

Kapitel 2

Grundlagen

quantitativer Methoden

Prof. Dr.-Ing. B. Bertsche
Institut für Maschinenelemente (IMA),
Abteilung Zuverlässigkeitstechnik,
Universität Stuttgart

Zuverlässigkeit im Produktlebenszyklus

- Bertsche, B.; Lechner G.: Zuverlässigkeitstechnik im Fahrzeug- und Maschinenbau. Springer-Verlag, Berlin, 2004
- Bertsche, B.; Reliability in Automotive and Mechanical Engineering. Springer-Verlag, Berlin, 2008
- Kap. 2 und Kap. 4:
VDA: Qualitätsmanagement in der Automobilindustrie -
Zuverlässigkeitssicherung bei Automobilherstellern und Lieferanten.
Verband der Automobilindustrie e.V. (VDA), 3. überarbeitete und
erweiterte Auflage, Frankfurt, 2000

Gliederung

2.0 Einleitung

2.1 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

2.2 Lebensdauerverteilungen zur Zuverlässigkeitsbeschreibung

2.3 Berechnung der Systemzuverlässigkeit mit der Booleschen Theorie

Gliederung

2.0 Einleitung

- Grundlagen zur Zuverlässigkeitsanalyse
- Einführung Streuung
- Einführung Histogramm
- Stress-Strength-Interference

2.1 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

2.2 Lebensdauerverteilungen zur Zuverlässigkeitsbeschreibung

2.3 Berechnung der Systemzuverlässigkeit mit der Booleschen Theorie

Zuverlässigkeitsanalyse in der Entwicklungsphase

Ziele:

- Prognose der erwarteten Zuverlässigkeiten
- Erkennung und Beseitigung von Schwachstellen
- Durchführung von Vergleichsstudien

quantitativ

- Berechnung der vorausgesagten Zuverlässigkeit
- **Ausfallratenanalyse**
- Probabilistische Zuverlässigkeits-Prognose
- Methoden:
 - Boole
 - Markoff
 - FTA
 - ...

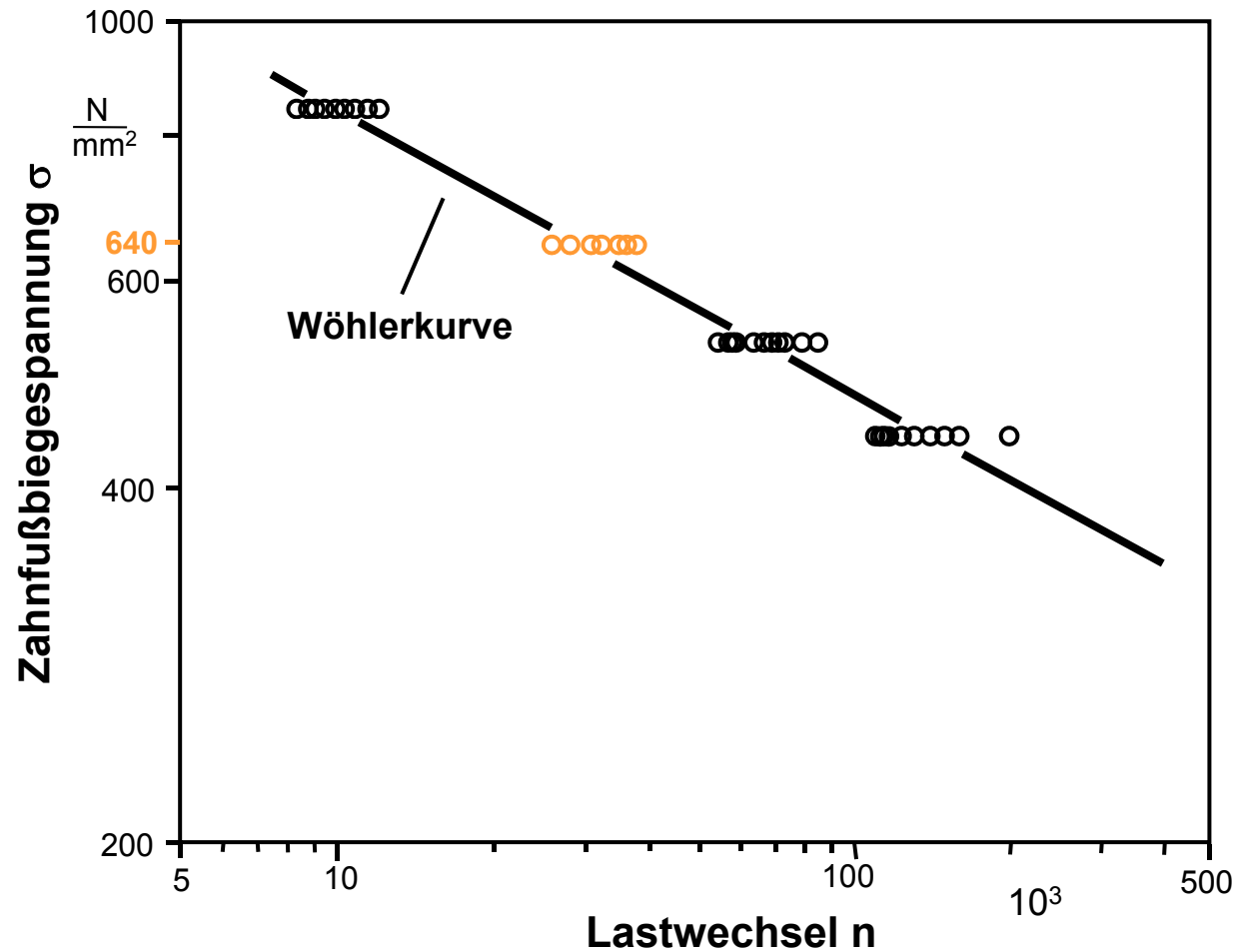
qualitativ

- Systematische Untersuchung der Auswirkungen von Fehlern und Ausfällen
- **Ausfallartenanalyse**
- Methoden:
 - FMEA / FMECA
 - FTA
 - Ereignisablaufanalyse
 - Checklisten
 - ...

s. Abb. 2.1

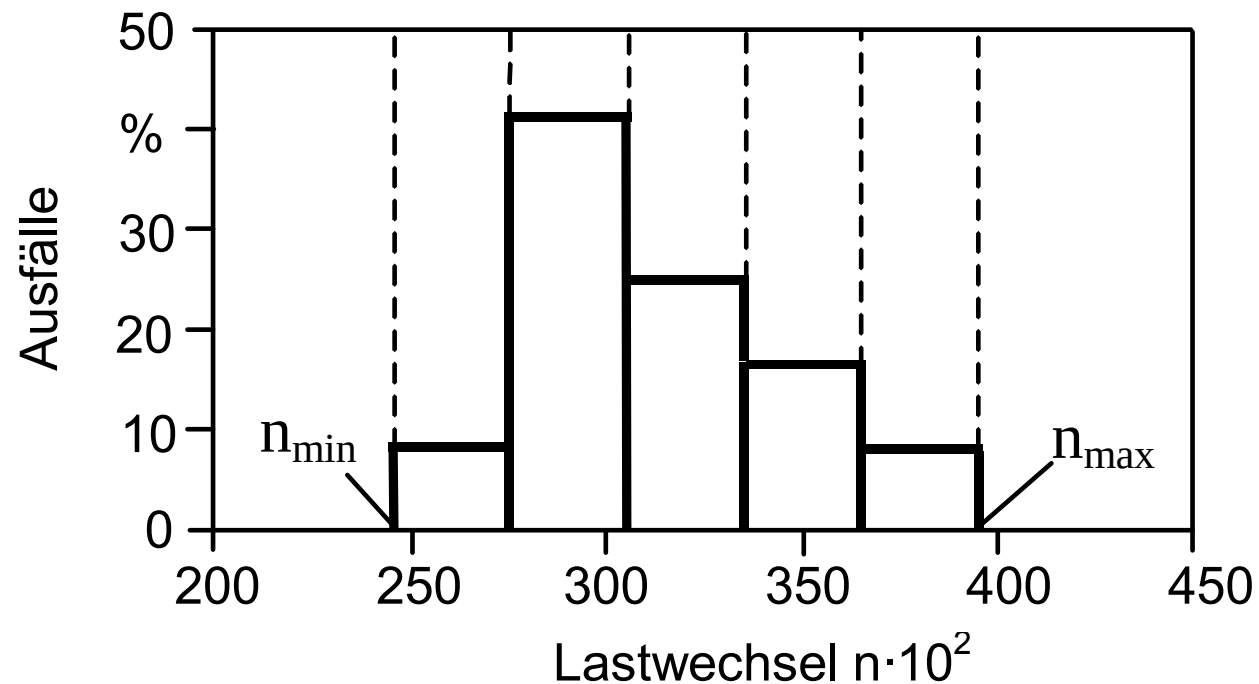


Zahnbruch Wöhlerversuch mit Streuung der Ausfallzeiten



s. Abb. 2.2

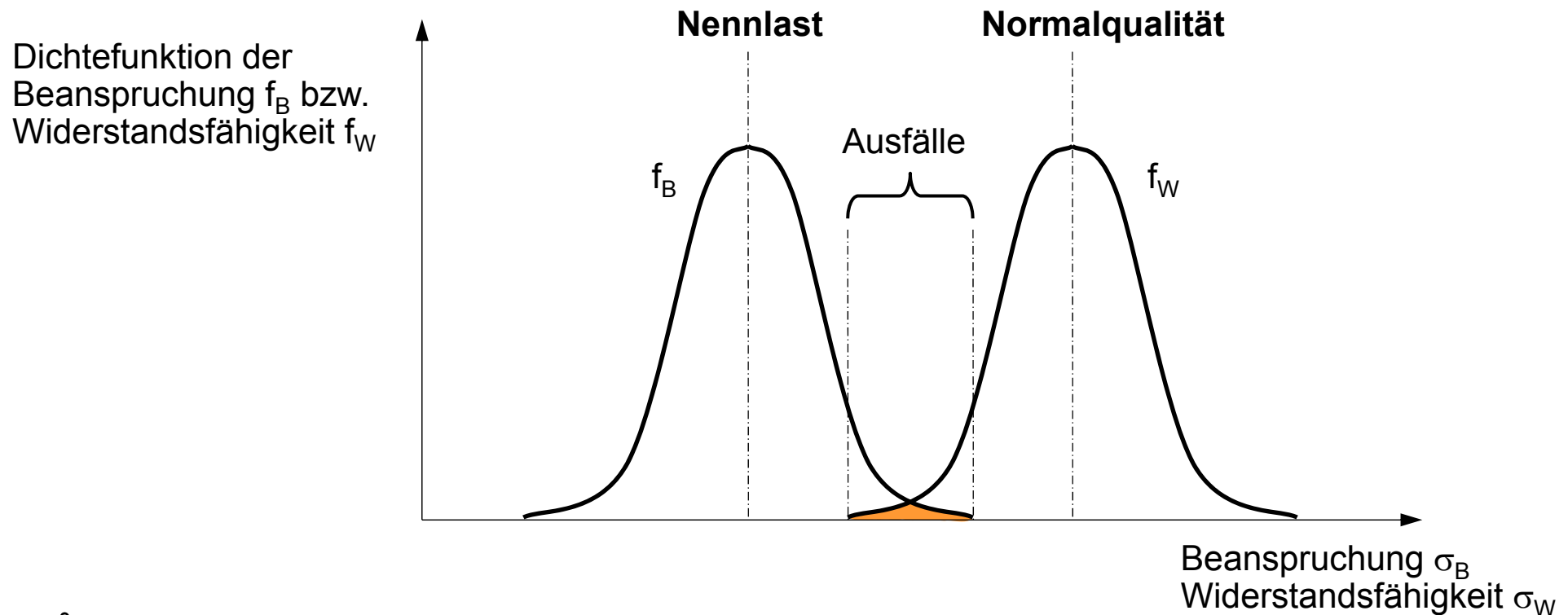
Histogramm der Häufigkeit
für das Lastniveau $\sigma = 640 \text{ N/mm}^2$ (aus Abb. 2.2)



s. Abb. 2.3

„Stress-Strength-Interference“

= Streuung und Wechselwirkung von Widerstandsfähigkeit und Beanspruchung



Gliederung

2.0 Einleitung

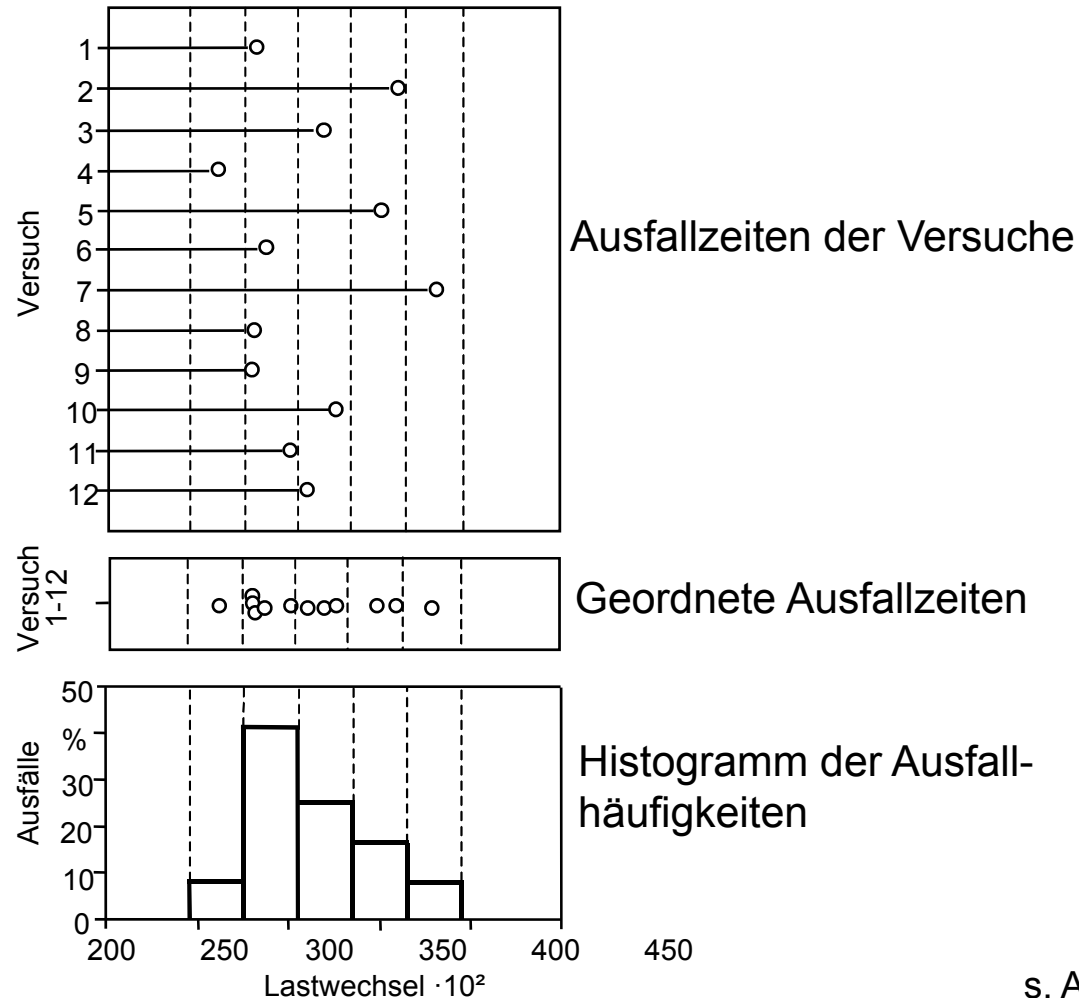
2.1 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

- Statistische Beschreibung und Darstellung des Ausfallverhaltens
- Statistische Maßzahlen
- Zuverlässigkeitskenngößen
- Definition der Wahrscheinlichkeit

2.2 Lebensdauerverteilungen zur Zuverlässigkeitsbeschreibung

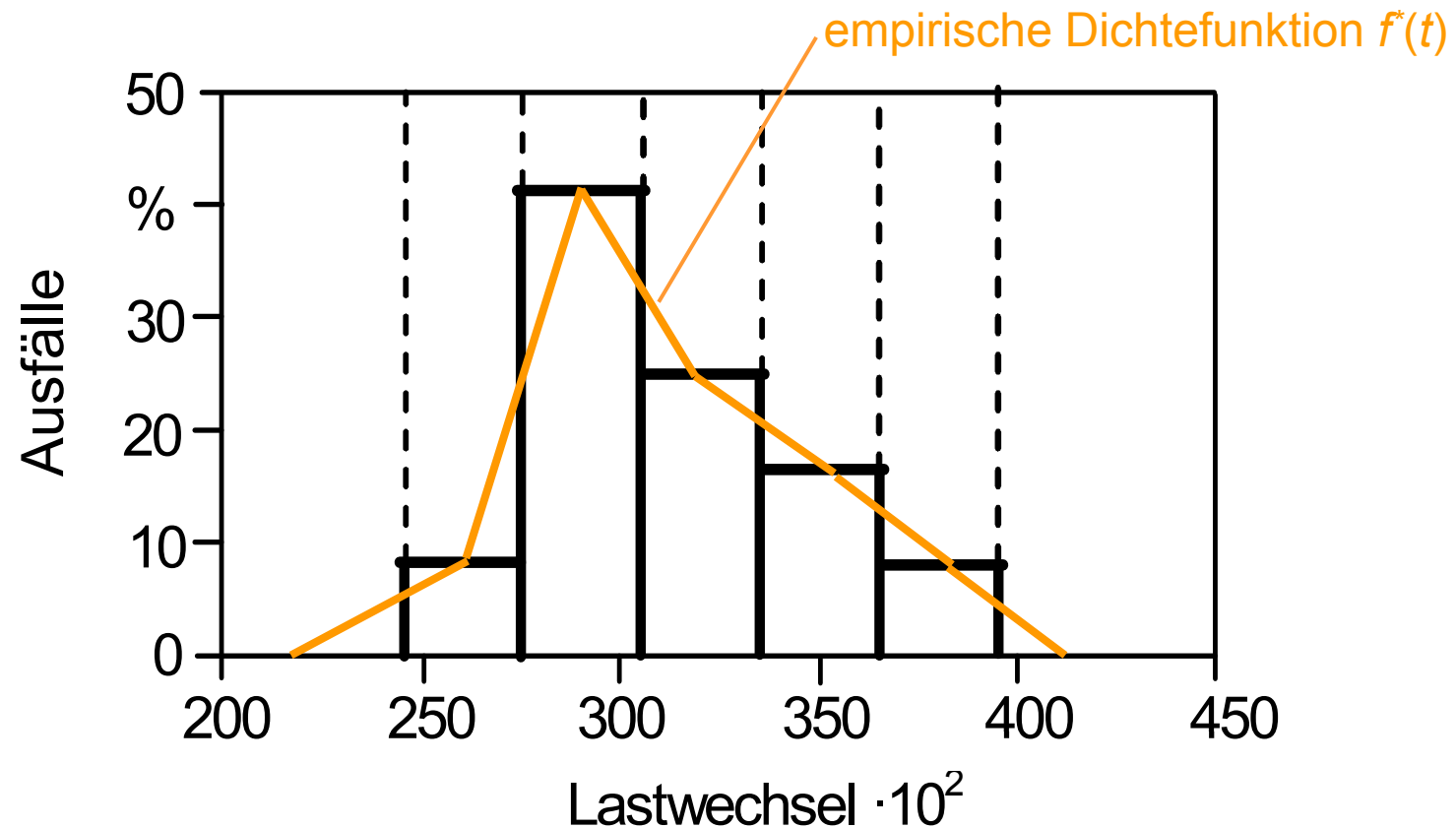
2.3 Berechnung der Systemzuverlässigkeit mit der Booleschen Theorie

Ausfallzeiten und Histogramm der Ausfallhäufigkeit für das Lastniveau $\sigma = 640 \text{ N/mm}^2$ aus dem Zahnbruch Wöhlerversuch



s. Abb. 2.4

Empirischer Dichtefunktion $f^*(t)$



s. Abb. 2.5

Bestimmung der Klassenanzahl n_k

Grobe Näherung bzw. erster Schätzwert:

Anzahl der Klassen $\approx \sqrt{\text{Gesamtanzahl der Ausfälle bzw. Versuchswerte}}$

$$n_k \approx \sqrt{n} \quad (2.3)$$

Alternative Ansätze:

$$n_k \approx 1 + 3,32 \cdot \log n \quad (2.4)$$

$$n_k \approx 2 \cdot \sqrt[3]{n} \quad (2.5)$$

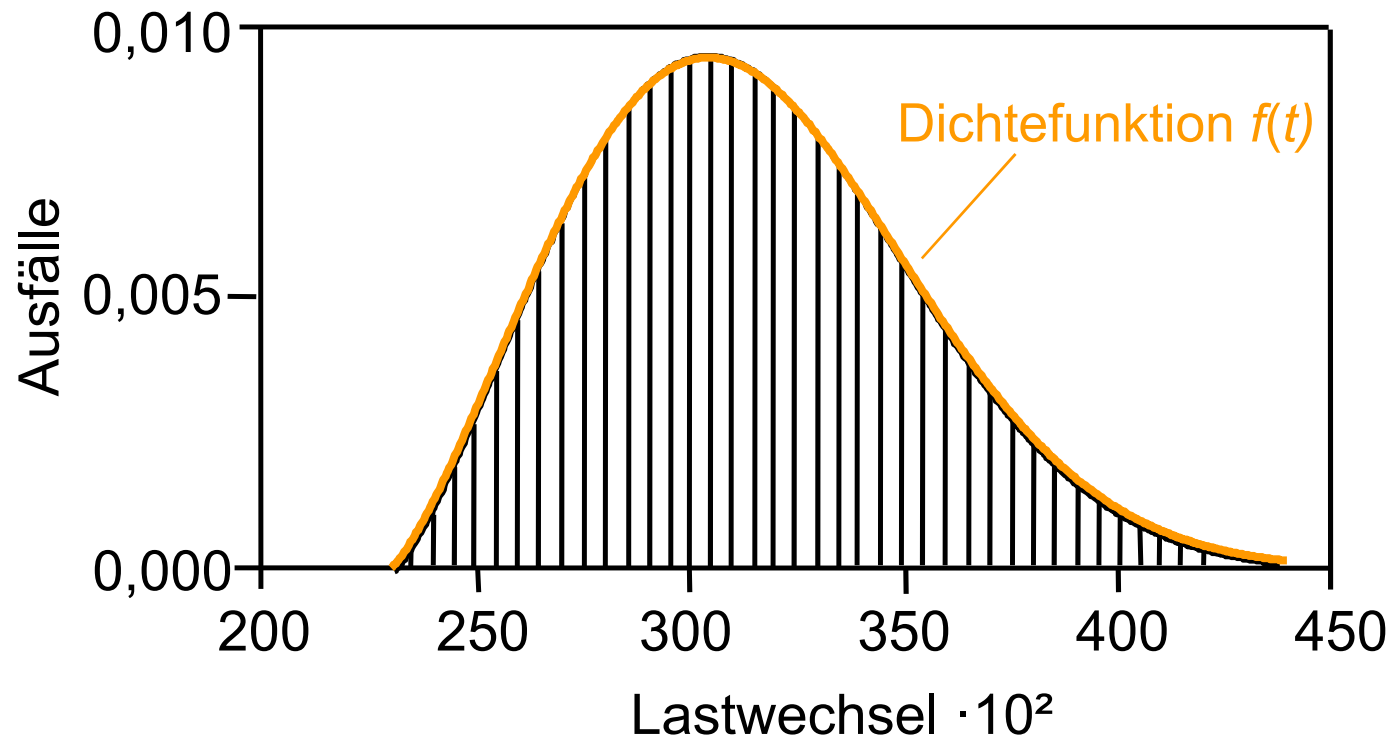
$$n_k \approx 5 \cdot \log n \quad (2.6)$$

Anmerkung:

Bis zu einem Stichprobenumfang von $n = 50$ ergeben sich vergleichbare Ergebnisse, Sie differieren aber bei größeren Stichprobenumfängen stark.

