



Eigenschaften der Fouriertransformation



Vertauschungssatz (Duality Theorem)

$$\begin{array}{c} \Psi(f(x, y)) = F(u, v) \\ \Updownarrow \\ \Psi(F(u, v)) = f(-x, -y) \end{array}$$

- Die Formel gilt für die symmetrische Form der Fouriertransformation ohne Vorfaktor und muß für andere Darstellungen gegebenenfalls angepaßt werden.



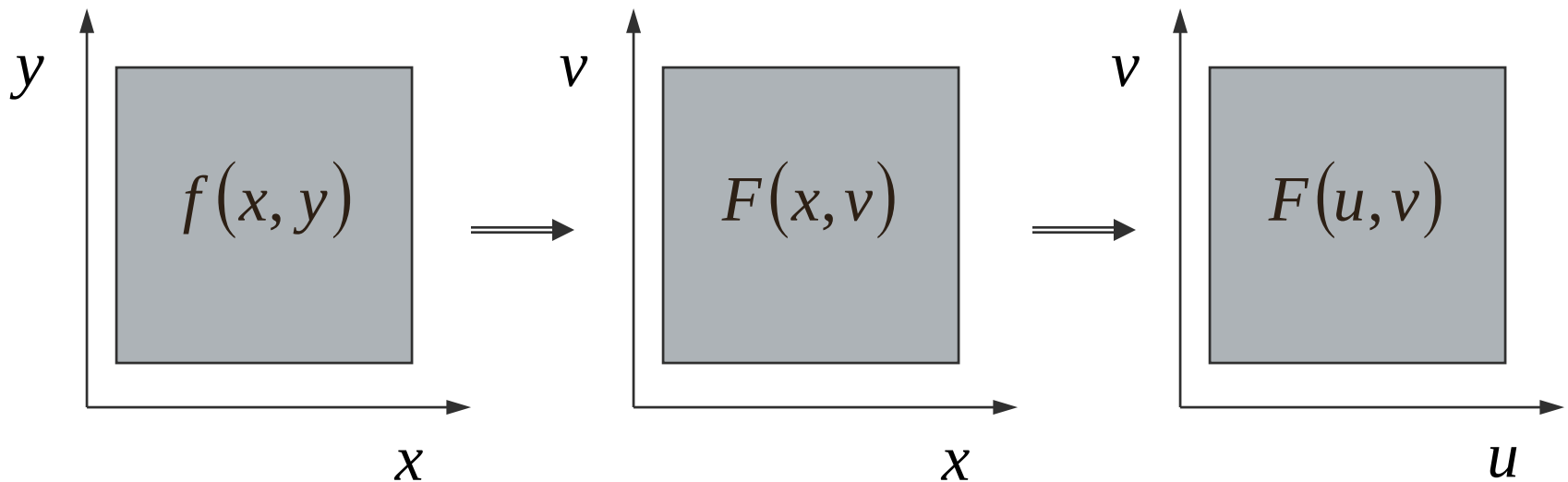
22.11.2018

Separierbarkeit

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi vy} dy \right) dx \end{aligned}$$



Separierbarkeit





Separierbarkeit

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ux} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi vy} dv \right) du \end{aligned}$$



Überlagerungssatz (Linearity Theorem)

$$\begin{array}{ccc} \Psi(f(x, y)) = F(u, v) & ; & \Psi(g(x, y)) = G(u, v) \\ \Downarrow & & \\ \Psi(af(x, y) + bg(x, y)) = aF(u, v) + bG(u, v) \end{array}$$



22.11.2018

Ähnlichkeitssatz (Similarity Theorem)

