Bildverbesserung II
Rekonstruktion

Bildrekonstruktion

- Inverse Filterung
- Inverse Filterung bei verrauschten Bildern

Rekonstruktion

- Modell für gestörtes Bildsignal ohne Rauschen:

$$f'(m,n) = f(m,n) \circ h(m,n)$$
$$F'(u,v) = F(u,v)H(u,v)$$

Rekonstruktion

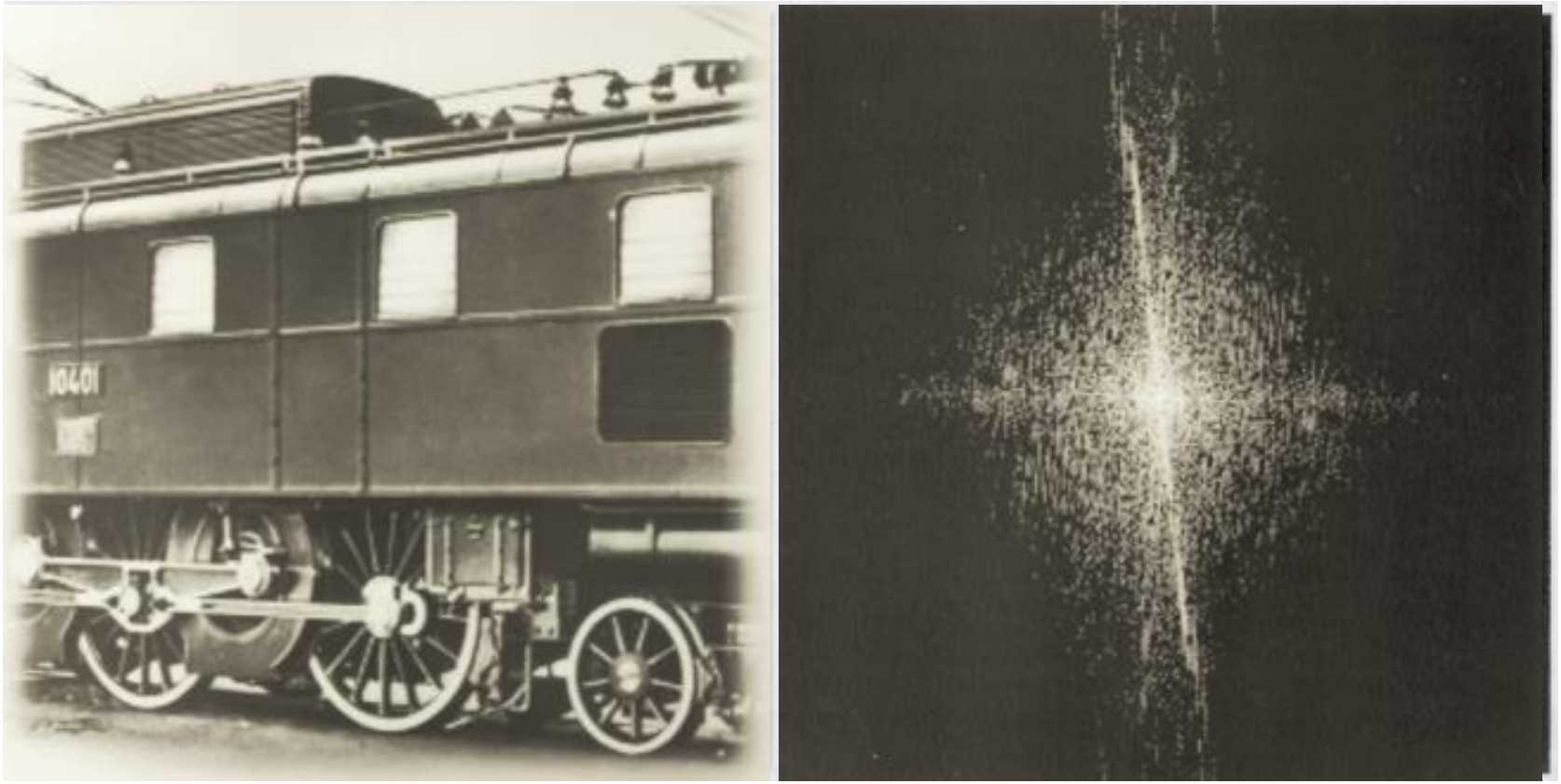


Die Wirkung einer linearen Abbildung ***h*** soll rückgängig gemacht werden.