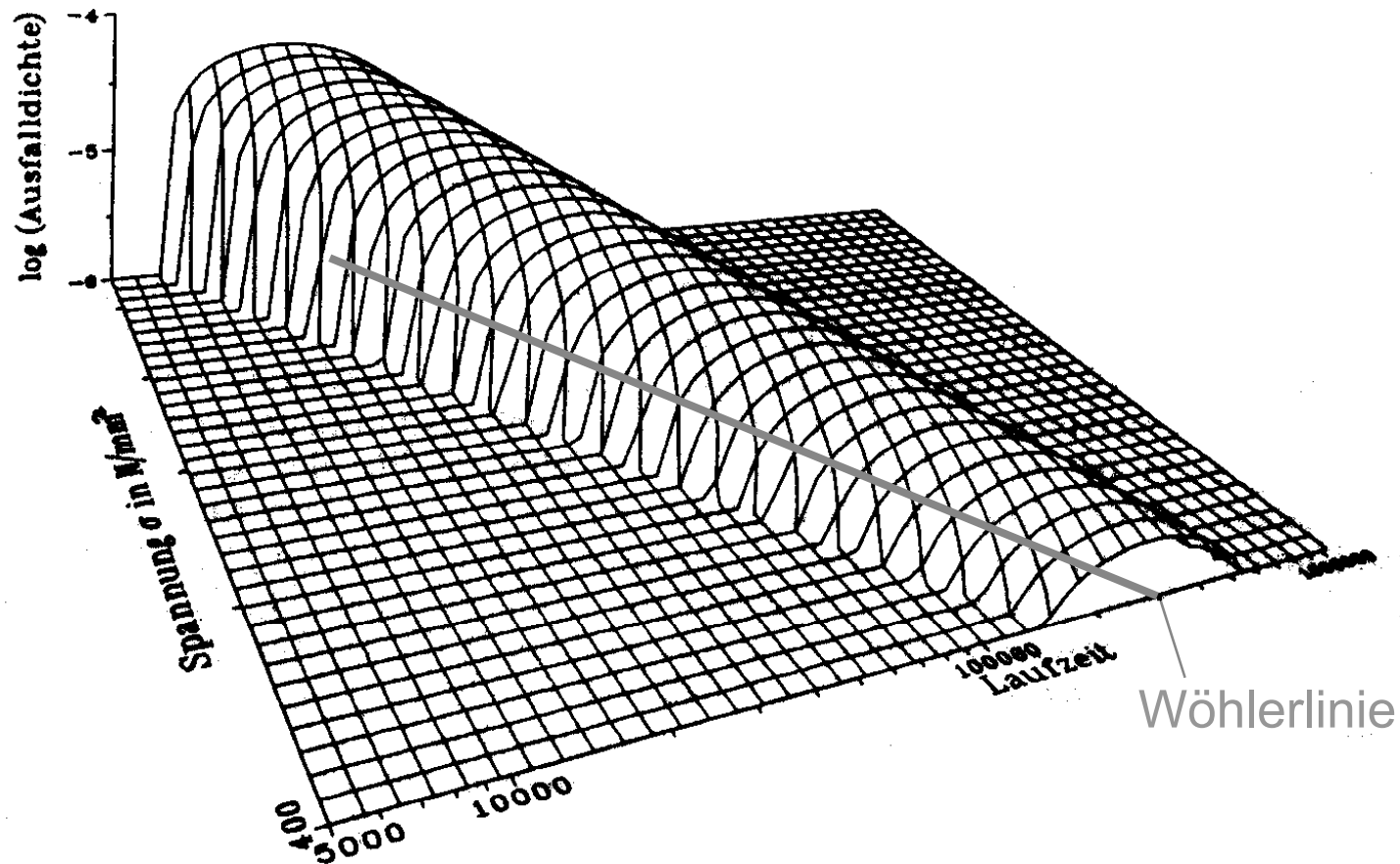
Histogramm der Ausfallhäufigkeit und Dichtefunktion $f(t)$

Bedingung: Anzahl der Ausfälle $n \rightarrow \infty$



s. Abb. 2.6

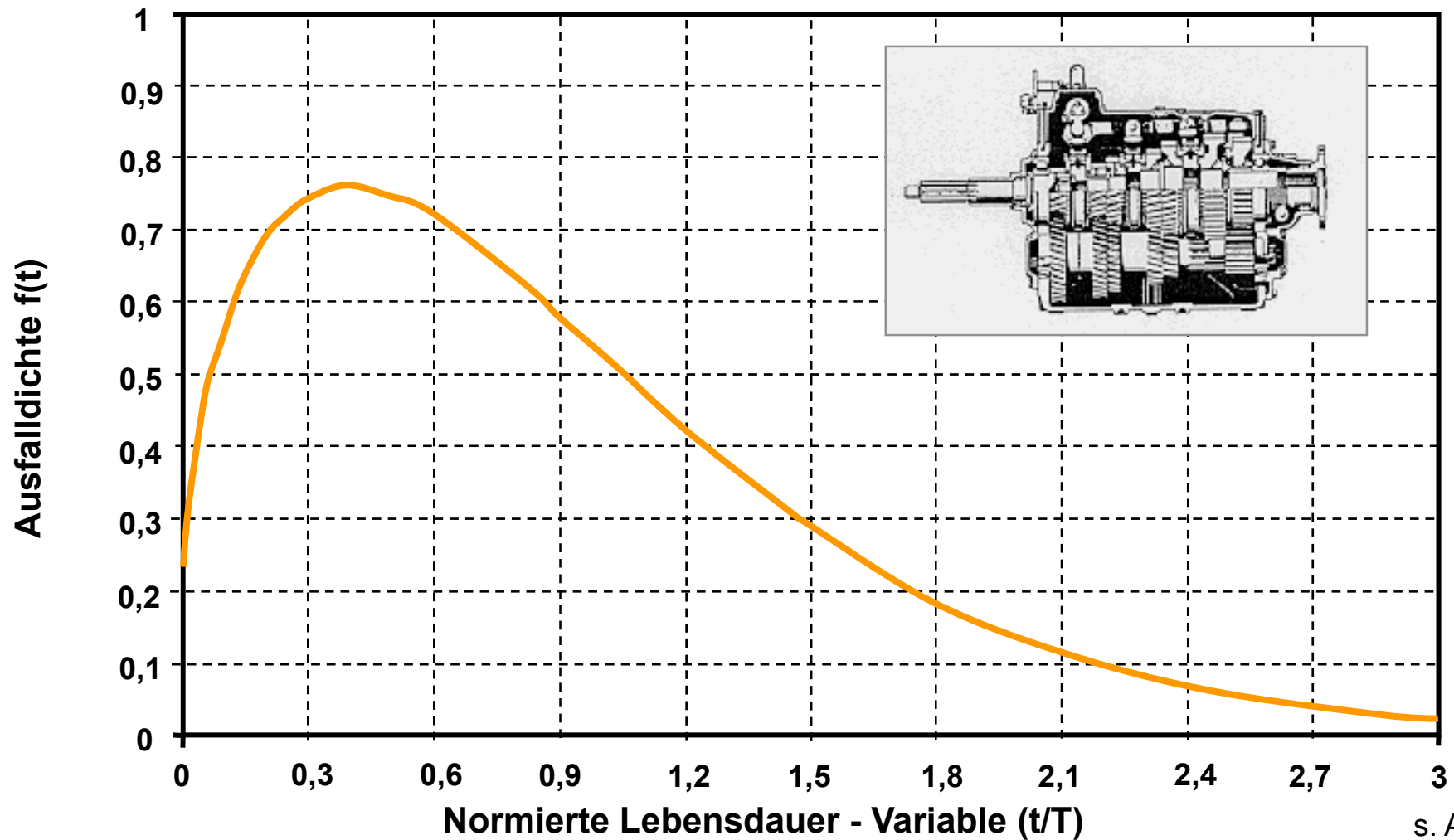
Dreidimensionale Wöhlerkurve für den Zahnbruch-Versuch



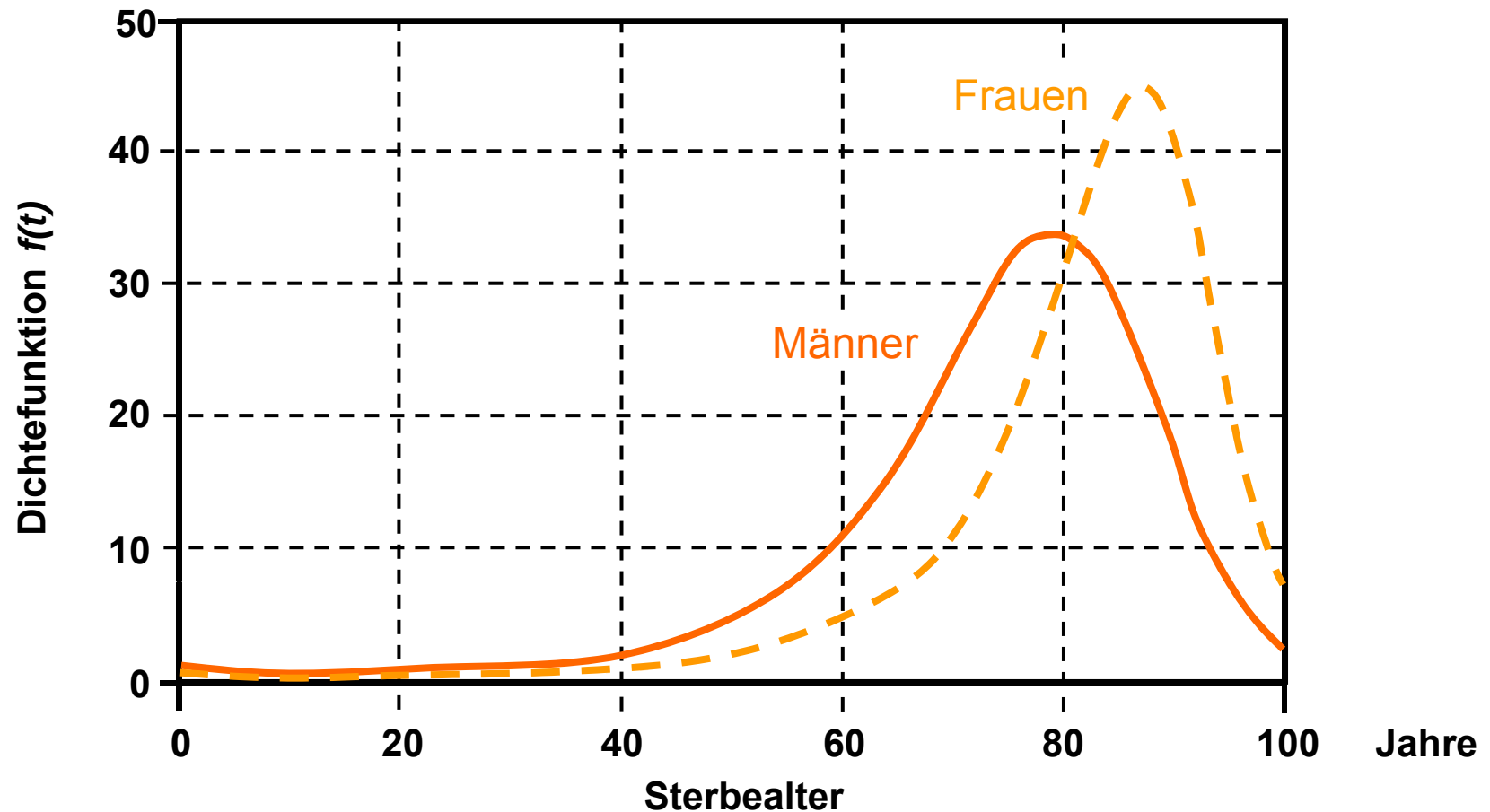
s. Abb. 2.7

Prof. Bertsche

Beispiel 1: Dichtefunktion eines 6-Gang-Nkw-Getriebes



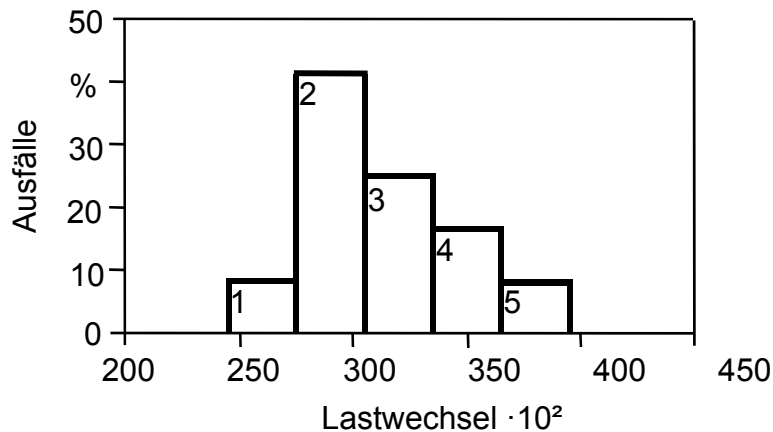
Beispiel 2: Dichtefunktion der menschlichen Sterbefälle



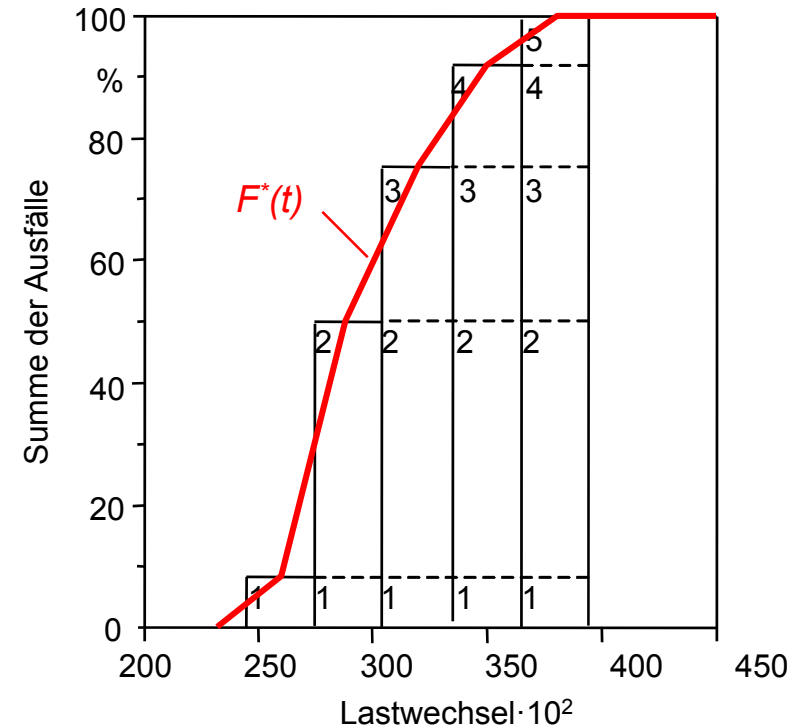
s. Abb. 2.9

Prof. Bertsche

Empirische Verteilungsfunktion



Histogramm der Häufigkeiten

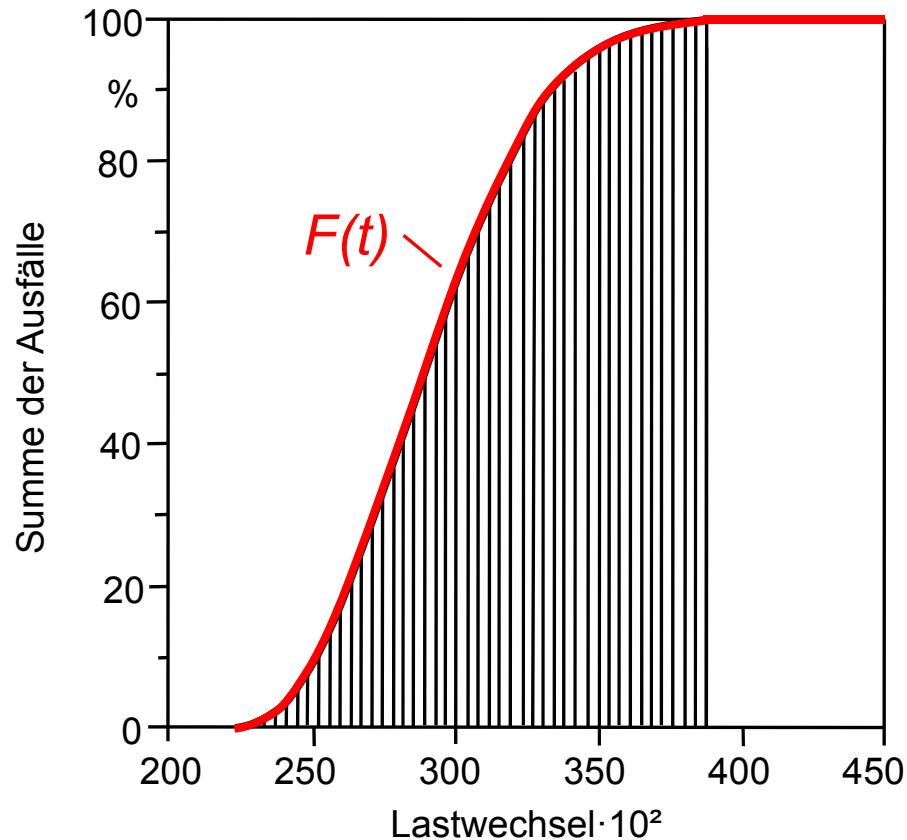


Histogramm der Summenhäufigkeit
und empirische Verteilungsfunktion
 $F^*(t)$

s. Abb. 2.10

Prof. Bertsche

Histogramm der Summenhäufigkeit und Verteilungsfunktion/Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$



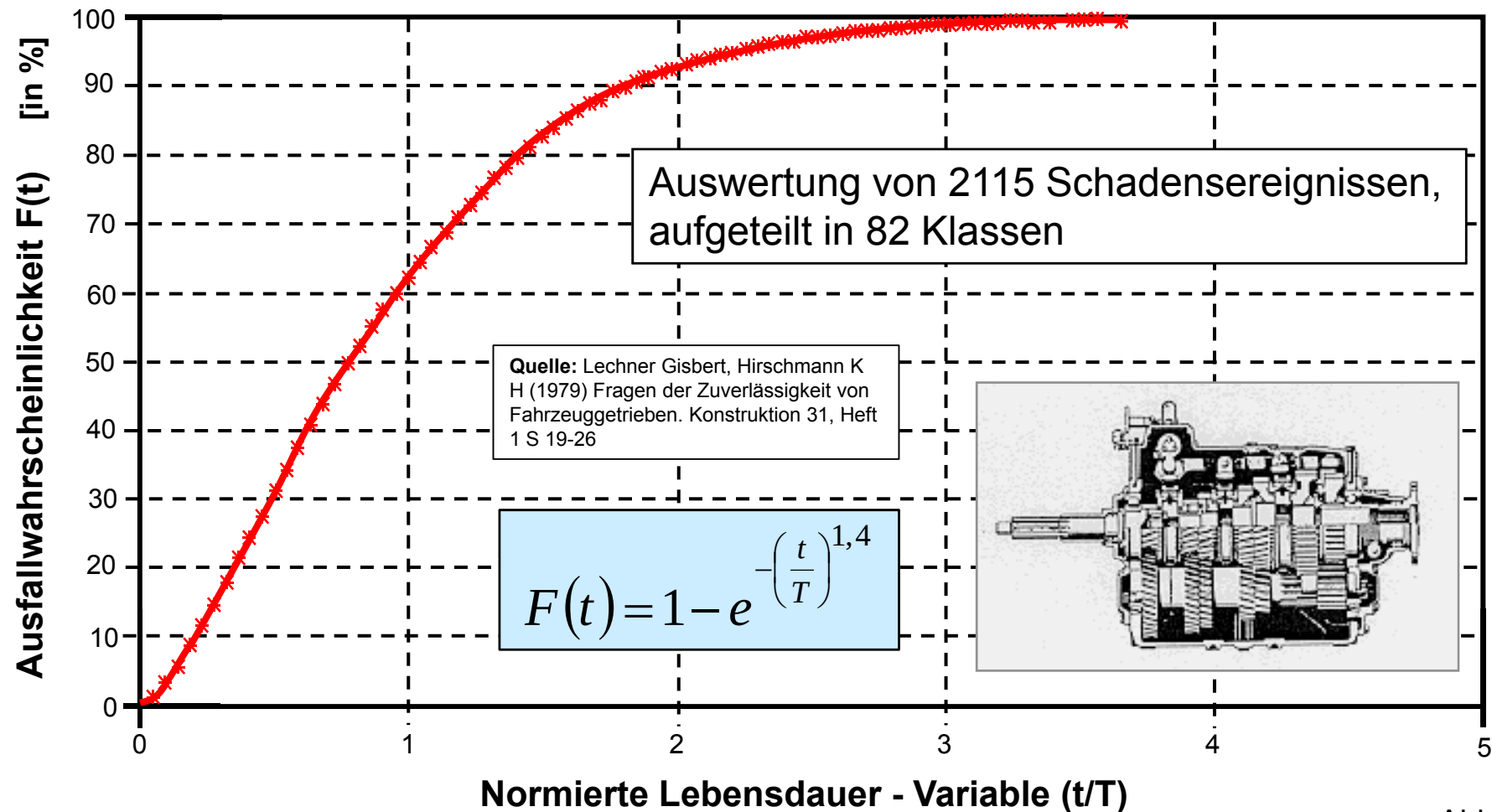
$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

$$f(t) = \frac{d F(t)}{d t} \quad (2.11)$$

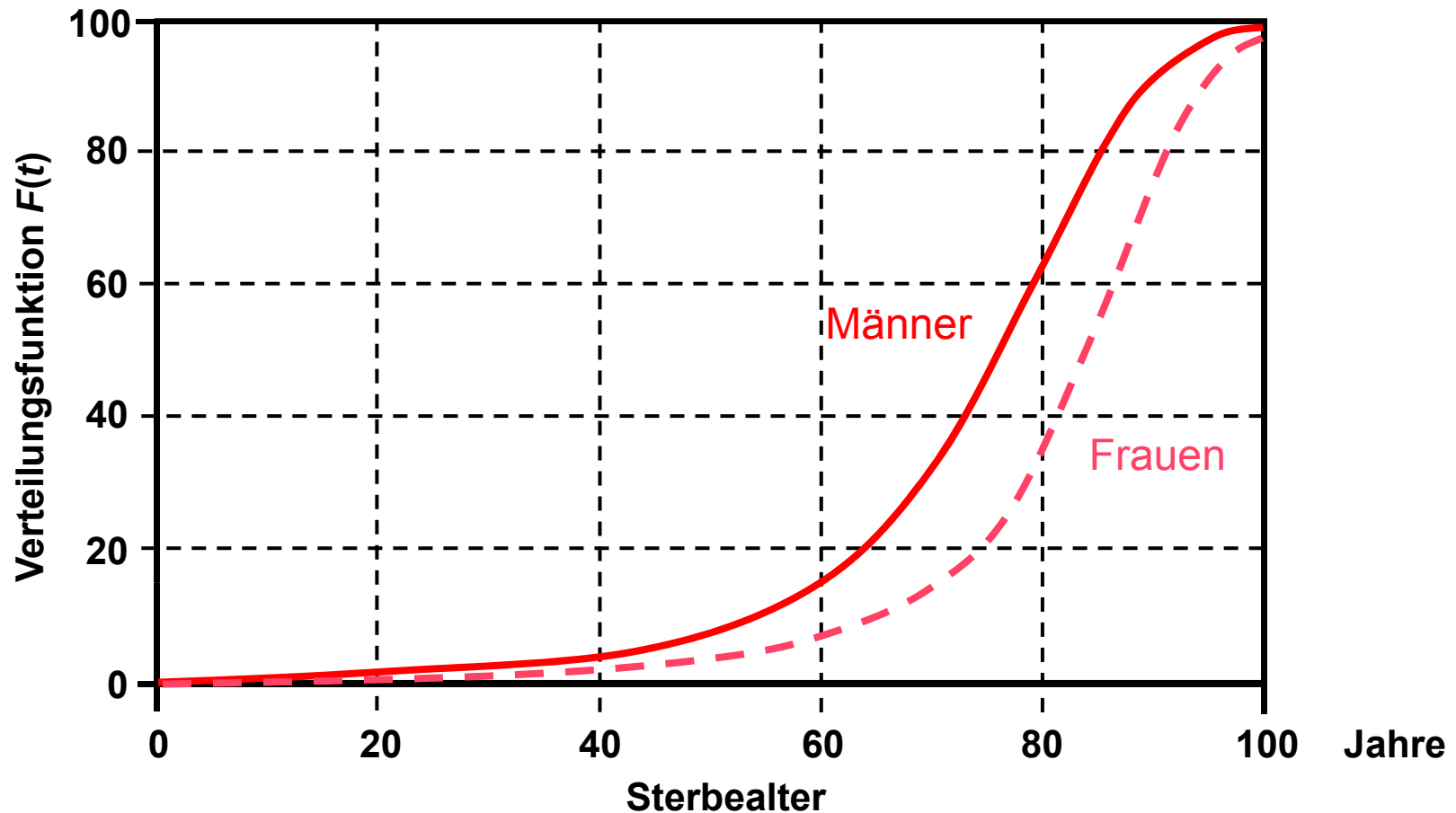
s. Abb. 2.11

Prof. Bertsche

Beispiel 1: Ausfallwahrscheinlichkeit eines 6-Gang-Nkw-Getriebes



Beispiel 2: Ausfallwahrscheinlichkeit der menschlichen Sterbefälle



s. Abb. 2.13

Prof. Bertsche

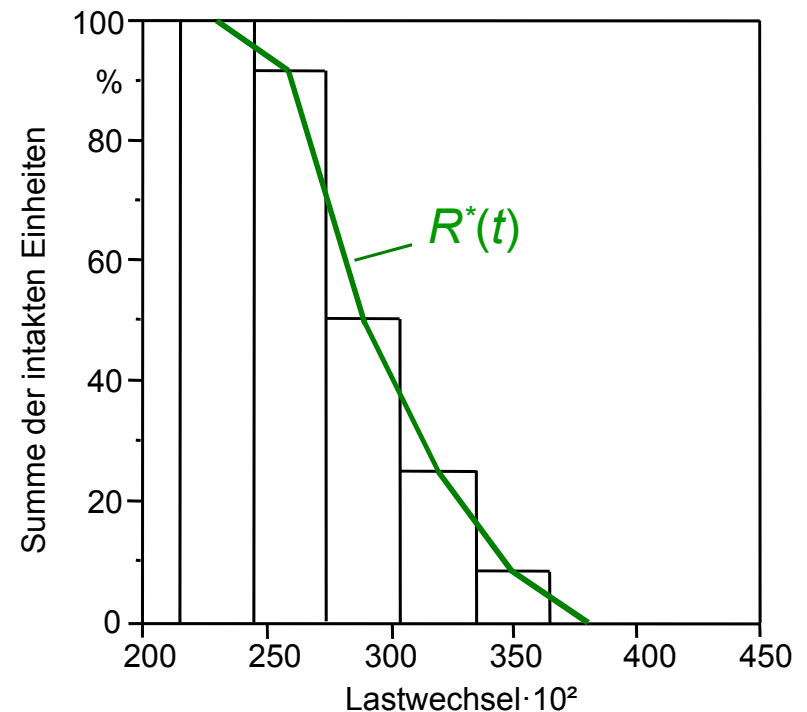
Überlebenswahrscheinlichkeit oder Zuverlässigkeit $R(t)$

