherstellen, dass Kante nur 1 Pixel breit ist, daher nur Maxima auf Kante erhalten

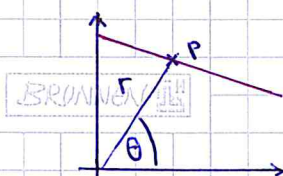
→ Hysteresis

ab welcher Kantenstärke ist Pixel Kante $T_1 < T_2$

Pixel mit $> T_2$ Kante beidseitig verfolgt solange $> T_1$

Hough-Transformation

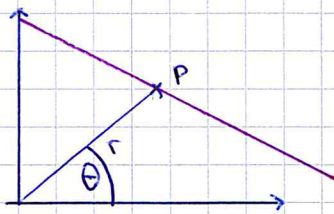
→ Berechnung von Parametern für alle möglichen Geraden durch einen Punkt (Punkt $\rightarrow$ Linie)



Gerade durch Punkt beschrieben durch Polarkoordinaten

$$y = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} x + \frac{r}{\sin(\theta)} \rightarrow r = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$$

(durch Rotation $0-180^\circ = \theta$ alle Geraden)



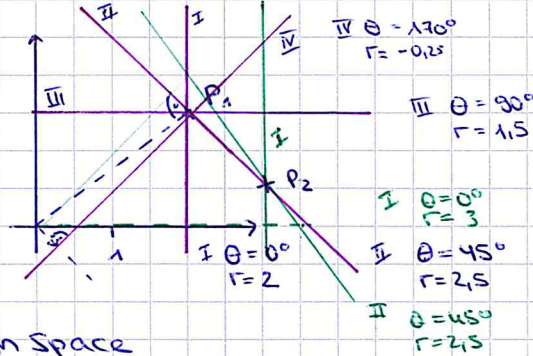
Geradengleichung $y = mx + n$

$$y = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}x + \frac{r}{\sin(\theta)}$$

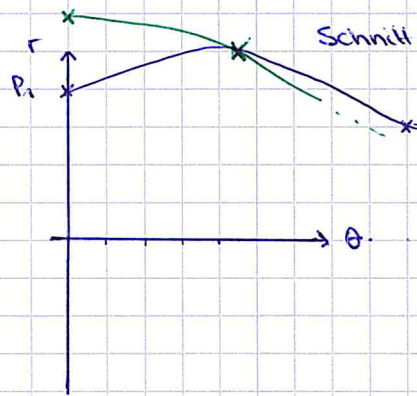
$$y \cdot \sin(\theta) + x \cdot \cos(\theta) = r$$

Durch Rotation $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ alle Geraden beschreiben!
dabei auch r verändert.

Bsp



↓ Hough Space



Schnittpunkt ergibt Gerade θ, r
sinus Kurven
→ Schnittpunkt ergibt

Übung 5 - Hough Transformation Circle Detection

- ① Binäres Bild aus Kantendetektion
- ② Pixel an Stelle $(x, y) = 1$ 1 auf Kante
→ Kreis mit Mittelpunkt an Stelle x, y in Hilfsmatrix
- ③ Hilfsmatrix zu hspace addiert
ergibt akkumulierte Mittelpunkte
⇒ Häufung weist auf echten Mittelpunkt hin

VIII

BV08 - Inverse Filterung

Rekonstruktion

Modell für gestörtes Bildsignal ohne Rauschen

$$f'(m, n) = f(m, n) \circ h(m, n)$$

$$F'(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Die Wirkung einer linearen Abbildung h soll rückgängig gemacht werden → Anwendung h^{-1}

d.h. im Frequenzraum: punktweise Multiplikation mit $1/H(u)$ für $H(u) \neq 0$

⚡ Problem Rauschen wird verstärkt

Lösung → amplituden begrenzte Übertragungsfunktion

→ Pole auf Null setzen

Störung oft Unschärfe (Tiefpaß, Mittelwert, Blende)
↳ Taylor Entwicklung der Funktion $Q(H) = 1/H$

Rekonstruktion Modell für gestörtes Bild mit Rauschen
 $f^*(m,n) = f(m,n) \otimes h(m,n) + r(m,n)$
 $F^*(u,v) = F(u,v) H(u,v) + R(u,v)$

