

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/35417917>

Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen /

Article

Source: OAI

CITATIONS

3

READS

263

1 author:



[Stephan Rudolph](#)

Universität Stuttgart

90 PUBLICATIONS 360 CITATIONS

SEE PROFILE

Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen

Habilitationsschrift

Zur Erlangung der Lehrbefugnis

(venia legendi)

für das

Lehrgebiet Entwurfsmethodik

Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
Universität Stuttgart

vorgelegt von

Stephan Rudolph

geboren in Riedlingen

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
Universität Stuttgart
2002

Danksagung

Für die seit meiner Doktorandenzeit anhaltende Unterstützung von seiten des Direktors des Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen an der Universität Stuttgart, Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Bernd-Helmut Kröplin, sei an dieser Stelle besonders gedankt. Ohne seine wissenschaftliche Einschätzung, sein Wohlwollen und seine Förderung hätte diese Arbeit nicht realisiert werden können. Das gilt insbesondere auch für die Unterstützung bei der Schaffung der „Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik“ (alias „Pi-Gruppe“) am Institut, die sich in den vergangenen fünf Jahren unter meiner Leitung mit ähnlichkeitsmechanischen Fragen auseinandersetzen konnte.



Abbildung 1: Die „Pi-Gruppe“ im Sommer 2002

Neben der Schaffung der Gegebenheiten sind es Personen und ihr Zusammenwirken, die für den Erfolg ausschlaggebend sind. Mein persönlicher Dank gilt deshalb allen Mitgliedern und Ehemaligen* der Arbeitsgruppe: Dr.-Ing. Gunter Emrich*, Lotti Ekert*, Peter Hertkorn*, Markus Till*, Hakan Yusan*, sowie in Abbildung 1 v.l.n.r.: Jens Häcker, Rolf Alber, Michael Jentsch, Holger Gläsel, Steffen Brückner, der Autor, Albrecht Melan, und Michael Bölling (nicht i.B.). Ihnen bin ich für den mir in den vergangenen Jahren entgegengebrachten Enthusiasmus, Arbeitseinsatz, Kreativität, Loyalität und Teamgeist zu sehr großem Dank verpflichtet. Die „Pi-Gruppe“ war dabei nicht nur eine ständige Quelle positiver Motivation und Freude für mich, sondern ohne jeden einzelnen dieser Mitstreiter hätten sicher die ähnlichkeitsmechanischen Methoden in den verschiedenen Forschungsprojekten nicht so erfolgreich umgesetzt werden können.

Gerade an einer Universität als dem Zentrum des geistigen Arbeitens und Lernens gibt es immer wieder für unsere wissenschaftliche Arbeit und intellektuelle Weiterentwicklung entscheidende Schlüsselbegegnungen, die natürlich hier nicht alle wiedergegeben werden können. Dazu kommen in den Abschlußphasen wichtiger Lebensabschnitte durch den berühmten „Blick zurück“ eine Menge markanter Entscheidungen und erinnerungswerter Anekdoten in unser Gedächtnis. In dieser Hinsicht ist mir aus meiner Diplomarbeitszeit am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge, USA, ein Ausspruch meines damaligen Betreuers, Professor Dr. Steven Dubowsky, in besonderer Erinnerung geblieben. *“You know, Stephan,”* fragte er mich eines Tages, *“Why are we doing all this? Because science is fun – and we work hard to get the most out of it.”*

*Meinen Eltern
Dorothea Rudolph und Hans Rudolph †
gewidmet*

Danksagung

Für die Übernahme des Hauptberichts bedanke ich mich beim Direktor des Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen an der Universität Stuttgart, Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Bernd-Helmut Kröplin.

Für die Übernahme der zwei Mitberichte danke ich den beiden Institutsdirektoren Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Bernhard Weigand vom Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt an der Universität Stuttgart und bei Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. h.c. Hans Grabowski vom Institut für Rechneranwendung in Planung und Konstruktion an der Universität Karlsruhe.

Für die in den letzten Jahren zur Finanzierung der Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik eingeworbenen Mittel bin ich allen Geldgebern, insbesondere den beiden Bundesministerien für Wirtschaft, für Forschung und Technologie, der Deutschen Forschungsgemeinschaft, sowie allen unseren Industriepartnern zu Dank verpflichtet. Sie haben letztendlich durch die Finanzierung von Projekten und Forschungsvorhaben die Ausrichtung und den Ausbau der Forschungsrichtung Ähnlichkeitsmechanik mit ermöglicht.

Tag der Einreichung: 17. Dezember 2001

Tag der Annahme: 26. Juli 2002

Tag der Prüfung: 9. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	vi
1 Motivation	1
1.1 Ähnlichkeit und Ähnlichkeitsbegriffe	3
2 Grundlagen dimensionshomogener Funktionen	9
2.1 Begriffsbildungen	9
2.1.1 Physikalische Größe	9
2.1.2 Einheit	10
2.1.3 Dimension	12
2.1.4 Dimensionshomogenität	15
2.1.5 Dimensionsmatrix	16
2.1.6 Fundamentalsysteme	17
2.1.7 Dimensionshomogene Funktionen	18
2.1.8 Rechenregeln für Dimensionen	19
2.1.9 Ähnlichkeitsfunktionen	20
2.2 Phänomene	21
2.2.1 Ähnlichkeit	21
2.2.2 Analogie	22
2.3 Klassische Anwendungen	23
2.3.1 Dimensionsanalyse	23
2.3.2 Methode der Transformationsgruppen	25
2.4 Diskussion	28
3 Voraussetzungen für die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen	29
3.1 Dimensionssysteme	29
3.2 Vektorielle Dimensionen	30
3.3 Repräsentationsformen	32
3.4 Einbettungsbedingungen	34
3.5 Diskussion	36
4 Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen	37
4.1 Entwurfsbewertungsverfahren	37
4.1.1 Entwurfsprozeß	38
4.1.2 Bewertungsproblem	39
4.1.3 Bewertungshypothese	41
4.1.4 Kontrollen	43

4.2	Neuronale Netze	45
4.2.1	Rückkopplungsfreie Neuronale Netze	45
4.2.2	Generalisierung	48
4.2.3	Topologieinterpretation	49
4.2.4	Kontrollen	50
4.3	Fallbasiertes Schließen	53
4.3.1	Prozeßmodell	53
4.3.2	Schließverfahren	57
4.3.3	Ähnlichkeitsbegriff	58
4.3.4	Kontrollen	59
4.4	Mustererkennung	61
4.4.1	Modellvorstellung	61
4.4.2	Merkmalsextraktion	67
4.4.3	Merkmals-Editor	71
4.4.4	Kontrollen	75
4.5	Geräuschklassifikation	78
4.5.1	Verarbeitungsschrittfolge	79
4.5.2	Ähnlichkeitsbegriff	83
4.5.3	Klassifikatordesign	86
4.5.4	Kontrollen	89
4.6	Data Mining	92
4.6.1	Modellvorstellung	93
4.6.2	Abstraktionsebenen	94
4.6.3	Data Mining	95
4.6.4	Kontrollen	97
4.7	Computerunterstützter Ingenieurentwurf	98
4.7.1	Entwurfsgrammatiken	105
4.7.2	Inverses Entwurfsgrammatikproblem	116
4.7.3	Lösungspfadgenerator	120
4.7.4	Ausblick Entwurfssprachen	130
5	Zusammenfassung	132
5.1	Ergebnisse	134
5.2	Ausblick	137

A Anhang	139
A.1 Herleitung Produkt-Theorem	140
A.2 Herleitung Pi-Theorem	142
A.3 Entwurfsbewertungsbeispiel Gasturbine	146
A.4 Dimensionsanalyse in Neuronalen Netzen	152
A.5 Topologieentwurf mit Genetischen Algorithmen	156
A.6 Winkeldefinitionen	160
Literaturverzeichnis	161

Vorwort

Mit der vorliegenden Arbeit zur „Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen“ wird aufgezeigt, daß der Nutzen der Ähnlichkeitstheorie bei weitem nicht nur auf die Ableitung und Anwendung bekannter Ähnlichkeitskennzahlen wie beispielsweise der Reynoldszahl Re , der Machzahl Ma und der Nusseltzahl Nu usw. in der Strömungsmechanik und der Wärmeübertragung begrenzt ist, sondern auch in der Theoriebildung neuer moderner mathematischer Methoden im Ingenieurwesen, der Künstlichen Intelligenz und den daran angrenzenden Wissensgebieten verwendet werden kann.

Kapitel 1 Einleitung führt Leserinnen und Leser durch eine kurze Problemstellung zukünftiger Ingenieurentwurfsaufgaben an die Frage nach „Ähnlichkeit“ im Sinne von „übergeordneten Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Problemausprägungen“ heran. Dabei wird klar, daß eine verbale Beschreibung von Ähnlichkeitseigenschaften allein nicht ausreichend sein kann, um eine naturwissenschaftlich taugliche formale Definition und exakte Quantifizierung von Ähnlichkeitsbegriffen zu ermöglichen.

Kapitel 2 Grundlagen dimensionshomogener Funktionen stellt daher die formale Basis des in der Physik und den Ingenieurwissenschaften auf dem physikalischen Dimensionsbegriff beruhenden Ähnlichkeitsaussagen dar und zeigt, aufgrund welcher Voraussetzungen die bekannten Kennzahlen Re , Ma und Nu usw. mittels des Pi-Theorems von Buckingham als zentralem Satz der physikalischen Dimensionentheorie abgeleitet werden können. Desweiteren wird gezeigt, wie sich die Ähnlichkeitskennzahlen in den mathematischen Kontext der Theorie der Transformationsgruppen einfügen.