↓
Reliability

ausgefallene Teile + noch intakte Teile = 100%

$$\Rightarrow R(t) = 1 - F(t) \quad (2.12)$$

Darstellung des Ausfallverhaltens aus
Abb. 2.10 mit dem Histogramm der
Überlebenshäufigkeit bzw. mit der empirischen
Überlebenswahrscheinlichkeit $R^*(t)$



s. Abb. 2.14

Prof. Bertsche

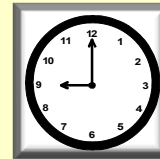
Definition Zuverlässigkeit

Zuverlässigkeit ist die Wahrscheinlichkeit $R(t)$ dafür,

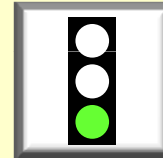
dass ein Produkt



während einer definierten Zeitdauer



unter gegebenen Funktions-



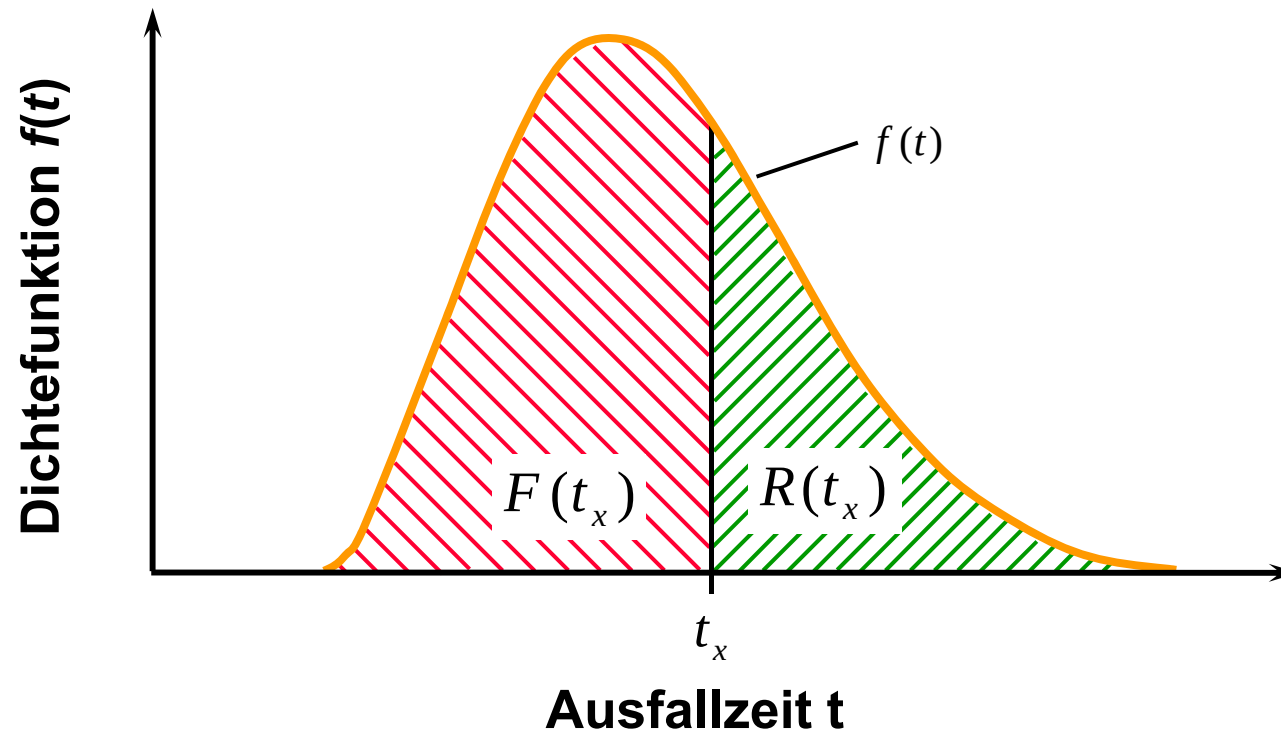
und Umgebungsbedingungen



nicht ausfällt!

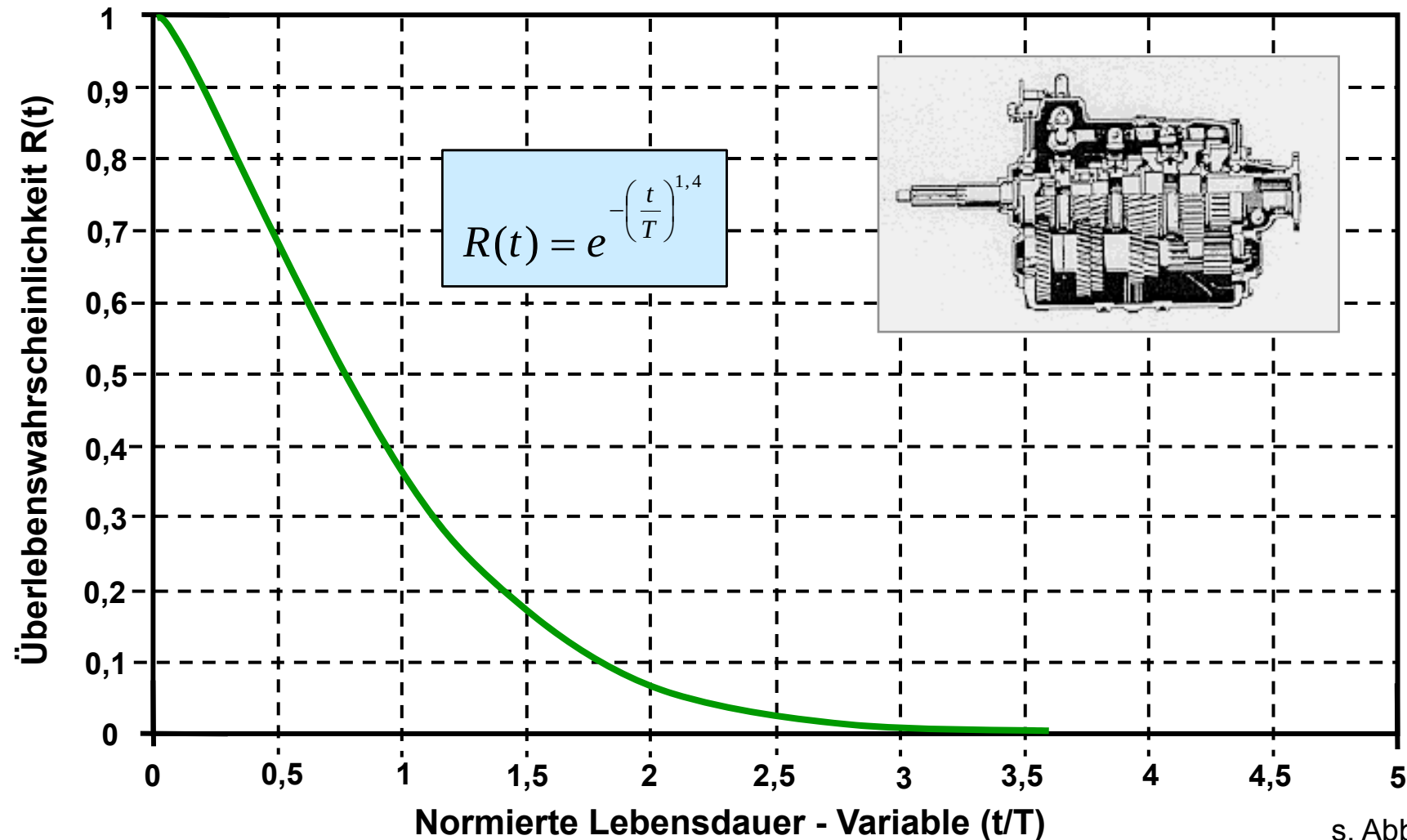


Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$
als Komplement zur Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$

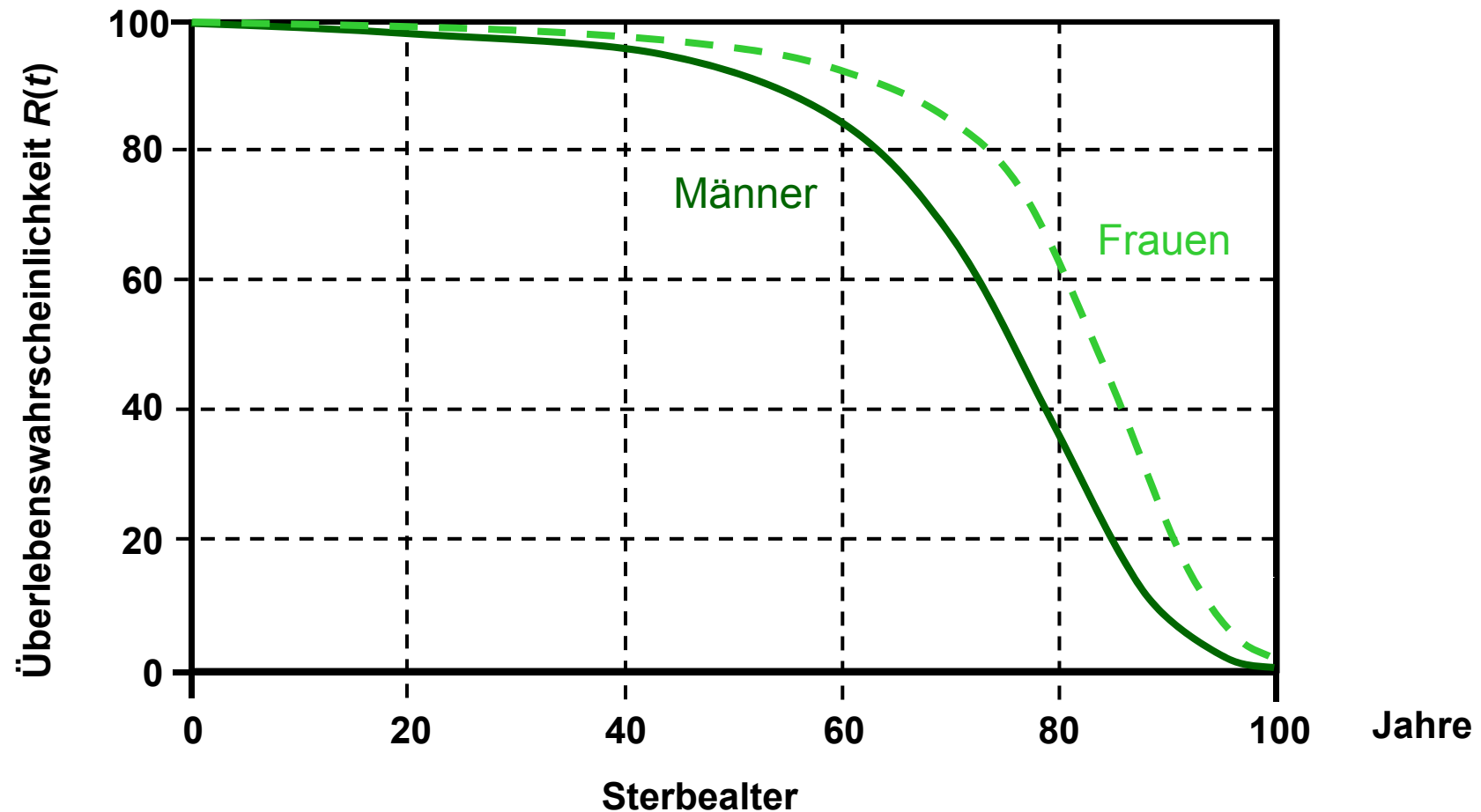


s. Abb. 2.15

Beispiel 1: Überlebenswahrscheinlichkeit eines 6-Gang-Nkw-Getriebes



Beispiel 2: Überlebenswahrscheinlichkeit beim Menschen

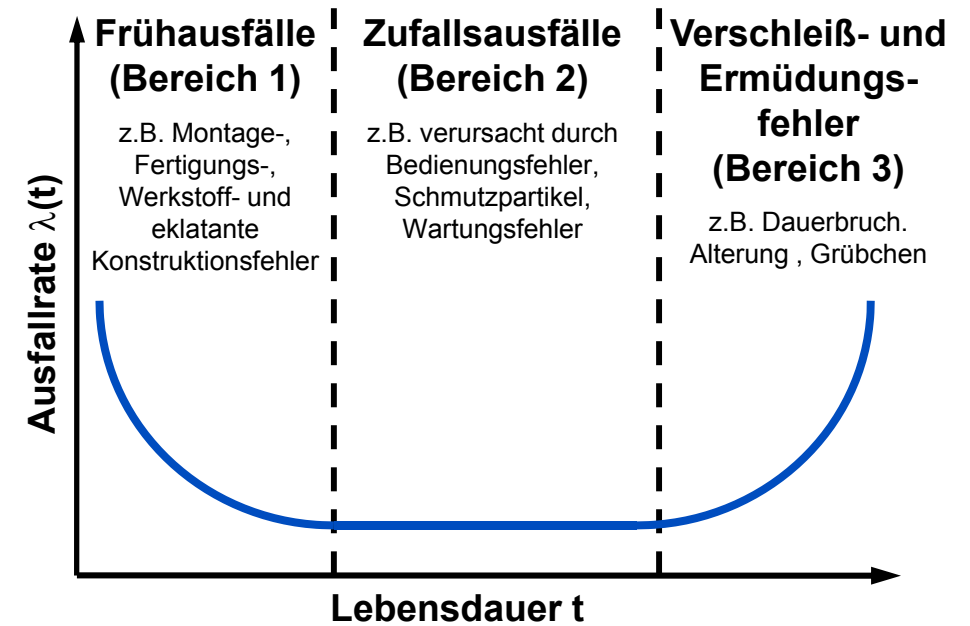


s. Abb. 2.17

Prof. Bertsche

Ausfallrate $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{\text{Ausfälle}}{\text{Summe noch intakter Einheiten}} \quad (2.13)$$



Lebensdauer t

Gegenmaßnahmen

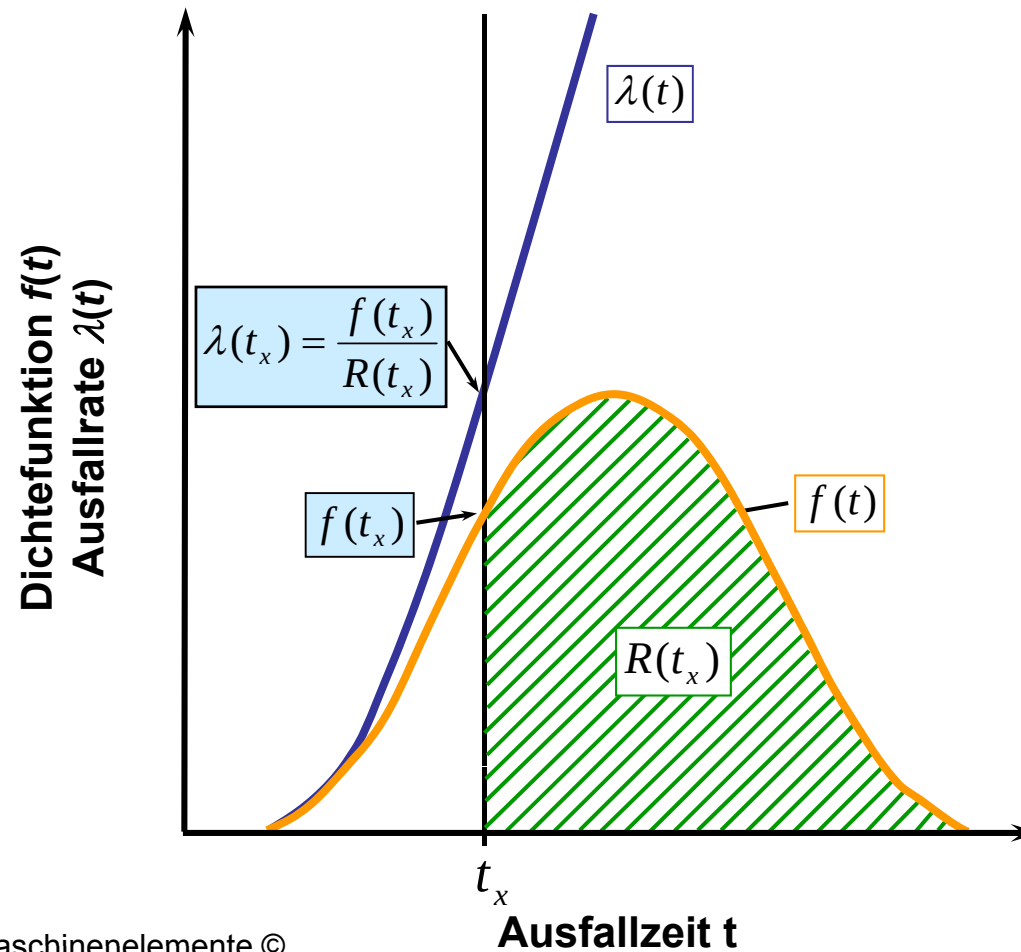
Versuche, Nullserie, Fertigungs- und Qualitätskontrolle

Korrekte Bedienung und Wartung, richtiger Einsatz

Berechnung, Versuche

s. Abb. 2.20
Prof. Bertsche

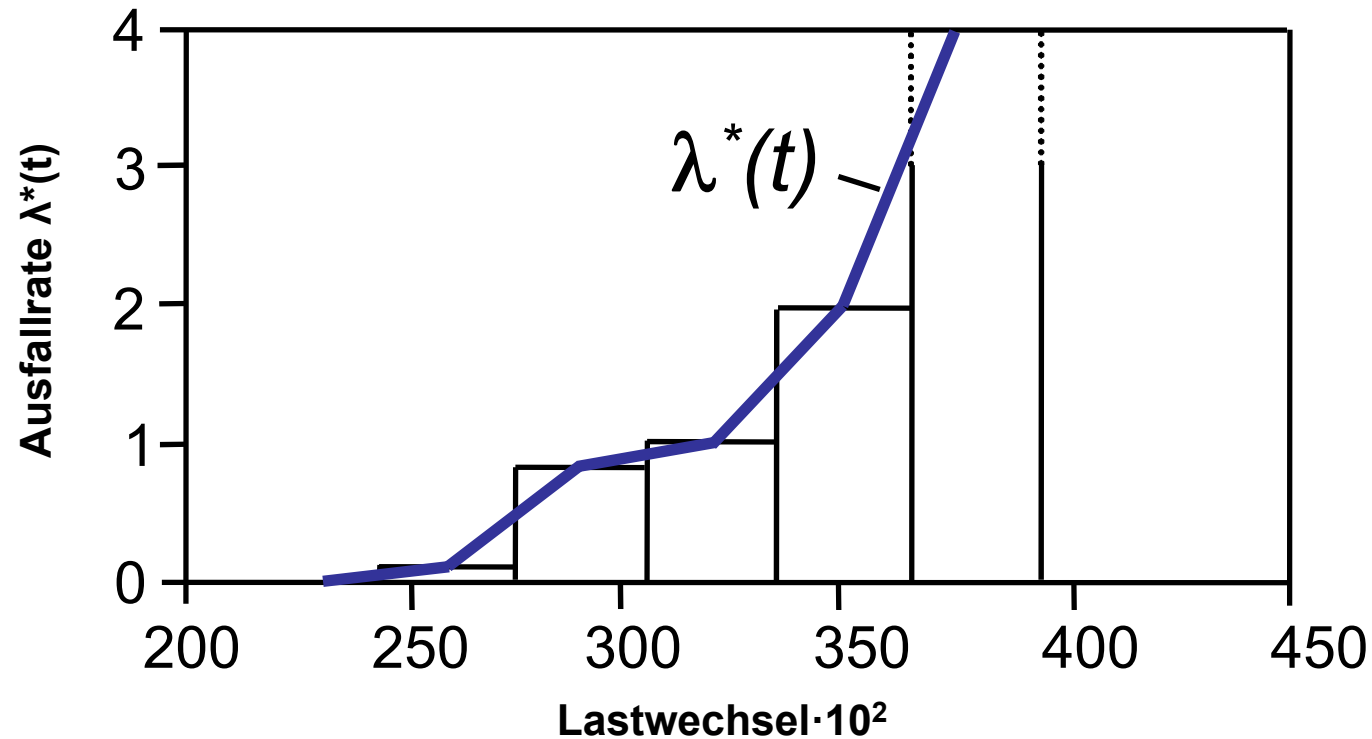
Ermittlung der Ausfallrate λ aus Dichtefunktion und Überlebenswahrscheinlichkeit



s. Abb. 2.19

Prof. Bertsche

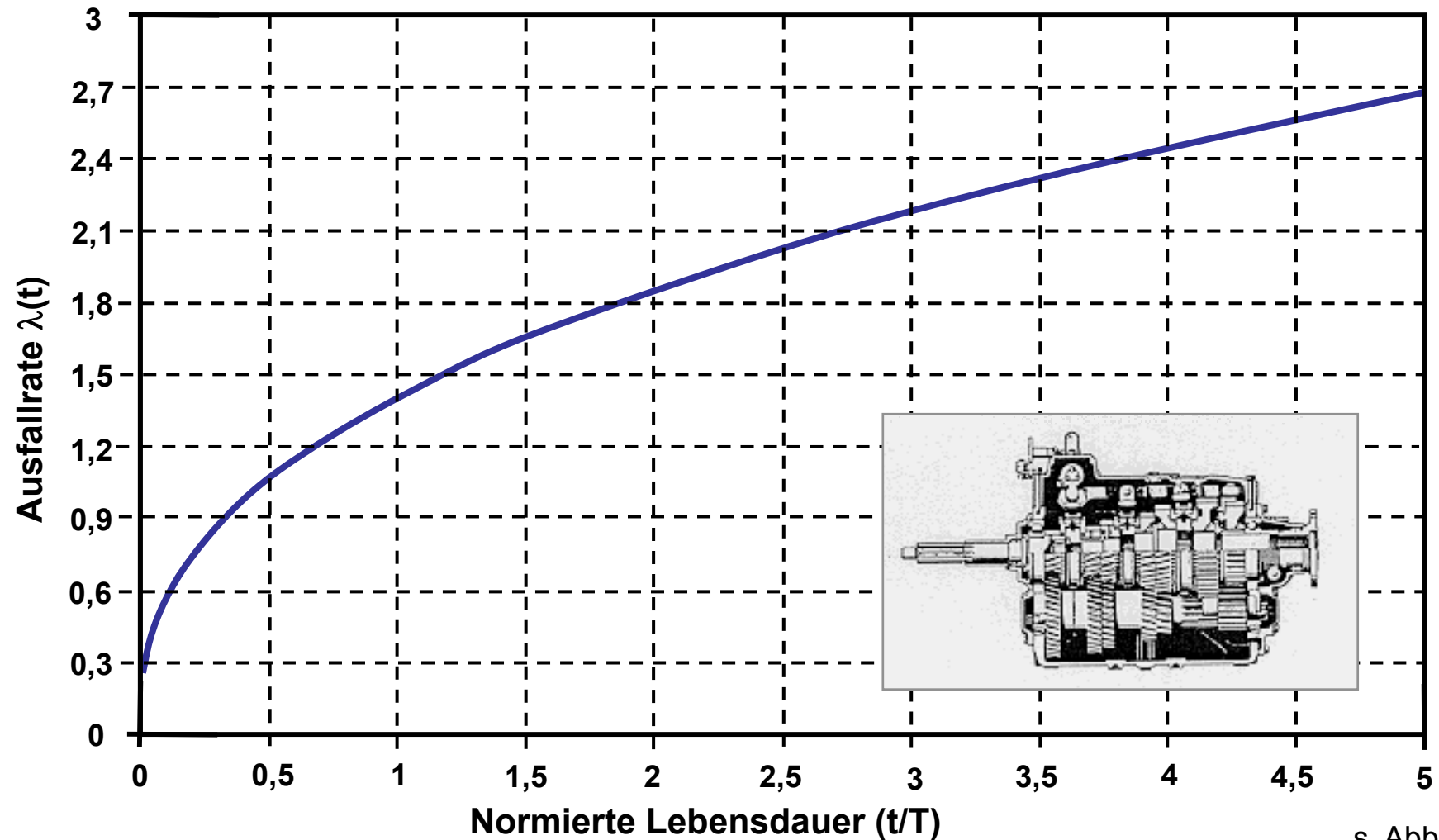
Histogramm der Ausfallrate und empirischen Ausfallrate $\lambda^*(t)$ für die Zahnbruch-Versuche