Anwendung von h^{-1}
Im Frequenzraum: Punktweise Multiplikation mit

$$1/H(\mathbf{u}) \text{ für } H(\mathbf{u}) \neq 0$$

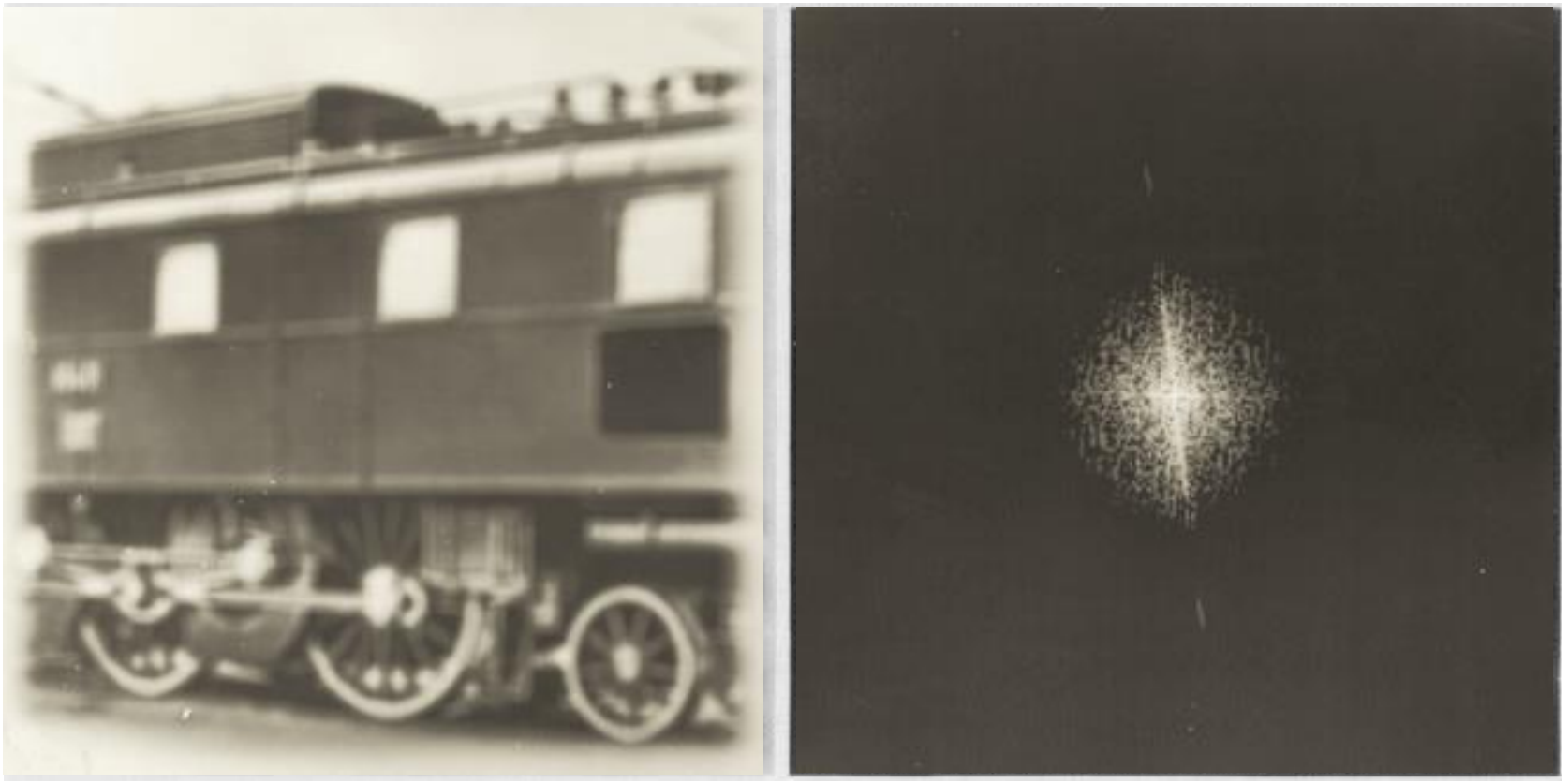
Rekonstruktion



Original

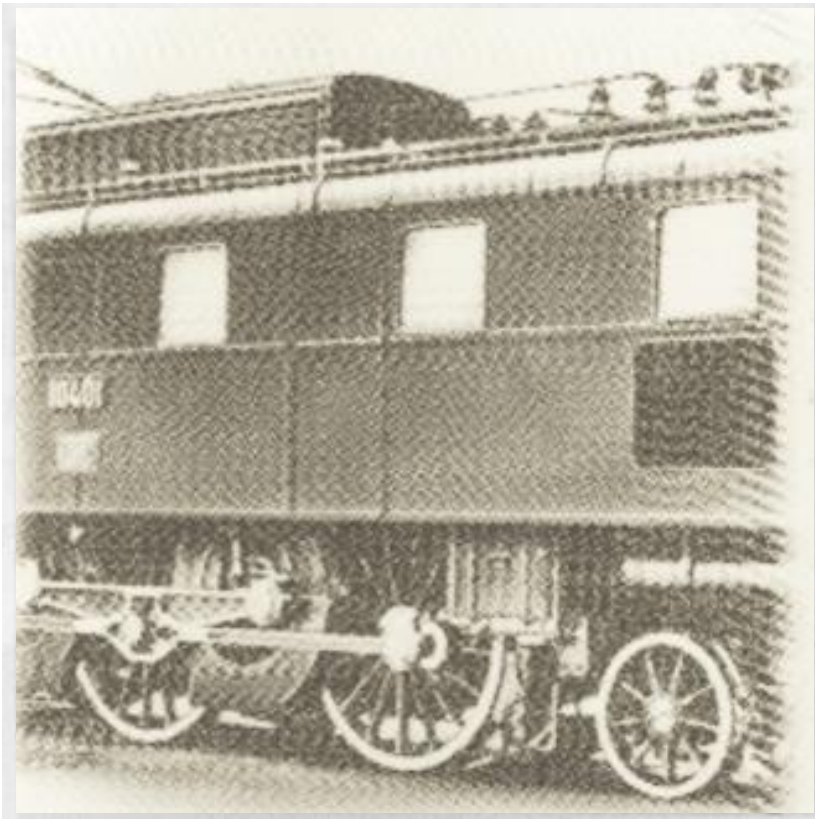
Bilder aus: Friedrich M. Wahl, Digitale Bildsignalverarbeitung

