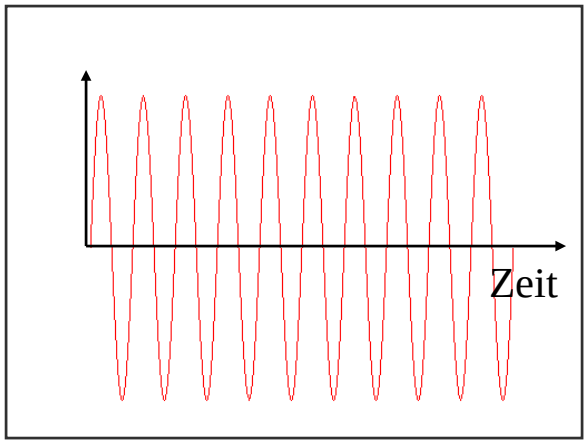
Fouriertheorie

Fourier-Reihe
Fourier-Integral
Fourier-Transformation
Diskrete Fourier-Transformation
Fast Fourier-Transformation

Fouriertheorie

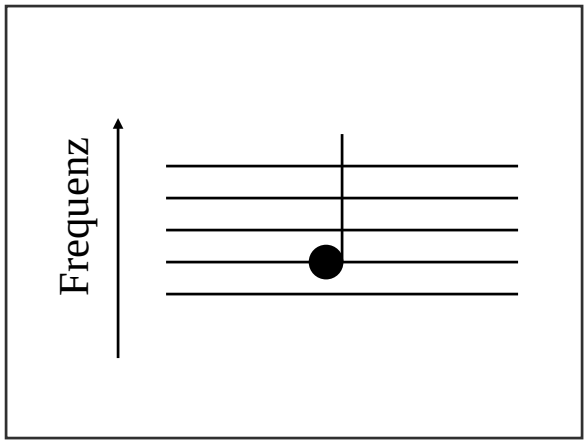
Zwei Darstellungen für einen Ton:

Zeitraum:



⇔

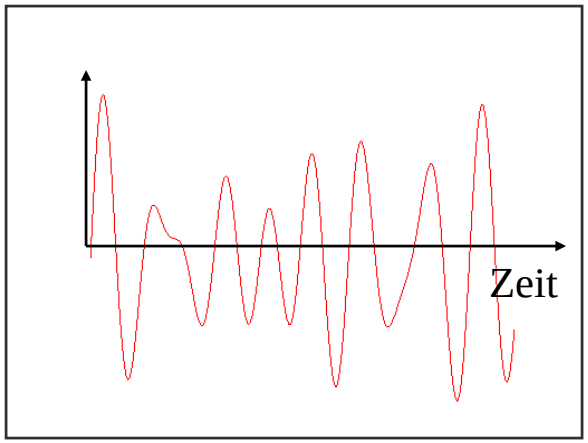
Frequenzraum:



Fouriertheorie

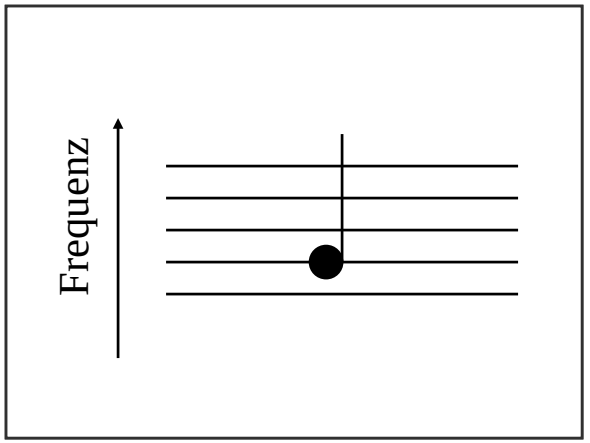
Zwei Darstellungen für einen Ton:

Zeitraum:



⇔

Frequenzraum:



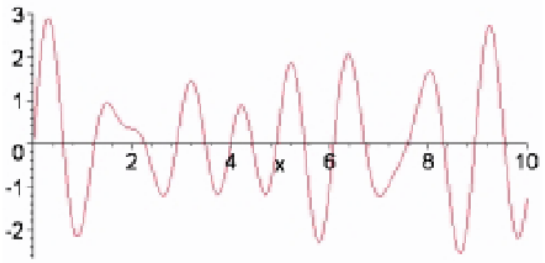
Fouriertheorie

Zwei Darstellungen für einen Ton:

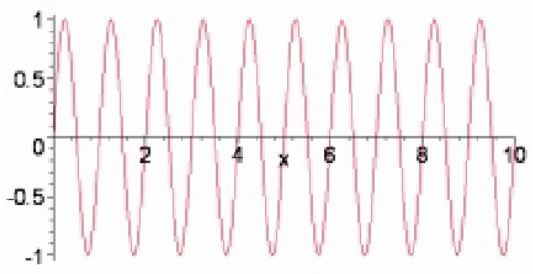
```
> t:=2^(1/12);
```

$$t := 2^{(1/12)}$$

```
> plot(sin(2*Pi*x)+sin(2*Pi*x/(t^4))+sin(2*Pi*x/(t^7)),x=0..10);
```




```
> plot(sin(2*Pi*x),x=0..10);
```




```
>
```

Fourier-Reihe



Es lässt sich nachweisen, daß sich jede periodische Funktion als eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lässt.Voraussetzung hierfür ist, dass die folgenden drei Bedingungen (Dirichlet´schen Bedingungen) erfüllt sind:

Fourier-Reihe

1. Die Anzahl der Unstetigkeiten innerhalb einer Periode ist endlich.
2. Die Anzahl der Maxima und Minima innerhalb einer Periode ist endlich.
3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar (d.h., die Fläche unter dem Betrag der Funktion ist in jeder Periode endlich)

Fourier-Reihe



Ist $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2π, die die Bedingungen 1 - 3 erfüllt, so gilt:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x))$$

Applet sound

Fourier-Reihe

Berechung der Koeffizienten a und b

- Bestimmung von a_0:
- $f(x)$ wird über eine volle Periode integriert

  (von -π nach +π):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x) \right] dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\,x\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\,x\,dx \right)$$

Für das Integral erhalten wir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 2\pi$$

Damit ergibt sich für a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Fourier-Reihe

- Bestimmung von a_n:
  - $f(x)$ wird mit $\cos(mx)$ multipliziert und über eine volle Periode integriert (von $-\pi$ nach $+\pi$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(m\,x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\cos(mx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx\,)dx \right)$$

  - Das Integral des ersten Terms ist Null.