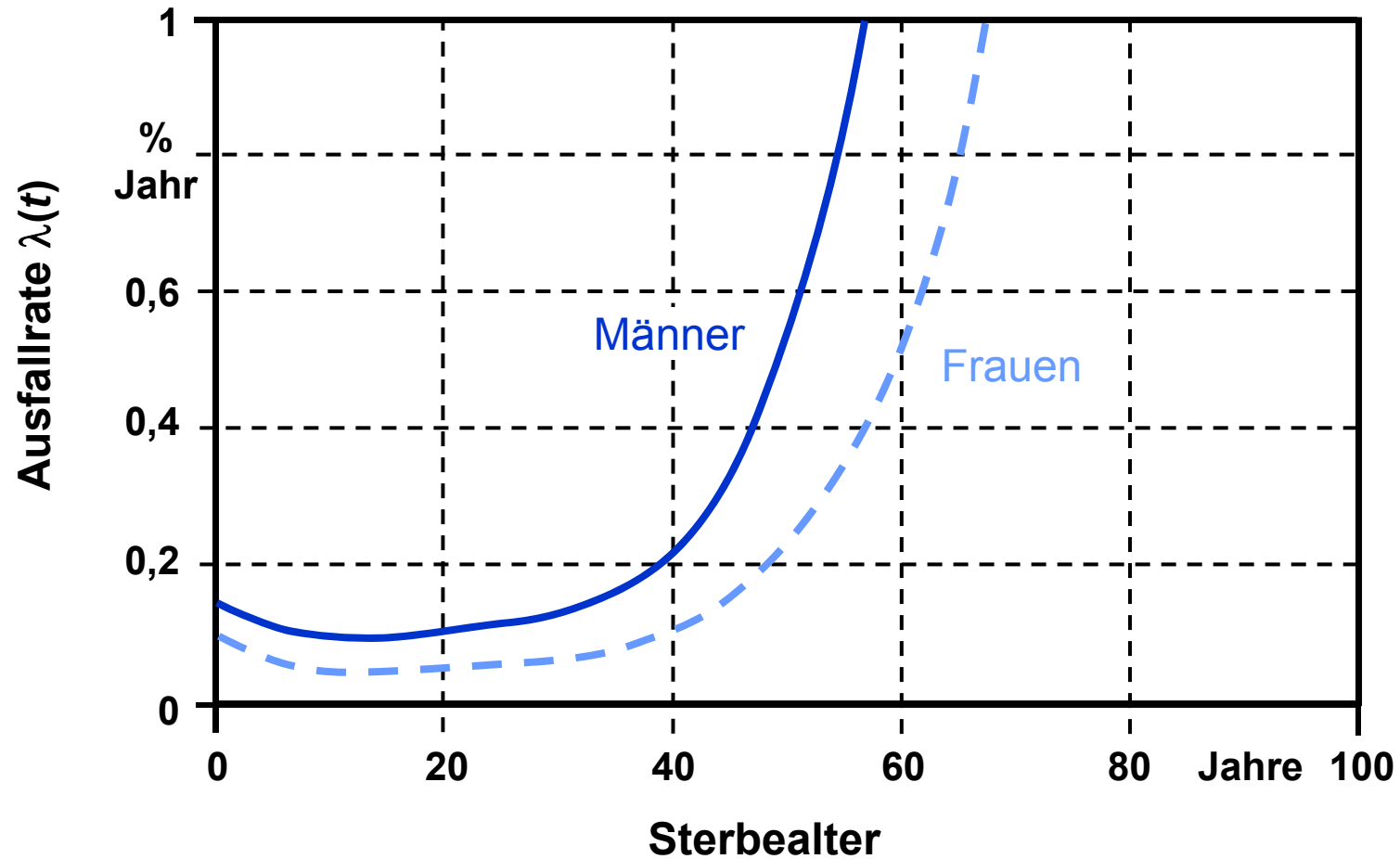
s. Abb. 2.18

Prof. Bertsche

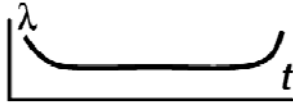
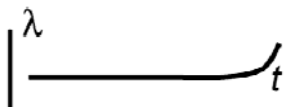
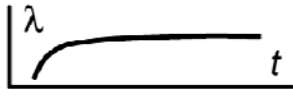
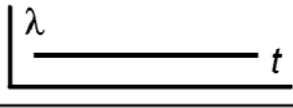
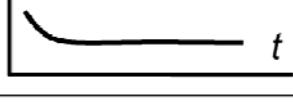
Beispiel 1: Ausfallrate eines 6-Gang-Nkw-Getriebes



Beispiel 2: Ausfallrate des Menschen



Ausfallverhalten

	Ausfallverhalten	allgemeine Charakteristik	allgemeine Beispiele
Verschleißausfälle	A 	Ungewöhnlicher Verlauf	Alte Dampfmaschinen (spätes 18. frühes 19. Jh.)
	B 	- einfache Geräte - komplexe Maschinen schlechter Konstruktion (einzelne dominierende Ausfallart)	- Wasserpumpe in Kfz - Schnürsenkel 1974 Vega Motor
	C 	- Strukturen - Verschleißteile	- Karosserien - Flugzeug- und Autoreifen
Zufallsausfälle	D 	komplexe Maschinen mit High-Stress Tests nach Inbetriebnahme	Hochdruckentspannungsventile
	E 	Gut konstruierte komplexe Maschinen	- Kreiselkompass - Mehrfachverdichtend Hochdruck-Zentrifugalpumpe
	F 	- Elektronische Bauteile - komplexe Bauteile nach Instandsetzung	- Computer „Motherboards“ - Programmierbare Steuerungen

s. Abb. 2.23



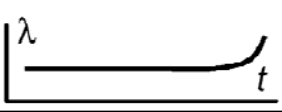
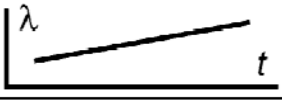
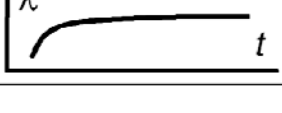
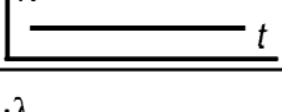
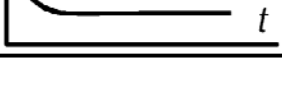
Institut für Maschinenelemente ©

UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Prof. Bertsche

Unterschiedliches Ausfallverhalten mit Beispielen

Ausfallverhalten

	Ausfallverhalten	1968 UAL	1973 Broberg	MSDP Studien	1993 SSMD
Verschleißausfälle	A 	4 %	3 %	3 %	6 %
	B 	2 %	1 %	17 %	
	C 	5 %	4 %	3 %	
Zufallsausfälle	D 	7 %	11 %	6 %	
	E 	14 %	15 %	42 %	60 %
	F 	<u>68 %</u>	<u>66 %</u>	<u>29 %</u>	<u>33 %</u>
		89 %	92 %	77 %	99 %

s. Abb. 2.24



Institut für Maschinenelemente ©

UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Prof. Bertsche

Prozentuale Anteile nach verschiedenen Lebensdauerstudien

Statistische Maßzahlen

- Mittelwert
- Varianz
- Standardabweichung
- Median
- Modalwert

Empirischer arithmetischer Mittelwert

Der meist kurz als **Mittelwert** bezeichnete empirische arithmetische Mittelwert wird aus den Ausfallzeiten $t_1, t_2, \dots, t_n$ folgendermaßen berechnet:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (2.15)$$

Der Mittelwert gibt als Lageparameter an, wo ungefähr die Mitte der Ausfallzeiten liegt. Stellt man sich die Ausfallzeiten als Massenpunkte vor, so entspricht der Mittelwert t_m dem Schwerpunkt dieser Massenpunkte. Für das Beispiel im Bild 1.3 beträgt der Mittelwert $t_m = 31200$ Lastwechsel.

Der arithmetische Mittelwert ist sehr empfindlich gegenüber „Ausreißern“, d.h. eine extrem kurze oder lange Ausfallzeit beeinflusst die Größe des Mittelwertes sehr stark.

Varianz

Die empirische **Varianz** s^2 beschreibt die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittelwert und ist damit ein Maß für die Streuung der Ausfallzeiten um den Mittelwert t_m :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - t_m)^2 \quad (2.16)$$

Bei der Berechnung der Varianz werden die Differenzen der Ausfallzeiten ermittelt und nach dem Quadrieren aufsummiert. Das Quadrieren ist erforderlich, da sich sonst die positiven und negativen Abweichungen aufheben würden.

Standardabweichung

Die empirische **Standardabweichung** s ergibt sich als Wurzel aus der Varianz:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (2.17)$$

Die Standardabweichung hat gegenüber der Varianz den Vorteil, dass sie die gleiche Dimension wie die Ausfallzeiten t_i besitzt.

Median

Der **Median** ist diejenige Ausfallzeit, unterhalb und oberhalb derer genau die Hälfte der Ausfälle liegen. Der Median lässt sich deshalb am einfachsten mit der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ ermitteln:

$$F(t_{Median}) = 0,5 \quad (2.18)$$

Wird das Ausfallverhalten mit der Dichtefunktion $f(t)$ dargestellt, so unterteilt der Median die Fläche unterhalb der Kurve $f(t)$ in zwei gleich große Flächenstücke.

Ein großer Vorteil des Median t_{Median} im Vergleich zum Mittelwert t_m besteht darin, dass er sehr unempfindlich gegenüber „Ausreißern“ ist. Eine sehr kurze oder sehr lange Ausfallzeit kann den Median nicht verschieben.

Modalwert

Als **Modalwert** wird diejenige Ausfallzeit bezeichnet, die am häufigsten auftritt. Der Modalwert t_{Modal} kann deshalb mit der Dichtefunktion $f(t)$ einfach bestimmt werden:

$$f'(t_{Modal}) = 0 \quad (2.19)$$

t_{Modal} entspricht der Ausfallzeit beim Maximum der Dichtefunktion

Übersicht über statistische Maßzahlen

Mittelwerte

Arithmetischer Mittelwert

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Median

$$F(t_{median}) = 0,5$$

Modalwert

$$f'(t_{Modal}) = 0$$

t_{Modal} entspricht der Ausfallzeit beim Maximum der Dichtefunktion

Streuungsmaßzahl

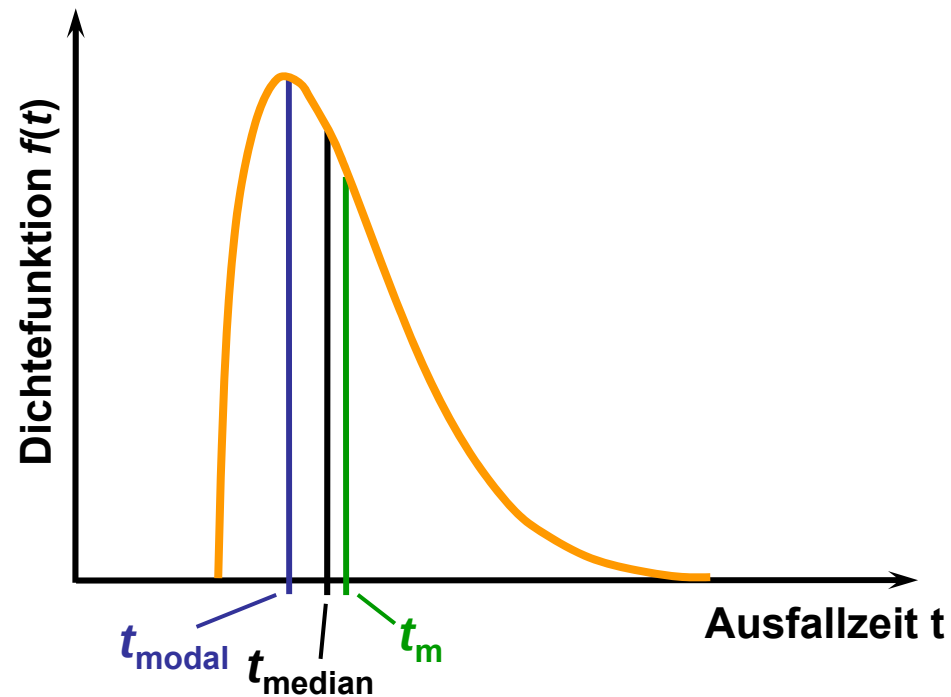
Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - t_m)^2$$

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2}$$

Mittelwert, Median und Modalwert bei einer linkssymmetrischen Verteilung



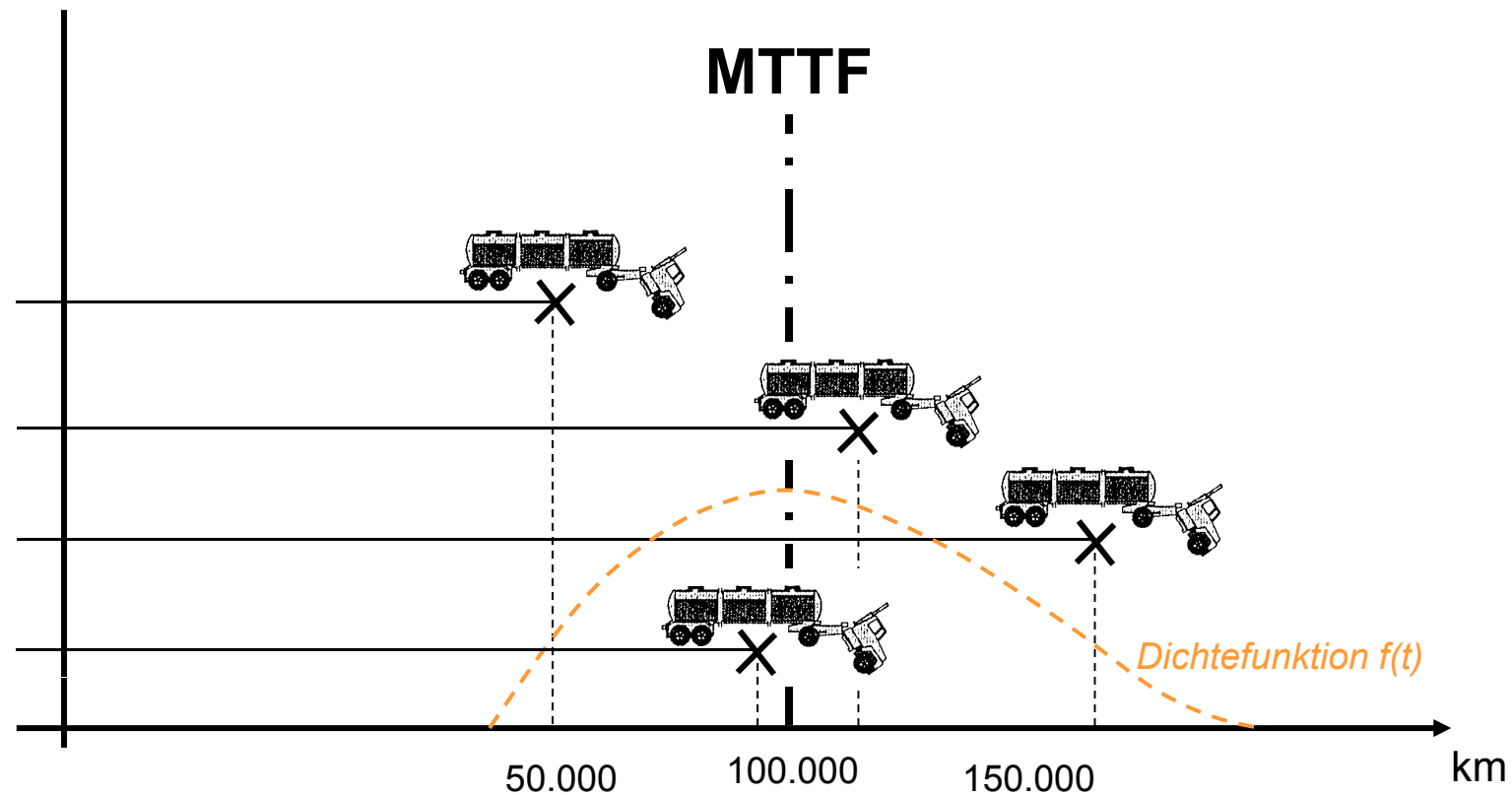
s. Abb. 2.25

Zuverlässigkeitskenngrößen

- MTTF
- MTTFE und MTBF
- Ausfallrate $\lambda(t)$
- Ausfallquote
- Hilfsmaße (% , ‰ , ppm)
- FIT
- B_q -Lebensdauer

MTTF

MTTF = Mean Time To Failure (Mittlere Lebensdauer nicht-reparierbarer Einheiten)



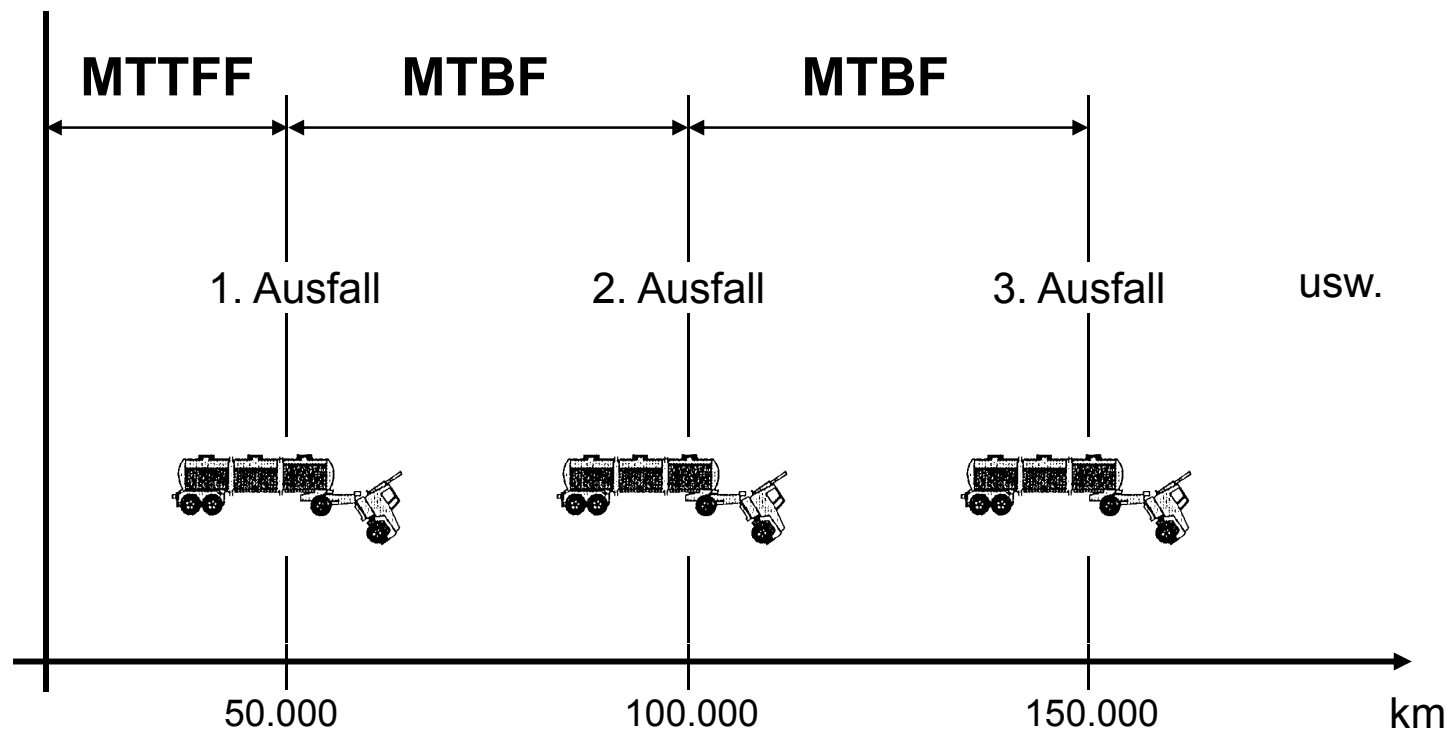
s. Abb. 2.26

Prof. Bertsche

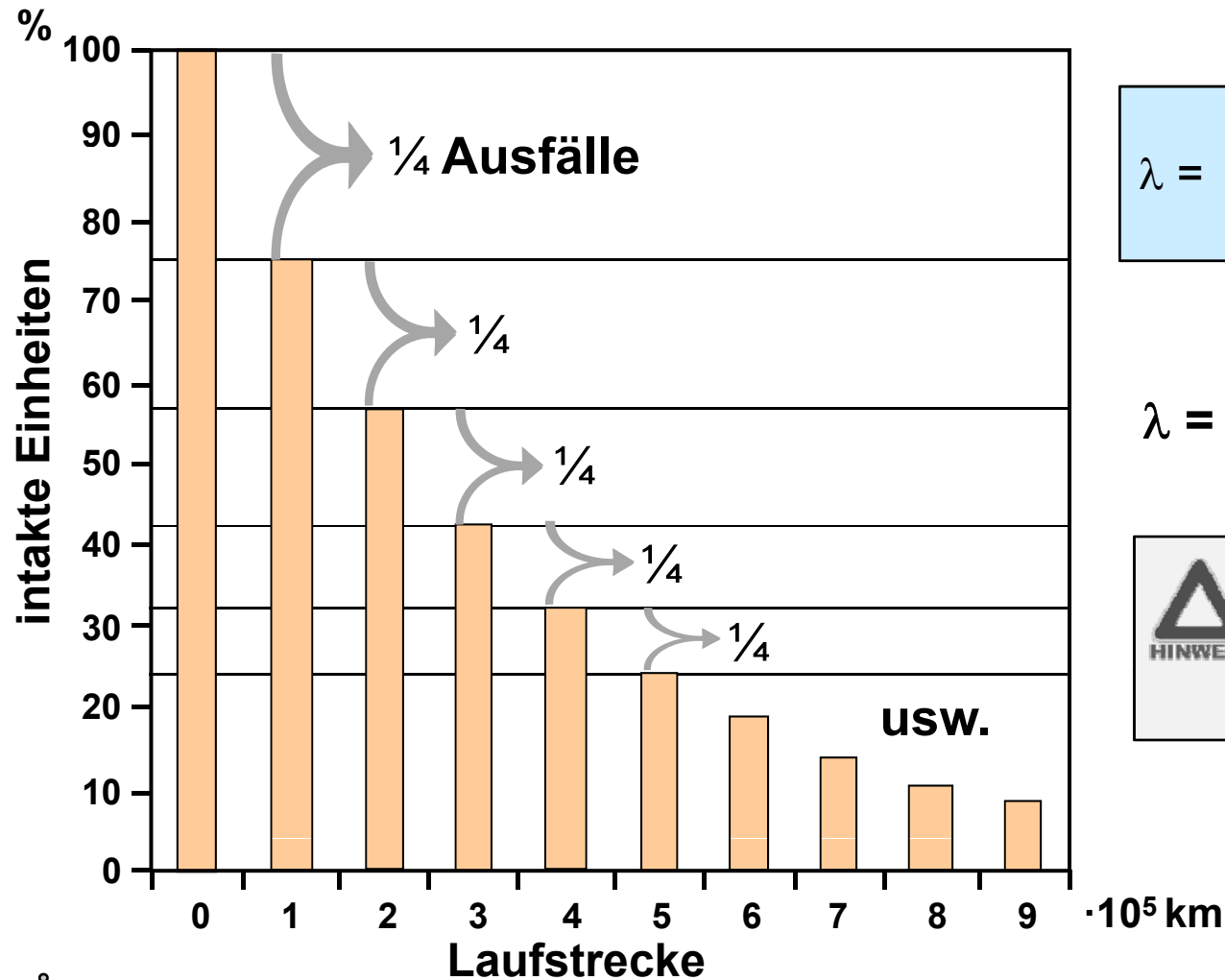
MTTFF und MTBF

MTTFF = **M**ean **T**ime **T**o **F**irst **F**ailure (Mittlere Lebensdauer bis zum ersten Ausfall)