Das für den Leser mit längst vergangenen Schulzeiten verknüpfte Erinnerungsbruchstück der „Einheitenprobe“ hat dabei trotz seiner Einfachheit einen festen Platz in der oft auch als Ähnlichkeitsmechanik bezeichneten Ähnlichkeitstheorie. Trotz der Einfachheit der Einheitenprobe ist es für ein Verständnis des formalen Aufbaus der Naturwissenschaften zentral, die Einheitenprobe nicht als den Schlußpunkt, sondern in ihrer umgekehrten Aussage, daß „alle nicht-dimensionshomogenen Modellvorstellungen prinzipiell nicht richtig sein können“, in Form des Prinzips der Dimensionshomogenität als die zentrale philosophische Grundlage und damit als den Ausgangspunkt der Theorie dimensionshomogener Funktionen zu begreifen.

Die mathematischen Folgerungen aus den dimensionshomogenen Funktionen mit ihren Eigenschaften von „Ähnlichkeit“ und „Analogie“, den daraus ableitbaren Modellgesetzen, sowie den klassischen Anwendungen im Ingenieurwesen bilden hier den aufbereiteten Stand des Wissens. Dabei wird neben dem für Ingenieure wichtigen Gesamtüberblick auch auf die historische Entwicklung des Dimensionskonzeptes und der darauf aufbauenden Ableitung von Ähnlichkeitsbegriffen eingegangen.

Kapitel 3 Voraussetzungen für die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen stellt dar, mit welchen Annahmen die Begriffsbildungen von Ähnlichkeit und deren formalen Mechanismen auf neue Gebiete übertragen werden können. Dabei werden die notwendigen Voraussetzungen in einem Einbettungssatz zusammengefaßt. Durch den Einbettungssatz wird der formal konsistente Anschluß und widerspruchsfreie Übergang der in der Künstlichen Intelligenz verwendeten Notationsformen an die Modellvorstellung dimensionshomogener Funktionen im Ingenieurwesen und der damit einhergehenden Existenz dimensionsloser Kennzahlen gewährleistet.

Kapitel 4 Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen beinhaltet dementsprechend die einzelnen Übertragungen des physikalisch motivierten Ähnlichkeitsbegriffs auf neue Anwendungsfelder und zeigt die Konsequenzen und Folgerungen auf, die sich aus dem Prinzip der Dimensionshomogenität für die betrachteten Methoden der

- Entwurfsbewertungsverfahren (in Kapitel 4.1), der
- Neuronalen Netze (in Kapitel 4.2), des
- Fallbasierten Schließens (in Kapitel 4.3), der
- Mustererkennung (in Kapitel 4.4), der
- Geräuschklassifikation (in Kapitel 4.5), des
- Data Mining (in Kapitel 4.6), sowie des
- Computergestützten Ingenieurentwurfs (in Kapitel 4.7)

ergeben. Dabei wird darauf Wert gelegt, jede der Übertragungen in einem eigenen Unterabschnitt „Kontrollen“ anhand von klassischen naturwissenschaftlichen Prüfkriterien wie z.B. der Konsistenz einer kritischen Überprüfung zu unterziehen.

Kapitel 5 Zusammenfassung faßt die aus den Übertragungen resultierenden Schlußfolgerungen zusammen und unterzieht sie einer abschließenden Diskussion. Dabei steht die künftige Bedeutung der Ähnlichkeitstheorie in einem modernen Ingenieurwesen an der Schnittstelle zur Informatik und der Künstlichen Intelligenz einschließlich eines Ausblicks auf zukünftig zu erwartende Weiterentwicklungen der Ähnlichkeitstheorie im Zentrum des Interesses.

Es ist eine zentrale Erfahrung innerhalb aller Wissenschaftsdisziplinen, daß sowohl die Theorien als auch die daraus abgeleiteten Schlußfolgerungen im Laufe zunehmenden Erkenntnisgewinns abgelöst, erweitert und neu interpretiert oder verallgemeinert werden. Jeder Wissenschaftler muß sich daher immer wieder in Erinnerung rufen, daß seine Ergebnisse und die daraus gezogenen Schlußfolgerungen samt deren Interpretation zwangsläufig einem gewissen „Horizonteffekt“ (sowohl in der jeweiligen Einzelperson als auch in der jeweiligen Zeitgeschichte bedingt) unterliegen, der durch die verwendeten Untersuchungsmethoden, dem vorhandenen Erkenntnisstand usw., bewirkt wird.

In einer Zeit, in der in intelligenten Produktentwürfen das Ingenieurwesen, die Informatik und die Künstliche Intelligenz fachübergreifend und interdisziplinär eng zusammenarbeiten (sollten), kann deshalb unabhängig von der Herkunft und den jeweiligen Verfechtern nur derjenige Theoriebaustein ausgewählt und in eine allgemeinere Theorie übernommen werden, der innerhalb der zugrundeliegenden naturwissenschaftlichen Modellvorstellung nicht falsifiziert werden kann und damit zumindest allen bereits anerkannten Konsistenzbetrachtungen gerecht wird.

In diesem Sinne ist zu hoffen, daß dem Dimensionsbegriff im Ingenieurwesen, in der Informatik und in der Künstlichen Intelligenz in Zukunft vermehrt die Aufmerksamkeit zuteil wird, die ihm aufgrund seiner zentralen Bedeutung in dimensionsbehafteten Problemstellungen im Aufbau formaler Aussagensysteme, seiner Leistungsfähigkeit in der Anwendung und der Übertragung dimensionsloser Ähnlichkeitsbegriffe auch zukommt.

Nomenklatur

Skalare werden durch einen Kleinbuchstaben bezeichnet. *Vektoren* sind, sofern nicht anders angegeben, Spaltenvektoren und werden durch einen Kleinbuchstaben mit einem Index gekennzeichnet. *Matrizen* werden durch Klein- oder Großbuchstaben mit zwei Indizes bezeichnet, wobei der erste Index die Zeile, der zweite Index die Spalte festlegt.

Lateinische Formelzeichen		
Symbol	Beschreibung	Einheit
A	Fläche	$[m^2], [m_x m_y]$
C_j	Proportionalitätsfaktoren	$[1]$
c_w	Widerstandsbeiwert	$[1]$
$D_1, \dots, D_r, D'_1, \dots, D'_r$	System von Dimensionsbegriffen (problembezogen gleichwertig)	individuell
f	dimensionsbehaftete Funktion	individuell
F	dimensionslose Funktion (Ähnlichkeitsfunktion)	$[1]$
L	Länge	$[m], [m_x]$
$i = 1, \dots, r$	Laufindex für primäre Größen	$[1]$
$j = 1, \dots, m$	Laufindex für sekundäre Größen und dimensionslose Kennzahlen	$[1]$
$m = n - r$	Anzahl dimensionsloser Kennzahlen	$[1]$
n	Anzahl dimensionsbehafteter Größen	$[1]$
r	Rang der Dimensionsmatrix	$[1]$
x_i, x'_i	primäre dimensionsbehaftete Größe (Basisgröße)	individuell
x_j, x'_j	sekundäre dimensionsbehaftete Variable Größe (abgeleitete Größe)	individuell
X	Raum dimensionsbehafteter Größen	individuell
$X_n = (x_1, \dots, x_n)$	Menge dimensionsbehafteter Größen (Relevanzliste)	individuell
$X_i = (x_1, \dots, x_r)$	Menge primärer Größen	individuell
$X_j = (x_{r+1}, \dots, x_{r+m})$	Menge sekundärer Größen	individuell
V	Volumen	$[m^3], [m_x m_y m_z]$

Tabelle 1: Lateinische Formelzeichen

In dieser Arbeit wird die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen in mehrere verschiedene Gebiete dargestellt. Für das Verständnis des Textes ist es daher förderlich, die in der Ähnlichkeitstheorie übliche Notation der zwei Tabellen 1 und 2 im Kopf zu haben. Die in den einzelnen Spezialgebieten benutzte Notation ist in den Anwendungskapiteln im Kontext erklärt.

Griechische Formelzeichen

Symbol	Beschreibung	Einheit
α_{ji}	Dimensionsexponenten in Kennzahl	[1]
γ_{ji}	Dimensionsexponent	[1]
$\pi_j = x_{(j+r)} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}}$	dimensionslose Kennzahl	[1]
Π	Raum dimensionsloser Größen	[1]
$\Pi_m = (\pi_1, \dots, \pi_m)$	Menge dimensionsloser Kennzahlen	[1]

Tabelle 2: Griechische Formelzeichen

1 Motivation

Die Anforderungen an die Entwurfs- und Entwicklungsingenieure in Design, Bau, Einsatz und Entsorgung von Produkten ist in einem hohen Grade von Komplexität und Interdisziplinarität geprägt. Hierbei ist das Erzielen technischer Spitzenleistungen und deren konsequente Umsetzung in ebenso leistungsfähige wie wirtschaftliche Produkte für das Überleben ganzer Industriezweige eine immer größere Notwendigkeit geworden. Dabei ist es für die Hersteller ganzer Produktfamilien von Vorteil, auf die mit früheren Produktmustern gemachten Erfahrungen zurückgreifen zu können. Die Grundidee und Motivation für die Wiederverwendbarkeit vergangener Erfahrungen ist dabei die Ähnlichkeit in den Produkten, die aufgrund der in Abbildung 2 sichtbaren geometrischen Ähnlichkeit und den damit einhergehenden Gemeinsamkeiten der verschiedenen Designentwürfe diese Vorgehensweise zunächst einmal intuitiv nahelegt.