Fourier-Reihe

Das Integral des ersten Terms ist Null. Für $m \neq n$ *erhalten wir als Lösungen der Integrale:*

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$$

und

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0$$

Das Integral des ersten Terms ist Null. Für $m = n$ *erhalten wir als Lösungen der Integrale:*

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\,x \;\cos n\,x\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\,x\,dx$$

$$= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos 2\,n\,x\right) dx = \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2n\,x\,dx = a_n \pi + 0\,.$$

und

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\,x \cos n\,x\,dx = \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\,n\,x\,dx = 0$$

Fourier-Reihe

– Daraus folgt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

Fourier-Reihe

- Bestimmung von b_n:
  - $f(x)$ wird mit $\sin(mx)$ multipliziert und über eine volle Periode integriert (von $-\pi$ nach $+\pi$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(m\,x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\sin(mx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx\,)dx \right)$$

Fourier-Reihe

Entsprechende Überlegungen führen zu:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx; \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

Fourier-Reihe

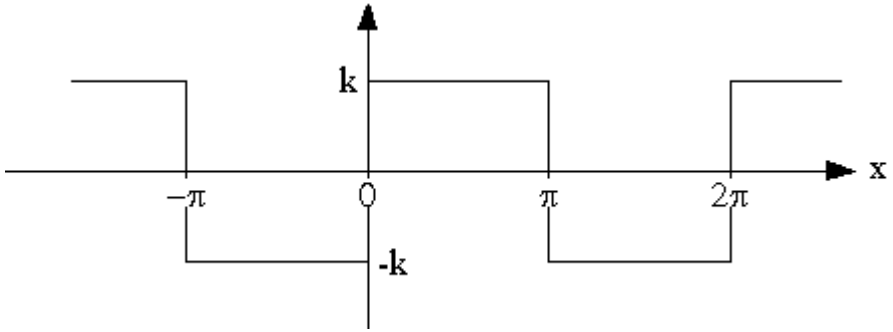
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx; \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

kann mit $\cos(0) = 1$ *und* $\sin(0) = 0$ *vereinfacht werden zu:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x))$$

Fourier-Reihe

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Rechteckfunktion.



$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{wenn} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{wenn} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = f\left(x + 2\pi\right)$$

Fourier-Reihe

$$a_0 = 0$$

trivial,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} k\cos(nx)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

weil

$$\sin(x) = 0$$

für

$$x = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

Fourier-Reihe

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} k\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\left(\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos 0\right)$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right)$$

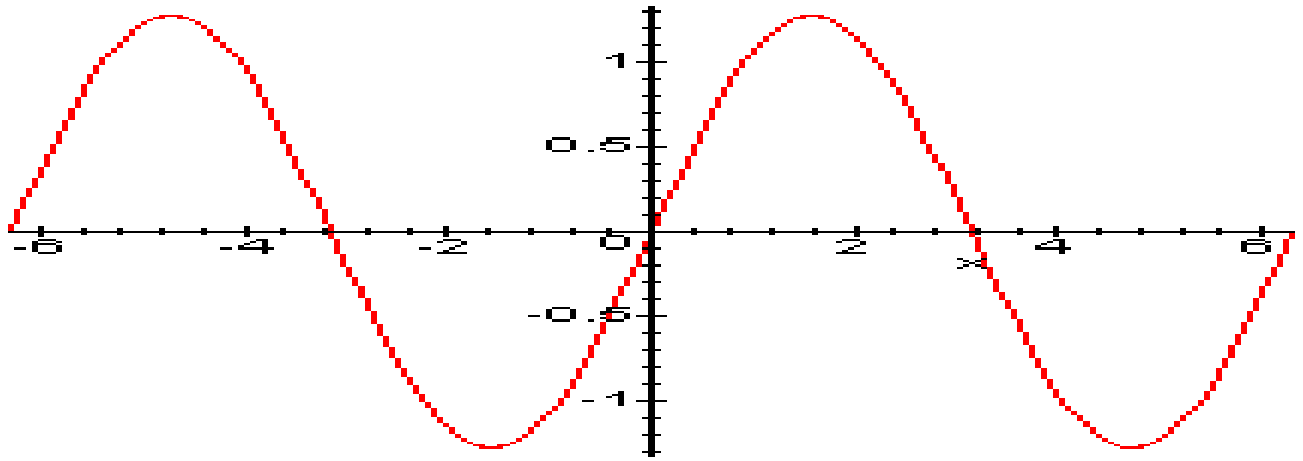
Fourier-Reihe

Damit wird

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

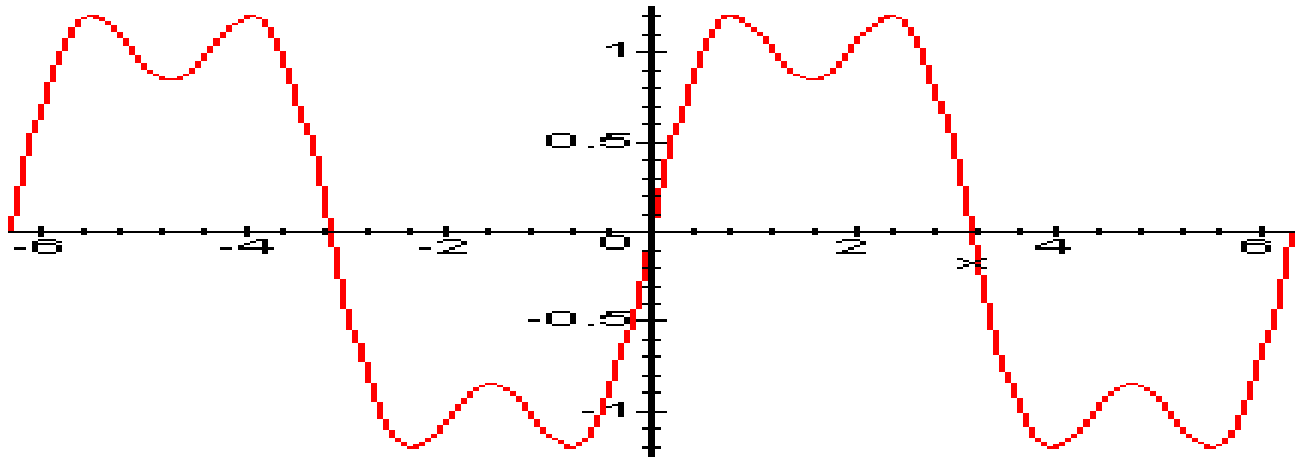
Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x$$