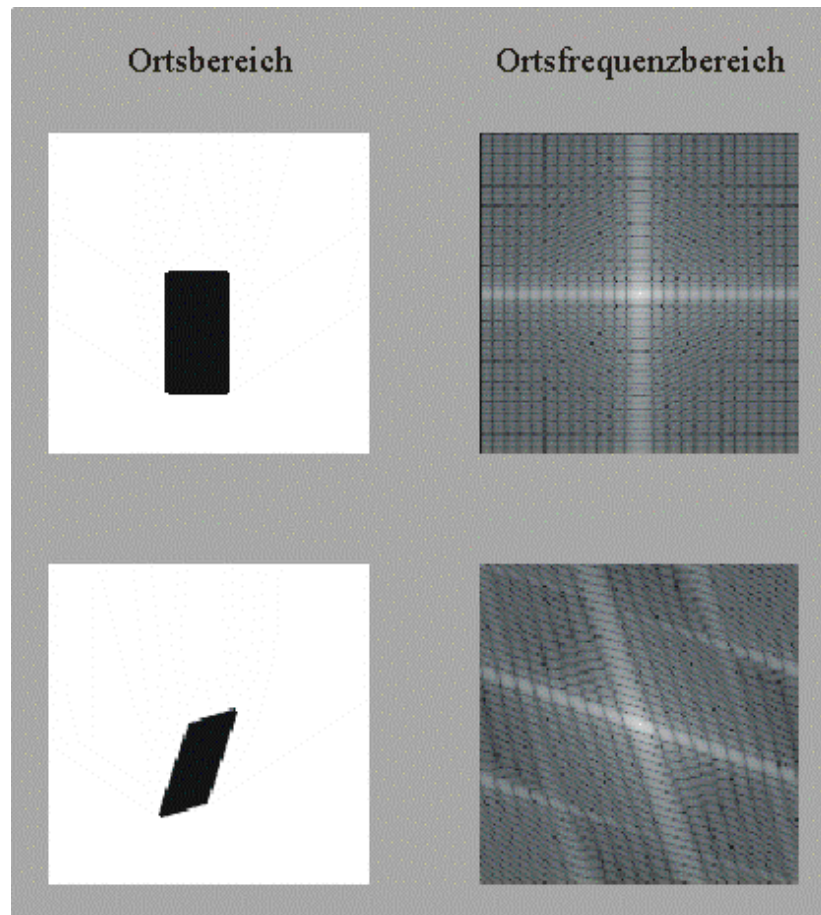
$$\Psi(f(x, y)) = F(u, v)$$

$$\Psi(f(ax, by)) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$



22.11.2018

Ähnlichkeitssatz (Similarity Theorem)





22.11.2018

Verschiebungssatz (Shift Theorem)