Abbildung 2: Airbus A319, A320 und A321 [3]

Für die Berücksichtigung der in der Vergangenheit bei früheren Produktmustern gemachten Erfahrungen auf neue Entwurfsmuster ist ein geeigneter Mechanismus für die Übertragung von Kräften, Längen, Zeiten und Massen etc. erforderlich. Dieser sollte für eine gesicherte und systematische Nutzung auf naturwissenschaftlichen Ursache-Wirkungsbeziehungen beruhen und die Ableitung von Umrechnungsvorschriften für die Größen der einen Modellausführung auf die andere Modellausführung ermöglichen. Dies hat in der Vergangenheit zur Entwicklung der uns heute bekannten *Ähnlichkeitstheorie* geführt, in der aus theoretisch anerkannten und experimentell erprobten mathematischen Formalismen die hierfür geeigneten Kriterien für die Größenumrechnung in Form sogenannter dimensionsloser *Ähnlichkeitskennzahlen* bereitgestellt wird.

Die systematische Benutzung dimensionsloser Ähnlichkeitskennzahlen, die physikalisch als Verhältniszahlen charakteristischer Kräfte, Energien und Zeiten [138] etc. interpretiert werden können, bietet sich deshalb zur Ableitung von Folgeentwürfen aus einer Hauptausführung nebst der entsprechenden betriebswirtschaftlichen Kostenrechnungen in Form von Kostenwachstumsgesetzen [168] in der *Baureihenentwicklung* [67] an. Auch die Ableitung von Modellregeln für die Umrechnung von Modellversuchen auf die Großausführung oder von der Großausführung auf geeignet gewählte Modellversuche stellt dabei den theoretisch wie praktisch etablierten Stand der Ähnlichkeitstheorie [12, 130, 154, 168, 218] dar. Vom wissenschaftlichen Standpunkt her muß deshalb durchaus die Frage erlaubt sein, inwieweit zukünftige Ergebnisse der Ähnlichkeitstheorie lediglich nur weitere Detailverbesserungen denn echte Erkenntnisfortschritte erbringen werden.

Nun stellt sich im modernen Ingenieurentwurf nicht so sehr die Frage, inwieweit mit heutigen Methoden die Entwürfe von gestern noch besser nachvollzogen werden könnten, sondern mit der laufenden Verschiebung der technischen Berechnungs- und Machbarkeitsgrenzen nehmen auch die Anforderungen an den Entwurfsingenieur ständig weiter zu. Waren in der Vergangenheit noch viele Produktentwürfe durch die Fragestellungen der klassischen Disziplinen Struktur-, Strömungsmechanik und Thermodynamik dominiert, so hat sich die moderne Ingenieurentwurfsaufgabe unter einer stetigen Zunahme dieser klassischen Anforderungen zu einer interdisziplinären Aufgabenstellung unter Einbeziehung weiterer Disziplinen wie der Regelungstechnik, der Informatik und des Designs usw. erweitert. So kann heute insbesondere von den informationstechnischen Methoden der Informatik und der Künstlichen Intelligenz (formale Sprachen, Grammatiken, fall- und regelbasierte Systeme, Mustererkennung etc.) durchaus von Techniken der „Wissensverarbeitung im Ingenieurentwurf“ gesprochen werden.

Durch die ständige Verbesserung und Weiterentwicklung von numerischen Berechnungsmethoden werden natürlich andere, früher sehr geschätzte Methoden etwas zurückgedrängt. Doch da die Ähnlichkeitstheorie eine der wenigen durchgängigen Methoden darstellt, die vom ersten Moment der Benennung einzelner physikalischer Einflußgrößen $x_1, x_2, x_3, \dots$ bis hin zur vollständigen Kenntnis der das Objekt oder den Vorgang beschreibenden partiellen Differentialgleichung eingesetzt werden kann wird klar, daß die Ähnlichkeitstheorie nie eine methodische Doktrin, sondern stets als eine zusätzliche naturwissenschaftliche Option gesehen werden sollte.

So kann in dem in Abschnitt 4.5 dargestellten industriellen Akustikproblem, das sich einer direkten numerischen Berechnung derzeit noch entzieht, durch den Einsatz der Ähnlichkeitstheorie die Frage nach einer maschinellen Klassifikation „ähnlicher Geräusche“ in einer konkreten Anwendung erfolgreich beantwortet werden. Dies wird erreicht, in dem die zwei verschiedenen akustischen Zeitreihen $x_1(t) \neq x_2(t)$ in Abbildung 3 durch eine geeignete *Ähnlichkeitstransformation* auf neue Problemkoordinaten projiziert werden, in denen die Ähnlichkeit beider Geräusche besser klassifizierbar wird.

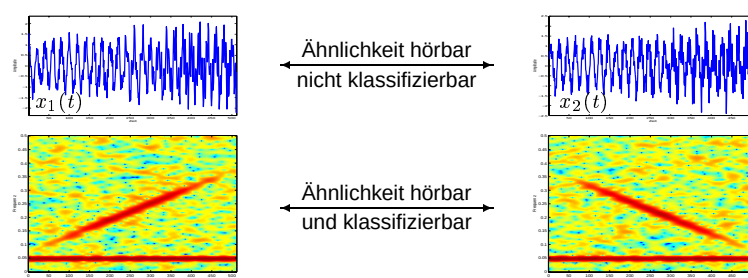


Abbildung 3: Ähnlichkeitsbasierte Geräuschanalyse und -klassifikation [222]

Dies unterstreicht die Anforderungen an den Entwurfsingenieur, Ordnung und Struktur in einer zunächst ungeordnet und unstrukturiert scheinenden Vielfalt von Verhaltensweisen und Informationen zu erkennen [132]. Hierfür bieten sich insbesondere diejenigen Verfahren an, welche erfahrungsgemäß zur Strukturierung von Wissensgebieten geeignet sind und wie z.B. die „Ähnlichkeit als erklärendes Prinzip“ bereits in vielen wichtigen Fragestellungen der Wissenschaften erfolgreich eingesetzt worden sind [139]. In dieser Arbeit wird daher die Ähnlichkeitstheorie als ordnendes und erklärendes Prinzip in die Modellbildung verschiedenster komplexer Vorgänge übertragen und diskutiert.

1.1 Ähnlichkeit und Ähnlichkeitsbegriffe

Der Begriff der Ähnlichkeit wird in den verschiedensten Zweigen der Wissenschaften benutzt, wodurch sich im Laufe der Zeit verschiedene Ausprägungen und Interpretationen herausgebildet haben. Für die vorliegende Arbeit ist es daher zunächst unerlässlich, eine Klärung der Definition des in dieser Arbeit verwendeten Ähnlichkeitsbegriffs vorzunehmen. Dies erfolgt durch die folgenden zwei kurzen Darstellungen der

- ☐ Verwendung von Ähnlichkeitsbegriffen von der Antike bis zur Gegenwart und der
- ☐ Formalisierung von Ähnlichkeit mittels mathematischer Verfahren.

Dazu wird mit einer verbalen Definition der Ähnlichkeit und der Darstellung unterschiedlicher Verwendungen begonnen, die dann stufenweise in eine mathematische Formalisierung des Ähnlichkeitsbegriffs entwickelt wird.

Begriffsbildung. Lexika definieren Ähnlichkeit als „die Übereinstimmung von Dingen in mehreren (nicht in allen) Merkmalen“ ([34] ↑Ähnlichkeit). „Merkmale stehen dabei für den Inhalt oder Teilinhalt eines Begriffes, dem eine bestimmte Eigenschaft jedes Gegenstandes, der unter den Begriff fällt, innewohnt“ ([34] ↑Merkmale). „Da die Gesamtheit der in einem Begriff gedachten Merkmale den Inhalt des Begriffes ausmacht“ ([34] ↑Begriff), ist Ähnlichkeit ein wesentliches Element in der Erstellung von Taxonomien, die die Ähnlichkeit am Vorhandensein homologer, d.h. entsprechender Merkmale festmachen [132]. Als Beispiel für die Verwendung werden hier die Ähnlichkeitsbegriffe aus der Psychologie, Medizin, Biologie, Mathematik und Geometrie einander gegenübergestellt.

Verwendungen. In der Psychologie wird Ähnlichkeit als erklärendes Prinzip u.a. in der Assoziationstheorie verwendet [132]. Deren Begründer DAVID HUME (1711-1776) nennt „als allgemeine Prinzipien, nach denen unser Denken (Vorstellen) abläuft, Ähnlichkeit, Kontinuität (Benachbarung in Raum und Zeit) und das Verhältnis von Ursache und Wirkung“ ([156] ↑Assoziationstheorie). HUME versuchte mit seiner Philosophie die Begründung einer Wissenschaft der menschlichen Natur, die „völlig auf Erfahrung gegründet, ohne metaphysische Voraussetzungen und ebenso systematisch und exakt wie die Naturwissenschaften sein müsse“ ([34] ↑Hume).

In der Medizin formulierte CHRISTIAN HAHNEMANN (1755-1843) das Ähnlichkeitsgesetz „*similia similibus curentur*“ (Das Ähnliche mag durch das Ähnliche geheilt werden). Es besagt, „daß Krankheiten geheilt werden können durch solche Arzneistoffe, die bei der Prüfung am Gesunden ein dem vorliegenden Krankheitsfall möglichst ähnliches Symptombild hervorgerufen haben“ ([34] ↑Ähnlichkeitsgesetz). Das schon im Altertum und bei einzelnen Naturvölkern bekannte Gesetz baute HAHNEMANN zum Heilsystem der Homöopathie aus. Die Medizin heute spricht dagegen nur noch von „Ähnlichkeitsregel“, da eine allgemeine Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes nicht mehr anerkannt wird.