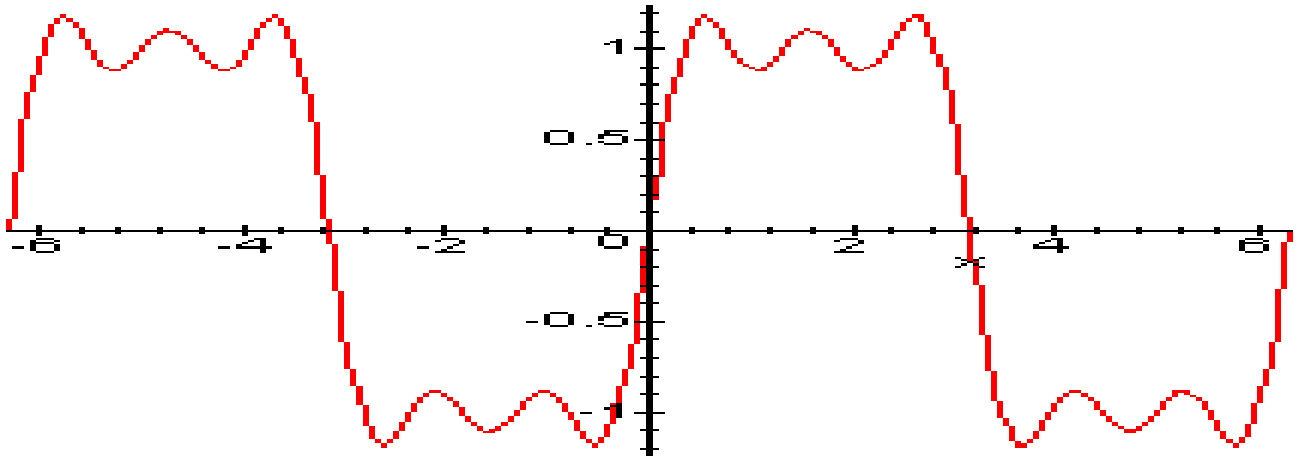
Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$$



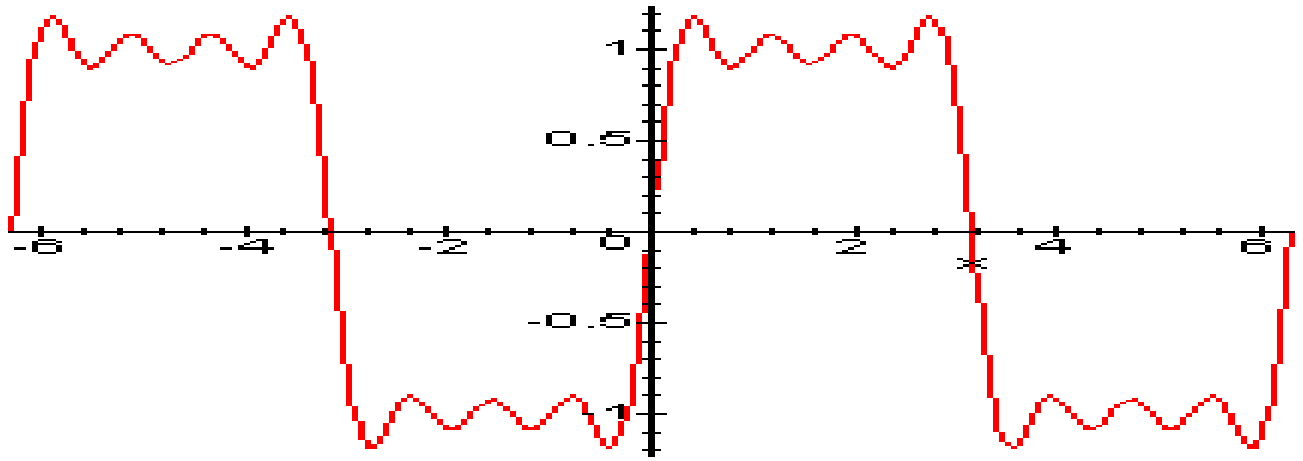
Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)$$



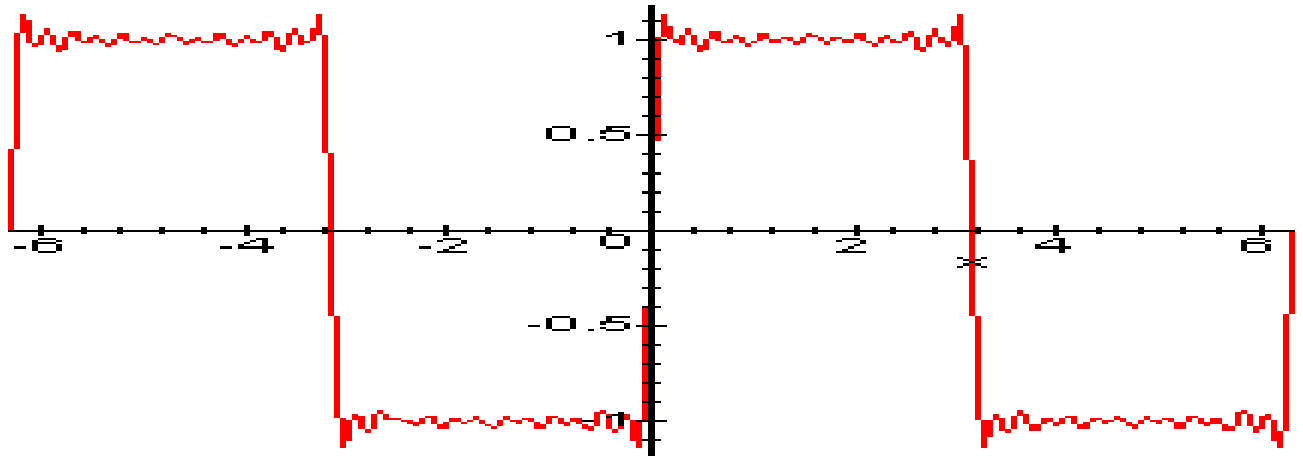
Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)$$



Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{25}\sin 25x\right)$$



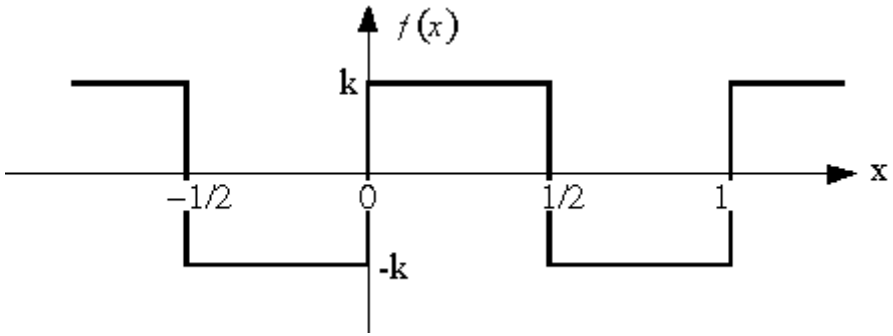
Applet (http://www.math.ubc.ca/~feldman/demos/)

Fourier-Reihe

Wir betrachten nun die mit 2π skalierte Rechteckfunktion: Wir nennen $\omega = 2\pi u$, das als Argument der Sinusfunktion auftaucht, die Kreisfrequenz; u ist die Frequenz.