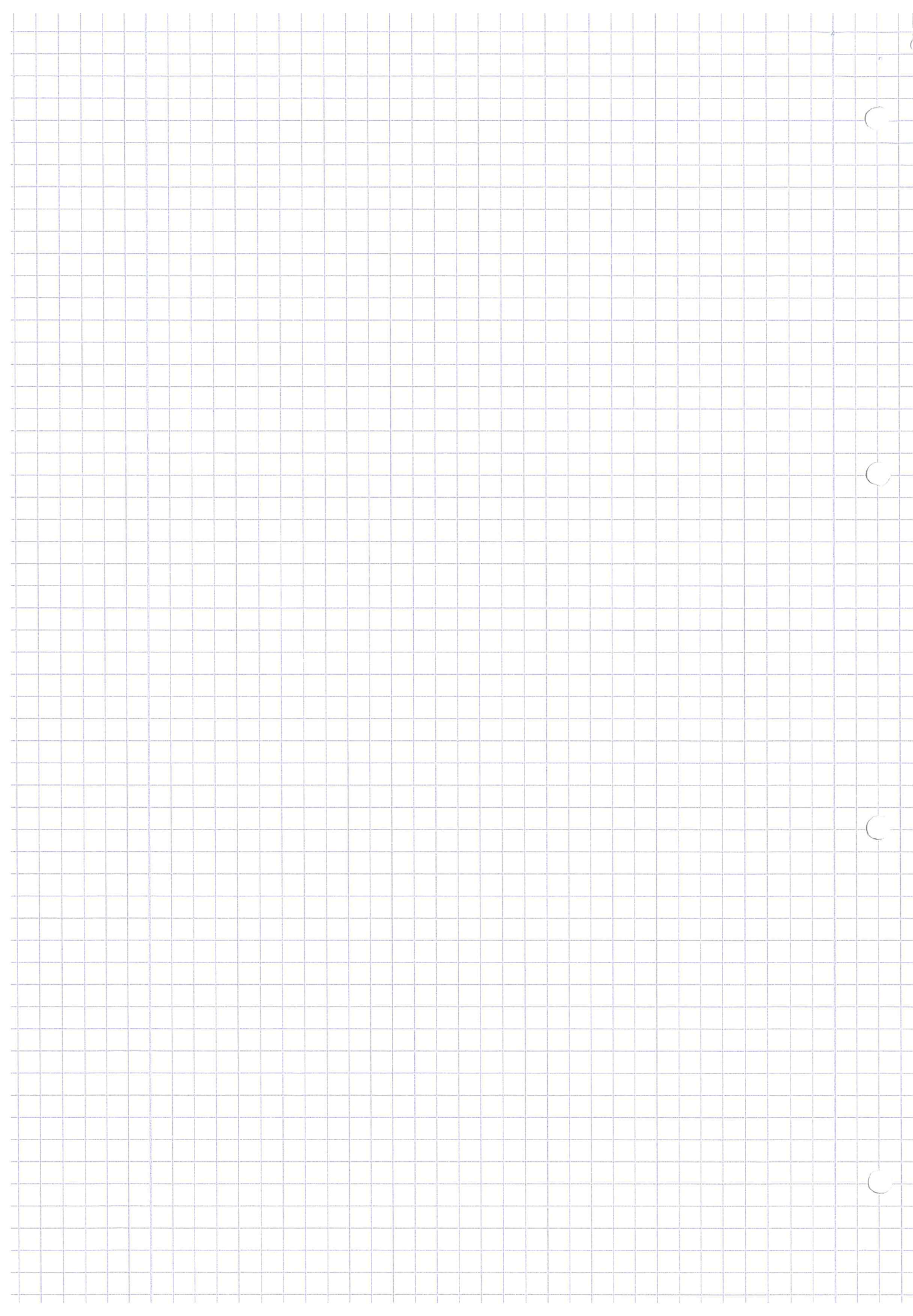
↳ Problem Rauschen, wird mit H^{-1} verstärkt
schlimm wenn $H \ll 1$

$$\hat{F}(u,v) = \frac{F(u,v) H(u,v)}{H(u,v)} + \frac{R(u,v)}{H(u,v)} \quad !$$

Lösung Herakive inverse Filterung $\tilde{H} = 1-H$
 $1/H = 1 + \tilde{H} + \tilde{H}^2 + \dots$
funktioniert nur wenn
 $|\tilde{H}| = |1-H| \leq 1$
Abbruch wenn Rauschen zu stark!

