



Lineare Operationen und Linearkombinationen



Lineare Operationen auf Bildern

29.11.2018

Lineare Bildfilterung

- allgemeine lineare Operationen
- Verschieben
- Linearkombinationen - Blending
 - Ändern von Kontrast, Helligkeit, Farbsättigung
 - Defokussieren und dazu inverse Operation
- FIR- und IIR -Filter

Lineare Operationen

29.11.2018

Diskrete $n \times m$ -Bilder:

Darstellung als Vektoren im $\mathbb{R}^{nm}$:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} & \cdots & f_{n-2,0} & f_{n-1,0} & f_{0,1} & f_{1,1} & \cdots & f_{n-2,m-1} & f_{n-1,m-1} \end{pmatrix}^T$$

ganz allgemein gilt für eine lineare Operation $\mathbf{A}$ in diesem Vektorraum:

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \mathbf{A} \mathbf{f} + \beta \mathbf{A} \mathbf{g}$$

Ist das Ergebnis wieder ein $n \times m$ -Bild, so kann $\mathbf{A}$ als $(n \cdot m) \times (n \cdot m)$ -Matrix dargestellt werden.



29.11.2018

- Die Vektordarstellung von Graubildern kann leicht auf Farbbilder bzw. Bilder mit mehreren Kanälen ausgedehnt werden.



Linearkombination:

$$f_{out}(x, y) = af_{in0}(x, y) + bf_{in1}(x, y)$$

Wichtige Linearkombination:

Blending von Bildern:

$$f_{out}(x, y) = (1 - \alpha) f_{in0}(x, y) + \alpha f_{in1}(x, y)$$

Verschieben von Bildern ist lineare Operation:

$$f_{out}(x, y) = f_{in}(x + a, y + b)$$

Warum?



Verschiebung in Matrixdarstellung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\dots}^{a+nb-1} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & & \ddots & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$



29.11.2018

Lineare verschiebungsinvariante (linear shift invariant - LSI) Systeme:

- Abbildungen (auch Bildfehler), die durch eine Faltung beschrieben werden können sind eine spezielle Klasse linearer Operationen.



Lineare Operationen

29.11.2018

Lineare verschiebungsinvariante (linear shift invariant - LSI) Systeme:

- Die Faltungsmaske entspricht der sog. Punktantwort (PSF) - dem Resultat der Faltung mit einem Punktbild.
- Der Frequenzraum ist der Eigenvektorraum für solche verschiebungsinvarianten Filter
- Äquivalente Darstellung durch Transferfunktion im Frequenzraum (Faltungssatz).



Beispiele für LSI-Systeme:

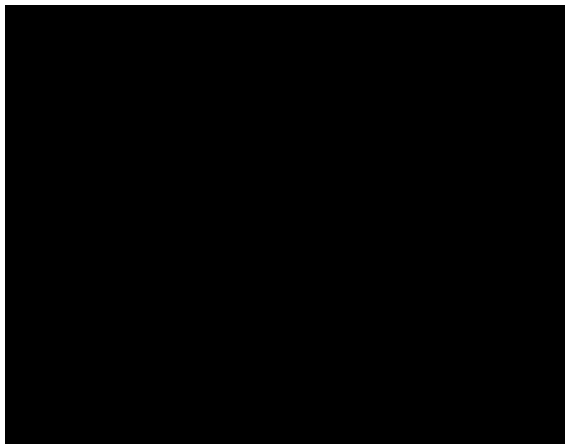
- Defokussierung – Lochblende (näherungsweise)
- Verwackeln (näherungsweise)
- Änderung von Helligkeit, Kontrast oder Farbsättigung.
- Aufnahme mit Sensor, z.B. mit rechteckigen Pixeln (hier zusätzlich Abtastung)



29.11.2018

Beispiele:

- Helligkeit: Blending mit schwarzem Bild





29.11.2018

- Kontrast: Blending mit Bild mit durchschnittlichem Grauwert





29.11.2018

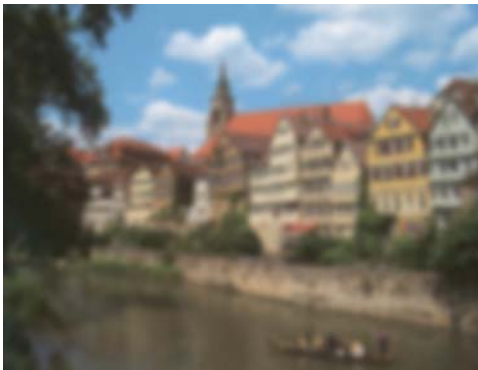
- Farbsättigung: Blending mit Schwarzweiß-Bild





29.11.2018

- Schärfe: Extrapolation von unscharfem und normalem Bild.





Lineare Operationen

29.11.2018

- Grau
- Tgrau
- BlurBlur



Lineare Operatoren

29.11.2018

- FIR- und IIR-Filter
- FIR Finite Impulse Response
 - normale Faltung mit endlichem Kern
- IIR Infinite Impulse Response
 - Faltung mit unendlich ausgedehntem Kern
 - Realisierung durch rekursive Filter: Ergebnisse von bereits berechneten Punkten werden einbezogen.



FIR-Filter

- normale Faltung mit endlichem Kern
 - graue Felder sind schon berechnet, deshalb Speicherung in separatem Speicherbereich
 - alternative Berechnung durch Fouriertransformation.