Rekonstruktion



Tiefpassgefiltertes Bild

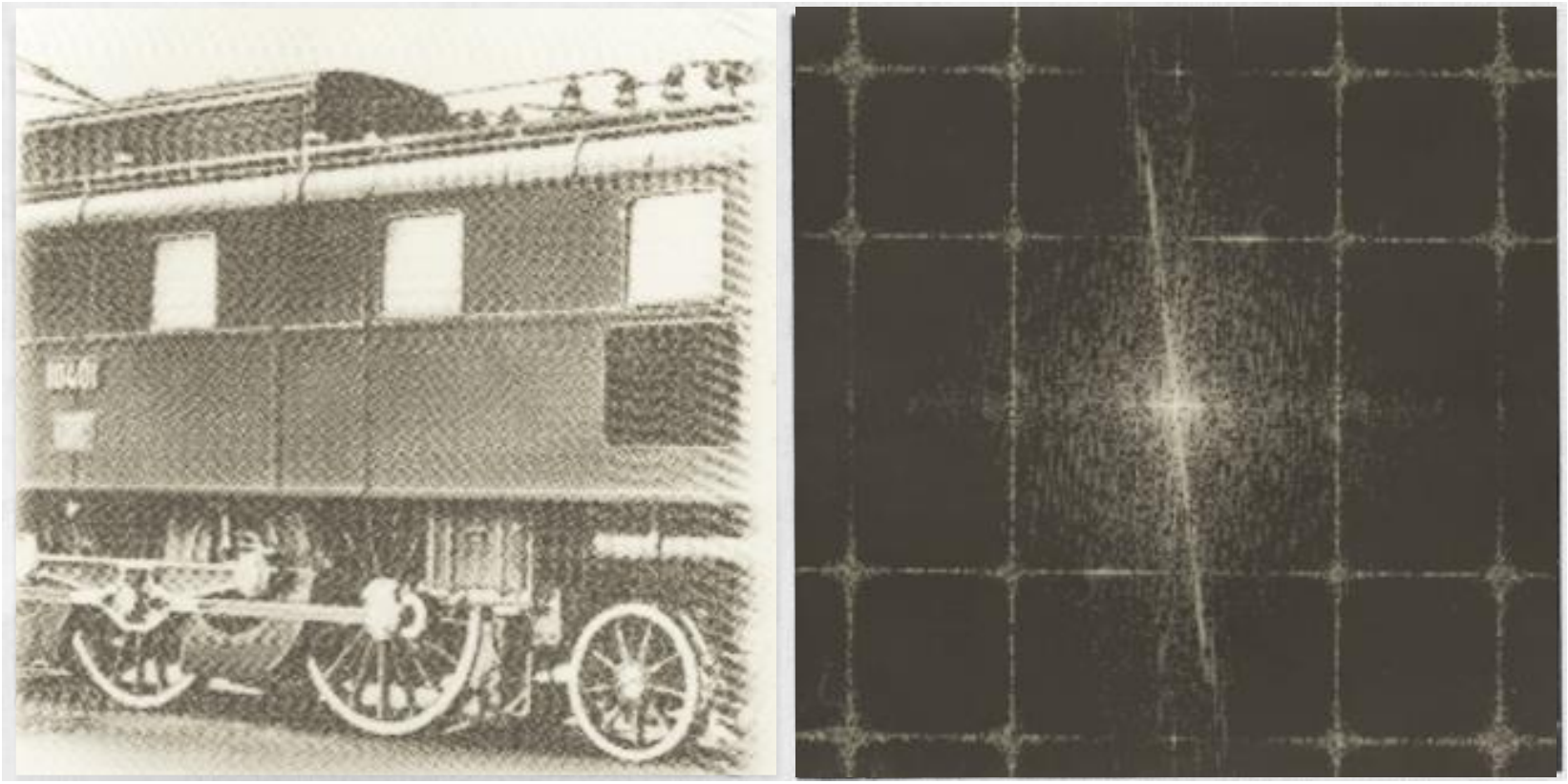
Rekonstruktion



Was ist hier das Problem?

