



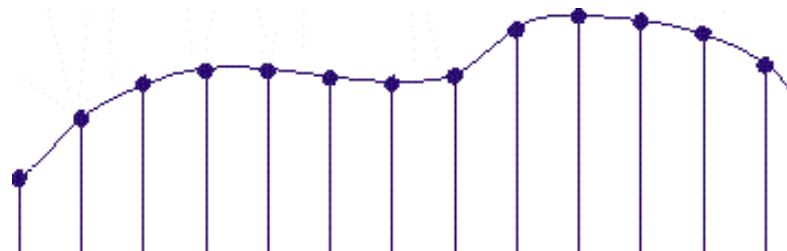
Die diskrete Fouriertransformation (DFT)



13.12.2018

Funktionen liegen als ein- oder zweidimensionale Datenfelder vor.

$$f(0), f(1), f(3), \dots, f(N-1)$$





Die diskrete Fouriertransformation

13.12.2018

Funktionen liegen als ein- oder zweidimensionale Datenfelder vor.

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)$$

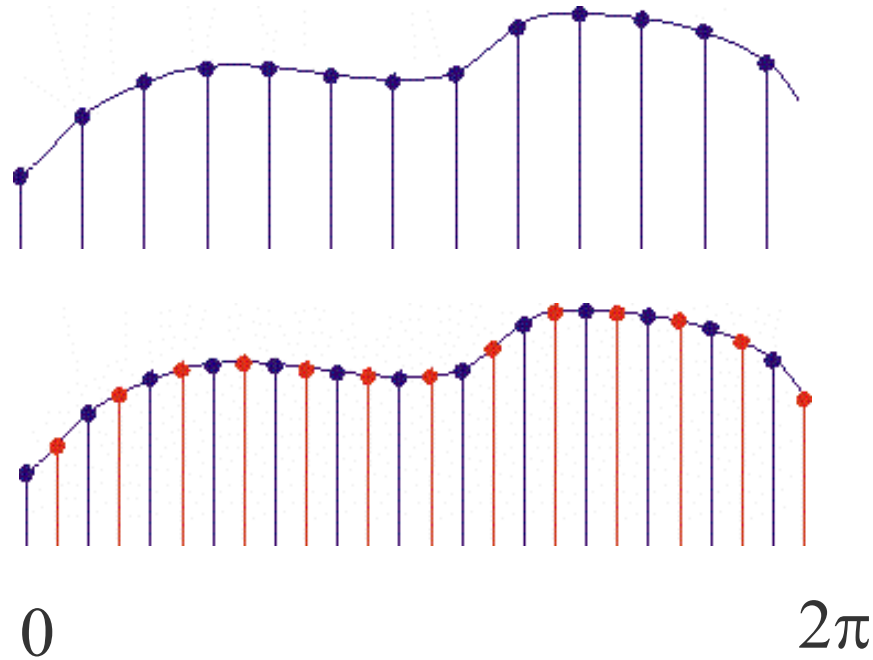
$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N}$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N}$$



13.12.2018

Warum $1/N$?





Die diskrete Fouriertransformation

13.12.2018

Symmetrische Form:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N}$$



13.12.2018

Beispiel:

Es soll die Fourier-Transformierte der folgenden diskretisierten Funktion bestimmt werden:

$$f(x) = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$$

mit:

$$f(0) = 2.0, f(1) = 3.0, f(2) = 4.0, f(3) = 4.0$$

Für $F(0)$ erhalten wir:

$$F(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^0 = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$F(0) = \frac{1}{4} [2 + 3 + 4 + 4] = \frac{13}{4} = 3,25.$$



13.12.2018

Für $F(1)$ erhalten wir:

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-i2\pi x/4} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-i\pi/2} + 4e^{-i\pi} + 4e^{-i3\pi/2}]$$

$$F(1) = \frac{1}{4} [2 - i3 - 4 + i4] = \frac{1}{4} [-2 + i] = -0,5 + i0,25.$$



13.12.2018

Für $F(2)$ erhalten wir:

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-i 4\pi x/4} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-i\pi} + 4e^{-i2\pi} + 4e^{-i3\pi}]$$

$$F(2) = \frac{1}{4} [2 - 3 + 4 - 4] = -0,25.$$



13.12.2018

Für $F(3)$ erhalten wir:

$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-i6\pi x/4} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-i3\pi/2} + 4e^{-i3\pi} + 4e^{-i9\pi/2}]$$

$$F(3) = \frac{1}{4} [2 + i3 - 4 - i4] = -0,5 - i0,25.$$



Die diskrete Fouriertransformation

13.12.2018

Um zu überprüfen, ob wir mit den transformierten Werten wieder die ursprünglichen Funktionswerte erhalten, führen wir anschließend die inverse DFT durch.