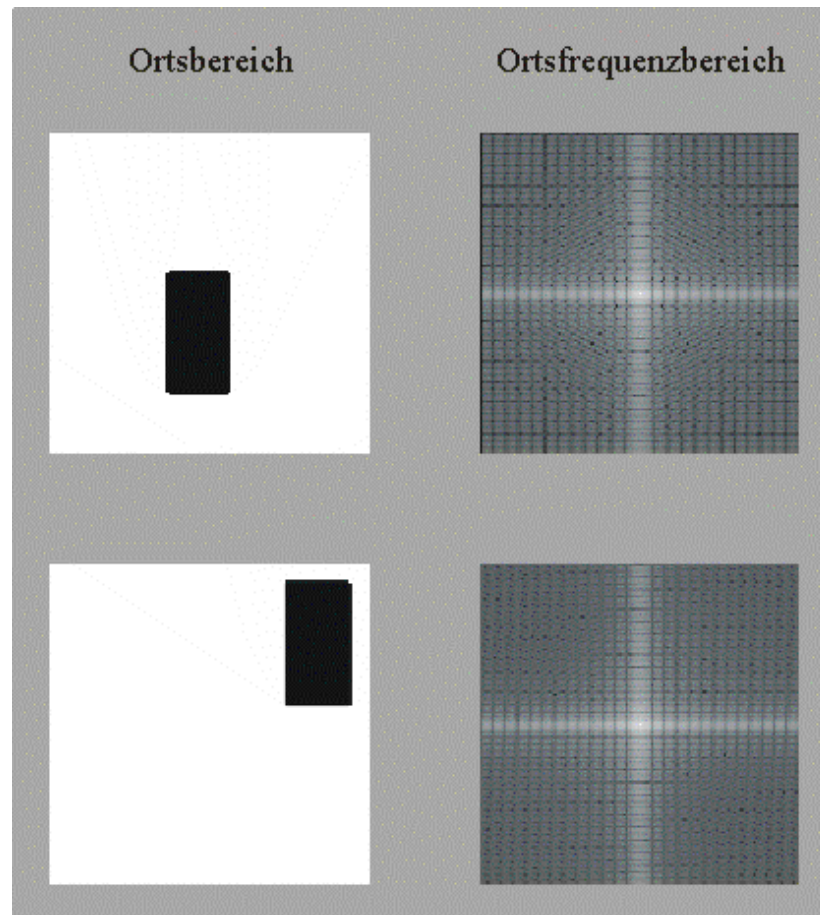
$$\Psi(f(x, y)) = F(u, v)$$

$$\Psi(f(x - x_0, y - y_0)) = F(u, v) e^{-i2\pi(ux_0 + vy_0)}$$



22.11.2018

Verschiebungssatz (Shift Theorem)





Faltungssatz (Convolution Theorem)

$$\Psi(f(x, y)) = F(u, v) \quad ; \quad \Psi(g(x, y)) = G(u, v)$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi(f(x, y)g(x, y)) = F(u, v) \circ G(u, v)$$

$$\Psi(f(x, y) \circ g(x, y)) = F(u, v)G(u, v)$$



Faltungssatz

22.11.2018

Herleitung des Faltungssatzes (1D)

Definition der Faltung:

$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(g(x) \circ h(x)) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) d\alpha e^{-i2\pi ux} dx \end{aligned}$$



Wir substituieren:

$$s = x - \alpha$$

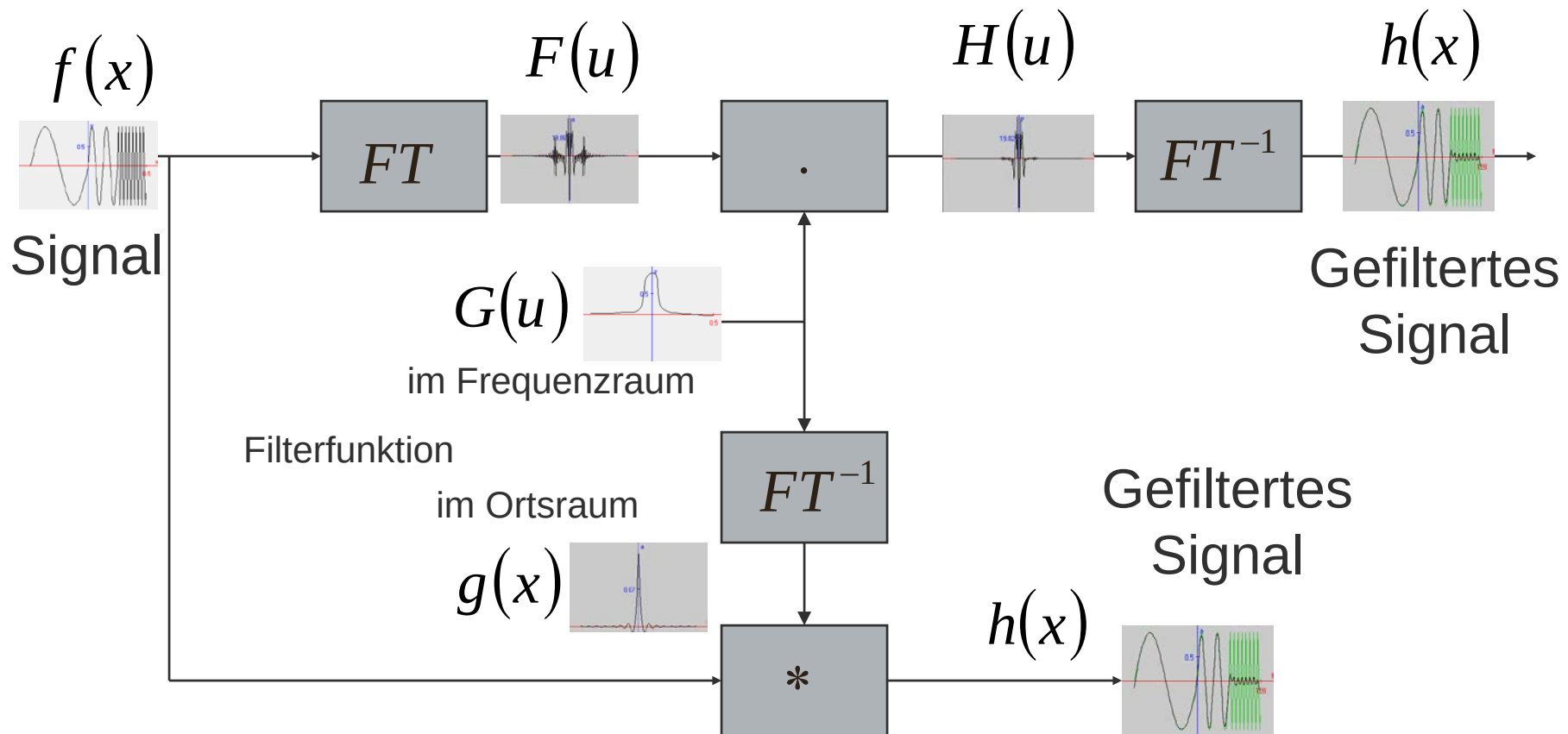
und erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) e^{-i2\pi ux} dx d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) h(\alpha) e^{-i2\pi u(s + \alpha)} ds d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i2\pi us} ds \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-i2\pi u\alpha} d\alpha \\ &= F(g(x)) F(h(x)) \end{aligned}$$