In der Biologie wird die Ähnlichkeit von Lebewesen oder einzelner Organe entweder „auf die gemeinsame Abstammung (Homologie) oder auf die Anpassung an gleiche Umweltbedingungen (Analogie) zurückgeführt“ ([34] ↑Ähnlichkeit). Analoge Organe sind demnach verschiedenen Ursprungs, leisten aber Ähnliches oder Vergleichbares (z.B. Vogel Flügel–Insektenflügel). Dagegen haben homologe Organe einen phylogenetisch gleichen Ursprung, verrichten aber verschiedene Leistungen (Vogelflügel–Menschenarm).

In der Geometrie war bereits den Griechen in der Antike eine sich aus der Anschauung der Proportionen abgeleitete Ähnlichkeit zweier ebener Dreiecke $\triangle AOC$ und $\triangle A'OC'$ in Abbildung 4 bekannt, die durch geometrische Konstruktion begründet wurde. Ausgehend vom Ursprung O , der auch als Ähnlichkeitszentrum [55] bezeichnet wird, handelt es sich um eine Vervielfachung der Linien $\overline{OA}$ zu $\overline{OA'}$ und $\overline{OC}$ zu $\overline{OC'}$ mit einem Faktor λ .

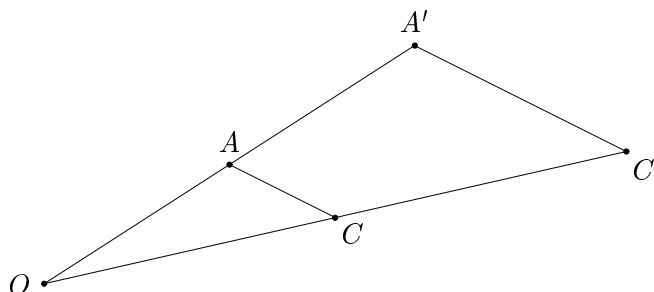


Abbildung 4: Ähnliche ebene Dreiecke nach EUKLID [55]

EUKLID (um 300 v.Chr.), der in seinem Werk „Die Elemente“ [60] auch die Ergebnisse von anderen Denkern wie ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) und EUDOXOS (um 400-350 v.Chr.) mit berücksichtigt, kannte bereits Ähnlichkeitssätze, die äquivalente Formulierungen für die Ähnlichkeit von Dreiecken darstellen ([55], [134] ↑Ähnlichkeitssätze, ↑Euklid):

- Zwei Dreiecke $\triangle AOC$ und $\triangle A'OC'$ heißen einander ähnlich, wenn jede Seite eines Dreiecks mit je einer Seite des anderen Dreiecks gleiche Längenverhältnisse bildet (Buch 6, Proposition 4).
- Zwei Dreiecke $\triangle AOC$ und $\triangle A'OC'$ heißen einander ähnlich, wenn sie in der Größe eines Innenwinkels übereinstimmen und die diesem Winkel anliegenden Seiten beider Dreiecke gleiche Längenverhältnisse bilden (Buch 6, Proposition 6).

Neben den Ähnlichkeitssätzen in der Ebene in Abbildung 4 wurde die Proportionenlehre von den Griechen auch auf räumliche Körper wie in Abbildung 5 angewandt. Wieder handelt es sich ausgehend vom Ursprung O jeweils um eine Vervielfachung der Linien $\overline{OA}$ zu $\overline{OA'}$, von $\overline{OB}$ zu $\overline{OB'}$ und von $\overline{OC}$ zu $\overline{OC'}$ mit einem Faktor λ .

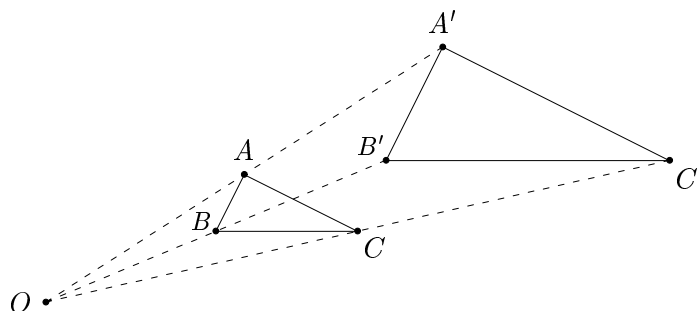


Abbildung 5: Ähnliche räumliche Körper nach EUKLID [55]

Den Griechen war in ihren teilweise bereits sehr weit gediehenen und auch philosophisch umfassend untermauerten Erklärungen der geometrischen Figuren von Linien, Flächen und Körpern (Volumina) aufgefallen, daß in den Proportionen (nach unserem heutigen Verständnis die aus den Skalierungen mit dem Faktor λ resultierenden Verhältnisse) diese sich nicht gleich, sondern sich verschieden verhalten: so wachsen die Linien der Körper mit λ , die Flächen mit λ^2 und die Volumina mit λ^3 .

Aus der unterschiedlichen Skalierung mit λ , λ^2 und λ^3 ziehen die Griechen den Schluß, daß Linien, Flächen und Volumina sogenannte inhomogene Größen unterschiedlicher Art sind. Als Schlußfolgerung daraus formulierten sie ein Homogenitätsprinzip, daß nur homogene Größen, also nur Längen mit Längen, nur Flächen mit Flächen und nur Volumen zu Volumen addiert oder subtrahiert werden dürfen.

Hierzu EUKLID [99]: „Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier homogener Größen zueinander, wie z.B. Doppeltes, Dreifaches. Denn wie sich Inhomogenes zueinander verhält, ist, wie ANDRASTOS sagt, zu wissen unmöglich. So kann z.B. die Elle mit der Mine oder ... das Weiße mit dem Süßen oder mit dem Warmen nicht zusammengefaßt oder verglichen werden. Bei homogenen Größen aber ist es möglich, wie z.B. Längen zu Längen, Körper zu Körper, ... Zeit zu Zeit, Bewegung zu Bewegung, Klang zu Klang, Geschmack zu Geschmack, Farbe zu Farbe und allgemein Dinge von gleicher Gattung oder von gleicher Art sich irgendwie zueinander verhalten“.

Rückblickend stehen die Griechen damit bereits an der Schwelle zum Dimensionsbegriff, für den sie auch schon das vorgenannte Homogenitätsprinzip formulieren, das erst später zum Prinzip der Dimensionshomogenität und zur Theorie dimensions homogener Funktionen [76] in Kapitel 2 ausgebaut wird. Die Art und Anzahl der Dimensionen (lat. *dimensio*, Ausmessung, Berechnung, allgemein: Außmaß im Hinblick auf seine räumliche, zeitliche, begriffliche Erfäßbarkeit, [150] $\uparrow$ Dimension) begründet EUKLID dabei allein aus der geometrischen Anschauung heraus als Dreidimensionalität seiner Körperdefinition, wonach „ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat. Weiterhin seien nur die dreidimensionalen Körper nach allen Seiten hin stetig und teilbar“ ([156] $\uparrow$ Dimension).

Formalisierung. In der Mathematik der Neuzeit wird der noch an der Anschauung von Körpern orientierte Dimensionsbegriff der alten Griechen von RENÉ DESCARTES (1596-1650) durch die Vorstellung abgelöst, daß unter einer Dimension die Anzahl der Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P zu verstehen ist. Damit tritt an die Stelle der Aussage „der Punkt P liegt in der Ebene L_1 “ die Erfüllung der linearen algebraischen Gleichung $L_1(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ mit den Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ ([156] $\uparrow$ Dimension).

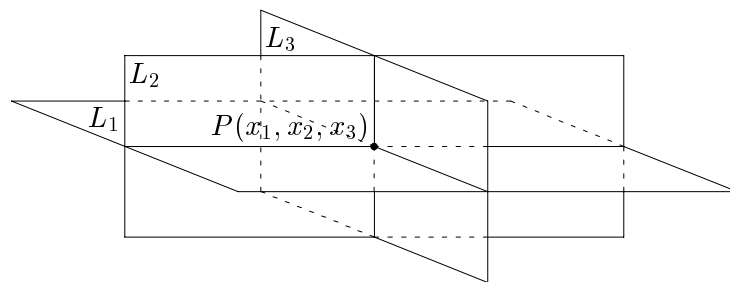


Abbildung 6: Darstellung des Schnittpunktes dreier Ebenen [156]

U.a. durch HENRI POINCARÉ (1854-1912) n -dimensional erweitert, geht in dieser Verallgemeinerung die Anschaulichkeit der geometrischen Interpretation der Dimension zugunsten leistungsfähigerer mathematischer Formalismen verloren. Dabei wird der ursprünglich geometrisch orientierte Dimensionsbegriff durch den Begriff der Koordinate in der abstrakten Gleichungsanalyse ersetzt. So kann in Abbildung 6 die algebraische Lösung der drei Gleichungen in der Form $L_1(x_1, x_2, x_3) = L_2(x_1, x_2, x_3) = L_3(x_1, x_2, x_3) = 0$

noch als Schnittpunkt dreier Ebenen L_1, L_2 und L_3 im dreidimensionalen Raum anschaulich gedeutet und visualisiert werden, dagegen trifft dies für die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten nicht mehr zu ([156] ↑Dimension).