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin\left(x(1*2\pi)\right) + \frac{1}{3}\sin\left(x(3*2\pi)\right) + \frac{1}{5}\sin\left(x(5*2\pi)\right) + \cdots\right)$$

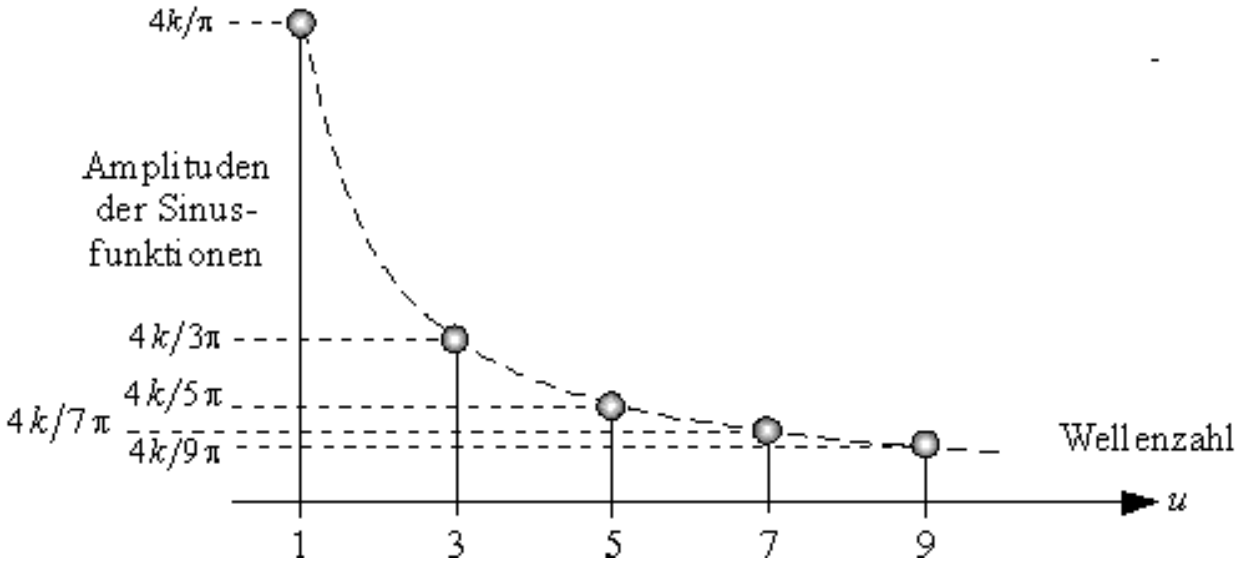
Ortsraumdarstellung:



Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin\left(x(1*2\pi)\right) + \frac{1}{3}\sin\left(x(3*2\pi)\right) + \frac{1}{5}\sin\left(x(5*2\pi)\right) + \cdots\right)$$

Frequenzraumdarstellung:



Das Fourier-Integral

Nichtperiodische Funktionen.

- Zunächst betrachten wir Funktionen mit

  Periode nicht 2π, sondern $2L$:

$$f_L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Das Fourier-Integral

Nichtperiodische Funktionen.

- Zur Berechung der a_n und b_n wird wieder integriert (s. S.10):

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\int_{-L}^{L} f(x)dx}{2L} & \text{falls } n = 0 \\ \dfrac{\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx}{L} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx}{L}$$

Das Fourier-Integral

- Nun betrachten wir den Übergang $L \to \infty$
- Dazu setzen wir

$$\omega_n = n\frac{2\pi}{2L} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

und erhalten:

$$f_L(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\cos\omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\cos\omega_n \xi d\xi + \sin\omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\sin\omega_n \xi d\xi\right] - \frac{\int_{-L}^{L} f_L(x)dx}{2L}$$

Das Fourier-Integral

- Der Übergang $L \to \infty$ beschreibt nun den Übergang von der Reihe zum Integral:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)\Delta\omega \quad \to \quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\cdots)d\omega$$

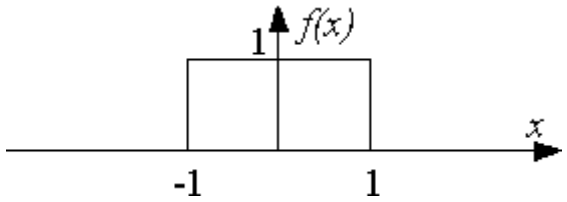
$$f(x) = \int_0^\infty \left[\cos\omega x \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi d\xi}_{A(\omega)} + \sin\omega x \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi d\xi}_{B(\omega)} \right] d\omega$$

Das Fourier-Integral



$$f(x) = \int_0^{\infty} [\cos \omega x A(\omega) + \sin \omega x B(\omega)] d\omega$$

Beispiel: Fourierintegral eines Rechteckimpulses



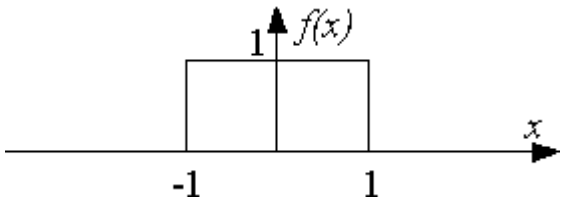
$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos\omega\xi d\xi = \frac{\sin\omega\xi}{\pi w}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin\omega\xi d\xi = 0$$

Das Fourier-Integral

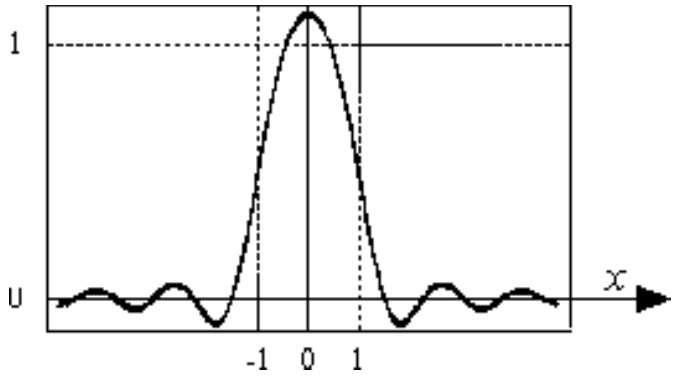
Wir erhalten:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega$$



Rechteckimpuls

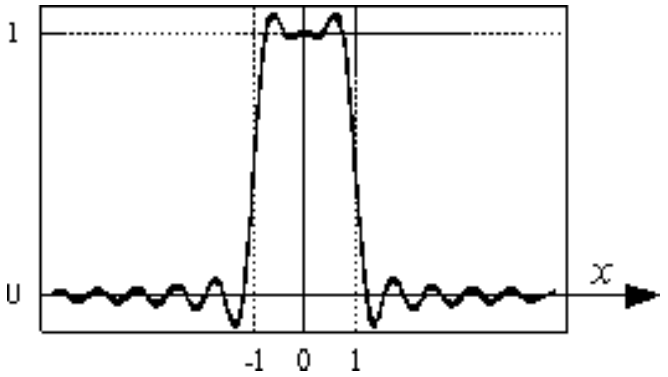
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^4 \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega$$