Inverse Filterung

Rekonstruktion



Inverse Filterung

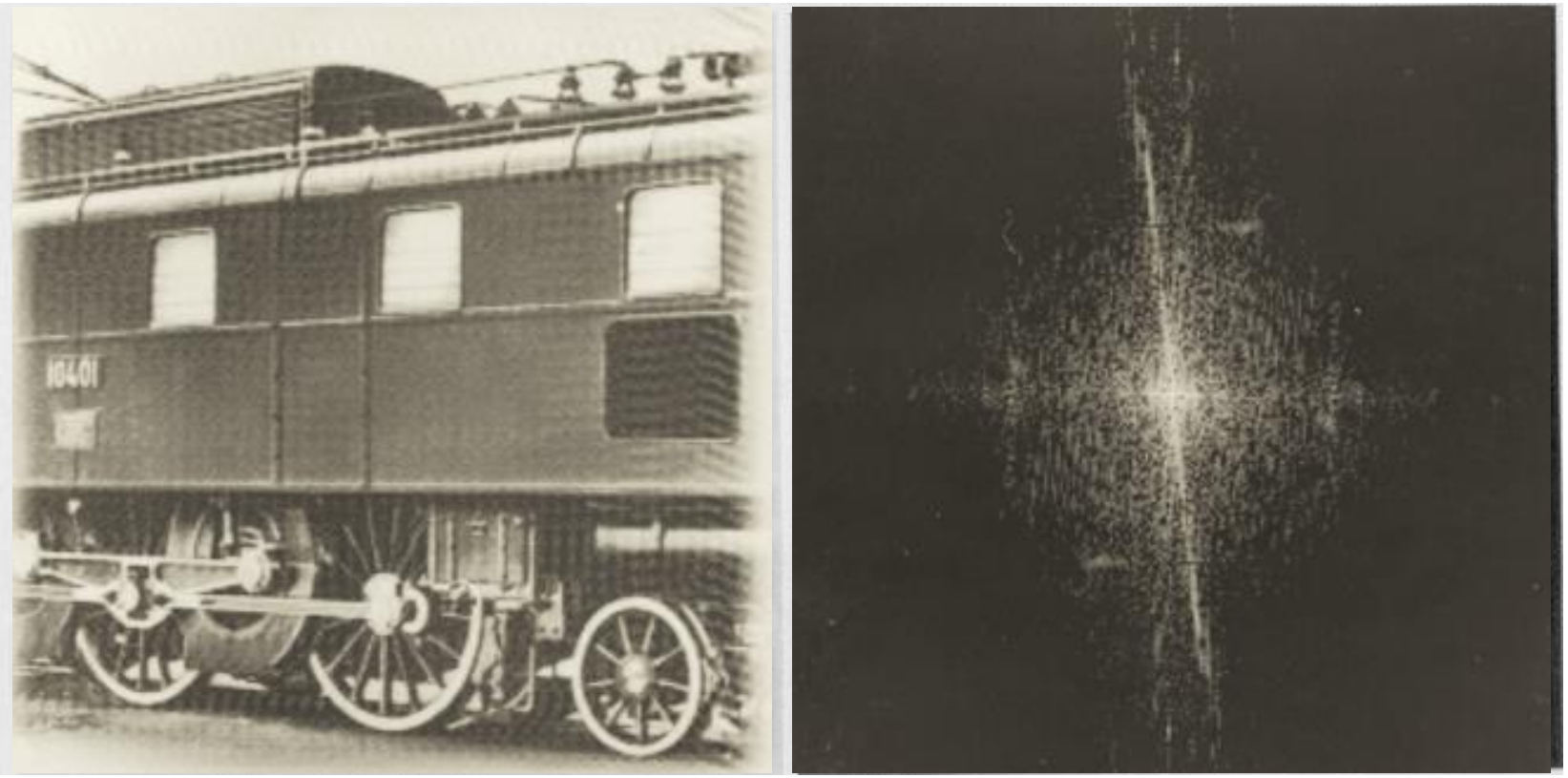
Rekonstruktion

Problem: Rauschen wird verstärkt.

Intuitive Lösungen:

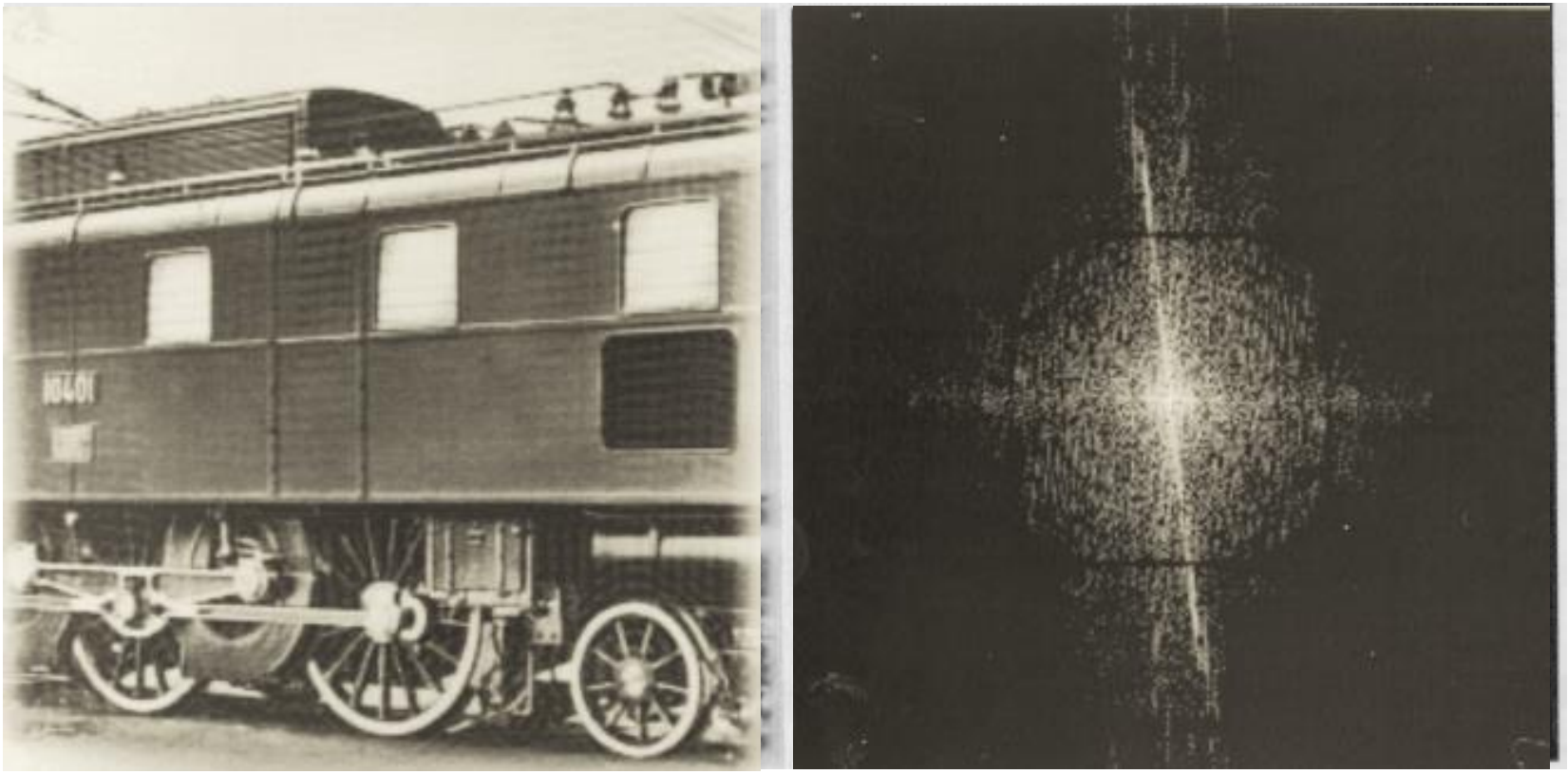
- amplitudenbegrenzte Übertragungsfunktion
- Pole auf Null setzen

Rekonstruktion



amplitudenbegrenzte Übertragungsfunktion

Rekonstruktion



Ausgeblendete Pole

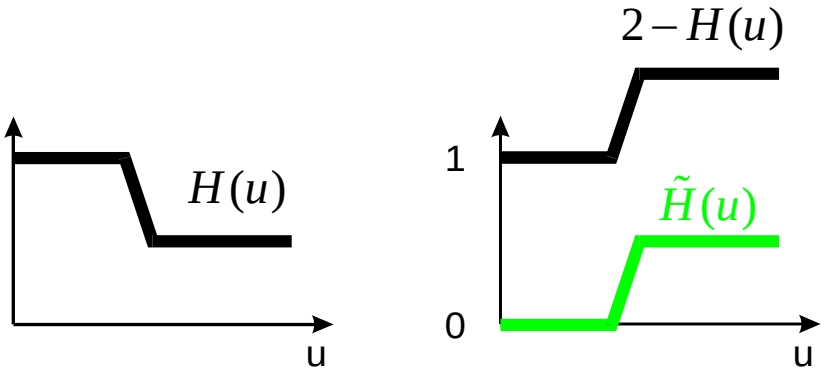
Rekonstruktion

Störung ist oft Unschärfe (Tiefpaß, Mittelwert, Blende).
Taylorentwicklung der Funktion $Q(H) = 1/H$ an der Stelle $H = 1$:

$$1/H = 1 + \tilde{H} + \tilde{H}^2 + \tilde{H}^3 + \tilde{H}^4 + \ldots$$

$$\text{mit } \tilde{H} = 1 - H \quad ; \quad |\tilde{H}| \leq 1$$

- 1. Glied: Addition von $\tilde{H} = 1 - H$



Rekonstruktion

- Vergleiche α-Blending mit weiter degradiertem Bild (Anwendung von h auf degradiertes Bild):

$$H = 1 - \tilde{H} \quad ; \quad H^2 = 1 - 2\tilde{H} + \tilde{H}^2$$

$$\alpha H + (1-\alpha) H^2 = 1 - 2\tilde{H} + \alpha\tilde{H} + \tilde{H}^2 - \alpha\tilde{H}^2$$

$$\text{mit } \alpha = 2:$$

$$2H - H^2 = 1 - 2\tilde{H} + 2\tilde{H} + \tilde{H}^2 - 2\tilde{H}^2 = 1 - \tilde{H}^2$$