22.11.2018

Anwendung: Filter





Parsevalsche Gleichung (Parseval's Theorem)

$$\Psi(f(x, y)) = F(u, v)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv$$



Eigenschaften der Fouriertransformation

22.11.2018

Periodizität

- Die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion ist diskret auf regelmäßigem Gitter

$$f(x, y) = f(x + a, y + b)$$

$$F(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{j}{b}\right) \delta\left(u - \frac{i}{a}\right) F_{u,v}$$



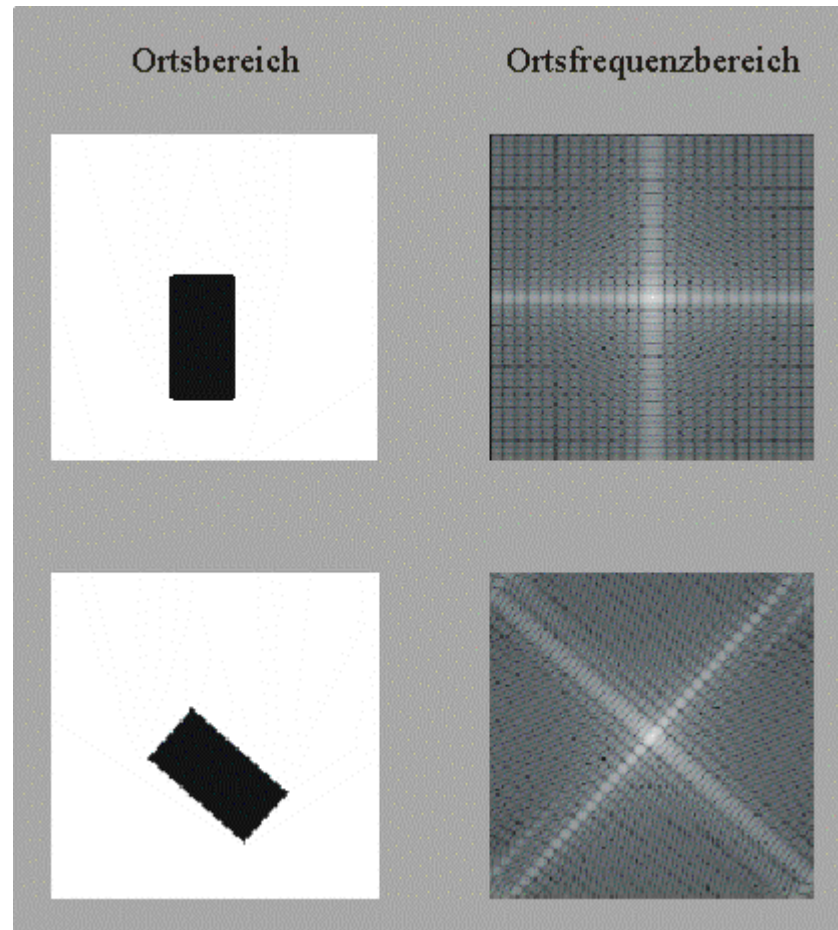
Rotationssatz

- Die Drehung einer Funktion entspricht der Drehung der Transformaten (gleicher Winkel, gleiche Richtung)



22.11.2018

Rotationssatz



Abtastung, Aliasing, Antialiasing



22.11.2018

Ist $f(x)$ an der Stelle $x=x_0$ stetig, so läßt sich der Abtastwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ausdrücken als

$$\hat{f}(x) = f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0),$$

Die Deltafunktion, die an der Stelle x_0 auftritt, besitzt ein Gewicht, das gleich dem Funktionswert von f an der Stelle x_0 ist.