Das Fourier-Integral

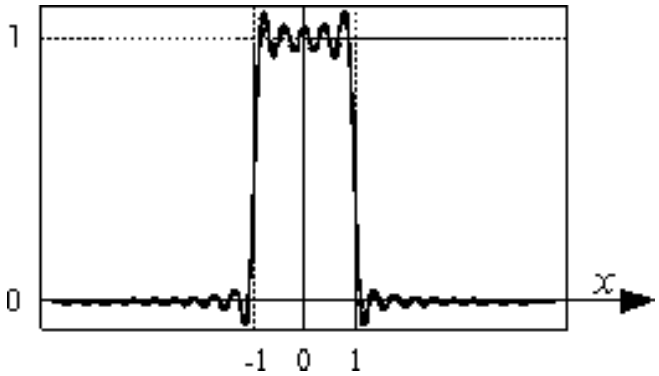
Rechteckimpuls

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^8 \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega$$



Rechteckimpuls

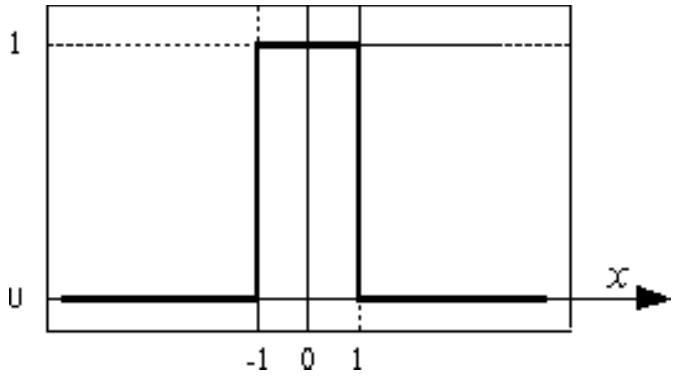
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{16} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega$$



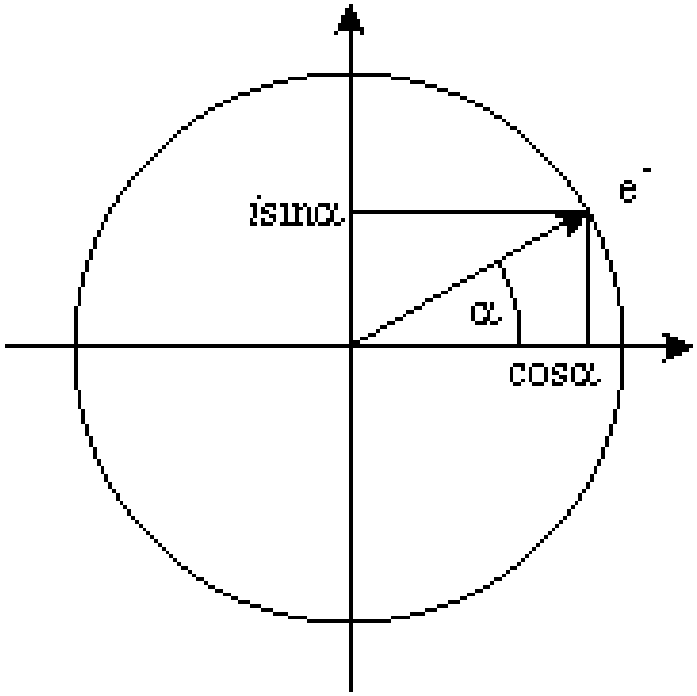
Das Fourier-Integral

Rechteckimpuls

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega$$



Euler-Identität



$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha; \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = -i\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$$

Umformung des Fourier-Integrals mit der Euler-Identität:

$$f(x) = \int_0^\infty [\cos \omega x A(\omega) + \sin \omega x B(\omega)] d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty [(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) A(\omega) - i(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}) B(\omega)] d\omega$$

Umformung des Fourier-Integrals:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right)A(\omega) - i\left(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}\right)B(\omega)\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\omega x}\left[A(\omega) - iB(\omega)\right]d\omega + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-i\omega x}\left[A(\omega) + iB(\omega)\right]d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{+i\omega x}\,\frac{1}{2}\left[A(\omega) - iB(\omega)\right]d\omega; \qquad A(-\omega) = A(\omega); B(-\omega) = -B(\omega)$$

Die Fourier-Transformation

Wir definieren:

$$\frac{1}{2\pi}F(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]$$

Aus den Formeln für A und B ergibt sich:

$$F(\omega)=2\pi\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi-i\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi\,d\xi\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)(\cos\omega\xi-i\sin\omega\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

Die Fourier-Transformation

Zusammengefasst:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega x} \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi d\omega$$

Die Fourier-Transformation

Übergang von der Kreisfrequenz $\omega=2\pi u$ zur Frequenz u:

$$d\omega = 2\pi du$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i2\pi u\xi} d\xi$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i2\pi ux} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i2\pi u\xi} d\xi du$$

Die Fourier-Transformation

Fouriertransformation

$$f(x) \rightarrow F(u)$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i 2\pi u x} dx$$

inverse Fouriertransformation

$$F(u) \rightarrow f(x)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i 2\pi u x} du$$

Oft ist f(x) reell, F(u) ist komplex:

$$\boxed{F(u) = \mathrm{Re}(F(u)) + i\,\mathrm{Im}(F(u))}$$

Die Fourier-Transformation

Definitionen:

- Fourierspektrum von f(x):

$$|F(u)| = \sqrt{\mathrm{Re}(F(u))^2 + \mathrm{Im}(F(u))^2}$$

- Energiespektrum von f(x):

$$|F(u)|^2 = \mathrm{Re}(F(u))^2 + \mathrm{Im}(F(u))^2$$

- Phasenspektrum:

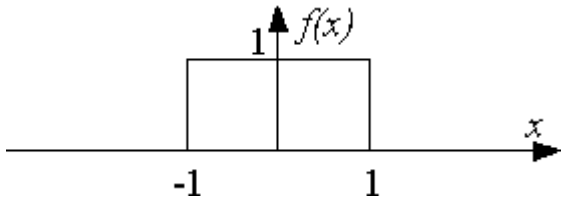
$$\Phi(u) = \arctan \frac{\mathrm{Im}(F(u))}{\mathrm{Re}(F(u))}$$

Beispiel: Fouriertransformierte eines Rechteckimpulses

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

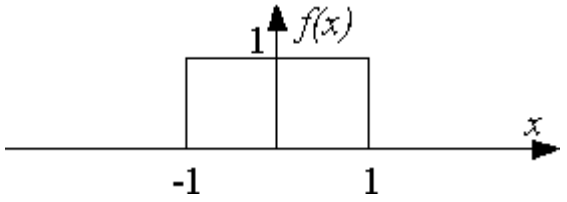
$$= \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi ux} dx = \frac{1}{-i2\pi u} e^{-i2\pi ux} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u}$$