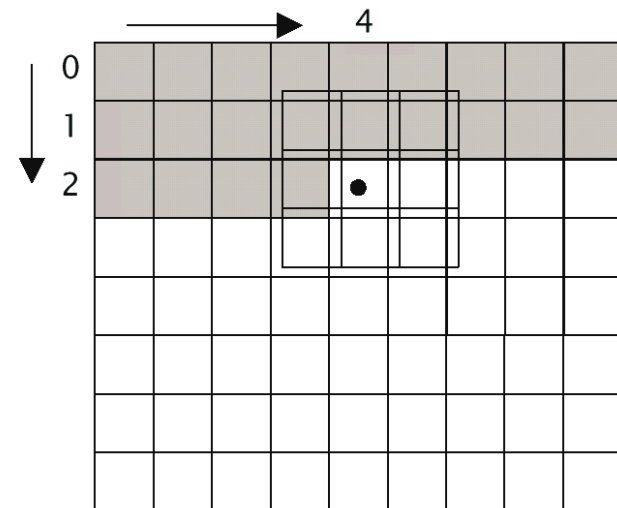


Bild aus Jähne, Digitale Bildverarbeitung



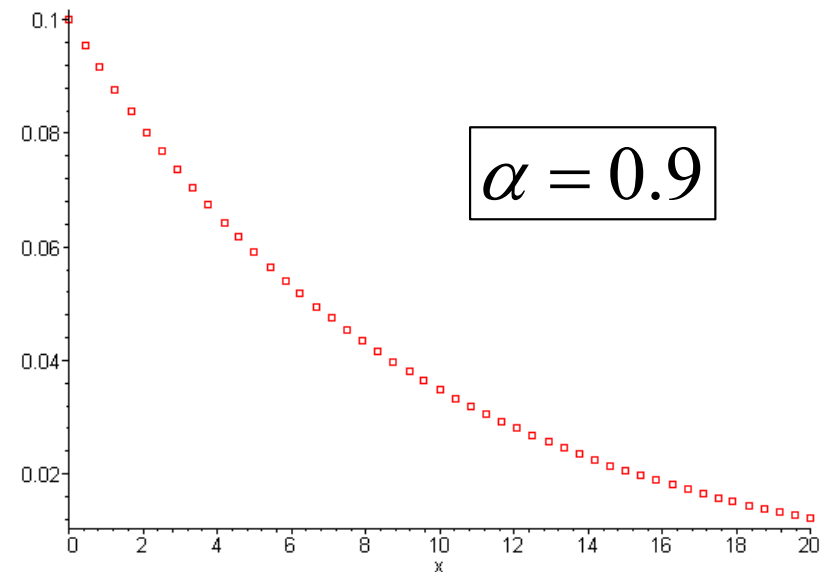
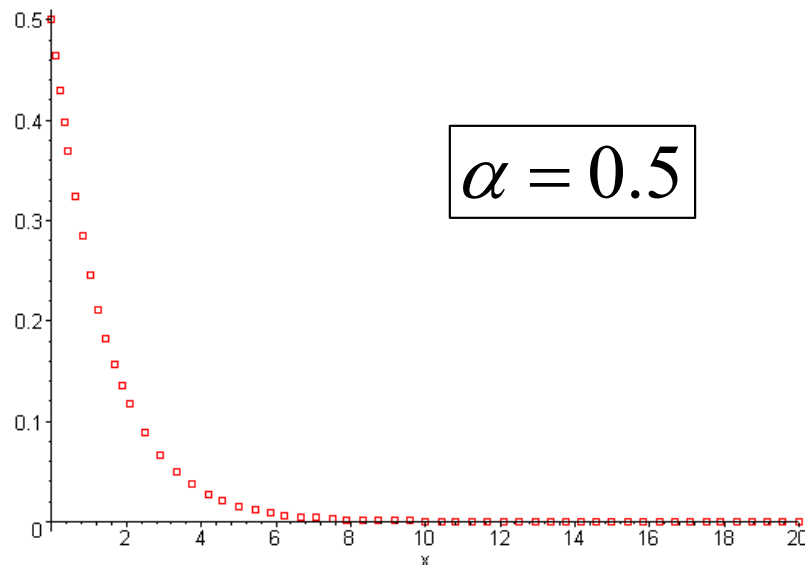
Lineare Operatoren

29.11.2018

IIR-Filter

- Punktantwort unendlich ausgedehnt
- Beispiel:

$$h_n = k\alpha^n; k = (1 - \alpha)$$





Lineare Operatoren

29.11.2018

IIR-Filter

- Berechnung durch Multiplikation der Fouriertransformierten mit der Transferfunktion

$$G_u = H_u F_u$$

$$h(x) = \alpha^x (1 - \alpha) \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$\Downarrow$

$$H(u) = \frac{1 - \alpha}{2\pi i u - \ln \alpha}$$



IIR-Filter

- Alternative Berechnung mit rekursivem Filter:

$$g_n = \alpha g_{n-1} + (1 - \alpha) f_n$$



Lineare Operatoren

29.11.2018

IIR-Filter

- unendlich ausgedehnte Punktantwort
- nicht unbedingt stabil
 - Beispiel:

$$g_n = \alpha g_{n-1} + (1 - \alpha) f_n \quad ; \quad \alpha > 1$$

$\Downarrow$

$$h_n = (1 - \alpha) \alpha^n$$

- Literatur: s. Wahl: Digitale Bildsignalverarbeitung



Lineare Operatoren

29.11.2018

FIR-Filter

- Berechnung des Frequenzgangs von

$$g(n) = \sum c(j) f(n-j)$$

- durch Fouriertransformation

$$G(u) = C(u) F(u)$$

$$C(u) = \frac{1}{N} \sum c(x) e^{-i2\pi ux/N}$$



Lineare Operatoren

29.11.2018

IIR-Filter

- Berechnung des Frequenzgangs:

$$g(n) = \sum c(j) f(n-j) + \sum d(k) g(n-k)$$

$$G(u) = C(u) F(u) + D(u) G(u)$$

$$G(u) - D(u) G(u) = C(u) F(u)$$

$$G(u) = \frac{C(u)}{1 - D(u)} F(u)$$



29.11.2018

Die Berechnung des Frequenzgangs aus den Koeffizienten ist einfach

Die Berechnung der Koeffizienten aus dem Frequenzgang ist schwierig.



29.11.2018

Friedrich Wahl: Digitale Bildsignalverarbeitung: Grundlagen,
Verfahren, Beispiele, berichtigter Nachdr., Springer 1989