Rekonstruktion

- Modell für gestörtes Bildsignal mit Rauschen:

$$f''(m,n) = f(m,n) \circ h(m,n) + r(m,n)$$
$$F''(u,v) = F(u,v)H(u,v) + R(u,v)$$

- Problem: Rauschen, wird mit H^{-1}verstärkt. Schlimm, wenn $H << 1$:

$$\hat{F}(u,v) = \frac{F(u,v)H(u,v)}{H(u,v)} + \frac{R(u,v)}{H(u,v)}$$

Rekonstruktion

Lösung1: Iterative inverse Filterung (s.o.):

$$\tilde{H} = 1 - H$$

$$1/H = 1 + \tilde{H} + \tilde{H}^2 + \tilde{H}^3 + \tilde{H}^4 + \ldots$$

Abbruch, wenn Rauschen zu stark.
Wichtig: funktioniert nur, wenn

$$\left|\tilde{H}\right| = \left|1 - H\right| \leq 1$$

Constrained Filter

Lösung 2: Constrained Filter:

- Annahme: Energie des Störsignals bekannt:

$$E_r = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \left| r(m,n) \right|^2$$

- Dann soll gelten:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \left[f''(m,n) - \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}(i,j)\, h(m-i, n-j) \right]^2 \overset{!}{=} E_r$$

Constrained Filter

- Lösung ist nicht eindeutig, deshalb stellen wir eine zusätzliche Forderung (constraint):

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{f}(i,j)c(m-i,n-j)\right]^2 \rightarrow \min$$

Constrained Filter

- Was wir bisher haben, sieht im Frequenz-raum (nach der Fouriertransformation) so aus:

$$\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|F''(k,l)-\hat{F}(k,l)H(k,l)\right|^2 \stackrel{!}{=} E_r$$

mit

$$E_r = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|R(k,l)\right|^2$$

und

$$\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|C(k,l)\hat{F}(k,l)\right|^2 \rightarrow \min$$

Exkurs: Lagrangesche Multiplikatormethode

- Zur Lösung brauchen wir die Lagrangesche Multiplikatormethode:

Beispiel:
Wir wollen $f(x,y) = x^2 - y$ minimieren

Nebenbedingung: $\varphi(x,y) = x - y = 0$

dann schreiben wir: $\Psi = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

und fordern: $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \nabla\Psi = \nabla f + \lambda\nabla\varphi = 0$

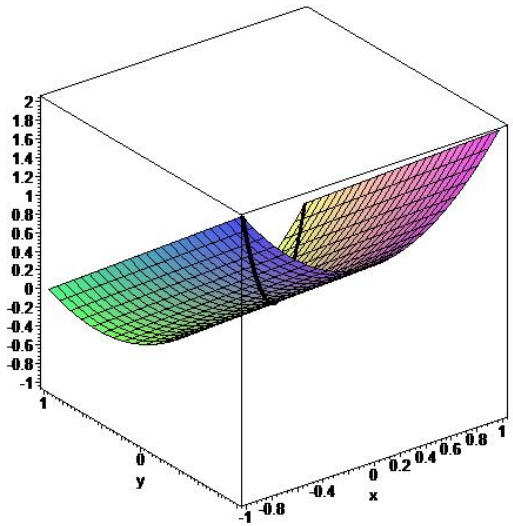
Exkurs: Lagrangesche Multiplikatormethode

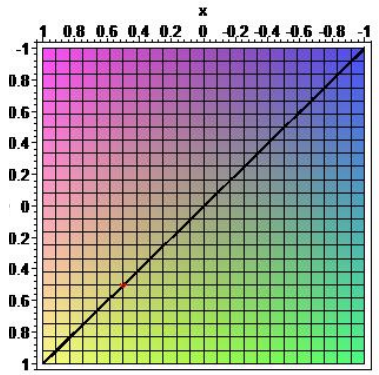
- Beispiel

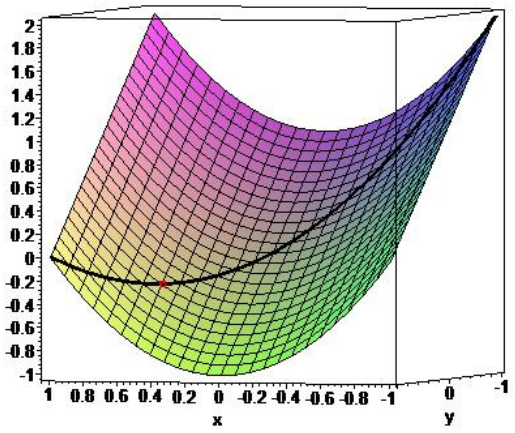
$$f(x,y) = x^2 - y$$

Nebenbedingung:

$$\varphi(x,y) = x - y = 0$$







Exkurs: Lagrangesche Multiplikatormethode

$$f(x,y) = x^2 - y$$

Nebenbedingung:

$$\varphi(x,y) = x - y = 0$$

$$\Psi = x^2 - y + \lambda(x - y)$$

- Drei Gleichungen, drei Unbekannte *x*, *y* und λ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -1 - \lambda = 0$$

$$x = y$$

Exkurs: Lagrangesche Multiplikatormethode

Wir erhalten:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -1 - \lambda = 0 \qquad \lambda = -1$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$$

$$x = y \qquad y = \frac{1}{2}$$

Constrained Filter

- Anwendung der Lagrange‘schen Multiplikatormethode auf Constrained Rekonstruktionsfilter:

$$\Psi\left(\hat{F}\right) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\left|C(k,l)\hat{F}(k,l)\right|^2 + \lambda\left(\left|F''(k,l) - \hat{F}(k,l)H(k,l)\right|^2 - MNE_r\right)\right]$$

$$\frac{\partial\Psi\left(\hat{F}(k,l)\right)}{\partial\hat{F}(k,l)} = 0$$

Constrained Filter

- Umformung mit bzw.

$$A(k,l) = \mathrm{Re}\,\hat{F}(k,l) \quad ; \quad B(k,l) = \mathrm{Im}\,\hat{F}(k,l)$$

$$\hat{F}(k,l) = A(k,l) + iB(k,l)$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(\hat{F}) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\left|C(k,l)\hat{F}(k,l)\right|^2 + \lambda\left(\left|F''(k,l) - \hat{F}(k,l)H(k,l)\right|^2 - MNE_r\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\left|C(k,l)\right|^2\left|\hat{F}(k,l)\right|^2 + \lambda\left(\left(F''(k,l) - \hat{F}(k,l)H(k,l)\right)\left(F''^*(k,l) - \hat{F}^*(k,l)H^*(k,l)\right) - MNE_r\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\Big[\left|C(k,l)\right|^2\left(A(k,l)^2 + B(k,l)^2\right) + \lambda\Big(\left|F''(k,l)\right|^2 + \left(A(k,l)^2 + B(k,l)^2\right)\left|H(k,l)\right|^2 \\
&\qquad - F''(k,l)\left(A(k,l) - iB(k,l)\right)H^*(k,l) \\
&\qquad - F''^*(k,l)\left(A(k,l) + iB(k,l)\right)H(k,l) - MNE_r\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Constrained Filter

- Lösung

$$A(k,l) = \mathrm{Re}\,\hat{F}(k,l) \quad ; \quad B(k,l) = \mathrm{Im}\,\hat{F}(k,l)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial A(k,l)} = 2\left|C(k,l)\right|^2 A(k,l) + 2\lambda A(k,l)\left|H(k,l)\right|^2 - \lambda\left[F''(k,l)H^*(k,l) + F''^*(k,l)H(k,l)\right]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B(k,l)} = 2\left|C(k,l)\right|^2 B(k,l) + 2\lambda B(k,l)\left|H(k,l)\right|^2 + i\lambda\left[F''(k,l)H^*(k,l) - F''^*(k,l)H(k,l)\right]$$

Constrained Filter

- Durch Nullsetzen erhält man:

$$A(k,l) = \frac{\lambda \,\mathrm{Re}\left\{F''(k,l)H^*(k,l)\right\}}{\left|C(k,l)\right|^2 + \lambda\left|H(k,l)\right|^2}$$

$$B(k,l) = \frac{\lambda \,\mathrm{Im}\left\{F''(k,l)H^*(k,l)\right\}}{\left|C(k,l)\right|^2 + \lambda\left|H(k,l)\right|^2}$$

$$\hat{F}(k,l) = \frac{\lambda F''(k,l)H^*(k,l)}{\left|C(k,l)\right|^2 + \lambda\left|H(k,l)\right|^2}$$

Constrained Filter

$$\hat{F}(k,l) = \frac{\lambda F''(k,l) H^*(k,l)}{|C(k,l)|^2 + \lambda |H(k,l)|^2}$$

- Für die Übertragungsfunktion des Constraint-Filters erhalten wir also:

$$Q(k,l) = \frac{\lambda H^*(k,l)}{|C(k,l)|^2 + \lambda |H(k,l)|^2} = \frac{1}{H(k,l)} \frac{\lambda |H(k,l)|^2}{|C(k,l)|^2 + \lambda |H(k,l)|^2}$$

Constrained Filter

- λ ergibt sich aus der Bedingung:

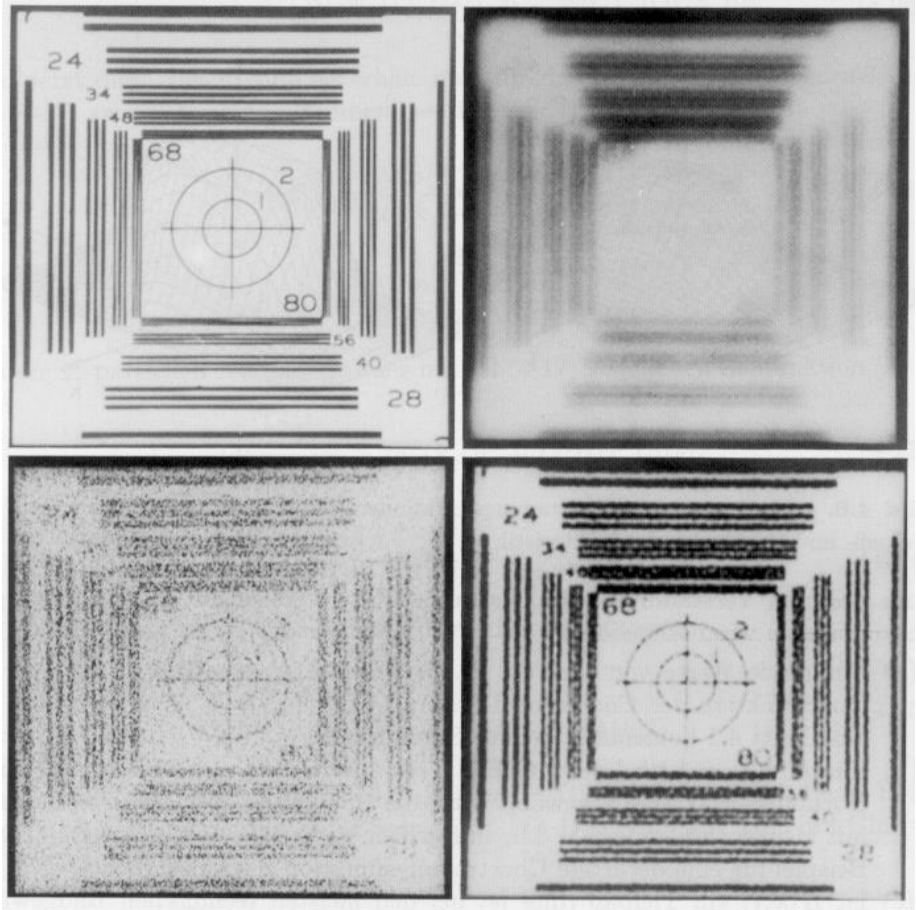
$$\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|F''(k,l)-\hat{F}(k,l)H(k,l)\right|^2$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|\frac{F''(k,l)\left|C(k,l)\right|^2}{\left|C(k,l)\right|^2+\lambda\left|H(k,l)\right|^2}\right|^2 \overset{!}{=} E_r$$

(Newtonverfahren)

Constrained Filter

Original
Tiefpaßgefiltert
Invers gefiltert
Constrained Filter



Rekonstruktion

- Spezialfall: Pseudoinverse zur Vermeidung numerischer Instabilitäten:

  – wir setzen: $$C(k,l)=1$$

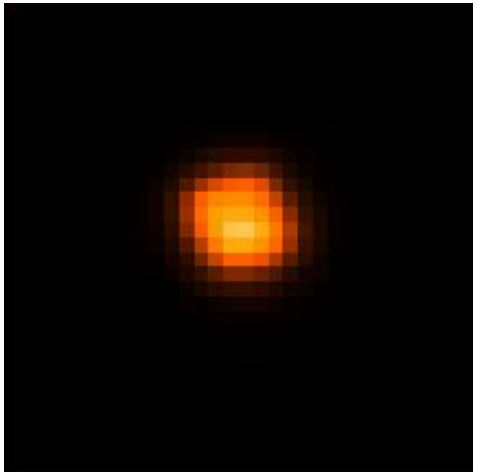
  und erhalten für $E_r = 0$:

$$Q^+(k,l) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda H^*}{1+\lambda|H|^2}$$

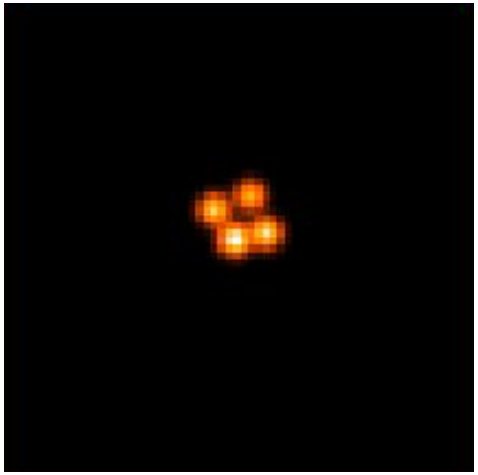
Beispiel

Beispielbild aus der Astronomie

Deconvolution of a pre-discovery image of the Cloverleaf gravitational mirage obtained with the ESO/MPI 2.2m telescope at La Silla (Chile).



observed image with a FWHM resolution of 1.3 arcsec



our deconvolution with improved sampling and a FWHM resolution of 0.5 arcsec.

Aus: P. Magain, F. Courbin, S. Sohy: Deconvolution with correct sampling, The Messenger, 88, 28-31 (1997)

Gesegnete Weihnachten



Antoine Pesne 1745



Rembrandt ca. 1666-69

und ein gutes neues Jahr 2019!