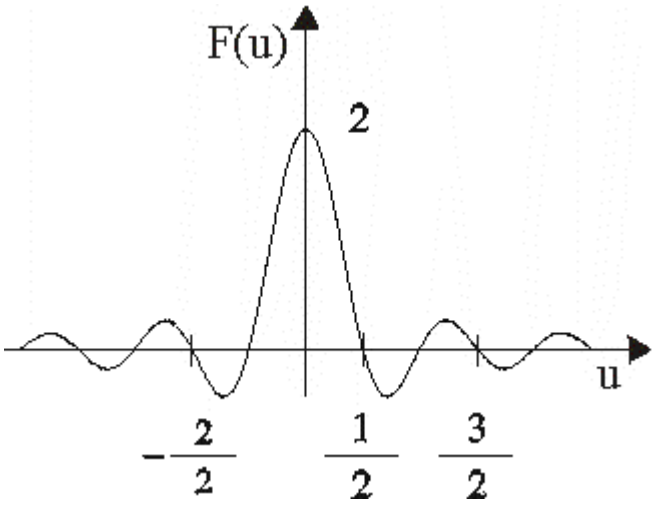


Beispiel: Fouriertransformierte eines Rechteckimpulses

- Ortsdarstellung

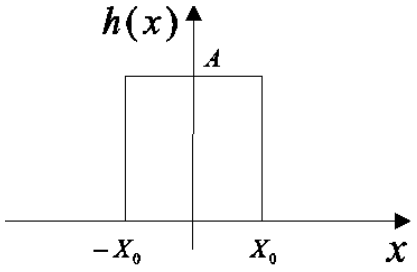


- Frequenzdarstellung



Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

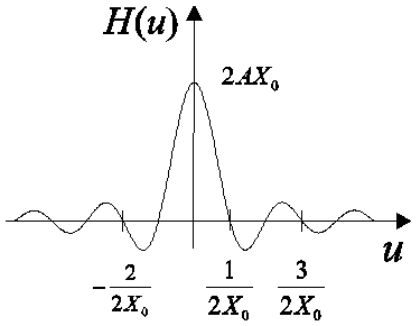
Ortsraum



$$h(x) = \begin{cases} A, & |x| < X_0 \\ A/2, & |x| = X_0 \\ 0, & |x| > X_0 \end{cases}$$

$$H(u) = 2AX_0 \frac{\sin(2\pi X_0 u)}{2\pi X_0 u}$$

Frequenzraum

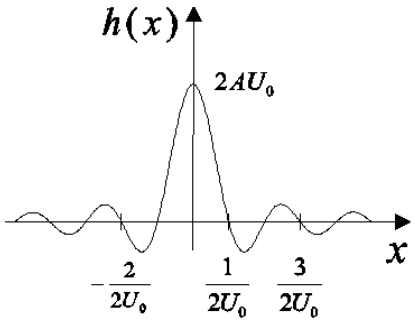


Rechteck-Funktion

sinc-Funktion

Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

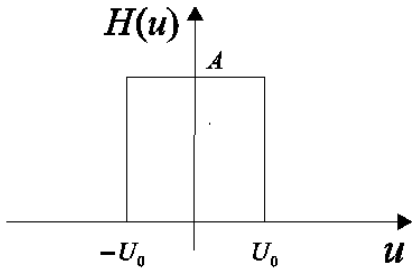


sinc-Funktion

$$h(x) = 2AU_0 \frac{\sin(2\pi U_0 x)}{2\pi U_0 x}$$

$$H(u) = \begin{cases} A, & |u| < U_0 \\ A/2, & |u| = U_0 \\ 0, & |u| > U_0 \end{cases}$$

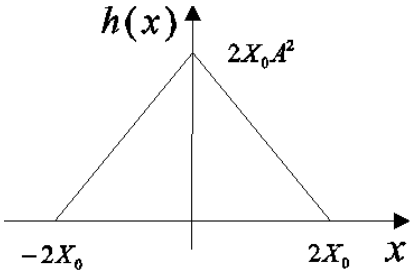
Frequenzraum



Rechteck-Funktion

Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

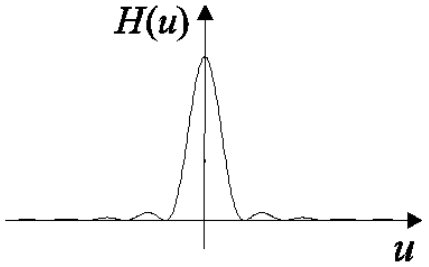


Dreiecks-Funktion

$$h(x) = \begin{cases} -A^2|x| + 2X_0A^2, & |x| \le 2X_0 \\ 0, & |x| > 2X_0 \end{cases}$$

$$H(u) = \left(2AX_0 \frac{\sin(2\pi X_0 u)}{2\pi X_0 u}\right)^2$$

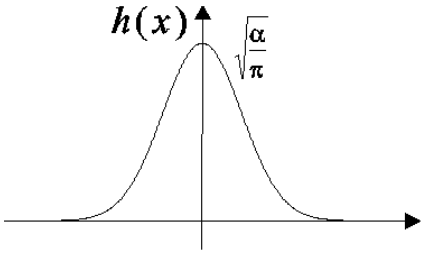
Frequenzraum



sinc^2-Funktion

Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

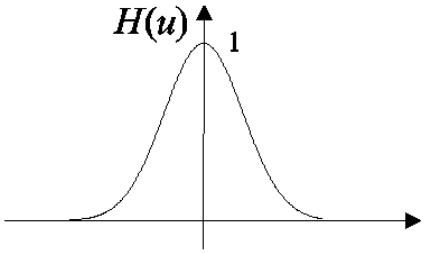


Gauß'sche Glockenkurve

$$h(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$$

$$H(u) = e^{-\frac{\pi^2 u^2}{\alpha}}$$

Frequenzraum

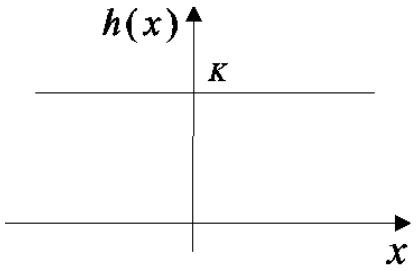


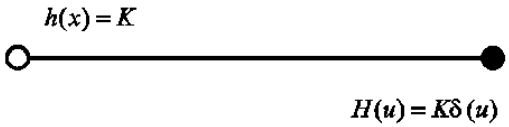
Gauß'sche Glockenkurve

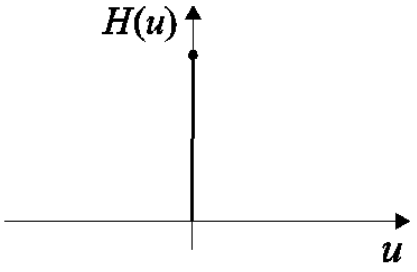
Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

Frequenzraum





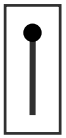


Konstante Funktion

Delta-Funktion

Dirac'sche Deltafunktion

- Auf der vorangegangenen und auf den folgenden Seiten steht das links abgebildete Symbol für die Dirac'sche Deltafunktion, für die gilt:



$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

- Man kann sie sich als Grenzfunktion einer gewöhnlichen Funktion vorstellen, z.B.