MTBF = **M**ean **T**ime **B**etween **F**ailure (mittlerer Ausfallabstand)



Ausfallrate λ



$$\lambda = \frac{\text{Ausfälle pro Zeit-/Wegeinheit}}{\text{Summe noch intakter Einheiten}}$$

$$\lambda = 0,333/10^5 \text{ km}$$



$\lambda = \text{konstant}$
gilt nur bei Exponential-
Verteilung



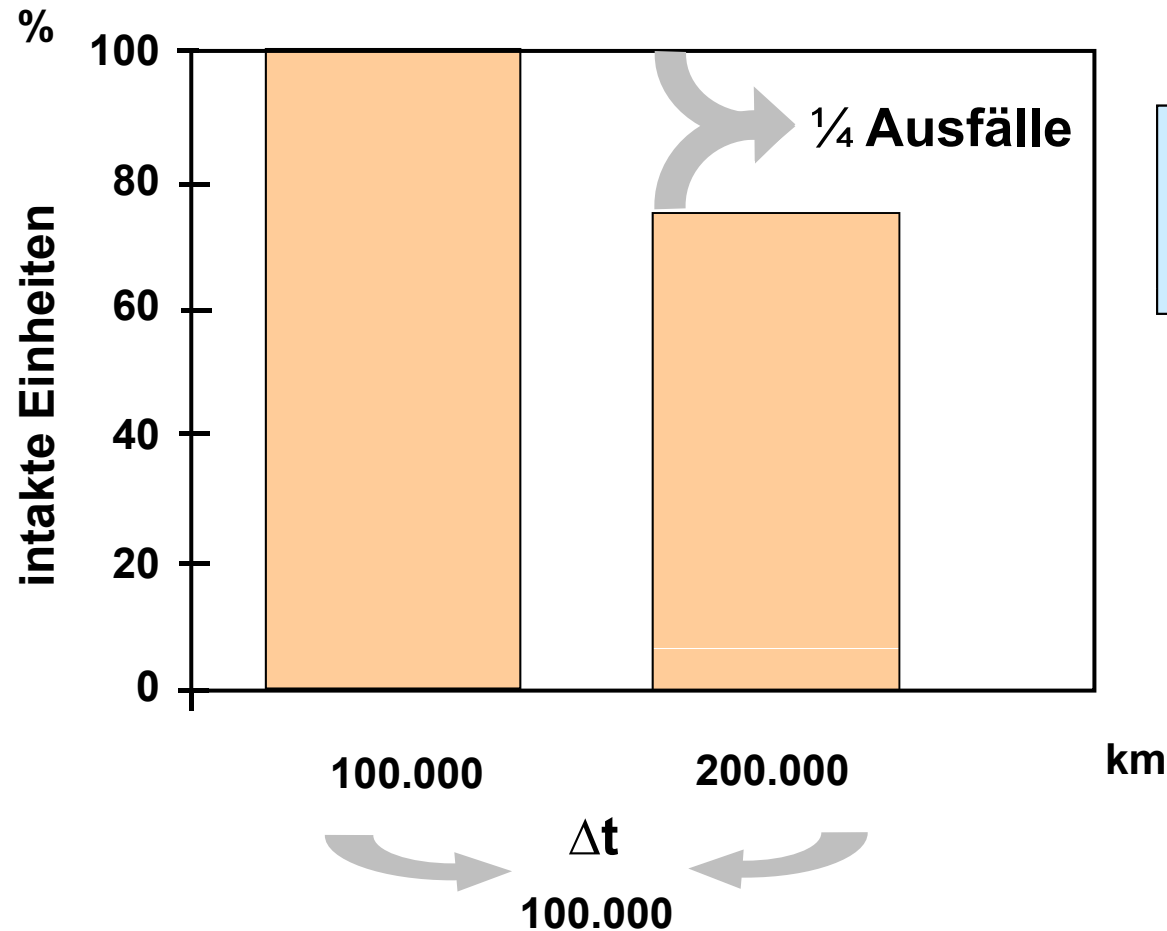
Institut für Maschinenelemente ©
UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

s. Abb. 2.27

Prof. Bertsche

Ausfallrate λ

Ausfallquote q



$$q = \frac{\text{Ausfälle im Zeitintervall}}{\text{Anfangsbestand} \cdot \text{Intervallgröße}}$$

$$q = 0,25/10^5 \text{ km}$$

Wichtige Hilfsmaßeinheit

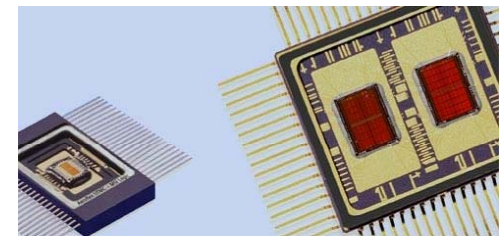
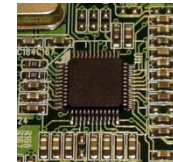
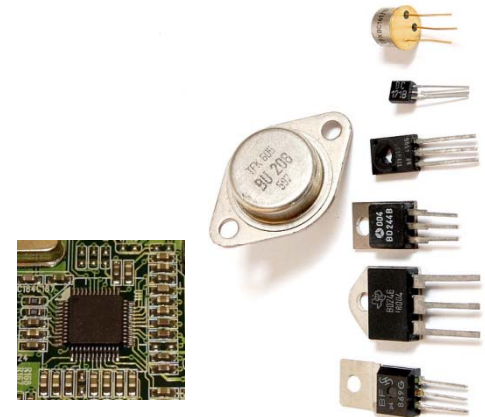
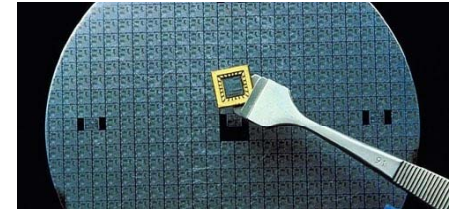
	Zeichen	Anteil von	Beispiel
Prozent	%	1 Hundert	1 von Hundert = 1%
Promille	‰	1 Tausend	1 von Tausend = 1‰
Parts per million	ppm	1 Millionen	1 von 1 Millionen = 1ppm



Eine ppm-Angabe ist nur sinnvoll mit einem Zeitpunkt bzw. einer Laufleistung

FIT

- Für elektronische Bauteile wird die Ausfallrate üblicherweise in **FIT** (**F**ailure **I**n **T**ime) angegeben
- 1 FIT entspricht 1 Fehler in 10^9 Stunden.
- 1.666 FIT bedeutet damit eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,5 % in 3.000 h.
- FIT-Werte einzelner Bauteile helfen Ausfallwahrscheinlichkeit komplexer Geräte bereits in der Konstruktions- oder Planungsphase zu berechnen.



Umrechnung von Ausfallraten

1/h	FIT	ppm/a	%/a
10^{-9}	1	8,76	0,000876
$1,142 \cdot 10^{-8}$	11,42	100	0,01

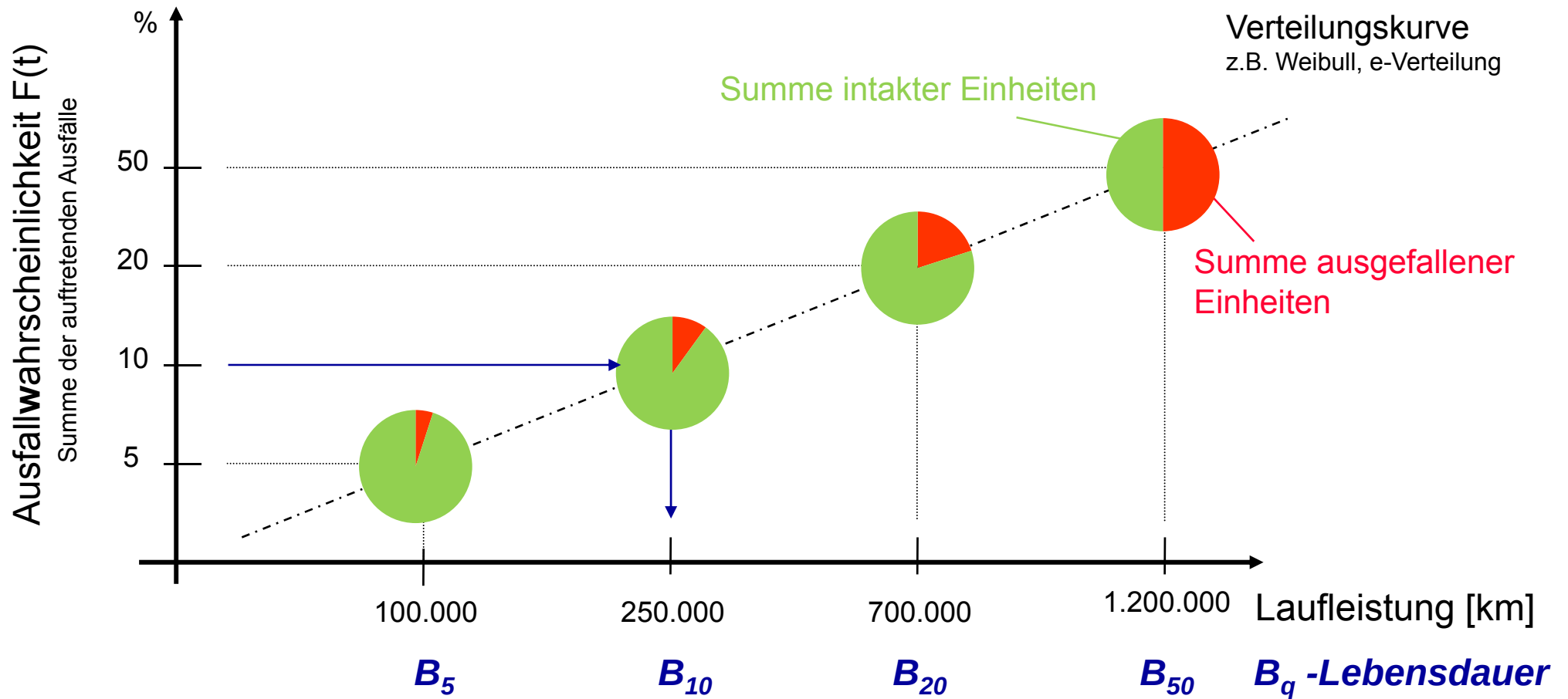
$10^9 \text{ h} \approx 114.000 \text{ a}$

	1/h	FIT	ppm/a	fpmh	d/(100*a)
1/h	---	10^9	$8,76 \cdot 10^9$	10^6	$8,76 \cdot 10^5$
FIT	10^{-9}	---	8,76	10^{-3}	$8,76 \cdot 10^{-4}$
ppm/a	$1,142 \cdot 10^{-10}$	0,1142	---	$1,142 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
fpmh	10^{-6}	10^3	$8,76 \cdot 10^3$	---	0,876
d/100*a	$1,142 \cdot 10^{-6}$	$1,142 \cdot 10^3$	10^4	1,142	---

1/h Fehler pro Stunde
FIT Failure in time
ppm/a Parts per million and year
fpmh Failures per million hours
d/100a Defects per 100 years

Beispiel: 1 ppm/a entspricht 0,1142 FIT

B_q-Lebensdauer



s. Abb. 2.28

Prof. Bertsche

Definition der Wahrscheinlichkeit

- Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit
- Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit
- Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Definition nach Laplace und Pascal:

$$\text{Wahrscheinlichkeit } P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} \quad (2.24)$$

Beispiel:

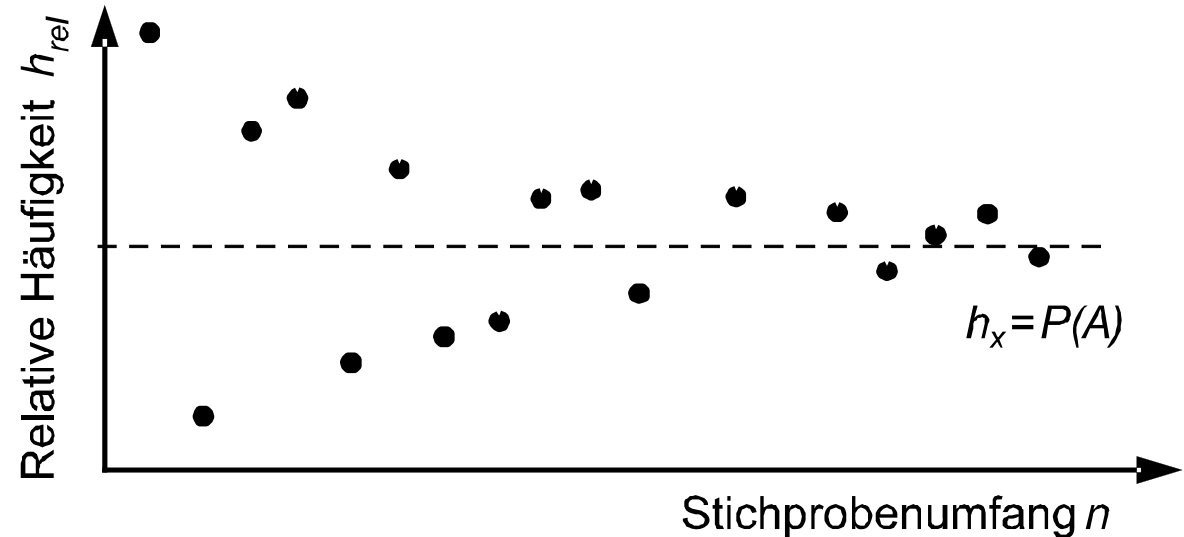
Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine 6 (Ergebnis A) zu würfeln:

$$P(\text{Wurf einer } 6) = \frac{1}{6} = 0,167$$

Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

Relative Häufigkeit für eine Stichprobe vom Umfang n mit m ausgefallenen Elementen:

$$h_{rel} = \frac{m}{n} \quad (2.25)$$



s. Abb. 2.29

Wahrscheinlichkeit für den Ausfall

→ Grenzwert der relativen Häufigkeiten:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{rel} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \quad (2.26)$$

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Axiome der Wahrscheinlichkeiten nach Kolmogoroff:

1. Jedem zufälligen Ereignis A ist eine reelle Zahl $P(A)$ mit $0 \leq P(A) \leq 1$ zugeordnet, welche man die Wahrscheinlichkeit von A nennt.
(vgl. statistische Definition der Wahrscheinlichkeit)

2. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist:

$$P(E) = 1$$

(Normierungs-Axiom)

3. Sind $A_1, A_2, A_3, \dots$ zufällige Ereignisse, die paarweise unvereinbar sind, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ so gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

(Additions-Axiom)

Gliederung

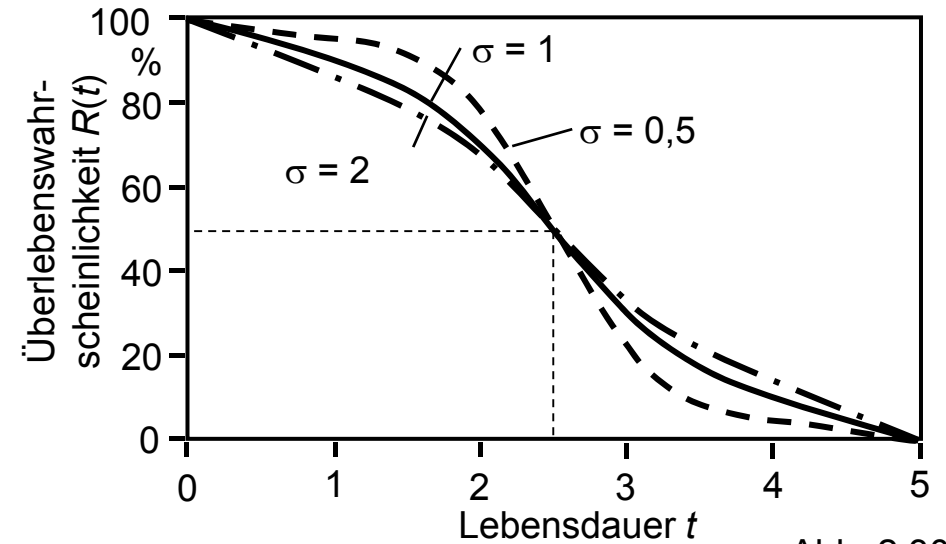
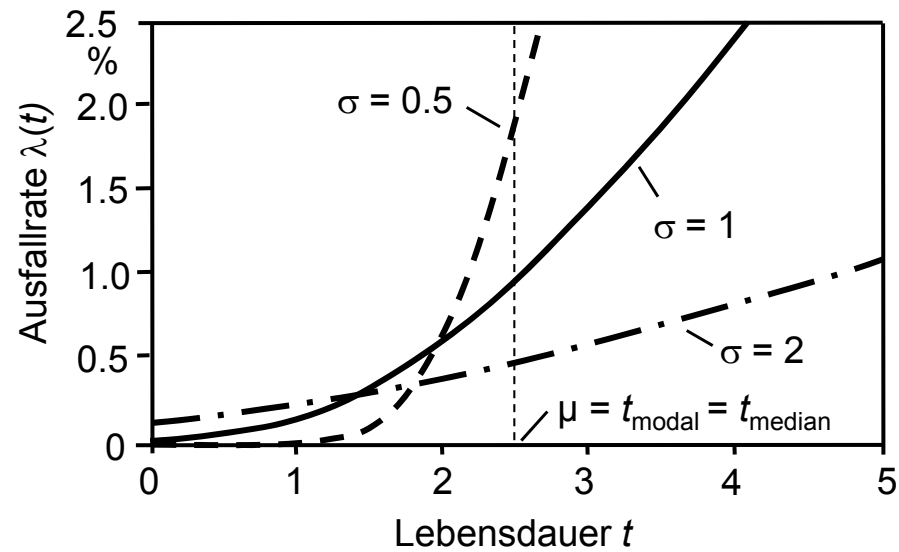
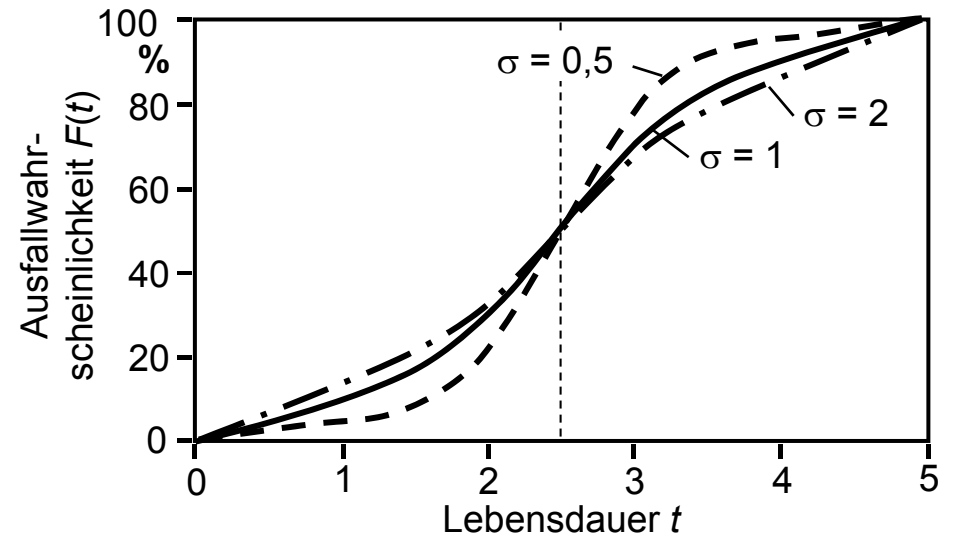
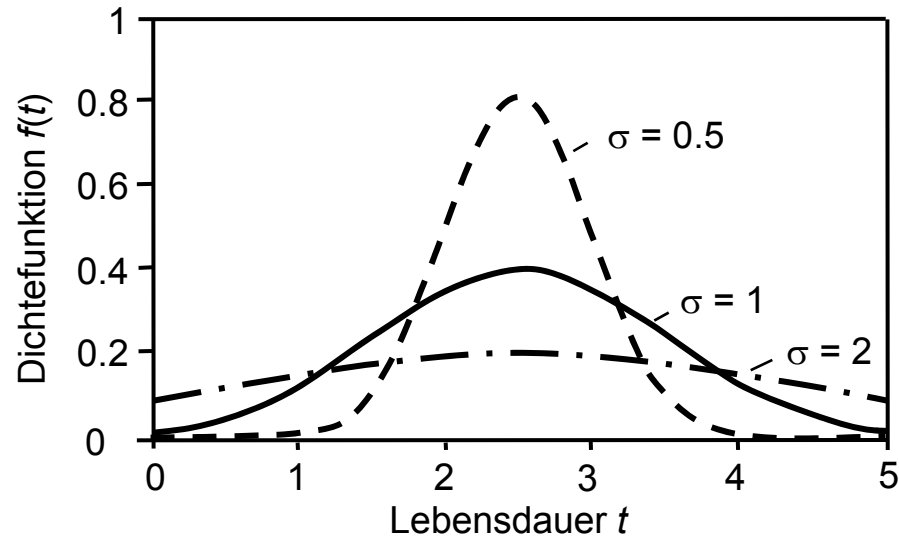
2.0 Einleitung

2.1 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

2.2 Lebensdauerverteilungen zur Zuverlässigkeitsbeschreibung

- Normal-Verteilung
- Exponential-Verteilung
- Weibull-Verteilung
- Logarithmische Normal-Verteilung
- Weitere Lebensdauerverteilungen

2.3 Berechnung der Systemzuverlässigkeit mit der Booleschen Theorie



s. Abb. 2.30

Normal-Verteilung

Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.27)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau \quad (2.28)$$

Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$R(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau \quad (2.29)$$

Ausfallrate:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.30)$$

Parameter: t : Statistische Variable (Beanspruchungszeit, Lastwechsel, Anzahl der Betätigungen, ...)