Wir erhalten:

$$f(0) = \sum_{u=0}^3 F(u) e^{i0} = 3,25 - 0,5 + i0,25 - 0,25 - 0,5 - i0,25 = 2,0 .$$

$$f(1) = \sum_{u=0}^3 F(u) e^{i\pi u/2} = 3,25 e^0 + (-0,5 + i0,25) e^{i\pi/2} - 0,25 e^{i\pi} - (0,5 + i0,25) e^{i3\pi/2}$$

$$f(1) = 3,25 + (-0,25 - i0,5) - 0,25 + (-0,25 + i0,5) = 3,0$$

$$f(2) = \sum_{u=0}^3 F(u) e^{i u \pi} = 3,25 e^0 + (-0,5 + i 0,25) e^{i \pi} - 0,25 e^{i 2 \pi} - (0,5 + i 0,25) e^{i 3 \pi}$$

$$f(2) = 3,25 + (0,5 - i 0,25) - 0,25 + (0,5 + i 0,25) = 4,0$$

$$f(3) = \sum_{u=0}^3 F(u) e^{i 3 \pi u / 2} = 3,25 e^0 + (-0,5 + i 0,25) e^{i 3 \pi / 2} - 0,25 e^{i 3 \pi} - (0,5 + i 0,25) e^{i 9 \pi / 2}$$

$$f(3) = 3,25 + (0,25 + i 0,5) + 0,25 + (0,25 - i 0,5) = 4,0$$

Diskrete 2D-Fouriertransformation

13.12.2018

Fouriertransformation:

$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/N + vy/M)}$$

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$v = 0, 1, \dots, M-1$$

Inverse Fouriertransformation:

$$f(x, y) = \sum_{v=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(ux/N + vy/M)}$$

$$x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y = 0, 1, \dots, M-1$$



Faltung in 2D:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

diskret:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \frac{1}{N M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n, m) g(x - n, y - m)$$



Faltung in 2D-Frequenzraum:

$$F(u, v) \circ F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) G(u - \alpha, v - \beta) d\alpha d\beta$$

Achtung! Faltung diskret im Frequenzraum:

- Faktor $1/MN$ entfällt

$$F(u, v) \circ G(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(n, m) G(u - n, v - m)$$



Fast Fourier Transform (FFT)



13.12.2018

Wir schreiben die Funktion $f(x)$ als Vektor:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} ; \quad f_i = f(i)$$



13.12.2018

Analog dazu $F(u)$ als Vektor:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{pmatrix} ; \quad F_i = F(i)$$



Die Fouriertransformation

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \Phi_{ux}$$

läßt sich dann schreiben als

$$\mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{\Phi} \mathbf{f}$$

In Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{\Phi} \mathbf{f}$$

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \Phi_{0,0} & \Phi_{0,1} & \cdots & \Phi_{0,N-2} & \Phi_{0,N-1} \\ \Phi_{1,0} & \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,N-2} & \Phi_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{N-2,0} & \Phi_{N-2,1} & \cdots & \Phi_{N-2,N-2} & \Phi_{N-2,N-1} \\ \Phi_{N-1,0} & \Phi_{N-1,1} & \cdots & \Phi_{N-1,N-2} & \Phi_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$



13.12.2018

Für die Einträge der Transformationsmatrix gilt:

$$\Phi_{u,x} = e^{-i2\pi ux/N} = \left(e^{\frac{-i2\pi}{N}} \right)^{ux} = \varphi_N^{ux}$$