Für diese Arbeit sei daraus die folgende Definition 1 zur Klärung des Dimensionsbegriffs in der Mathematik festgehalten, der deshalb auch explizit „mathematische Dimension“ genannt wird. Der mathematische Dimensionsbegriff wird später noch zur definitorischen Abgrenzung gegen den noch folgenden physikalischen Dimensionsbegriff benötigt:

Definition 1 Mathematische Dimension [134]. *Math. Dimension des Anschauungsraumes ist die Anzahl von Koordinatenachsen in einem Raum bzw. die Anzahl der Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$, die notwendig sind, die Lage eines Punktes in diesem Raum eindeutig zu beschreiben. Somit ist die math. Dimension eines Punktes $n = 0$, die einer Geraden $n = 1$ und die einer Ebene $n = 2$. Allgemein hat jede Hyperfläche eines n -dimensionalen Raumes die math. Dimension $n - 1$ ([134] ↑Dimension des Anschauungsraumes).*

Mit der Einführung der Gleichungsnotation durch DESCARTES und der n -dimensionalen Verallgemeinerung durch POINCARÉ ergibt sich aus der höheren Abstraktion der Darstellung auch eine Erweiterung des ursprünglichen Ähnlichkeitsbegriffs. War der Begriff der Ähnlichkeit bei den Griechen aus der Proportionenlehre heraus noch geometrisch begründet, so kann er in der modernen Mathematik allgemein mit der auf dem gesamten Definitionsbereich $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{D}$ gültigen formalen Gleichheit [10] der Ausdrücke f

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) \equiv f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots) \quad (1)$$

als die Frage nach der Existenz von Transformationen $\mathcal{T}_i$ mit $\bar{x}_i = \mathcal{T}_i(x_1, x_2, x_3, \dots)$ definiert werden, die die Form der Gleichung f und damit deren Lösungsraum unverändert, d.h. invariant lassen und daher in diesem Zusammenhang als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet werden. Für die gesuchte Definition von Ähnlichkeit, die in der eingangs auf Seite 3 genannten verbalen Begriffsbildung als eine „Übereinstimmung von Dingen in mehreren (nicht in allen) Merkmalen“ bezeichnet wurde, ergibt sich durch Gleichung (1) eine mathematische Formalisierung und Definition von Ähnlichkeit zu:

Definition 2 Ähnlichkeit. *Ähnlichkeit ist definiert durch die Existenz von Invarianten, d.h. solchen Ähnlichkeitstransformationen $\mathcal{T}_i$, die eine Gleichung f invariant lassen. Die Form der Invariante bestimmt damit die inhaltliche Bedeutung des resultierenden Ähnlichkeitsbegriffs und ersetzt den Merkmalsbegriff in der lexikalischen Ähnlichkeitsbegriffsbildung auf Seite 3 durch die Invariante. Als die **verbale Definition von Ähnlichkeit** gilt: „Ähnlichkeit ist Gleichheit im Sinne einer Abstraktion.“*

Die in den beiden Abbildungen 4 und 5 dargestellten geometrischen Skalierungen sind damit Beispiele für die Ähnlichkeitstransformationen $\mathcal{T}_i$ mit $\bar{x}_i = \lambda x_i$, die z.B. ein Dreieck mit einem Skalierungsfaktor λ in ein ähnliches Dreieck überführen. Dadurch können durch Ähnlichkeitstransformationen $\mathcal{T}_i$ auch die Existenz sich entsprechender, sogenannter homologer Größen x_i und $\bar{x}_i$ definiert werden, die durch die Transformationen ineinander überführt werden. Da es sich in den Abbildungen 4 und 5 bei den betrachteten Größen um Punkte handelt, sind hier exemplarisch die zwei homologen Punktepaare A und A' bzw. C und C' zu nennen. Homologe Größen sind damit so definiert, daß sie sich stets durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander überführen lassen.

Die Suche nach Gleichungsinvarianten hat u.a. große Bedeutung in vielen technischen Anwendungsbereichen der Naturwissenschaften, in denen ähnliche und asymptotische Lösungen von (Differential-)Gleichungen verwendet werden [13, 71]. In der Mathematik ist diese Aufgabenstellung in Form der „Methode der Transformationsgruppen“ bzw. der Theorie der LIE-Gruppen [10, 24, 25, 89] Gegenstand der Forschung. Die gezeigte lineare Transformationsgruppe $\mathcal{T}_i$ ohne Absolutglied ist die einfachste aller möglichen Ähnlichkeitstransformationen und wird in der Mathematik als „Stretching Group“ bezeichnet.

Gegenüber der Mathematik ist es eine Besonderheit der Physik, physikalische Begriffe wie Masse, Länge, Zeit usw. die auch als „physikalische Dimension“ bezeichnet werden, in physikalischen Einheiten dieser Dimensionen zu quantifizieren (d.h. zu messen). Da die Wahl der Bezugsgröße der Einheit aber eine willkürliche Festlegung ist, entspricht die Bevorzugung einer bestimmten i -ten Größe x_i gegenüber einer anderen i -ten Größe $\bar{x}_i$ der linearen Transformation $\bar{x}_i = \lambda_i x_i$ ohne Absolutglied. Diese lineare Transformation hat damit in der Physik die Bedeutung der Änderung der Einheit mit einem Faktor λ_i . Daraus kann z.B. eine Einheit in eine andere Einheit umgerechnet werden.

Vor allem ist in der Physik, in der (Natur-)Phänomene meßtechnisch erfaßt und in Modellvorstellungen in Form von Gleichungen gebracht werden, natürlich auch zu erwarten, daß die Modellgleichungen von der willkürlichen Wahl der Einheitenmaßstäbe λ_i unabhängig sind. Sonst würden die „Naturgesetze“ von der Wahl der Einheiten abhängen. Es ist daher grundsätzlich zu fordern, daß die Modellgleichungen unter diesen frei wählbaren linearen Transformationen invariant sind. Die resultierenden mathematischen Ausdrücke, die unter der dann geforderten Elimination der Skalierungsfaktoren λ_i invariant sind, sind als Invarianten damit automatisch Ähnlichkeitsbegriffe, die zur Ermittlung von Ähnlichkeiten in physikalischen Prozessen herangezogen werden können und im Ingenieurwesen als Ähnlichkeitskennzahlen bezeichnet werden.

Der Begriff der Ähnlichkeit und der Ähnlichkeitskennzahl ist daher sehr eng mit dem Begriff der physikalischen Dimension verbunden, da er durch Invariantenbildung aus ihr hervorgeht. Der genaue Unterschied zwischen einer mathematischen und einer physikalischen Dimension, der in Kapitel 2 noch durch eine entsprechende Definition formal befriedigt wird, liegt darin, daß mathematische Dimensionen bzw. die Koordinaten x_i in Gleichung (1) i.A. höchstens einen linearen Transformationsfaktor λ_i besitzen, während dimensionsbehaftete physikalische Variablen aufgrund möglicher zusammengesetzter Dimensionsbegriffe zwischen mindestens einem bis zu mehreren unabhängigen linearen Transformationsfaktoren λ_i aufweisen. Daraus folgt, daß Gleichungen mit physikalischen Dimensionen im Gegensatz zu Gleichungen mit nur mathematischen Dimensionen immer Ähnlichkeitskennzahlen besitzen müssen. Doch diese tiefergehenden Fragen werden in Kapitel 2 noch umfassender behandelt. Deshalb sei an dieser Stelle die Formalisierung des Ähnlichkeitsbegriffs zunächst abgeschlossen.

Ähnlichkeit und Analogie. Auf der Suche nach der Definition von „Ähnlichkeit“ stößt man auch sehr schnell auf den Begriff der „Analogie“. Über die Analogie, von JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) definiert als „jene teilweise Ähnlichkeit zwischen den Gesetzen eines Erscheinungsgebietes mit jenen eines anderen, welche bewirkt, daß jedes das andere illustriert“ [139], gibt es jedoch sehr widersprüchliche Meinungen. So gibt es sowohl Darstellungen, daß die Ähnlichkeit eine Unterart der Analogie sei als auch umgekehrt die Analogie eine Unterart der Ähnlichkeit ist ([156] $\uparrow$ Analogie, [125]).

Nach JEVONS ist die Analogie „eine tiefer liegende Ähnlichkeit, man könnte diesselbe auch eine abstrakte Ähnlichkeit nennen“ [139]. Demgegenüber hält HOPPE den Begriff der Analogie für ganz und gar überflüssig, „da es bei derselben, wie bei der Ähnlichkeit überhaupt, nur auf begriffliche Übereinstimmung in gewissen Merkmalen der in Analogie gesetzten Objekte ankomme“ [139].

ERNST MACH (1838-1916) klärt diese Streitfrage wie folgt: „Ähnlichkeit ist teilweise Identität. Die Merkmale ähnlicher Objekte stimmen zum Teil überein, zum Teil sind sie verschieden. Die Analogie ist jedoch ein besonderer Fall der Ähnlichkeit. Nicht ein einziges unmittelbar wahrnehmbares Merkmal des einen Objekts braucht mit einem Merkmal des anderen Objektes übereinstimmen, und doch können zwischen den Merkmalen des einen Objektes Beziehungen bestehen, welche zwischen den Merkmalen des anderen Objektes in übereinstimmender, identischer Weise wiedergefunden werden“ [139].

In der Sprechweise der Mathematik ist die Ähnlichkeit damit ein Endomorphismus (die Abbildung eines Raumes auf sich selbst, [134] $\uparrow$ Endomorphismus), während die Analogie einen Isomorphismus (die Abbildung eines Raumes auf einen anderen Raum, [134] $\uparrow$ Isomorphismus) darstellt. Die notwendigen mathematischen Grundlagen für derartige Betrachtungen stellt hierfür wiederum das folgende Kapitel 2 zur Verfügung. Darin werden auch die notwendigen Grundlagen für die späteren Übertragungen von Ähnlichkeitsbegriffen bereitgestellt.