$$\delta_1(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

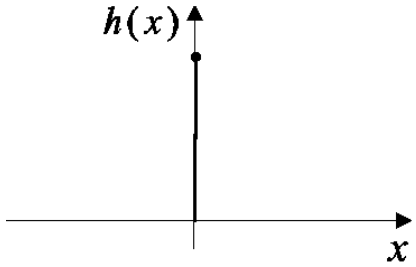
oder

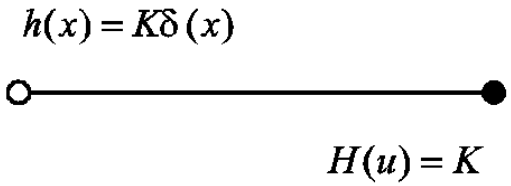
$$\delta_2(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

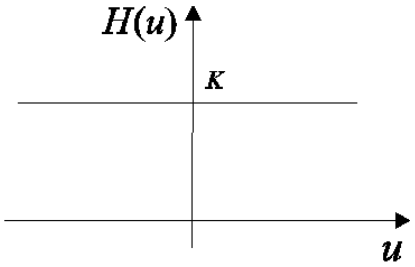
Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

Frequenzraum





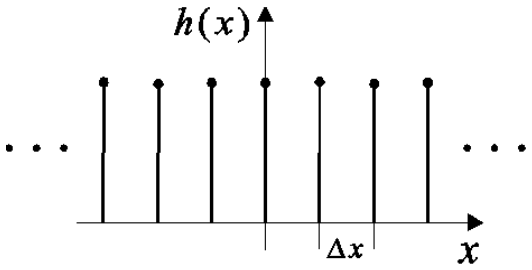


Delta-Funktion

Konstante Funktion

Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationspaare

Ortsraum

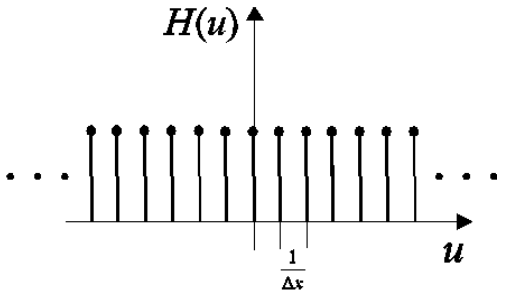


Kamm-Funktion

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x)$$

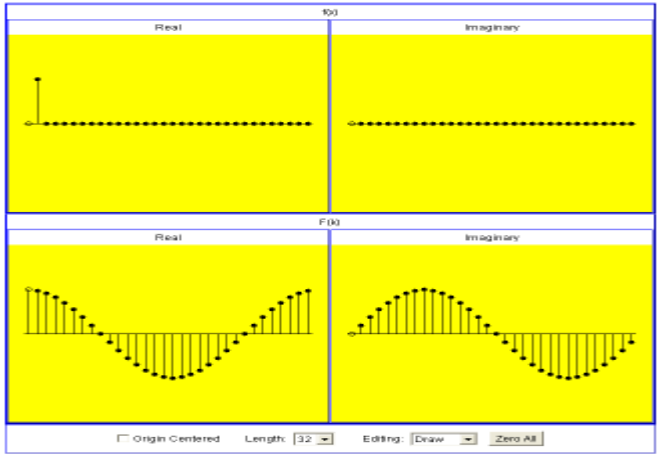
$$H(u) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right)$$

Frequenzraum



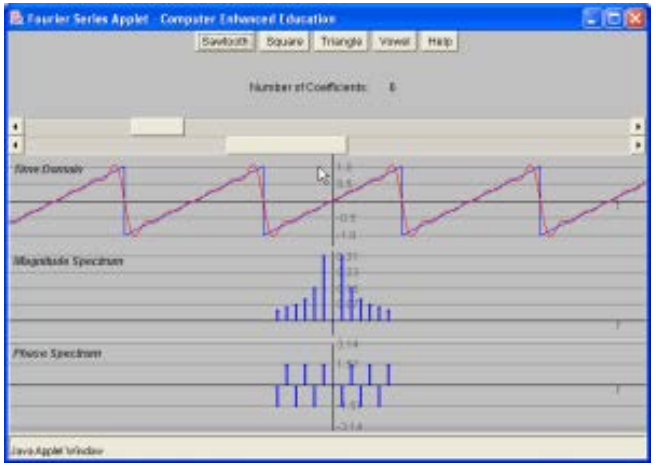
Kamm-Funktion

Weitere Applets:



web:
FftLab

lokal:
FftLab



web:
fourier

lokal:
fourier

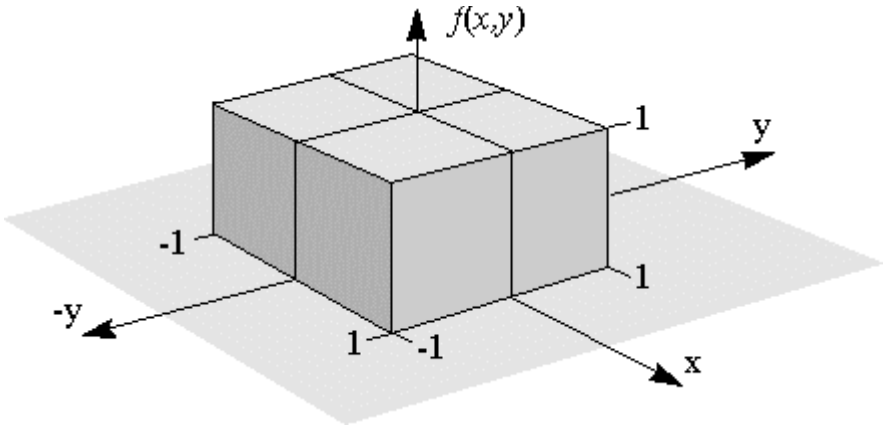
Die 2D-Fourier-Transformation

Erweiterung der FT zur zweidimensionalen Fouriertransformation

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

Beispiel: Fouriertransformation der Box-Funktion



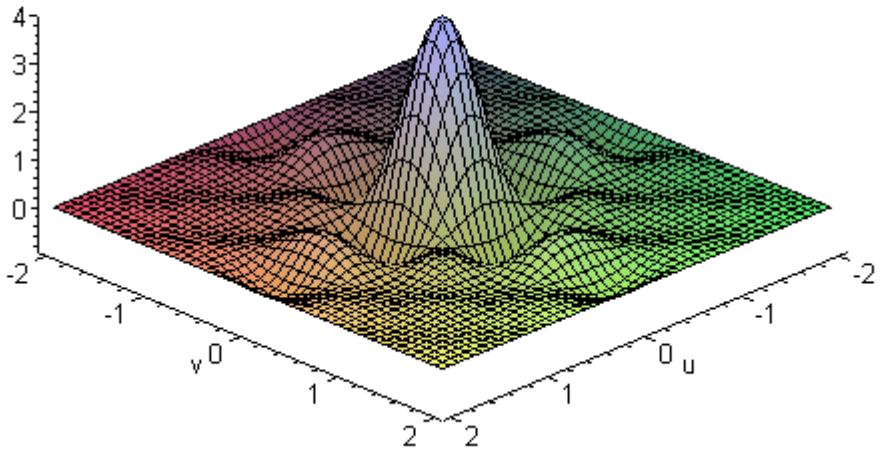
Beispiel: Fouriertransformation der Box-Funktion