μ : Lageparameter; $\mu = t_{median} = t_{modal}$

σ : Streumaß

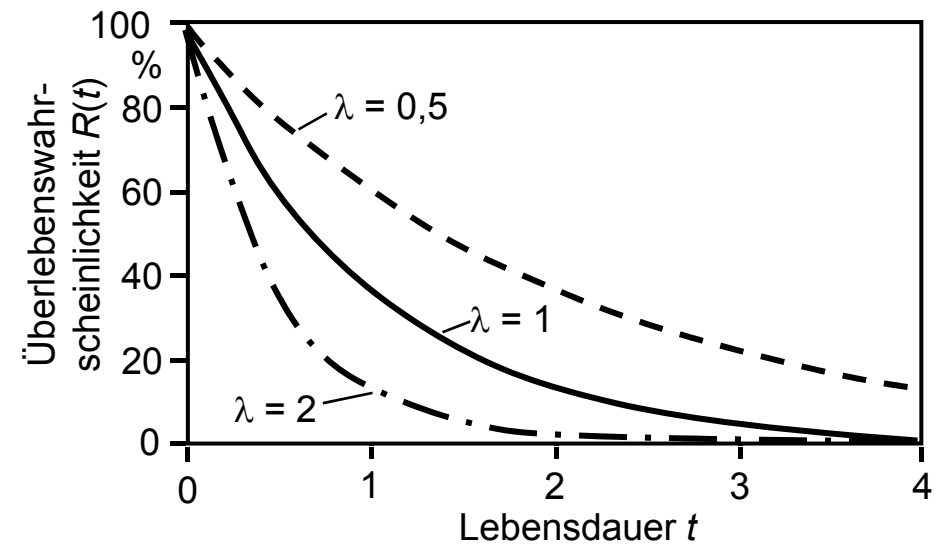
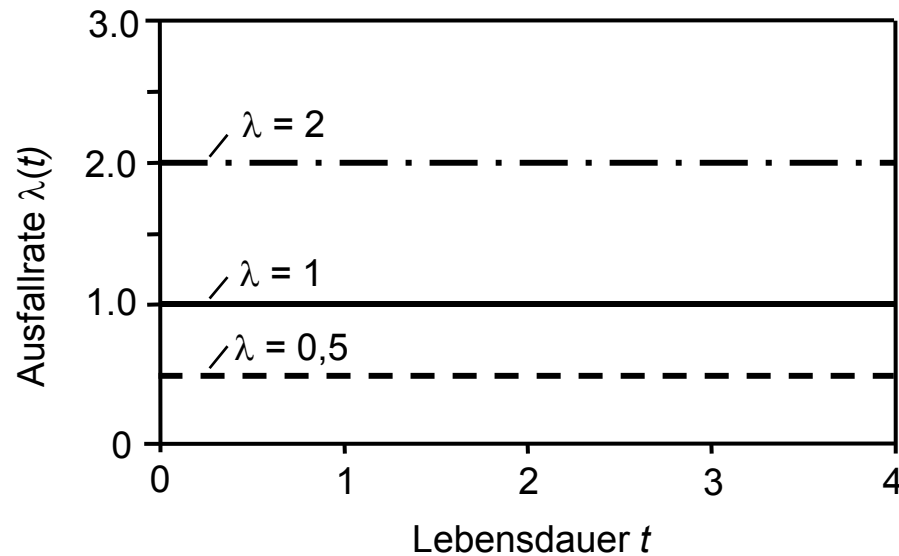
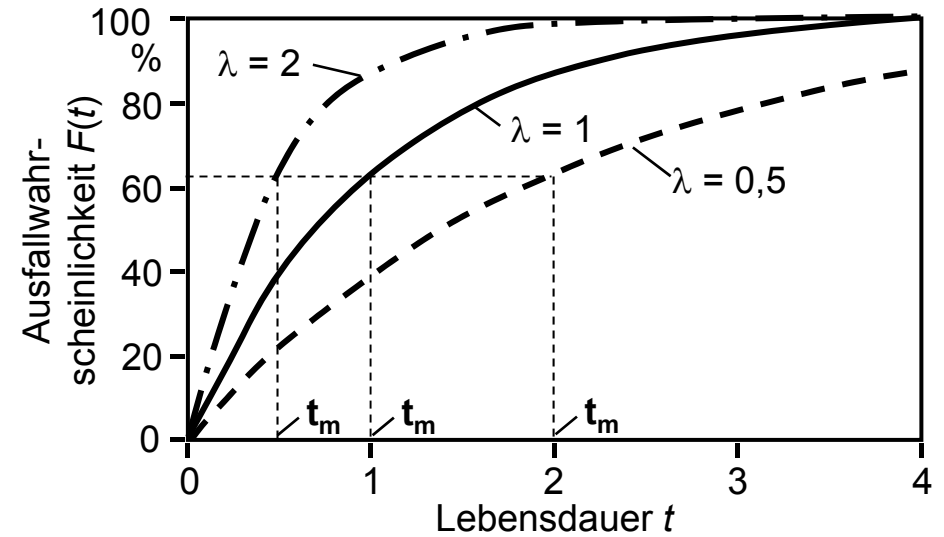
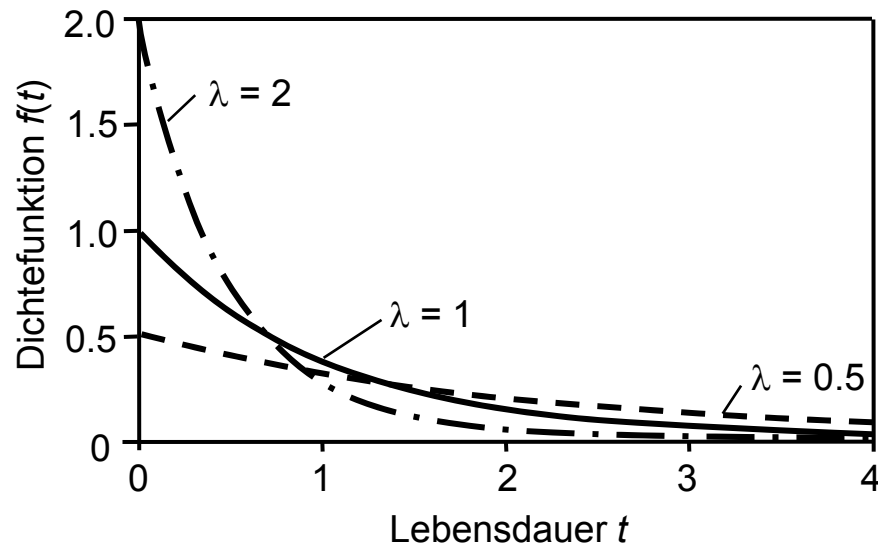


Institut für Maschinenelemente ©

UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Prof. Bertsche

Formeln der Normal- (Gauß-) Verteilung



s. Abb. 2.31

Exponential-Verteilung

Dichtefunktion:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.32)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.33)$$

Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (2.34)$$

Ausfallrate:

$$\lambda(t) = \text{konst} \quad (2.35)$$

Parameter: t : Statistische Variable (Beanspruchungszeit, Lastwechsel, Anzahl der Betätigungen, ...)

λ : Lage und Formparameter $\lambda = \frac{1}{t_m}$

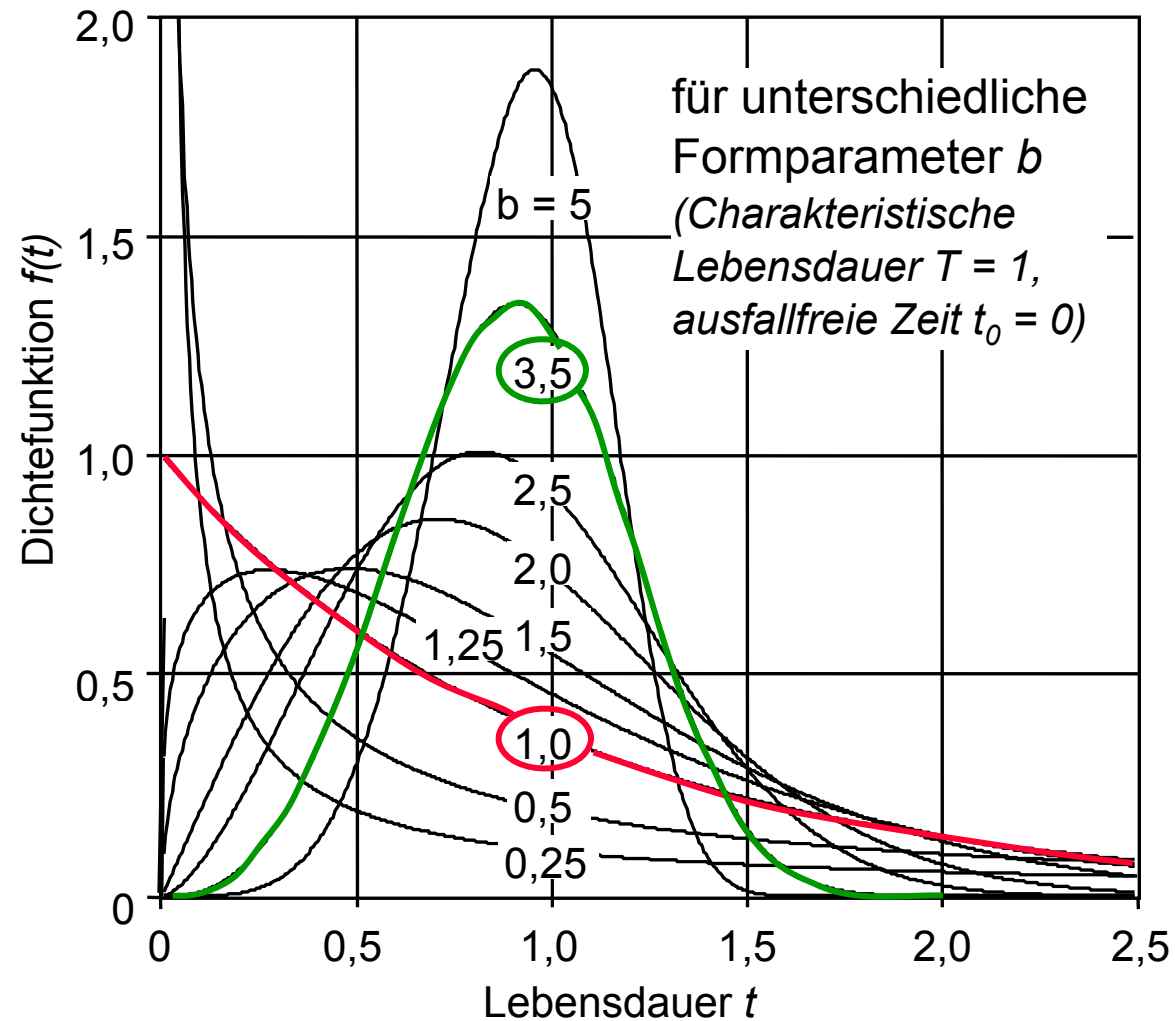


Institut für Maschinenelemente ©
UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Prof. Bertsche

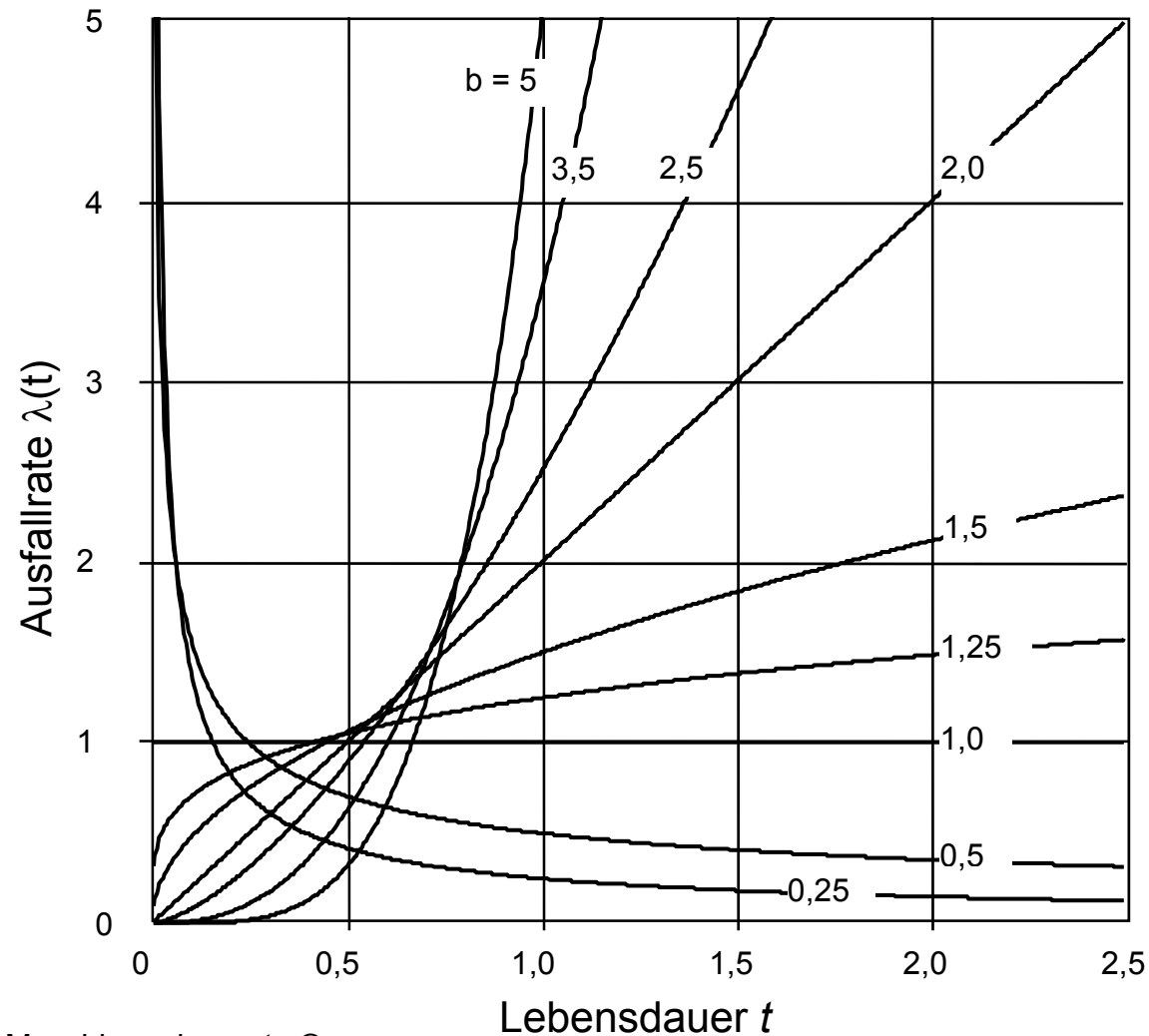
Formeln der Exponential-Verteilung

Weibull-Verteilung



s. Abb. 2.32a

Weibull-Verteilung

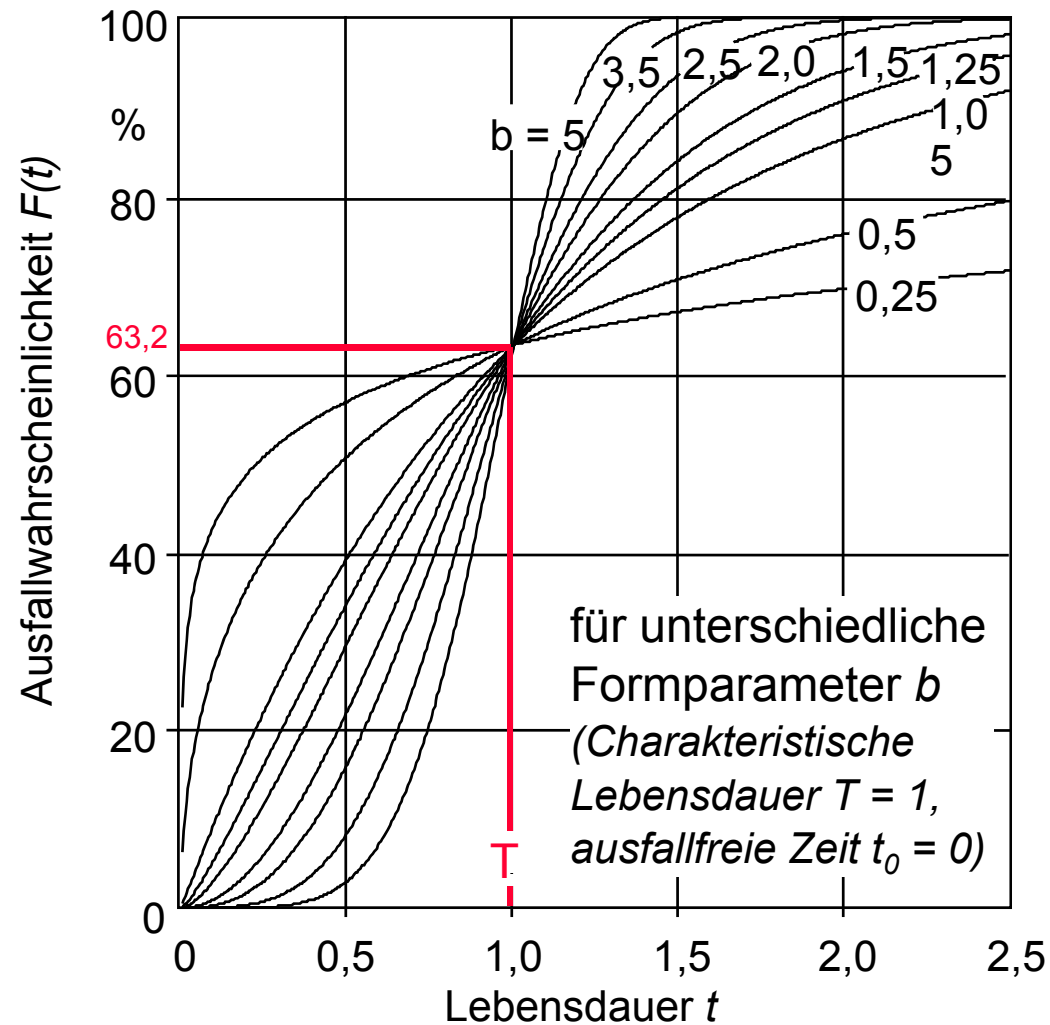


für unterschiedliche
Formparameter b
(Charakteristische
Lebensdauer $T = 1$,
ausfallfreie Zeit $t_0 = 0$)

s. Abb. 2.32d

Prof. Bertsche

Weibull-Verteilung



s. Abb. 2.32b

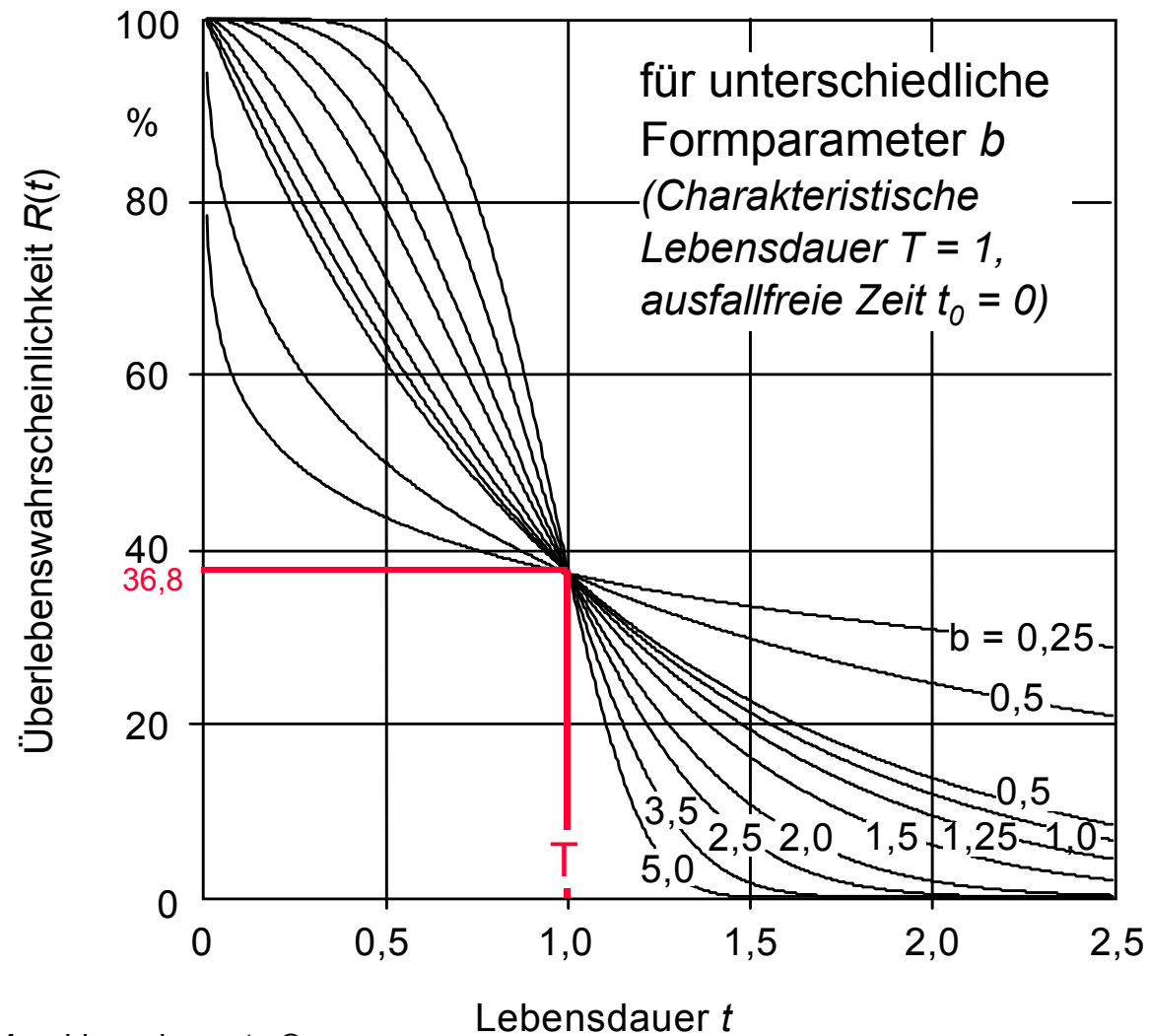
Prof. Bertsche



Institut für Maschinenelemente ©
UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Ausfallwahrscheinlichkeiten der Weibull-Verteilung

Weibull-Verteilung



s. Abb. 2.32c

Prof. Bertsche

Weibull-Verteilung

Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.36)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.37)$$

Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{b}{T} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.38)$$

Ausfallrate:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{b}{T} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \quad (2.39)$$

Parameter: t : Statistische Variable (Beanspruchungszeit, Lastwechsel, Anzahl der Betätigungen, ...)
 T : Charakteristische Lebensdauer, „Lageparameter“.
 b : Formparameter oder Ausfallsteilheit. Durch ihn wird die Kurvenform festgelegt
 t_0 : Ausfallfreie Zeit. Der Parameter t_0 legt den Zeitpunkt fest, ab dem die Ausfälle beginnen. Es handelt sich um eine Zeitverschiebung längs der t-Achse.



Für $t = T$ gilt:
 $F(T) = 63,2\%$
 $R(T) = 36,8\%$

Weibull-Verteilung

2 Parameter

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T - t_0 \\ t &\rightarrow t - t_0 \end{aligned}$$

3 Parameter

Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b} \quad (2.40)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b} \quad (2.41)$$

Dichtefunktion:

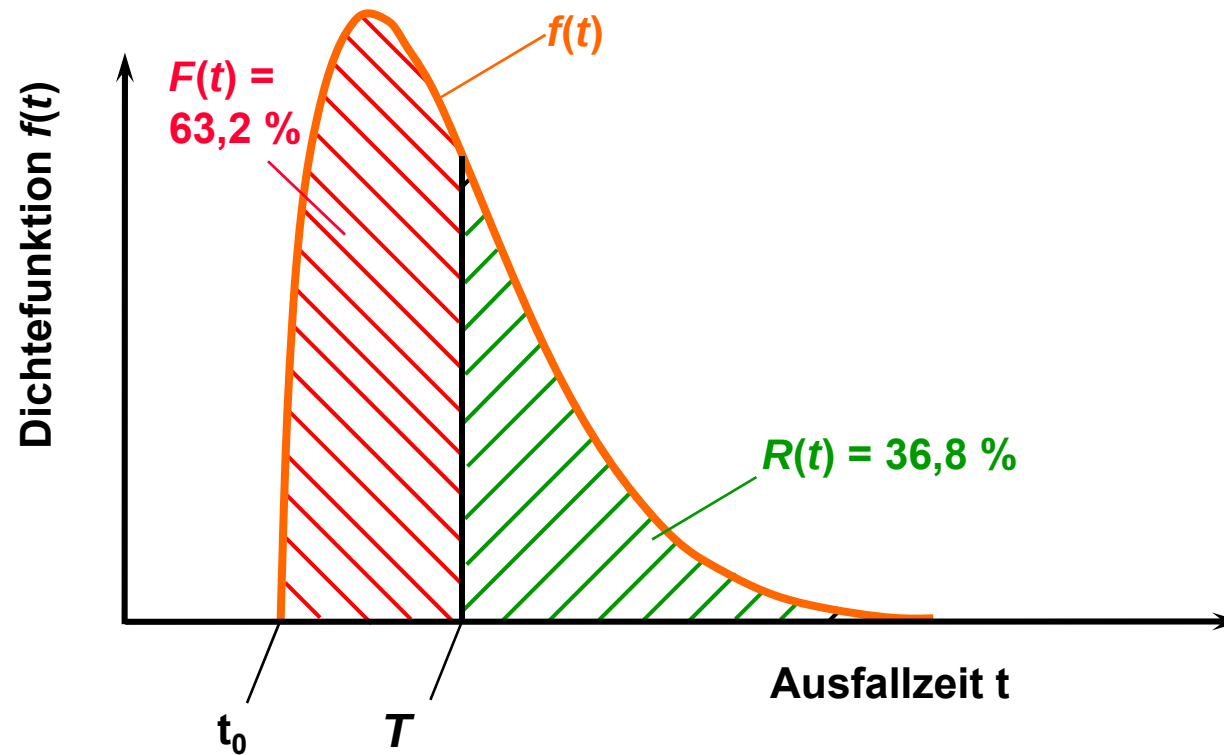
$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{b}{T-t_0} \left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b} \quad (2.42)$$

Ausfallrate:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{b}{T-t_0} \cdot \left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^{b-1} \quad (2.43)$$