13.12.2018

Beispiel N=4:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \varphi_4^0 & \varphi_4^0 & \varphi_4^0 & \varphi_4^0 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^1 & \varphi_4^2 & \varphi_4^3 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^2 & \varphi_4^4 & \varphi_4^6 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^3 & \varphi_4^6 & \varphi_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \varphi_4^0 & \varphi_4^0 & \varphi_4^0 & \varphi_4^0 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^1 & \varphi_4^2 & \varphi_4^3 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^2 & \varphi_4^0 & \varphi_4^2 \\ \varphi_4^0 & \varphi_4^3 & \varphi_4^2 & \varphi_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$



13.12.2018

Beispiel N=4:

Es gilt hier:

$$\varphi_4^1 = -i$$

damit wird:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel N=8:

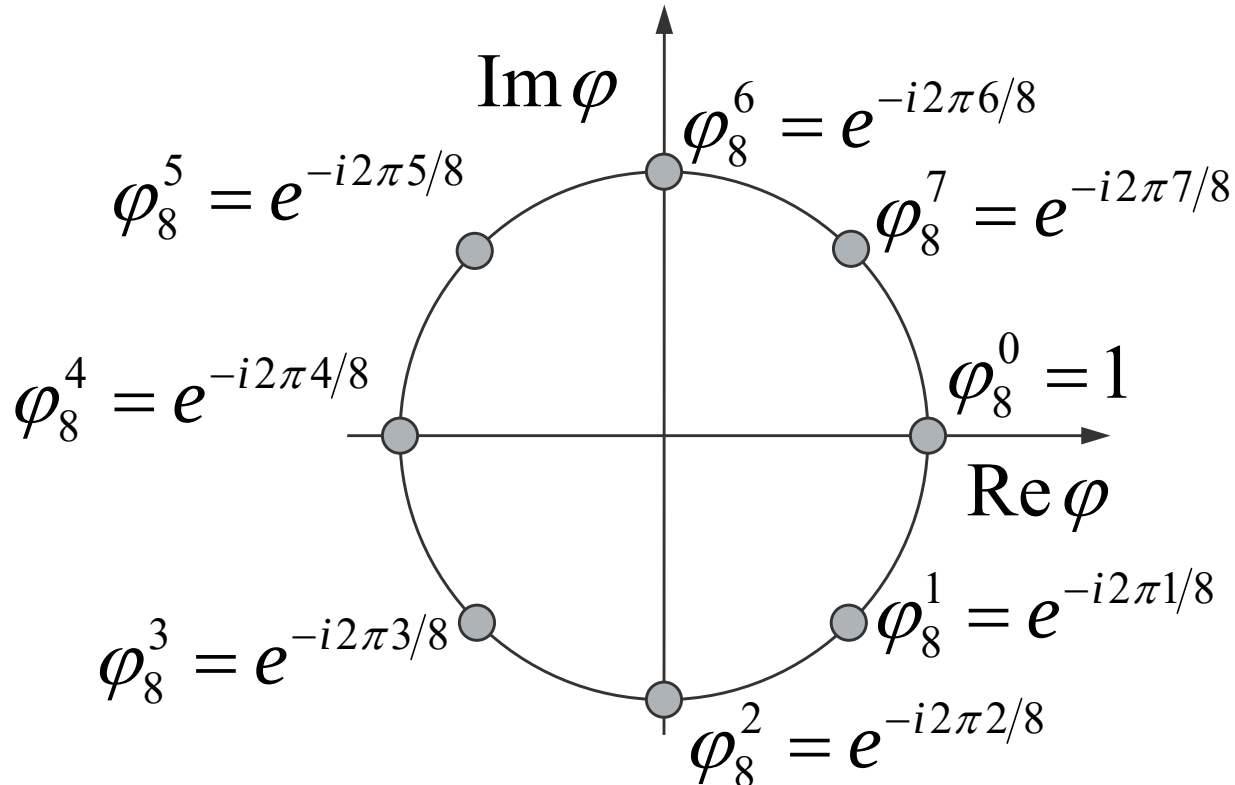
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 & \varphi_8^0 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^1 & \varphi_8^2 & \varphi_8^3 & \varphi_8^4 & \varphi_8^5 & \varphi_8^6 & \varphi_8^7 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^2 & \varphi_8^4 & \varphi_8^6 & \varphi_8^0 & \varphi_8^2 & \varphi_8^4 & \varphi_8^6 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^3 & \varphi_8^6 & \varphi_8^1 & \varphi_8^4 & \varphi_8^7 & \varphi_8^2 & \varphi_8^5 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^4 & \varphi_8^0 & \varphi_8^4 & \varphi_8^0 & \varphi_8^4 & \varphi_8^0 & \varphi_8^4 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^5 & \varphi_8^2 & \varphi_8^7 & \varphi_8^4 & \varphi_8^1 & \varphi_8^6 & \varphi_8^3 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^6 & \varphi_8^4 & \varphi_8^2 & \varphi_8^0 & \varphi_8^6 & \varphi_8^4 & \varphi_8^2 \\ \varphi_8^0 & \varphi_8^7 & \varphi_8^6 & \varphi_8^5 & \varphi_8^4 & \varphi_8^3 & \varphi_8^2 & \varphi_8^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$