$$F(u,v) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

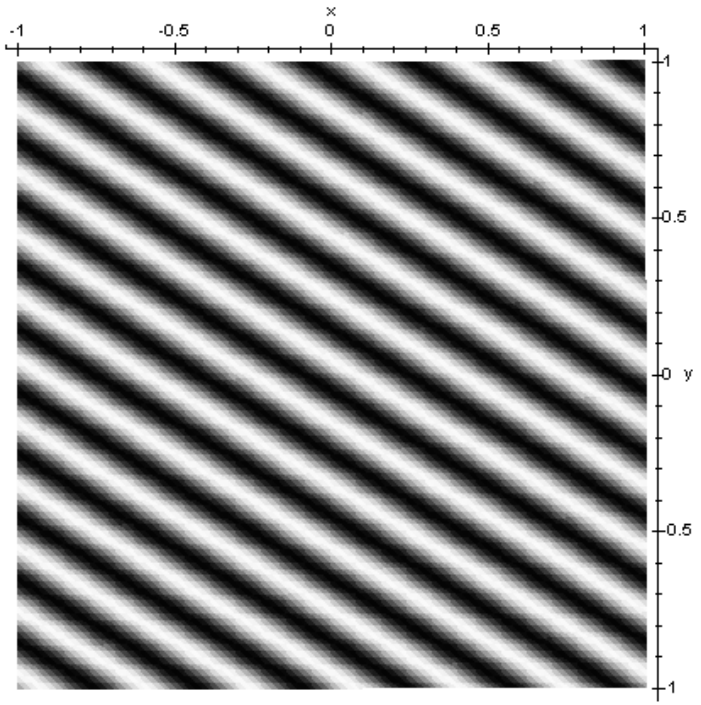
$$= \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi ux}dx \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi vy}dy$$

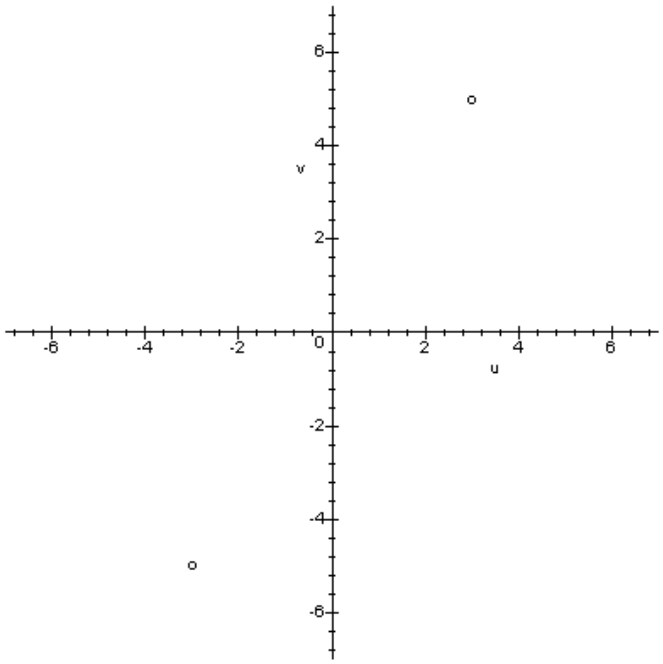
$$= 2\frac{\sin 2\pi u}{2\pi u} 2\frac{\sin 2\pi v}{2\pi v}$$

Beispiel: Fouriertransformation der Box-Funktion

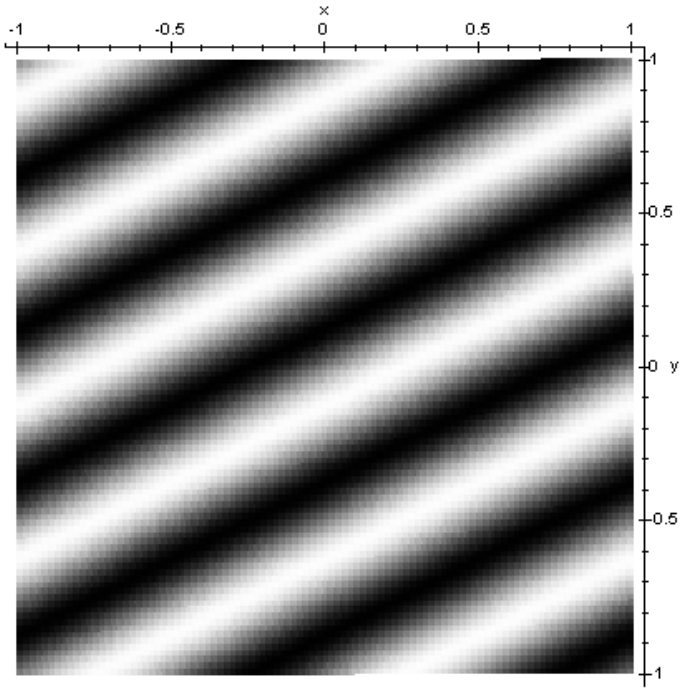


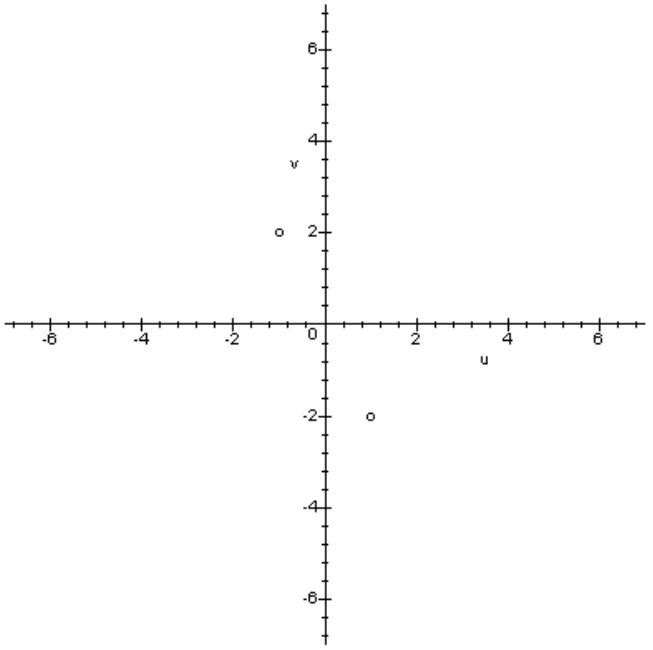
Weitere 2D-Beispiele





Weitere 2D-Beispiele





Weitere 2D-Beispiele