Die Nützlichkeit von auf Ähnlichkeit und Analogie beruhenden Überlegungen, „Ordnung und Struktur in einer zunächst ungeordnet und unstrukturiert erscheinenden Vielfalt von Verhaltensweisen und Informationen zu erkennen“ (siehe Seite 2), wird von ERNST MACH dabei mit den Worten umrissen: „Das Leitmotiv der Ähnlichkeit und Analogie erweist sich in mehrfacher Hinsicht als treibend und fruchtbar für die Erweiterung der Erkenntnis. . . . Die Operation mit Hypothesen wird durch den Reiz der Ähnlichkeit und Analogie eingeleitet. Die Hypothese belebt die Anschauung, die Phantasie, und erregt durch diese die physische Reaktionstätigkeit. Die Funktion der Hypothese ist sonst teils eine sich selbst zerstörende, jedenfalls aber eine kenntniserweiternde“ [139].

Ausblick. Die nach ERNST MACH „hypothesenbildende Kraft“ der Ähnlichkeitsbetrachtung wird in späteren Kapiteln für die Erstellung zahlreicher Modellvorstellungen in den verschiedensten Fragestellungen der Bewertung, der Merkmalsbildung und Klassifikation eingesetzt. Da sich hierfür der physikalische Dimensionsbegriff als eine der notwendigen Grundlagen für die Existenz von Ähnlichkeitsbegriffen in Form dimensionsloser Ähnlichkeitskennzahlen herausstellen wird, können Ähnlichkeitskennzahlen nicht nur in ihren traditionell bekannten Einsatzgebieten in der Strömungsmechanik und des Wärmetransports usw. verwendet werden, sondern auch überall dort sinnvoll zum Einsatz kommen, wo formal die Etablierung äquivalenter Dimensionsbegriffe gelingt.

Hierfür stellt Kapitel 2 die notwendigen mathematischen Grundlagen aus der Theorie dimensions homogener Funktionen zur Verfügung. Über Kapitel 3 mit den erforderlichen Voraussetzungen für die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen werden dann in Kapitel 4 die einzelnen Übertragungen auf mehrere Anwendungsgebiete im Ingenieurwesen, der Informatik und der Künstlichen Intelligenz dargestellt und diskutiert. Das Kapitel 5 bietet dann eine abschließende Zusammenfassung sowie einem Ausblick auf interessante zukünftige Weiterentwicklungen in der Ähnlichkeitstheorie.

2 Grundlagen dimensionshomogener Funktionen

In diesem Kapitel wird in die Theorie dimensionshomogener Funktionen eingeführt. Ganz entsprechend der Begrifflichkeit einer mathematischen Funktion mehrerer Veränderlicher wird zunächst mit einer Definition des Variablenbegriffs als sogenannte physikalische Größe nebst dazugehöriger physikalischer Dimension begonnen und dann anschließend auf die Eigenschaft der Dimensionshomogenität der Funktion übergegangen. Wenn es der Klarheit der Darstellung nützlich erschien, wurde auch die historische Entwicklung der Begriffe [77, 116] berücksichtigt.

2.1 Begriffsbildungen

In den Naturwissenschaften wird der Begriff der Dimension (lat. *dimensio*, Ausmessung, Berechnung, allgemein: Ausmaß im Hinblick auf seine räumliche, zeitliche, begriffliche Erfassbarkeit, [150] ↑Dimension) in unterschiedlichen Bedeutungen mehrfach verwendet. Zur schrittweisen Klärung der Verwendung wird zunächst der Begriff der physikalischen Größe eingeführt, dann auf deren Einheitenbegriff übergeleitet und daran anschließend der hierfür erforderliche Dimensionsbegriff dargestellt und diskutiert.

2.1.1 Physikalische Größe

Die Physik beschäftigt sich mit der Erkenntnis und der qualitativen und quantitativen Beschreibung von Phänomenen in der Natur. Die dabei meßtechnisch erfaßten und quantifizierten Größen werden als physikalische Größen bezeichnet. In moderner Schreibweise wird für eine physikalische Größe die folgende Definition 3 verwendet:

Definition 3 Physikalische Größe [53]. Eine physikalische Größe x_i ist das Produkt eines Zahlenwerts $\{x_i\}$ mit der Einheit $[x_i]$ einer entsprechenden Bezugsgröße, formal

$$x_i = \{x_i\} \cdot [x_i] \quad (2)$$

Es gilt die Sprechweise: *Physikalische Größe = Zahl · Einheit.*

Da physikalische Größen alternativ zu ihrer Berechnung auch experimentell, d.h. durch Messung ermittelt werden können, setzt sich das Meßergebnis x_i aus dem um bekannte systematische Abweichungen berichtigten Mittelwert $\tilde{x}_i$, der Einheit der Meßgröße $[x_i]$ sowie der zusätzlichen Angabe der absoluten Meßunsicherheit u zu $x_i = \{\tilde{x}_i \pm u\} [x_i]$, oder mit der Angabe der relativen Meßunsicherheit ϵ zu $x_i = \{(1 \pm \epsilon) \tilde{x}_i\} [x_i]$ zusammen [127]. Dabei lassen sich in modernen Meßverfahren je nach gemessener Größe und Meßverfahren relative Meßunsicherheiten im Bereich von $10^{-15} < \epsilon < 10^{-2}$ erzielen [75].

Interessant ist es festzustellen, daß sich die Ungenauigkeit der Messung lediglich auf die Quantifizierung $\{x_i\} = \{(1 \pm \epsilon) \tilde{x}_i\}$ niederschlägt, während die Einheitenangabe $[x_i]$ davon unberührt bleibt. Für die nachfolgenden Prinzipbetrachtungen, die auf die spätere physikalische Dimension der Einheit $[x_i]$ abzielen, sind die meßtechnischen Schwierigkeiten der Quantifizierung bedeutungslos, daher kann hier die Unterscheidung zwischen idealen Größen und gemessenen Größen entfallen.

2.1.2 Einheit

Wegen der großen Bedeutung des Messens physikalischer Größen im internationalen Waren- und Informationsaustausch in Handel, Industrie, Wissenschaft und Technik sind die in Gleichung (2) verwendeten Einheiten durch Umsetzung der internationalen Konvention des SI-Einheitensystems (Système International d'Unités, SI [109, 172]) in nationales Recht [72] gesetzlich verbindlich geregelt und in Definition 4 zusammengestellt:

Definition 4 Internationales Einheitensystem (SI) [109, 172]. *Im internationalen SI-Einheitensystem (Système International d'Unités, SI) sind die Verwendungen von Basisgrößen, -einheiten, -dimensionen und Namen wie folgt gesetzlich geregelt:*

Basisgröße	Basiseinheit	(Abk. ¹)	Dimension	Symbol	(Abk. ¹)
Kilogramm	<i>kg</i>	x_1	Masse	<i>M</i>	D_1
Meter	<i>m</i>	x_2	Länge	<i>L</i>	D_2
Sekunde	<i>s</i>	x_3	Zeit	<i>T</i>	D_3
Kelvin	<i>K</i>	x_4	Temperatur	Θ	D_4
Ampere	<i>A</i>	x_5	Stromstärke	<i>I</i>	D_5
Mol	<i>mol</i>	x_6	Stoffmenge	ν	D_6
Candela	<i>cd</i>	x_7	Lichtintensität	I_L	D_7

Tabelle 3: Internationales SI-Einheitensystem [109, 172]

Die gesetzliche Regelung umfaßt auch alle Meßvorschriften [75], die nach den metrischen Konventionen die Definition des Null- und des Einsmerkmals umfaßt und damit für jede Einheit den Nullpunkt δ_i und die Intervallgröße λ_i in Gleichung (3) festlegt.

Basisgrößen und kohärente Basissysteme. In Tabelle 3 werden die Basiseinheiten der 7 Basisgrößen des SI-Einheitensystems benannt. Basisgrößen sind dabei Größen, die nicht aus anderen Größen abgeleitet werden können. Ursprünglich war durch PERCY BRIDGMAN (1882-1961) für Basisgrößen der Begriff der *primären physikalischen Größe* geprägt worden. Deren Wahl und erkenntnistheoretische Rechtfertigung wurde mit der „grundsätzlichen und nicht weiter zu vervollkommnenden Einfachheit“² zu begründen versucht [33]. Desweiteren tritt in Tabelle 3 für jede Basisgröße auch bereits der Begriff der Dimension auf, bevor der physikalische Dimensionsbegriff im nächsten Abschnitt 2.1.3 schließlich formal definiert werden wird. Er kann hier in der Zwischenzeit nach HERMANN VON HELMHOLTZ (1821-1894) zunächst als ein „generalisierter Oberbegriff der Einheit“ verstanden werden.

Ergänzend zu Tabelle 3 sind aus der Geschichte des Meßwesens [127] weitere Größen und Einheiten bekannt, die durch eine lineare Transformation nach Gleichung (3) ineinander überführt werden können. Diese transformierten Größen

$$x'_i = \lambda_i x_i + \delta_i \quad (3)$$

können bzgl. der SI-Größen x_i aus Definition 4 eine Nullpunktverschiebung δ_i und eine Intervallskalierung λ_i aufweisen. Für die Basisgrößen im SI-Einheitensystem selbst gilt durch die Verwendung absoluter Nullpunkte als Nullmerkmal definitionsgemäß $\delta_i = 0$.