13.12.2018

Beispiel N=8:

$$\varphi_8^1 = e^{\frac{i2\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$





Der Rechenaufwand wächst mit N^2

Ziel:

- Aufteilung in zwei Probleme der Größe $N/2$
(Aufwand halbiert + $O(N)$)
- Rekursive Anwendung der Aufteilung
(Aufwand proportional zu $N \log(N)$)

Unterschied: bei $N=10^6$; $t=1\mu s$:

- 30 sec. <--> 2 Wochen

Unterschied: bei $N=10^8$; $t=10ns$:

- 40 sec. <--> 200 Wochen

Wir Zerlegen: $F_{\text{even}} + F_{\text{odd}}$

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{e0} \\ F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{o0} \\ F_{o1} \\ F_{o2} \\ F_{o3} \end{pmatrix}$$

Die Zerlegung: F_{even}

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{e0} \\ F_{e1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{e2} \\ F_{e3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

0	0	0	0
0	1	2	3
0	2	0	2
0	3	2	1

Die Zerlegung: F_{odd}

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

0	0	0	0
0	1	2	3
0	2	0	2
0	3	2	1

$$\begin{pmatrix} F_{o0} \\ F_{o1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{o2} \\ F_{o3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Die Zerlegung: F_{odd}

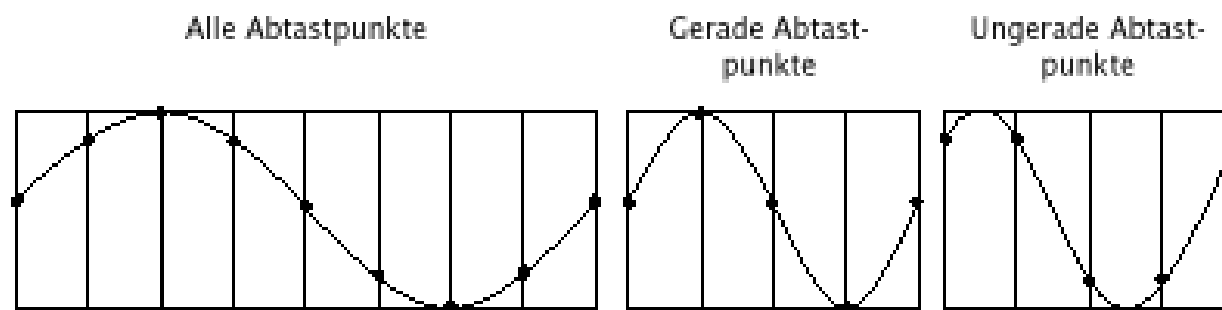
$$\begin{pmatrix} F_{o0} \\ F_{o1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{o2} \\ F_{o3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_{e0} \\ F_{e1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{e2} \\ F_{e3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{o0} \\ F_{o1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-i)^0 & 1 \cdot (-i)^0 \\ 1 \cdot (-i)^1 & -1 \cdot (-i)^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{o2} \\ F_{o3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-i)^2 & 1 \cdot (-i)^2 \\ 1 \cdot (-i)^3 & -1 \cdot (-i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}$$