Lösung 2 Constrained Filter [nicht Klausurrelevant]
ab S. 15

Übung 4 Inverse Filtering



Einfache Rauschfilterung

akkumulieren: Rauschen geht mit $\frac{1}{n}$ gegen 0

→ Vgl. n-Filter: gleiche Bilder addieren, durch Anzahl teilen

gestörte Werte durch Umgebung rekonstruieren

→ Filter (statt Punktoperator)

• Boxfilter: Mittelwert, Median

→ Faltung mit Filterkern

$$g(x) = h(x) = \int g(x-\alpha) h(\alpha) d\alpha \quad (1D)$$

$$f(x,y) \otimes g(x,y) = \int \int f(x-\alpha, y-\beta) g(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2D)$$

Mittelwertfilter vs. Medianfilter

- schlechtere Kanten (weichere)
- Rauschunterdrückung
- Erhöhung von Unschärfe
- Verlust kleiner Details
- dünne Linien, Ecken werden zerstört
- gut für Impulsrauschen (Salt and Pepper)
weil Ausreißer rausgeschmissen werden

Fouriertheorie

Fourier-Reihe

jede Periodische Funktion lässt sich als Summe von Sinus und Kosinusfunktionen darstellen, wenn:

- Dirichlet'schen Bedingungen
1. Anzahl der Unstetigkeitsstellen innerhalb einer Periode ist endlich
 2. Anzahl der Maxima/Minima innerhalb einer Periode ist endlich
 3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

(für 2π periodische Funktionen)

„Funktion, die aus Sinussen und Kosinussen zusammengesetzt sind“

Fourier-Integral

Erweiterung für nicht-periodische Funktionen

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Vertauschungssatz (duality theorem)
(für symmetrische Form)

$$\Psi(f(x,y)) = F(u,v) \leftrightarrow \Psi(F(u,v)) = f(-x, -y)$$

- Separierbarkeit

$$f(x,y) \rightarrow F(x,v) \rightarrow F(u,v)$$

- Überlagerung (Linearity Theorem)

$$\begin{aligned} \Psi(f(x,y)) &= F(u,v); \\ \Psi(g(x,y)) &= G(u,v) \end{aligned} \Rightarrow \Psi(a \cdot f(x,y) + b \cdot g(x,y)) = a \cdot F(u,v) + b \cdot G(u,v)$$

- Ähnlichkeit (Similarity theorem)

$$\Psi(f(x,y)) = F(u,v) \Rightarrow \Psi(f(ax, by)) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- Verschiebung (shift theorem)

$$\Psi(f(x-x_0, y-y_0)) = F(u,v) \cdot e^{-i2\pi(u x_0 + v y_0)}$$

- ~~Faltungssatz~~ (convolution theorem)

$$\Psi(f(x,y) \cdot g(x,y)) = F(u,v) \circ G(u,v)$$

$$\Psi(f(x,y) \circ g(x,y)) = F(u,v) \cdot G(u,v)$$

$\Rightarrow$ Faltung im Ortsraum wird zu Multiplikation im Frequenzraum und umgekehrt

$\leadsto$ Anwendung für Filter $\rightarrow$ oft besser im Fourierraum statt Ortsraum, weil einfachere mathematische Operation

- Parsevalsche Gleichung

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(u,v)|^2 du dv$$

- Periodizität

- Rotationsatz

Drehung einer Funktion $\hat{=}$ Drehung der Transformierten
(gleicher Winkel, gleiche Richtung)

Fourier - Transformation

$$f(x) \rightarrow F(u)$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

$$F(u) \rightarrow f(x)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

Euleridentität

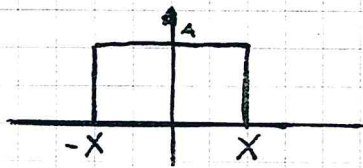
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

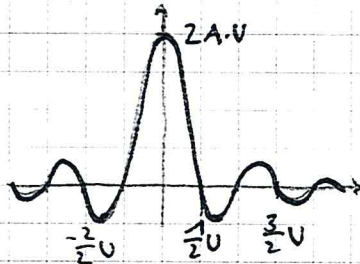
$$e^{ix} = \cos x + i \sin(x) \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