Wenn $f(x)$ an den Stellen $x=n\Delta x$ mit $n=+/-1, +/-2, \dots$, stetig ist, wird die Funktion

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \delta(x - n\Delta x)$$

als Abtastsignal und Δx als Abtastperiode bezeichnet. Das Abtastsignal besteht aus einer Überlagerung unendlich vieler äquidistanter Deltafunktionen, deren Gewichte den Funktionswerten von $f(x)$ an den diskreten Abtastwerten entsprechen.



Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

22.11.2018

Unter welchen Bedingungen läßt sich eine kontinuierliche Funktion aus äquidistanten Abtastwerten exakt rekonstruieren?

Zur Herleitung des Abtasttheorems betrachten wir zunächst die Fourier-Transformierte des Abtastsignals

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \delta(x - n\Delta x)$$

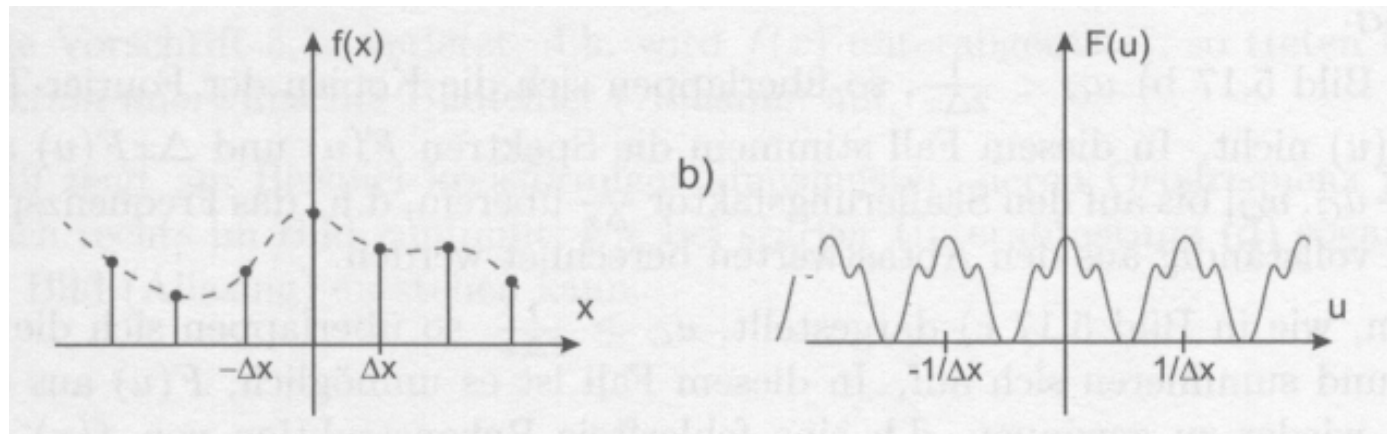
Nach dem Faltungssatz gilt

$$\hat{F}(u) = F(u) * \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n/\Delta x)$$

Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

22.11.2018

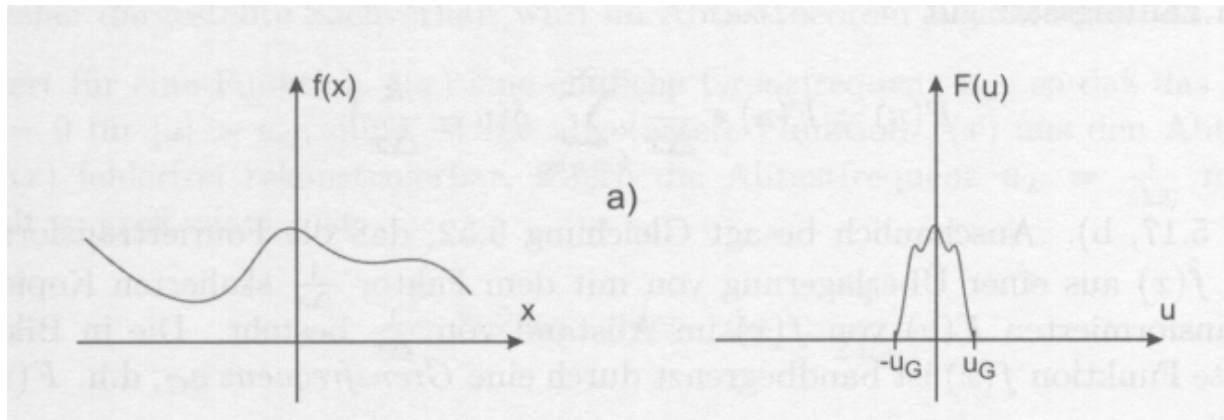
Anschaulich besagt die Gleichung, dass die Fouriertransformierte $\hat{F}(u)$ von $\hat{f}(x)$ aus einer Überlagerung von mit dem Faktor $1/\Delta x$ skalierten Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ von $f(x)$ im Abstand von $1/\Delta x$ besteht.



Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

22.11.2018

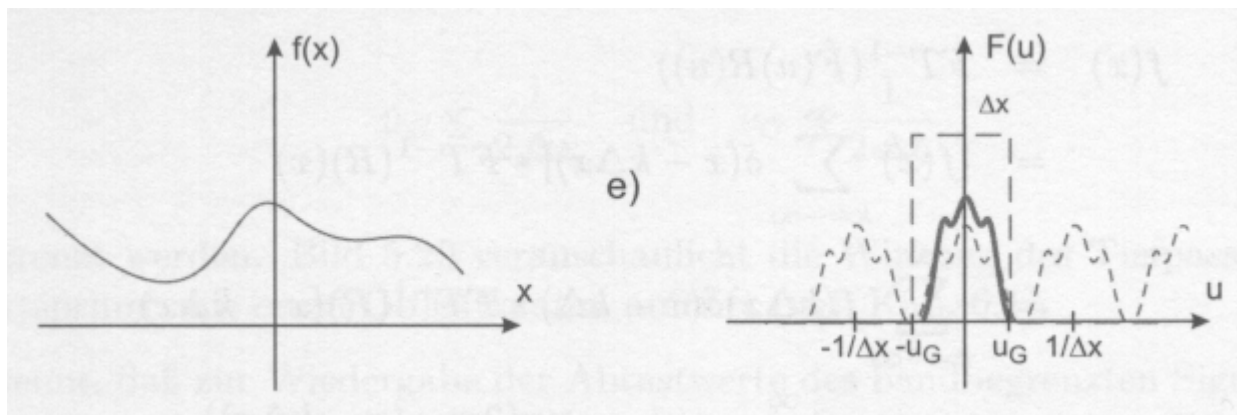
Sei die Funktion $f(x)$ bandbegrenzt durch eine Grenzfrequenz u_G , d.h. $F(u)=0$ für $|u|>u_G$,



Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

22.11.2018

Ist $u_G < \frac{1}{2\Delta x}$, so überlappen sich die Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ nicht. In diesem Fall stimmen die Spektren $F(u)$ und $\hat{F}(u)$ auf dem Intervall $[-u_G, u_G]$ bis auf den Skalierungsfaktor $\frac{1}{\Delta x}$ überein, d.h. das Frequenzspektrum von $F(u)$ kann vollständig aus dem Abtastsignal und damit den Abtastwerten berechnet werden.