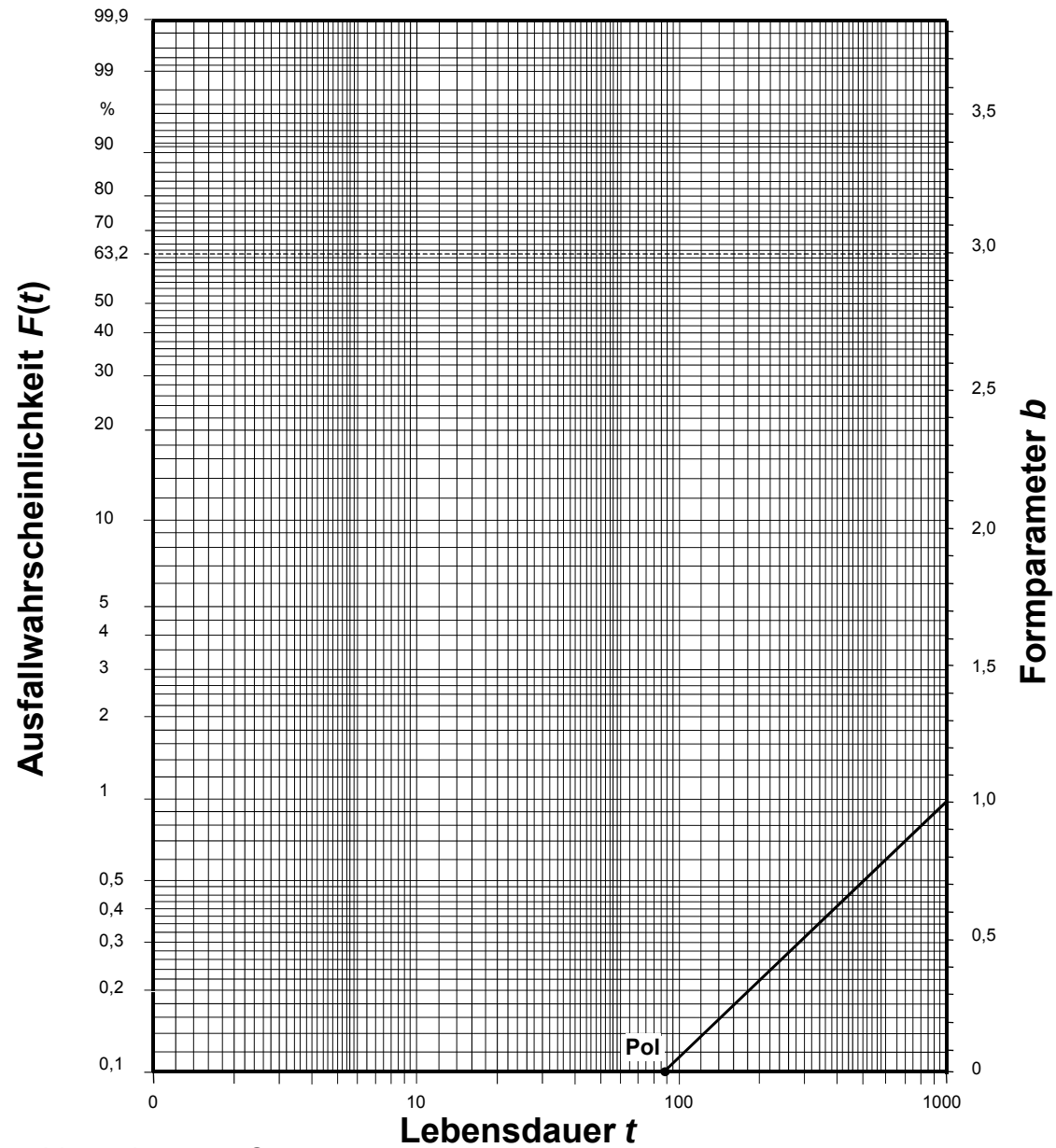
*Formeln gültig für $t \geq t_0$

Weibull-Verteilung



s. Abb. 2.33

Prof. Bertsche



s. Abb. 2.36

Prof. Bertsche

Weibull-Verteilung

$$x = \ln t \quad (2.47)$$

$$y = \ln(-\ln(1 - F(t))) \quad \text{bzw.} \quad y = \ln(-\ln(R(t))) \quad (2.48)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.49)$$

$$1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{1 - F(t)} = e^{+\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad (2.51)$$

Durch zweimaliges Logarithmieren erhält man:

$$\ln\left(\ln \frac{1}{1 - F(t)}\right) = b \cdot \ln\left(\frac{t}{T}\right) \quad (2.52)$$

Weibull-Verteilung

$$\ln\left(\ln\frac{1}{1-F(t)}\right) = b \cdot \ln\left(\frac{t}{T}\right) \quad (2.52)$$

$$\ln(-\ln(1-F(t))) = b \cdot \ln t - b \cdot \ln T \quad (2.53)$$

Die Gleichung 2.53 entspricht einer Geradengleichung in der Form:

$$y = a \cdot x + c \quad (2.54)$$

mit den Werten:

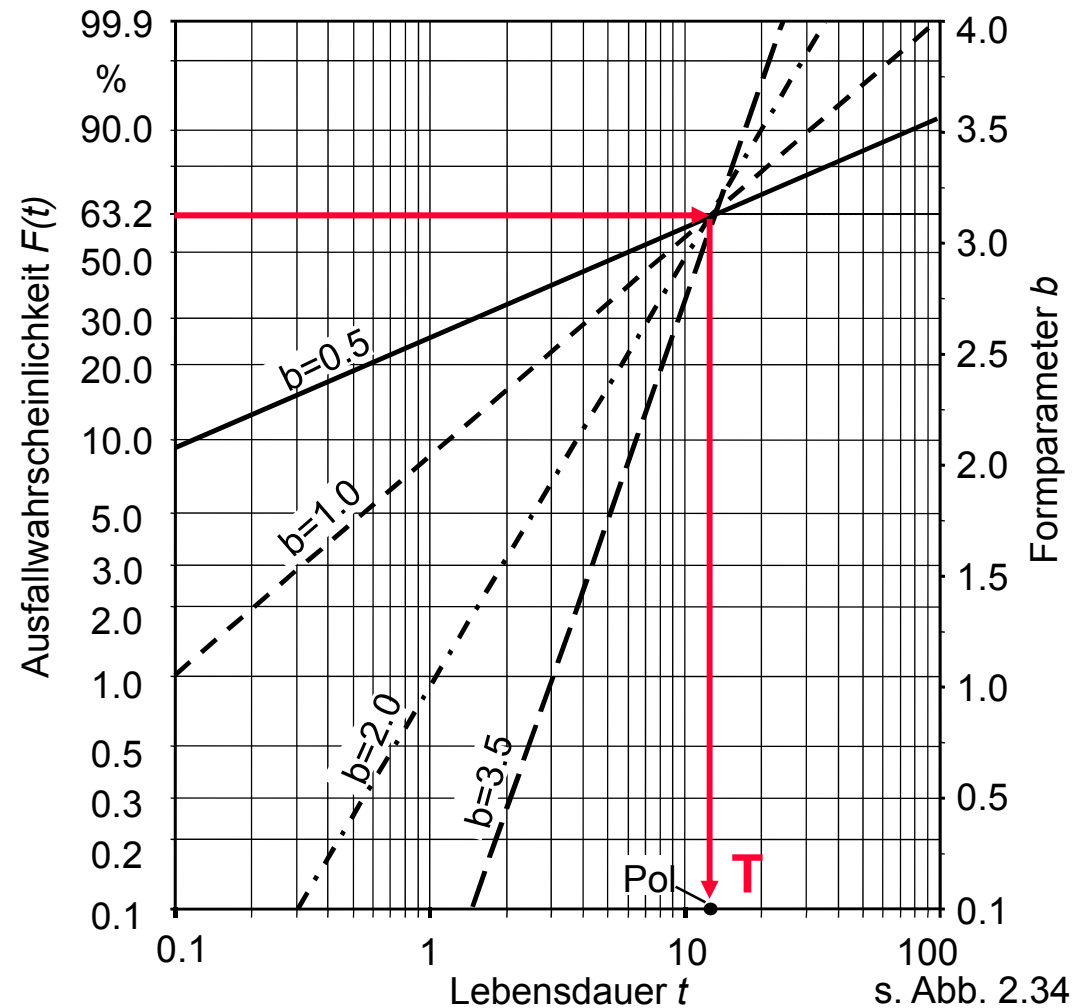
$$a = b \quad \text{Steigung} \quad (2.55)$$

$$c = -b \cdot \ln T \quad \text{Achsenabschnitt} \quad (2.56)$$

$$x = \ln t \quad \text{Abszissen-Skalierung} \quad (2.57)$$

$$y = \ln(-\ln(1-F(t))) \quad \text{Ordinaten-Skalierung} \quad (2.58)$$

Weibull-Verteilung



Weibull-
Wahrscheinlichkeitspapier
mit verschiedenen
Ausfallwahrscheinlichkeiten $F(t)$

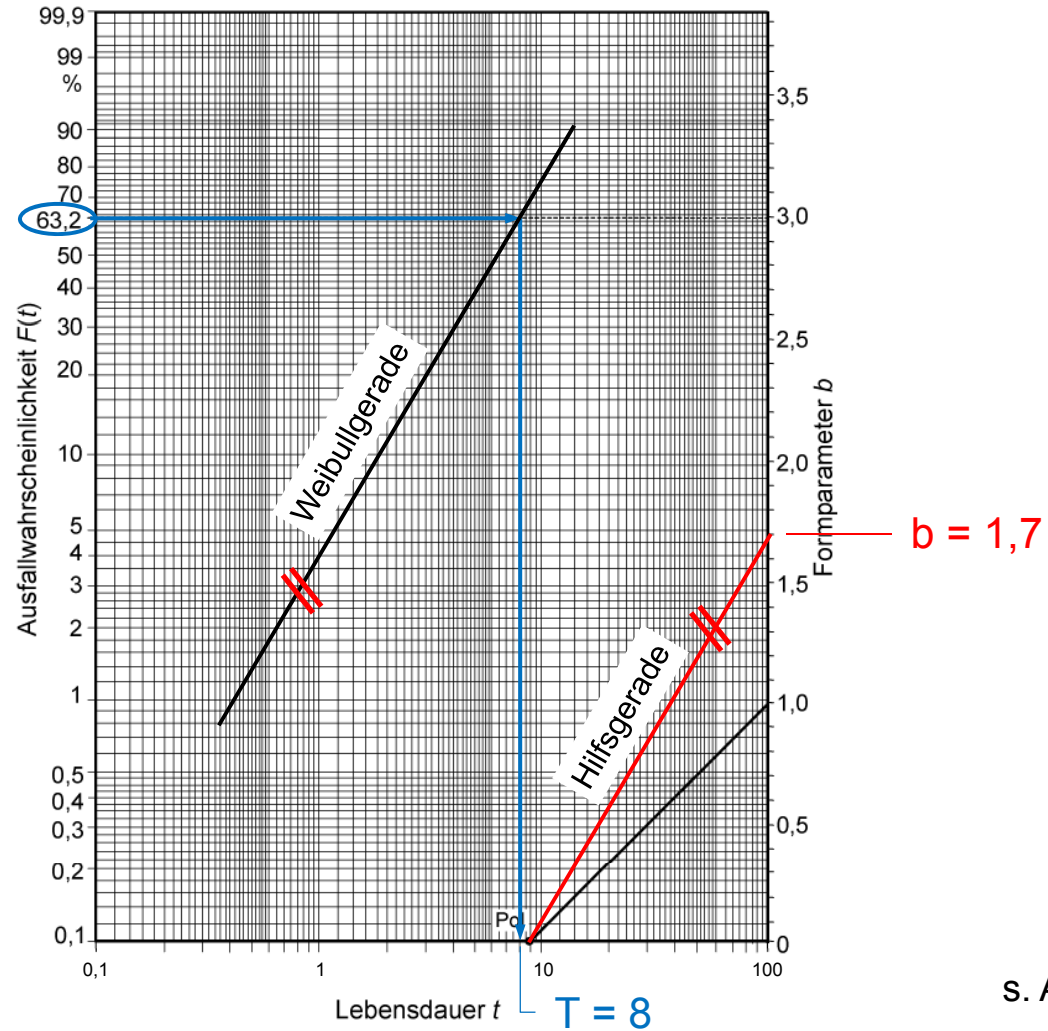
Weibull-Verteilung

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

1,7

8

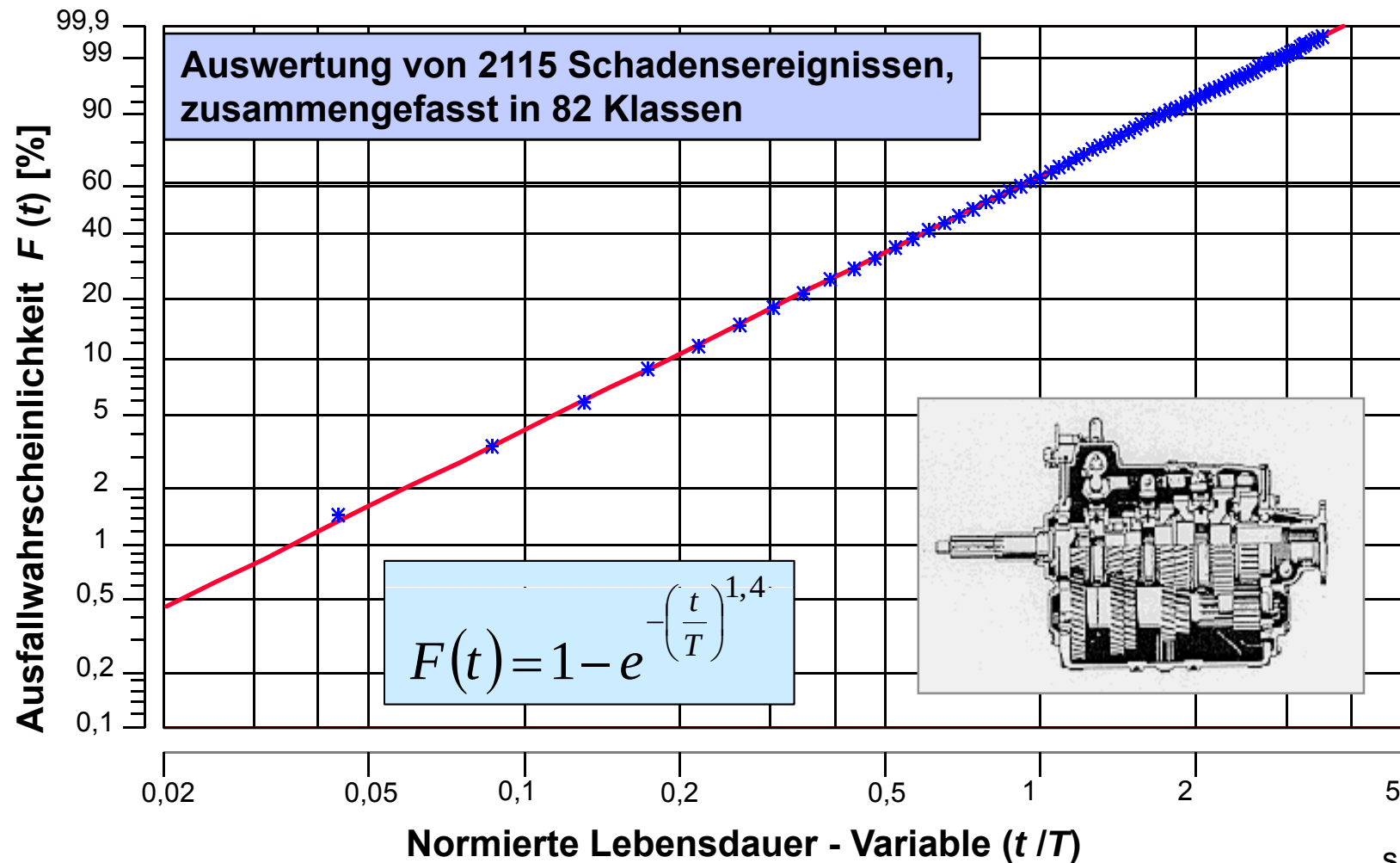
$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$



s. Abb. 2.37

Prof. Bertsche

Beispiel für Weibull-Verteilung



s. Abb. 2.35

Prof. Bertsche

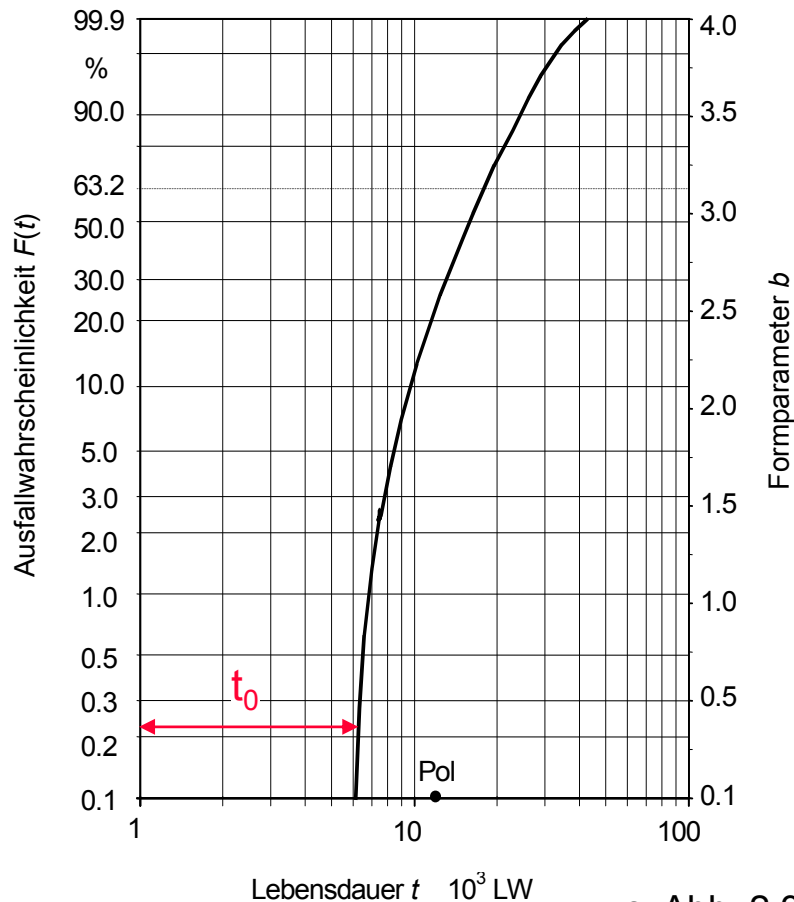


UNI STUTTGART Institut für Maschinenelemente ©
Zuverlässigkeitstechnik

Ausfallwahrscheinlichkeit eines 6-Gang-NKW Getriebes

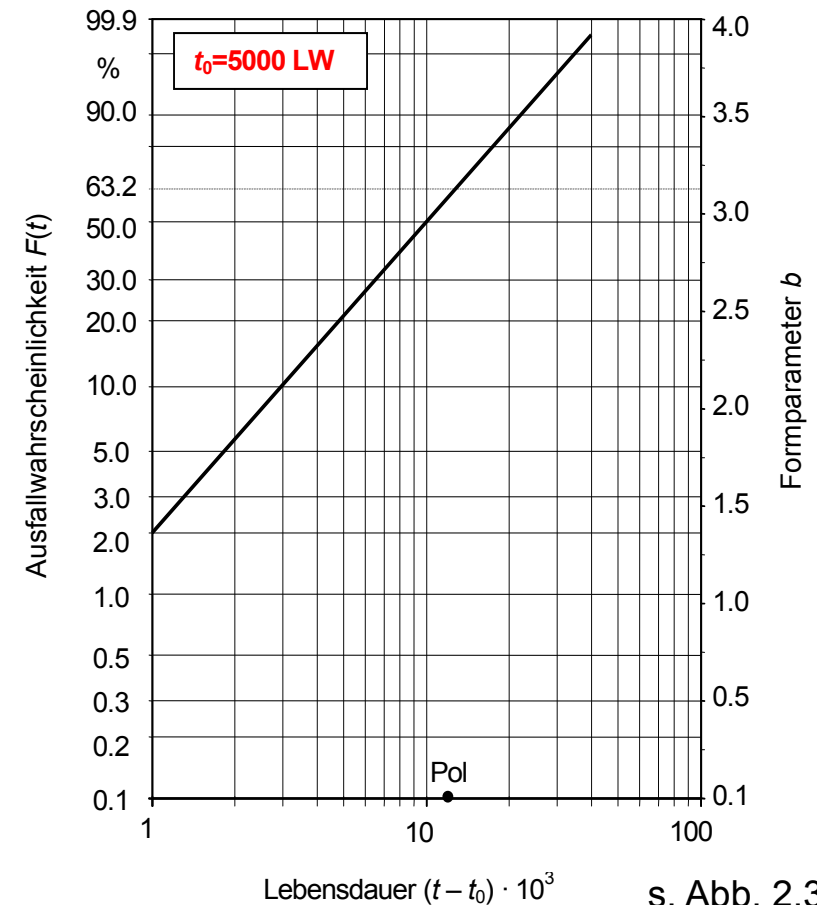
Weibull-Verteilung

Original-Werte der dreiparametrischen Weibullverteilung

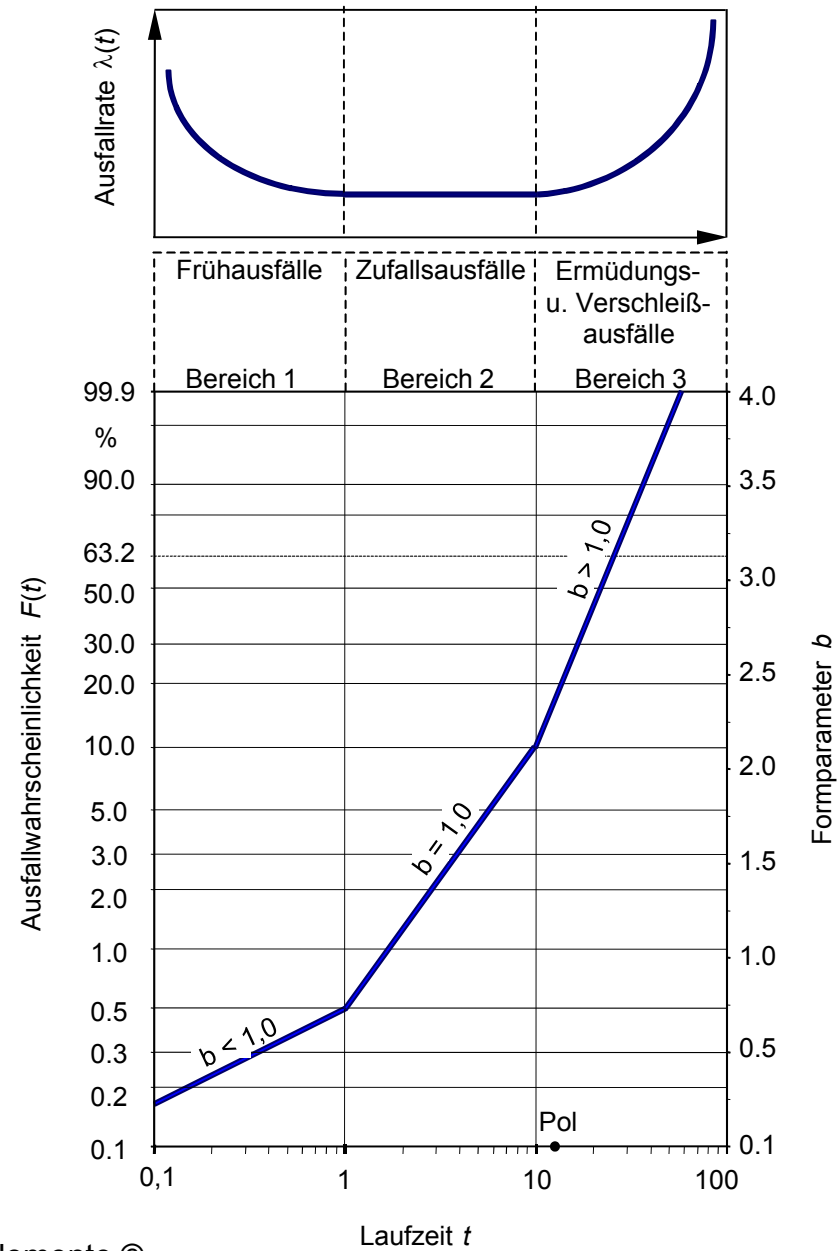


s. Abb. 2.38

Dreiparametrische Weibull-Verteilung mit um t_0 korrigierten Ausfallzeiten $(t - t_0)$