Fourier - Paare

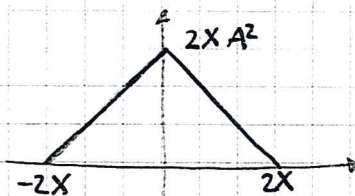
Ortsraum



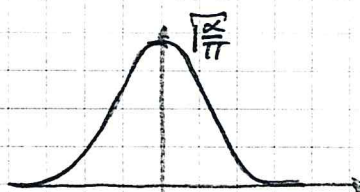
Rechteck-Funktion



sinc - Funktion

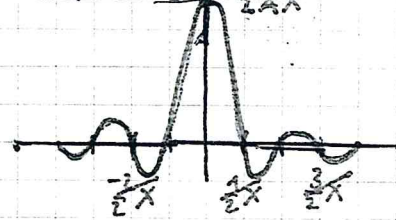


Dreiecksfunktion

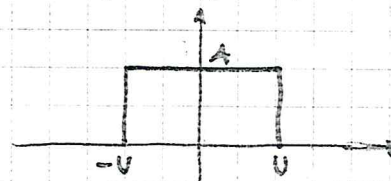


Gauß'sche Glockenkurve

Frequenzraum

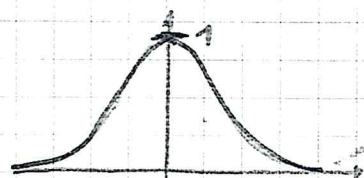


sinc - Funktion (sin(x)/x)



Rechteckfunktion

sinc² - Funktion



Gauß'sche Glockenkurve

BV10 - Multiskalenrepräsentation

Warum Multiskalenrepräsentation?

→ Es gibt Merkmale, die sich nur aus großen Teilen des Bildes extrahieren lassen, andere wirken sich nur in kleiner Umgebung aus.

Prinzip

- Bilderstapel mit verschiedenen gefilterten Versionen des Bildes (Parameter σ)

- Gültigkeitsfilter sei Gaußfilter $g(x,y,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

Erzeugen von Skalenräumen durch Diffusion

↳ Vorteil: keine neuen lokalen Minima / Maxima
Skaleninvariant (vom beliebigen Startwert identische Ergebnisse)

[Vergleich: nicht so gut geeigneter Boxfilter S.8]

Nachteil: σ wächst mit Wurzel der Zeit

○ Lösung: Quadratischer Skalenraum
Logarithmischer Skalenraum

Änderung Skalenparameter → Bildänderungen

a) in Ortsraum Anwendung Laplaceoperator

→ zsm mit Bandpassfilterung
Tiefpassfilter des Originalbilds

! Werden die Filter diskret realisiert, erhält man unter bestimmten Bedingungen einen diskreten Skalenraum der Eigenschaften (Min/Max Erhaltung, Skaleninvarianz) erfüllt.
Diskrete differenzielle Skalenräume erhält man entsprechend durch Ersetzen der Ableitungen durch diskrete Differenzen.

Ingridierrepräsentation

Prinzip → Grobe Abtastung bei großen Skalen

Bsp a) Gaußpyramide: Filterung und Vergrößerung der Abtastung als Rekursionsschritt
b) Laplacepyramide: Differenzieller Skalenraum zur Gaußpyramide
(Berechnung aus Gaußpyramide durch Expansion / Subtraktion)
vergrößern → abtastern

Auflösungspyramiden

→ Eigenschaften • Speicherbedarf $(n \times m) \cdot \frac{4}{3}$

• Rechenbedarf

(auch für großskalige Operationen klein durch weite Kerne)

→ Anwendung

Feature - Detection

(versch. Features werden bei versch. Auflösungen detektiert! S.0)

Detektion von Kanten (u,v)-System $u \perp$ Gradienten
 $v =$ Gradienten
↳ Bedingung für Kante: lokales Maximum des Gradienten in v-Richtung

Detektion von Berggipfeln (ndses) → Beding.: lokales Maximum der Helligkeit in p-Richtung