13.12.2018





13.12.2018

Also zerlegen wir:

$$F(u) = \frac{1}{N} \left[\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) \exp\left(\frac{-i2\pi 2xu}{N}\right) + \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) \exp\left(\frac{-i2\pi(2x+1)u}{N}\right) \right]$$



(... Fortsetzung Zerlegung)

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) \exp\left(\frac{-i2\pi xu}{N/2}\right) + \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) \exp\left(\frac{-i2\pi xu}{N/2}\right) \exp\left(\frac{-i2\pi u}{N}\right) \right]$$

$$F(u) = \frac{1}{N} \left[F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) \varphi_N^u \right]$$

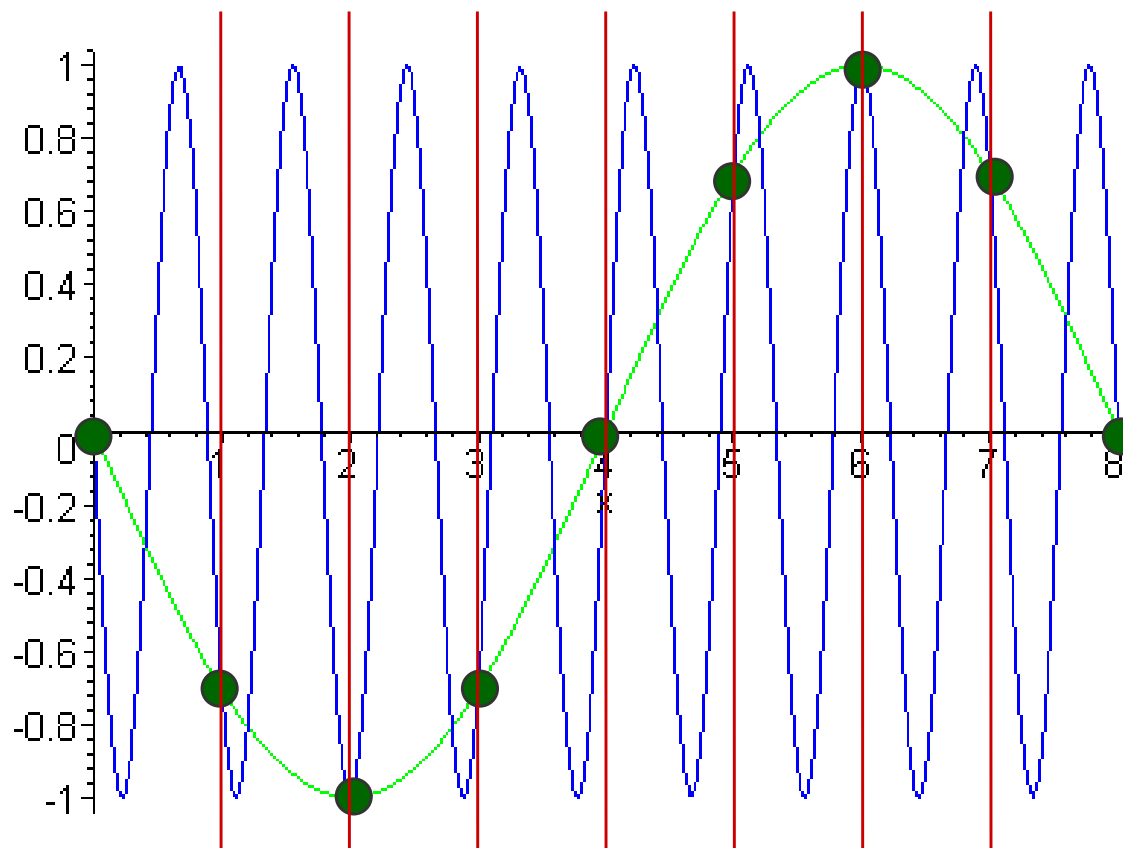
$$F_{\text{even}}\left(u + \frac{N}{2}\right) = F_{\text{even}}(u)$$

$$F_{\text{odd}}\left(u + \frac{N}{2}\right) = F_{\text{odd}}(u)$$



13.12.2018

Frequenz 1 und Frequenz 9



Frequenz 1 und Frequenz 5