¹Die Abkürzungen x_i für Basisgröße, D_i für Basisdimension gelten nur für Gleichungen (3) bis (9).

²„fundamental and of irreducible simplicity“ [33]

Nach der Festlegung der Nullpunkte für Basisgrößen wären diese prinzipiell noch durch Änderungen ihres Einheitenmaßstabs λ_i beliebig skalierbar. Jedoch gilt für zwei verschiedene physikalische Größen x_i und y_i ein und derselben Basisgröße bei der Skalierung des zugehörigen Einheitenmaßstabes mit $\lambda_i > 0$ aus Gleichung (3) sofort

$$x'_i = \lambda_i x_i \quad \text{sowie} \quad y'_i = \lambda_i y_i \quad (4)$$

wodurch der Quotient x'_i/y'_i invariant unter Einheitentransformationen ist, da

$$x'_i/y'_i = x_i/y_i \quad (5)$$

gilt. Diese Eigenschaft der Invarianz von Quotienten der Basisgrößen unter einer linearen Skalentransformation mit λ_i in Gleichung (5) geht auf BRIDGMAN zurück, der sie als die „absolute Bedeutung relativer Größen“³ [33] bezeichnete. Diese Invarianz führt (siehe Herleitung im Anhang A.1) durch das Produkt-Theorem auf die aus primären Größen zusammengesetzten *sekundären Größen*:

Theorem 1 Produkt-Theorem [33]. *Wird die Invarianz von Quotienten physikalischer Größen unter Änderung der Maßeinheiten vorausgesetzt, so kann eine Beziehung zwischen primären physikalischen Größen x_i mit $\{x_i\} \in \mathbb{R}^+$ aus Tabelle 3 bei $i = 1, \dots, r$ und einer sekundären Größe x_j immer auch als ein Zusammenhang der Form*

$$x_j = C_j x_1^{\gamma_{j1}} x_2^{\gamma_{j2}} \dots x_r^{\gamma_{jr}} \quad (6)$$

angegeben werden, mit $r \in \{\mathbb{N} \mid r > 1\}$ und $C, \gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jr} \in \mathbb{R}$ reelle Konstanten sind.

Aus dem Produkt-Theorem folgen im wesentlichen zwei Aussagen [76]: Erstens ist Gleichung (6) unabhängig von der speziellen Form der definitorischen Gleichung für eine bestimmte abgeleitete Größe x_j und bedeutet lediglich, daß das Berechnungsergebnis für jede sekundäre Größe x_j immer auch als Produkt eines reinen Zahlenfaktors C_j mit einer multiplikativen Kombination der Basisgrößen angegeben werden kann. Zweitens können physikalische Größen bezüglich eines Basisgrößensystems nach Gleichung (6) formal in die zwei Klassen der Basisgrößen und den davon abgeleiteten Größen bzw. in primäre und sekundäre Größen unterschieden werden.

Mit der Definition der abgeleiteten Größen x_j ist auch der Konstruktionsprozeß zum formalen Aufbau eines kohärenten Basissystems gegeben. Werden die Intervallgrößen λ_i der Basisgrößen x_i so gewählt, daß sich die in den verschiedenen Naturgesetzen auftretenden sekundären Größen x_j und deren Einheiten in ihren Definitionsgleichungen ohne Verwendung von Zahlenfaktoren ableiten lassen bzw. für diese jeweils $C_j = 1$ wird, nennt man ein solches System von Basisgrößen ein *kohärentes Basissystem*. Das SI-System ist ein derartiges kohärentes Größensystem [53, 127].

JAMES CLERK MAXWELL (1831-1894) kommentiert prägnant die Notwendigkeit des Aufbaus eines klar definierten Systems von Basisgrößen: „Für jede wissenschaftliche Arbeit ist es von größter Wichtigkeit, sowohl Einheiten eines klar definierten Einheitensystems

³„absolute significance of relative magnitude“ [33]

zu verwenden, als auch die Zusammenhänge dieser Maßeinheiten zu den Basiseinheiten zu kennen, so daß die Ergebnisse aus dem einem Einheitensystem sofort in ein anderes Einheitensystem umgerechnet werden können“⁴ [116].

Theoretisch ist deshalb nur nötig, die Basisgrößen $x_1, \dots, x_r$ untereinander unabhängig zu wählen. Welche spezielle Wahl physikalischer Größen man im Aufbau eines solchen unabhängigen Basisgrößensystems dann bevorzugt, richtet sich nach der physikalisch und technisch sinnvollen Art sowie der gültigen gesetzlichen Praxis [172]. Eine notwendige Umrechnung physikalischer Größen aus einem Basisgrößensystem in ein anderes, dazu äquivalenten Basisgrößensystem ergibt sich damit folgerichtig durch Gleichung (6), in der die jeweiligen Skalierungsfaktoren λ_i der verschiedenen Basisgrößen aus Gleichung (4) in die Umrechnung der Größen mit eingehen [76].

2.1.3 Dimension

In linearen Vektorräumen wird die Dimension des Vektorraums mit Hilfe des Rangs eines zugehörigen Erzeugendensystems definiert [35]. Auch wird eine Funktion in mehreren Veränderlichen als mehrdimensionale Funktion bezeichnet. Nach Definition 1 auf Seite 6 ist die Dimension einer Funktion damit z.B. durch die Anzahl der unabhängigen Variablen erklärt. Diese mathematische Auffassungen des Dimensionsbegriffs kann entsprechend Abbildung 6 auf Seite 6 bis zur dritten Dimension noch geometrisch anschaulich als unterschiedliche Raumrichtungen interpretiert werden.

In der Physik und im Ingenieurwesen wird unabhängig von dieser geometrisch anschaulichen Interpretation des mathematischen Dimensionsbegriffs der Begriff der physikalischen Dimension im Sinne einer besonderen Art der physikalischen Oberbegriffsbildung in Definition 5 verwendet und auch als „Dimensionsformel“ [76] bezeichnet:

Definition 5 Physikalische Dimension [53, 76]. Als *physikalische Dimension* $\dim(x_j)$ einer physikalischen Größe x_j wird das Potenzprodukt der Basisdimensionen ihrer Definitionsgleichung bezeichnet. Es gilt

$$\dim(x_j) = \dim(x_1^{\gamma_{j1}} x_2^{\gamma_{j2}} \dots x_r^{\gamma_{jr}}) = D_1^{\gamma_{j1}} D_2^{\gamma_{j2}} \dots D_r^{\gamma_{jr}} \quad (7)$$

mit im SI-System derzeit $r \leq 7$ Dimensionsbegriffen Masse M (für D_1), Länge L (für D_2), Zeit T (für D_3), Temperatur Θ (für D_4), Stromstärke I (für D_5), Stoffmenge ν (für D_6) und Lichtintensität I_L (für D_7) in Tabelle 3. Die Dimensionsexponenten $\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jr} \in \mathbb{R}$ sind die γ_{ji} aus Gleichung (6).

HERMANN VON HELMHOLTZ bezeichnete die Dimension einer physikalischen Größe nach Gleichung (7) deshalb als „generalisierter Oberbegriff der Einheit“, als „Art der Zusammensetzung aus den grundlegenden Größen“ und „besondere Art der Einheiten, die sie zusammenfaßt, die Benennung der Zahl“ [95]. Damit wird die Dimension als die spezielle Art der Zusammensetzung einer Dimension aus den Basisdimensionen erklärt.

⁴ „Hence, in all scientific studies it is of the greatest importance to employ units belonging to a properly defined system, and to know the relations of these units to the fundamental units, so that we may be able at once to transform our results from one system to another“ (Übers. durch den Verf.).

Bis heute kennt die Physik 7 fundamentale physikalische Dimensionen, die die Dimensionen des heute verwendeten gesetzlich geregelten SI-Basisgrößensystems mit ihren Einheiten darstellen [76]. Darin sind Basisgrößen immer dimensionsbehaftet, während für abgeleitete Größen der folgende Sonderfall auftreten kann:

Definition 6 Dimensionslose Größe [76]. *Hat eine abgeleitete physikalische Größe x_j im zugrundeliegenden Basisgrößensystem die Dimension*

$$\dim(x_j) = D_1^0 D_2^0 \cdots D_r^0 = 1 \quad (8)$$

so wird die Größe als dimensionslose Größe⁵ bezeichnet. Eine dimensionslose Größe ist daher invariant (d.h. unabhängig) unter Skalentransformationen der Basisgrößen.

Diskussion. Die Physik beschäftigt sich mit der Erkenntnis und der qualitativen und quantitativen Beschreibung von Phänomenen in der Natur. In der ersten Stufe der Erkenntnis ist dabei die konzeptionelle Unterscheidung und Benennung einzelner physikalischer Einflußgrößen notwendig, für deren konkrete Begriffsbestimmung der allgemeine physikalische Dimensionsbegriff dann natürlich bereits vorhanden sein muß. Die Erstellung eines klar definierten physikalischen Dimensionsbegriffs sollte daher erwartungsgemäß eigentlich ganz am Anfang der Physik und ihrer Anwendungen stehen.

Überraschenderweise ist jedoch aus der Geschichte der Physik kein einheitlicher Dimensionsbegriff überliefert. VON HELMHOLTZ formuliert dies wie folgt: „Obwohl Zählen und Messen die Grundlagen der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden sind, die wir überhaupt kennen, so ist über die erkenntnistheoretischen Grundlagen derselben doch verhältnismäßig wenig gearbeitet worden. Es ist der Physik nach und nach gelungen, alle diese Werte auf Einheiten zurückzuführen, die aus den . . . fundamentalen Maßeinheiten . . . durch Multiplikation, Potenzierung und ihren inversen Operationen zusammengesetzt sind“ [95]. MAX PLANCK (1858-1947), dem folgendes Zitat zugeschrieben wird, soll sich noch pointierter geäußert haben: „Die Frage nach der wahren Dimension einer physikalischen Größe hat nicht mehr Sinn als die Frage nach dem wahren Namen irgendeiner Sache“ [198].