Abtastung und Aliasing

22.11.2018

Abtastung ist Multiplikation mit Kamm:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - Tn)$$

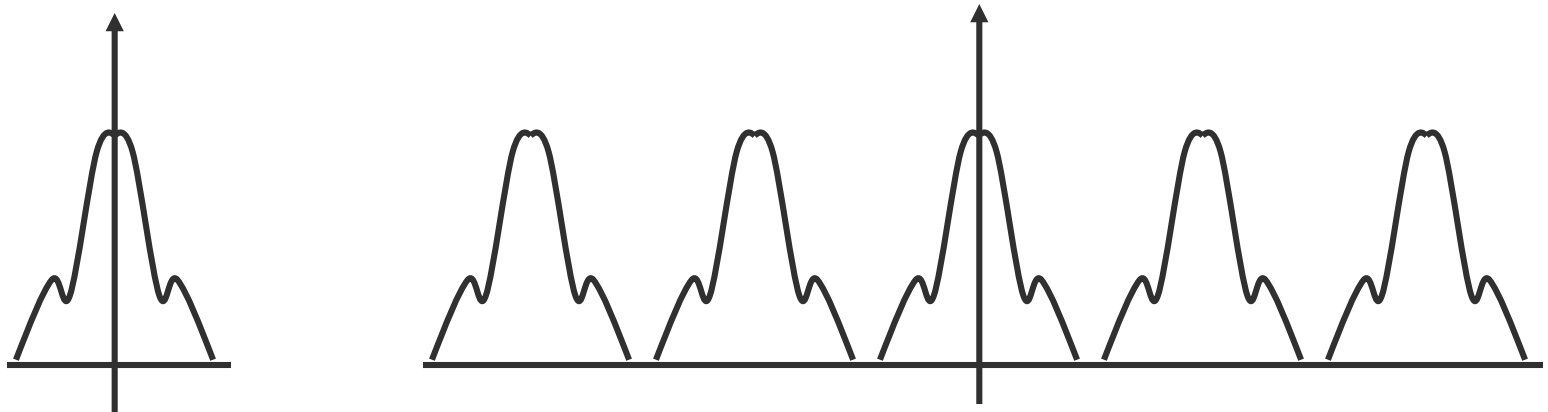
Dem entspricht im Frequenzraum die Faltung mit Kamm:

$$G(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n \frac{1}{T})$$



22.11.2018

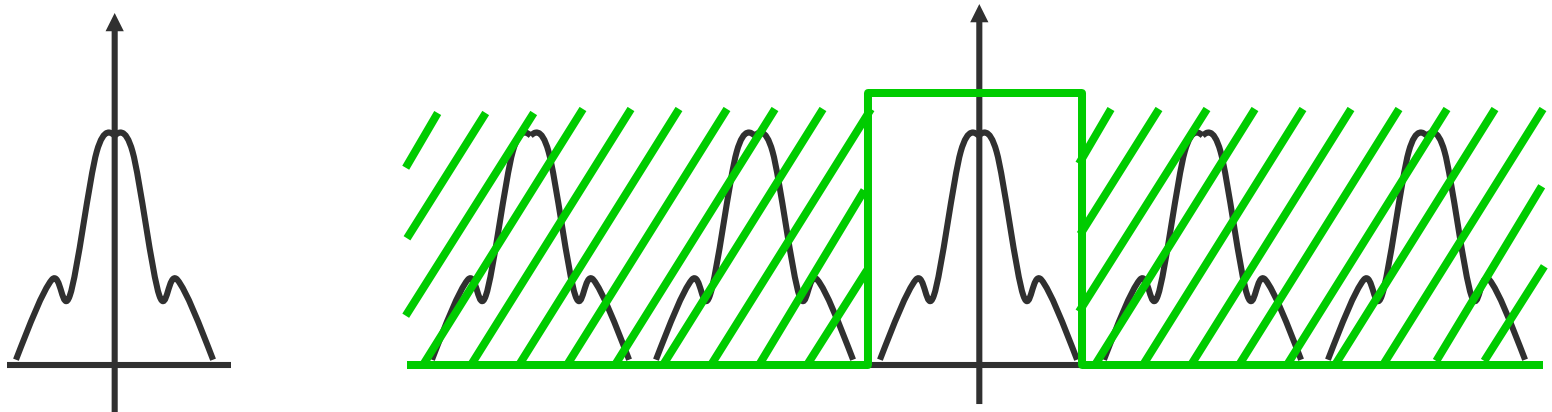
Dadurch entstehen Kopien des ursprünglichen Spektrums:





22.11.2018

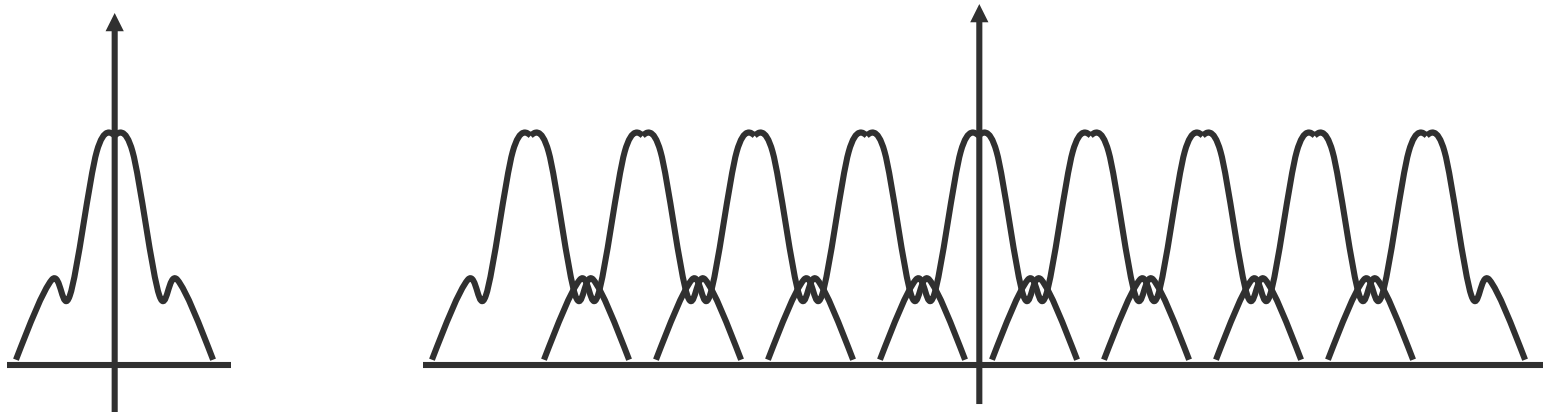
Der Abtastvorgang kann verlustfrei rückgängig gemacht werden durch Filterung:



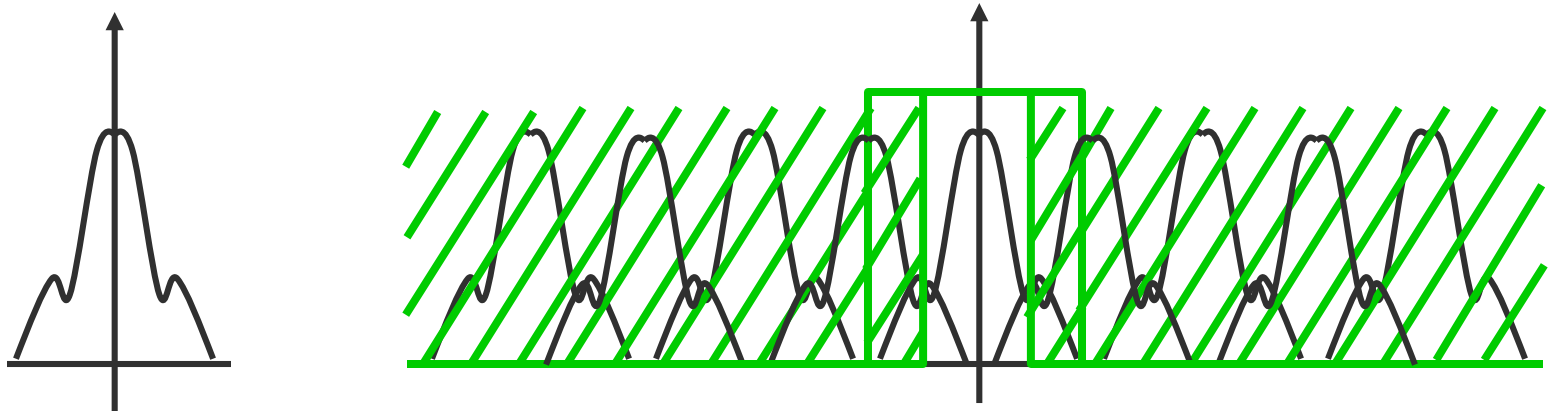


22.11.2018

Zu Aliasing kommt es, wenn die Kopien überlappen:



Der Abtastvorgang kann nicht rückgängig gemacht werden:





22.11.2018