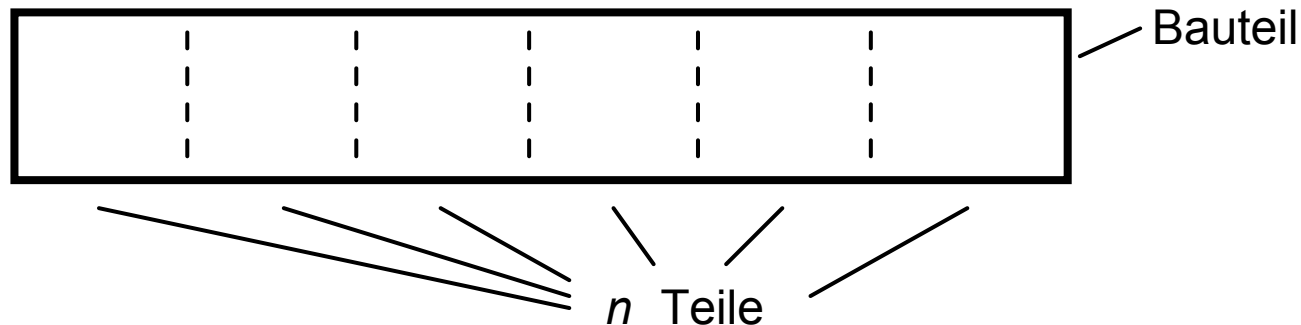
s. Abb. 2.39



s. Abb. 2.40

Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung

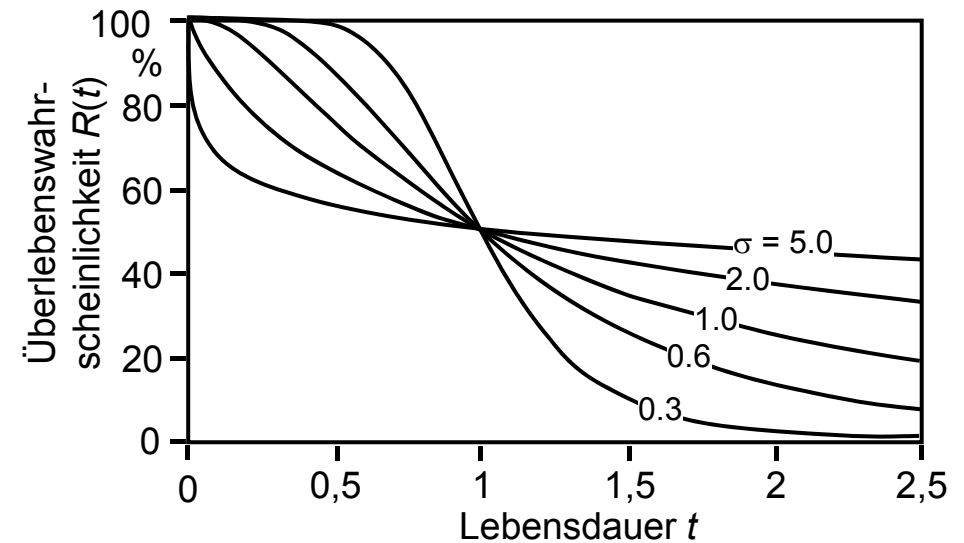
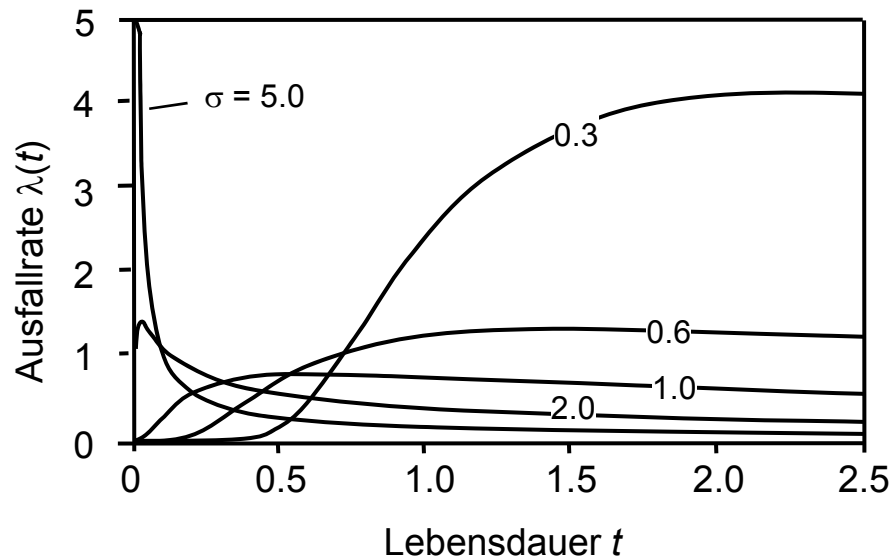
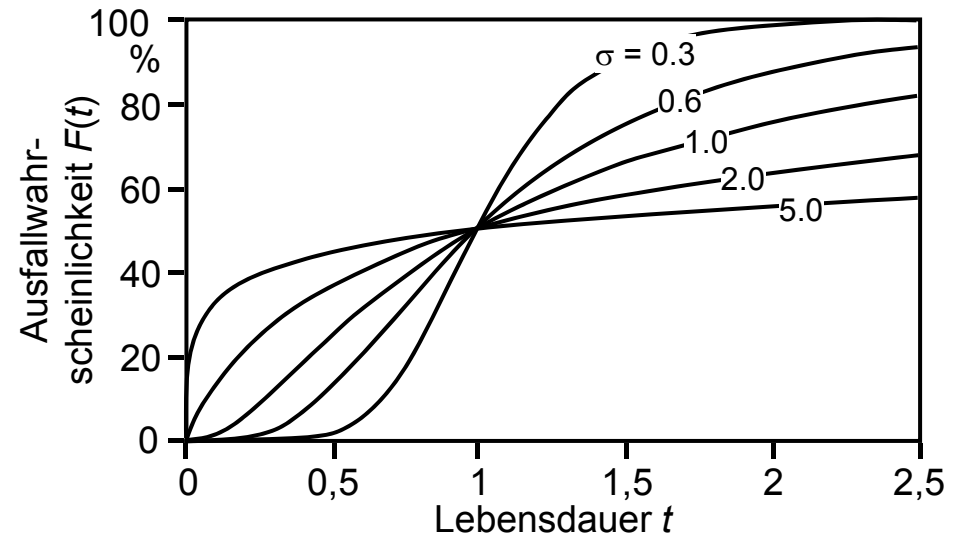
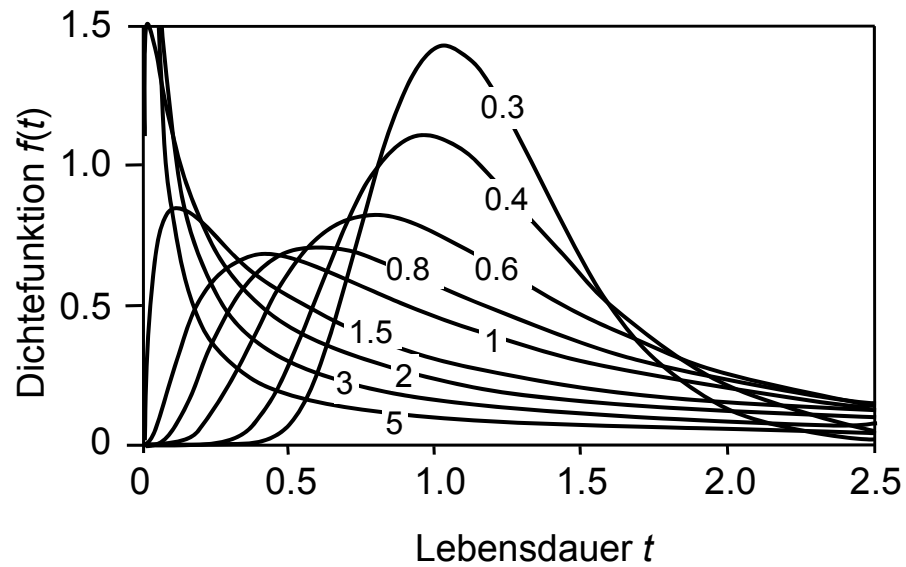
Die Weibullverteilung entspricht einer asymptotischen Extremwert-Verteilung der kleinsten (ersten) Ranggröße einer Stichprobe vom Umfang n , falls n sehr groß wird ($n \rightarrow \infty$)



Gedanklich kann jedes Bauteil in n Teile zerlegt werden

$$\rightarrow t_{\text{Bauteil}} = \min(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Lebensdauer des Bauteils ist weibullverteilt für ($n \rightarrow \infty$)



Lognormalverteilung

Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{1}{t \cdot \sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.63)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau \cdot \sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln \tau - \mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau \quad (2.64)$$

Überlebenswahrscheinlichkeit:

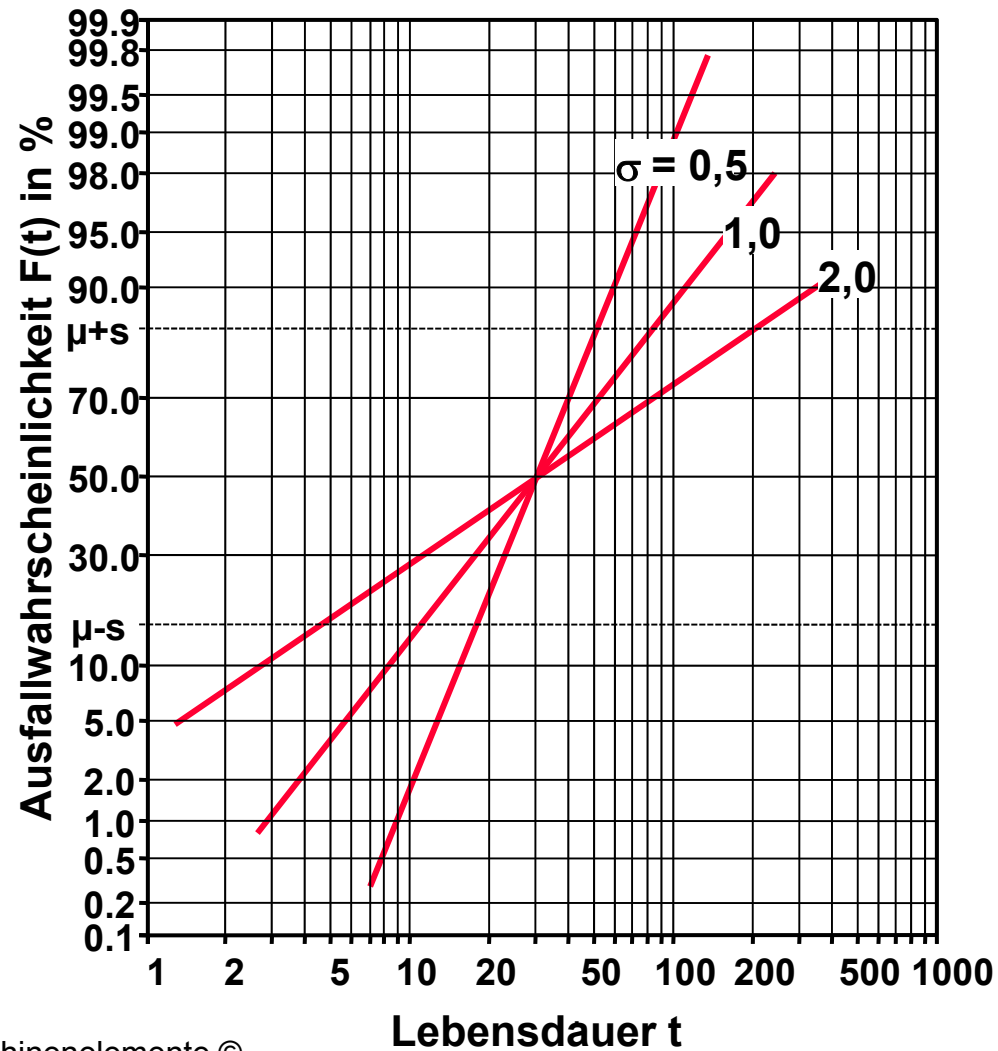
$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.65)$$

Ausfallrate:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.66)$$

Parameter: t : Statistische Variable (Beanspruchungszeit, Lastwechsel, Anzahl der Betätigungen, ...)
 μ : Lageparameter. Der genaue Medianwert der Lognormal-Verteilung beträgt $t_{median, LV} = e^\mu$
 σ : „Formparameter“, Streumaß

Lognormalverteilung



s. Abb. 2.42

Prof. Bertsche

Weitere Lebensdauerverteilungen

- Gamma-Verteilung
- Erlang-Verteilung
- Hjorth-Verteilung
- Sinus-Verteilung
- Logit-Verteilung
- Verschobene Pareto-Verteilung
- S_B -Johnson-Verteilung

Gliederung

2.0 Einleitung

2.1 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

2.2 Lebensdauerverteilungen zur Zuverlässigkeitsbeschreibung

2.3 Berechnung der Systemzuverlässigkeit mit der Booleschen Theorie

Einteilung der Zuverlässigkeitsmethoden

Qualitative Methoden

- ermitteln durch planmäßige und systematische Vorgehensweisen die möglichen Fehler/Ausfälle und ihre Auswirkungen
- bewerten durch Schätzung oder Einstufung (nicht durch Berechnung)
- **Ziel:** (qualitative) Rangfolge der Schwachstellen

Methoden:

- FMEA (FMECA)
- Fehlerbaumanalyse
- Ereignisablaufanalyse
- Checklisten/Design-Review

Quantitative Methoden

- verwenden Begriffe und Verfahren aus der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
- liefern über Berechnungsverfahren (quantitativen) Wahrscheinlichkeitswert für die Zuverlässigkeit

Methoden:

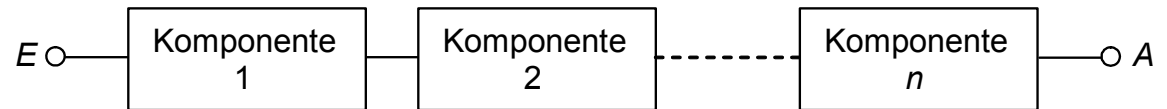
- Fehlerbaumanalyse
- Systemtheorie nach Boole
- Markoff-Theorie
- Monte-Carlo-Verfahren

Voraussetzungen

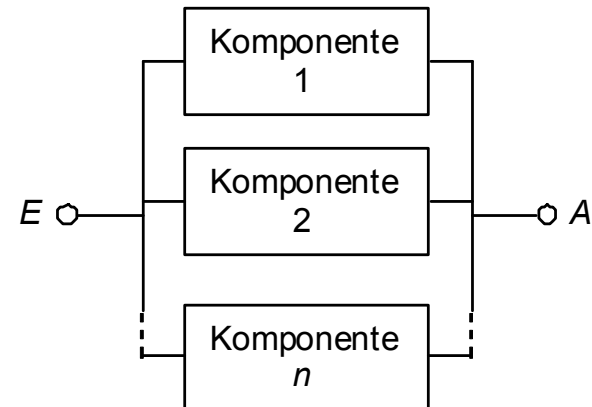
- System ist „nicht-reparierbar“,
d.h. erster Systemausfall beendet Systemlebensdauer.
- Bauelemente können nur die beiden Zustände „funktionsfähig“ oder „ausgefallen“ annehmen.
- Bauelemente sind „unabhängig“,
d.h. Ausfallverhalten eines Bauelements wird durch andere nicht beeinflusst.

Grundstrukturen von Zuverlässigkeitsbildern

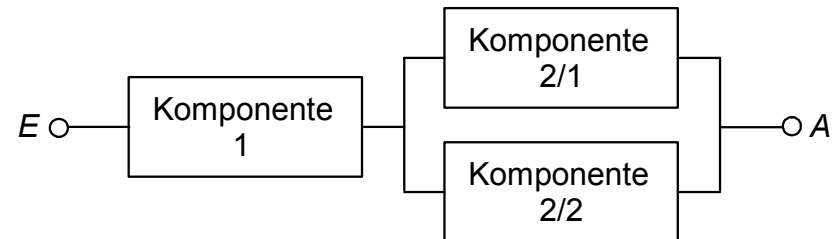
Serienstruktur



Parallelstruktur



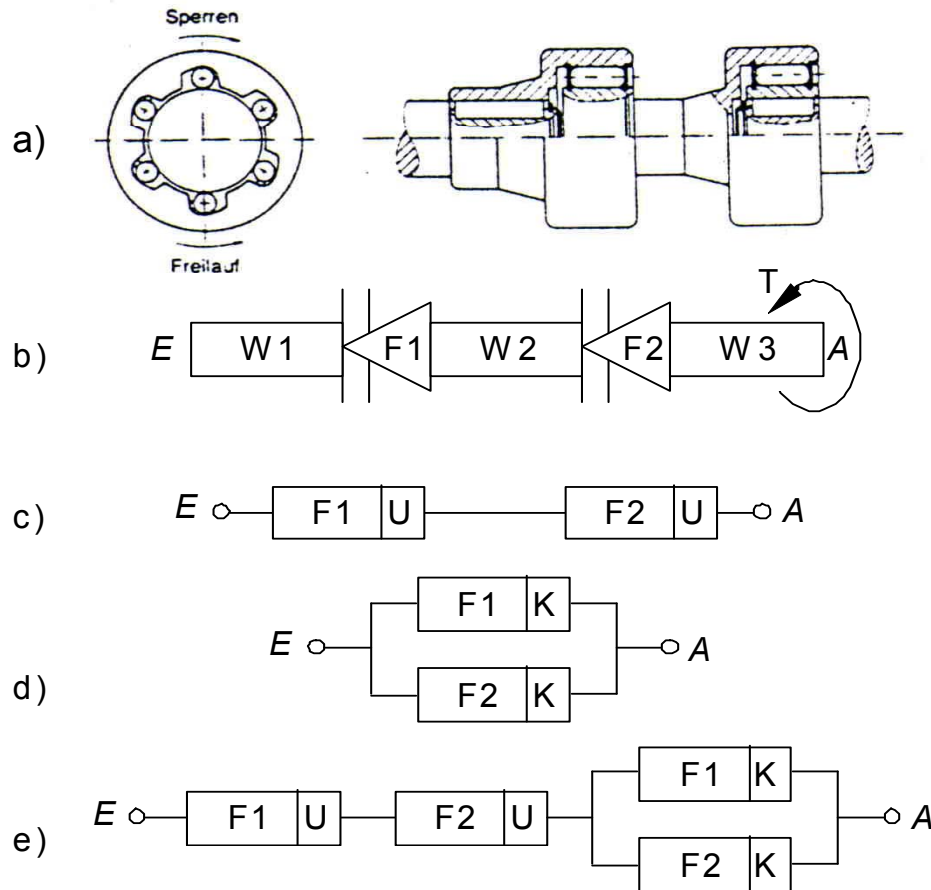
Kombination aus Serien- und Parallelstruktur



s. Abb. 2.50

Prof. Bertsche

Erstellen eines Zuverlässigkeitsbildes



a) Konstruktions-Zeichnung des Beispiel-Systems "Freilauf"

b) Prinzipskizze des Freilauf-Systems

c) Serienstruktur für Ausfallursache Unterbrechung (U)

d) Parallelstruktur für Ausfallursache Klemmen (K)

e) Zuverlässigkeits-Schaltbild für System "Freilauf"

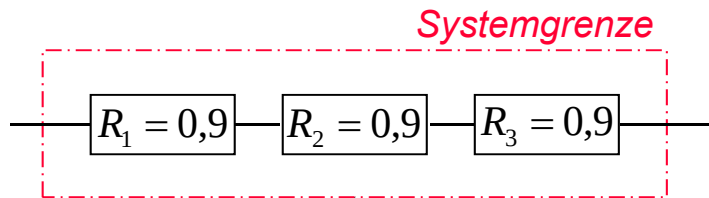
Formeln

Serienstruktur

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)$$

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (2.107)$$

Beispiel:



$$\Rightarrow R_S = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,729$$

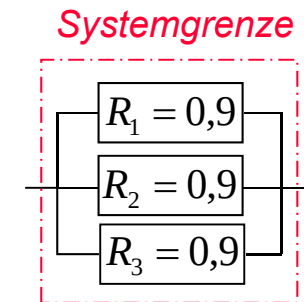
Parallelstruktur

$$F_S(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \dots \cdot F_n(t)$$

$$R_S(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \cdot \dots \cdot (1 - R_n(t))$$

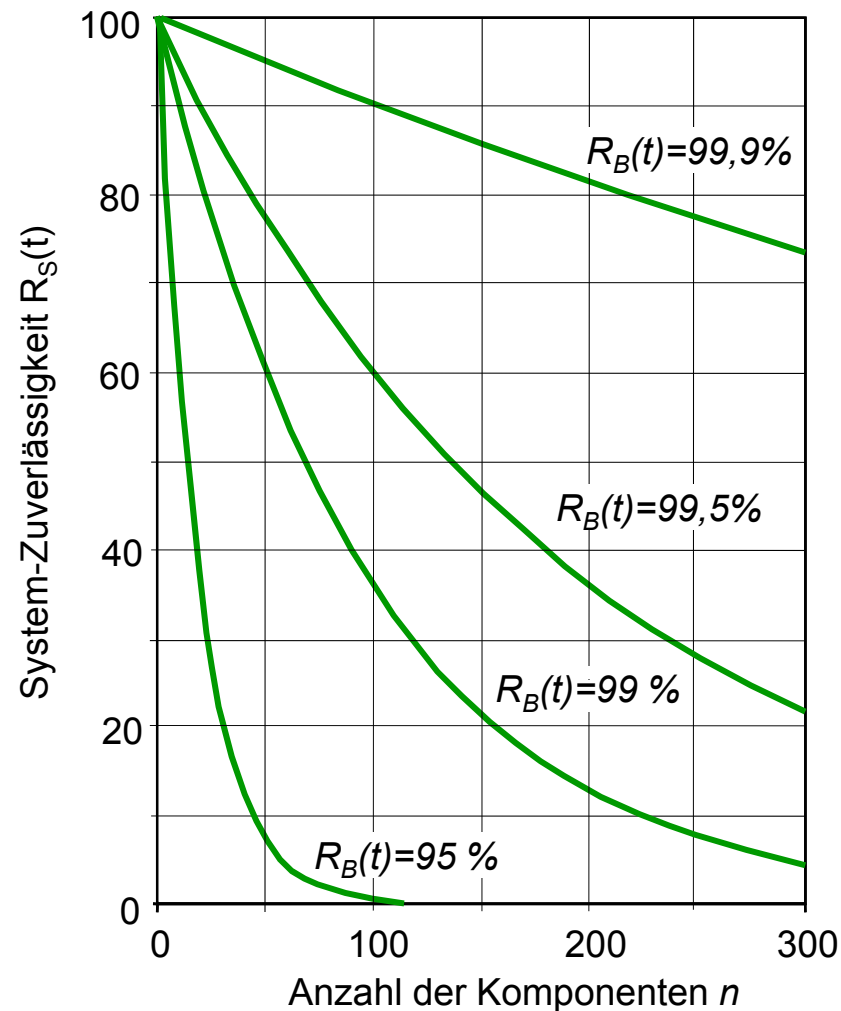
$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \quad (2.111)$$

Beispiel:



$$\Rightarrow R_S = 1 - (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,9) = 0,999$$

Zusammenhang: Anzahl an Bauteilen - Zuverlässigkeit



Abnahme der System-Zuverlässigkeit mit zunehmender Anzahl der Bauteilzuverlässigkeit $R_B(t)$ und Anordnung in Serienstruktur

s. Abb. 2.52

Prof. Bertsche

Systemzuverlässigkeit bei Serienstruktur

$$\begin{aligned} R_S(t) &= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t) \\ &= (1 - F_1(t)) \cdot (1 - F_2(t)) \cdot \dots \cdot (1 - F_n(t)) \\ &= 1 - F_1(t) - F_2(t) - \dots + F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \dots \end{aligned}$$



Bei kleineren Werten $F_i(t)$ gilt näherungsweise für die Systemausfallwahrscheinlichkeit:

$$1 - F_S(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^n F_i(t)$$

$$F_S(t) \approx \sum_{i=1}^n F_i(t)$$

Boolesche Systemtheorie

Bauteil-Zuverlässigkeit mit der dreiparametrischen Weibull-Verteilung:

$$R_B(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^b}$$

Die Systemzuverlässigkeit bei Serienstruktur:

$$R_S(t) = e^{-\left(\frac{t-t_{01}}{T_1-t_{01}}\right)^{b_1}} \cdot e^{-\left(\frac{t-t_{02}}{T_2-t_{02}}\right)^{b_2}} \cdot \dots \quad \Leftrightarrow \quad -\ln R_S(t) = \left(\frac{t-t_{01}}{T_1-t_{01}}\right)^{b_1} + \left(\frac{t-t_{02}}{T_2-t_{02}}\right)^{b_2} + \dots$$



Für die gewünschte System-Zuverlässigkeit $R_S(t)$ lässt sich die zugehörige Zeit t , abgesehen von Sonderfällen nur iterativ mit einer **Näherungsformel** bestimmen.

Für $R_S(t) = 0,9$ erhält man die oft verwendete B_{10S} -Lebensdauer des Systems.

Die Systemzuverlässigkeit bei Parallelstruktur:

$$R_S(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \cdot \dots \cdot (1 - R_n(t))$$

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$



Hierbei bedeutet n der Redundanzgrad des Systems.



Institut für Maschinenelemente ©

UNI STUTTGART Zuverlässigkeitstechnik

Prof. Bertsche

Systemtheorie nach Boole