Anwendung

Analyse von Bildern mit automatischer Wahl der Auflösung

Ableitungsoperatoren

Ableitungsoperatoren sind lineare Operatoren

Bsp $\partial/\partial x$

$\hat{=}$ in Ortsfrequenzraum Faltung mit $h(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x-\varepsilon) - \delta(x+\varepsilon)$

Ortsfrequenzraum der Multiplikation mit $H(u) = iu$

Ableitung 2. Ordnung $\partial^2/\partial x^2$

$\hat{=}$ in Ortsraum Faltung mit $h(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x-\varepsilon) - 2\delta(x) + \delta(x+\varepsilon)$

im Ortsfrequenz $H(u) = -u^2$

Ableitungen erster Ordnung

$\Rightarrow$ sind richtungsabhängig (Berechnung nötig / nicht linear)

dagegen

Laplaceoperator richtungsunabhängig

Problem: Rauschen
Lösung: flätten

flätten mit Gauss
dann ∇^2 Laplace

LOG

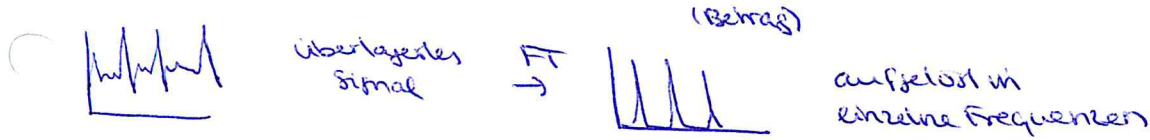
Faltung $g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$
Ableitung $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

bzw

FR $\rightarrow$ Multiplikation: Gauss $G(u) = e^{-\sigma^2 u^2}$
Laplace $G(u) = -4\pi^2 u^2$

3V11 - Wavelets

Fouriertrafo



Kurzzeit-FT

Multiplikation mit Fensterfkt und ansch FT

$$F(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t-\tau) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

- ⚡ Man kann Frequenz und Zeit nicht gleichzeitig bestimmen
→ Kompromiss: zeitl. Auflösung gegen Frequenzauflösung (corr.)

[Kleines Fenster für Zeitpunkt $\approx$ Unsicherheit in Frequenz]

$$\Delta \nu \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Konstantes Fenster

- Problem: wenige Wellenzyklen bei tiefen Frequenzen
viele - " - bei hohen Frequenzen

→ variable Fenstergröße

- a) kleines Fenster hohe Frequenzen
b) großes Fenster tiefe Frequenzen

hohe Frequenzen
↳ Zeitauflösung
niedrige
↳ Frequenzaufl.

Relative Frequenzauflösung konstant $\frac{\Delta \nu}{\nu} = \text{const}$

Wavelet $\psi_{s,\tau}(t) = s^{-1/2} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$

s ... Skala der Frequenz
↓

- großer scale
↳ weniger sample points

Lifting

Wavelettransformation durch rekursive Anwendung von Filtern und Downsampling

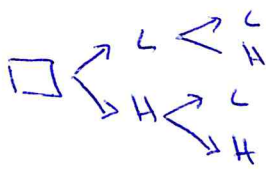
Rekonstruktion durch Upsampling und Filtern

Eigenschaften

- leicht zu invertieren
Schnell
Verwendung von Integerarithmetik möglich

2D-Wavelettraps

→ Hintereinanderausführen von 2-1D-Zerlegungen
Bsp Zeilen, dann Spalten



1D-reg. Teilbild

3 hochfreg. Teilbilder

Fouriertransformation

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i u x} dx$$

Discrete FT

Daten als $f(0), f(1), f(2), \dots$

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2\pi i u x / N}$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i 2\pi u x / N}$$

Bsp. $\{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$

$\quad \quad \quad \underline{2} \quad \quad \underline{3}$

$$F(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^0 = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$
$$= \frac{13}{4} = \underline{\underline{3,25}}$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-2\pi i x / 4}$$

$$= \frac{1}{4} [2 \cdot e^0 + 3e^{-i\pi} + 4e^{-2\pi i} + 4e^{-3\pi i}]$$

$\quad \quad \quad = -0,5 + i0,25$

$$\quad \quad \quad -3i - 4 + 4i]$$

DFT

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i 2\pi u x / N}$$

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i 2\pi u x / N}$$