PLANCK und V. HELMHOLTZ widersprechen damit der Auffassung, die Dimensionsbegriffe seien nicht erklärungsbedürftig und entstammten Erfahrungstatsachen [116]. Es ist nicht nur korrekt, sondern auch methodisch vorteilhafter zuzugeben, daß die Frage, warum sich gerade die Dimensionsbegriffe der „Masse“, „Länge“ und „Zeit“ etc. herausgebildet haben, erkenntnistheoretisch noch offen ist. Denn falls sich die Dimensionsbegriffe als ein reines Gedankenkonstrukt entpuppen sollten und ein im Planckschen Sinne „wahrer“ Ursprung dann prinzipiell offenbleibt, ist es besser, sich gleich auf den formalen Standpunkt der Theoriebildung zurückzuziehen und lediglich zu fordern, die r „beliebigen“ Dimensionsbegriffe $\dim(x_1), \dots, \dim(x_r)$ untereinander unabhängig zu wählen. Durch ein solches Vorgehen wird nicht nur die vorhandene Gestaltungsfreiheit im Aufbau von Dimensionssystemen verdeutlicht, sondern auch die Einsicht in die Logik der daraus resultierenden Argumentationsstrukturen verbessert.

⁵Insbesondere führt GÖRTLER hierzu aus, es hätte sich leider eingebürgert, im Fall von $\dim(x_j) = 1$ von „dimensionslosen Größen“ zu sprechen, man könnte eine solche Größe als „unbekannte Größe“ bezüglich des verwendeten Basissystems bezeichnen [76]. Die ebenfalls eingebürgerte Schreibweise für die Einheit einer dimensionslosen Größe als $[-]$ ist desweiteren korrekterweise durch $[1]$ zu ersetzen.

Es ist deshalb nur notwendig, die verwendeten Dimensionsbegriffe $D_1, \dots, D_r$ der als Basisgrößen $[x_1, \dots, x_r]$ gewählten physikalischen Größen x_j voneinander unabhängig zu wählen. Formal zeichnet sich ein derartig gewähltes Dimensionssystem somit durch die in Gleichung (4) festgelegte Skalierungseigenschaft λ_i der Maßeinheit, einen absoluten Nullpunkt $\delta_i = 0$, sowie die Unabhängigkeit der Dimensionsbegriffe untereinander aus. Dabei kann in Abbildung 7 die Unabhängigkeit der Basisgrößen in den Dimensionsbegriffen durch das lineare Unabhängigkeitsschema der Dimensionsmatrix $E = (\gamma_{ji})$ der Dimensionsexponenten γ_{ji} aus Gleichung (6) kontrolliert⁶ werden.

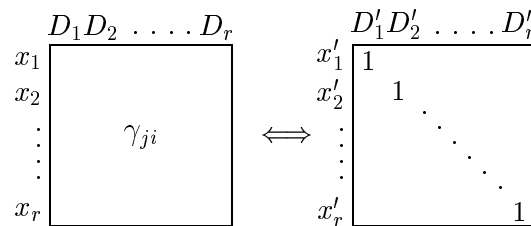


Abbildung 7: Lineares Unabhängigkeitsschema für Erzeugendensysteme

Hierzu wird die aus r Zeilen für die gewünschten Basisgrößen x_j und r Spalten für die Dimensionen D_i gebildete quadratische Matrix mit der Darstellung der Dimensionsexponenten γ_{ji} in Abbildung 7 links durch rangerhaltende Umformungen auf die Diagonalf orm in Abbildung 7 rechts gebracht. Gelingt dies, wie im für das SI-System in Abbildung 7 dargestellten Fall, so handelt es sich um ein den Raum der Dimensionen erschließendes Erzeugendensystem von Basisgrößen [76]. Da durch die rangerhaltenden Umformungen Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden, ergeben sich für Spaltenmanipulationen nach Gleichung (7) neue Dimensionsbegriffe D'_i , während sich aus den Spaltenmanipulationen nach Gleichung (6) die dazu passenden Basisgrößen x'_i ergeben. Im konkreten Fall des SI-Systems wären die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen identisch.

Der physikalische Dimensionsbegriff geht bis auf JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830) zurück, der als der Begründer der modernen Dimensionsrechnung gilt [76]. FOURIER hat die Dimensionskontrolle in Gleichungen eingeführt und sich über die Herkunft des Dimensionsbegriffs wie folgt geäußert: „Hier ist anzumerken daß jede unbekannte oder vorgegebene Größe eine ihr eigene Dimension besitzt und daß die verschiedenen Terme ein und derselben Gleichung nur dann verglichen werden können, sofern sie identische Dimensionsexponenten [d.h. identische Dimension, Anm. des Übers.] besitzen.“⁷

FOURIER, der (obwohl nicht ganz korrekt) noch vom Dimensionsexponenten als der Dimension spricht, wird daher der Verdienst zugesprochen, erstmals den Begriff der physikalischen Dimension präzisiert, das Prinzip der Dimensionshomogenität auf Summanden physikalischer Gleichungen bewußt angewandt, die Dimensionsprobe für physikalische Gleichungen eingeführt zu haben sowie durch die Analyse der beteiligten Dimensionen zu Schlußfolgerungen über physikalische Sachverhalte und Zusammenhänge gekommen zu sein [64]. Für die Begründung dieses Vorgehens verweist aber auch FOURIER als Wegbereiter des später erst postulierten Prinzips der Dimensionshomogenität auf die philosophische Erkenntnis der alten Griechen, die im folgenden erläutert wird.

⁶Im Sinne linearer Algebra muß $\text{Rang}(E) = r$ für die Exponentenmatrix $E = (\gamma_{ji})$ mit $i, j = 1, \dots, r$ gelten.

⁷„Il faut maintenant remarquer que chaque grandeur indéterminée ou constante a une dimension qui lui est propre et que les termes d'une même équation ne pourraient pas être comparés, s'il n'avaient pas point le même exposant de dimension.“ [116]

2.1.4 Dimensionshomogenität

Die gedankliche Grundlage für die vorangegangenen Definitionen 3 bis 6 ist das Prinzip der Dimensionshomogenität, das als das Homogenitätsprinzip für dimensionsbehaftete Größen über FOURIER, NEWTON und GALILEI bis auf die Griechen der Antike zurückgeht. Bereits EUKLID (um 300 v.Chr.) bezog sich auf frühere Arbeiten und postulierte ([99], siehe auch Seite 5): „Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier homogener Größen zueinander.... Denn wie sich Inhomogenes zueinander verhält, ist, wie ANDRASTOS sagt, zu wissen unmöglich. Bei homogenen Größen aber ist es möglich, wie z.B. Längen zu Längen, ... Zeit zu Zeit, ... und allgemein Dinge von gleicher Gattung oder von gleicher Art sich irgendwie zueinander verhalten.“

Als Konsequenz aus dieser Sichtweise können mit den Gleichungs- bzw. Ungleichungsrelationen „<“, „=“ und „>“ nur Elemente d.h. physikalische Größen derselben Dimension miteinander verglichen werden. Deshalb wird in anderen, mengentheoretisch orientierten Darstellungen des Dimensionsbegriffs dieser alternativ über die folgende Definition eingeführt: „Eine Dimension ist eine Menge additiver Größen“ [118].

Da im Rahmen der Modellbildung physikalischer Phänomene die relevanten Einflußgrößen als dimensionsbehaftete physikalische Größen ganz allgemein in einer Funktion f miteinander verknüpft werden, so müssen auch diese Verknüpfungen ausnahmslos dem Homogenitätsprinzip genügen. Aus der Anwendung des erkenntnistheoretisch begründeten Homogenitätsprinzips auf dimensionsbehaftete physikalische Größen begründet sich das Prinzip der Dimensionshomogenität, das als zentrale These der Naturwissenschaften im folgenden dargestellt ist:

These 1 Dimensionshomogenität [76]. *Eine Gleichung heißt dimensionshomogen, wenn alle ihre additiven Terme dieselbe physikalische Dimension besitzen. Jede vollständige physikalische Modellvorstellung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ erfüllt die Eigenschaft der Dimensionshomogenität und erfüllt die Dimensionsprobe. Die Forderung der Dimensionshomogenität ist für die Naturwissenschaften so grundlegend, daß daraus folgt, daß nicht dimensionshomogene Modellvorstellungen prinzipiell nicht richtig sein können.*

Insbesondere GÖRTLER führt hierzu aus, daß der gesamte Aufbau der heute bekannten Physik über die Gruppentheorie so eng mit der These der Dimensionshomogenität verbunden ist, daß der gesamte Aussagenkörper der Physik formal neu aufgebaut werden müßte, falls sich diese These wider Erwarten nicht als haltbar erweisen sollte [76]. In den Naturwissenschaften wie der Physik und dem Ingenieurwesen, in dem die These der Dimensionshomogenität als gültig anerkannt ist, werden deshalb in der Modellbildung nur sogenannte *dimensionshomogene Funktionen* verwendet. Deren Eigenschaften werden noch gesondert im Abschnitt 2.1.7 dargestellt.

Als Konsequenz aus dem Prinzip der Dimensionshomogenität folgt damit, daß nur Größen derselben Dimension additiv miteinander verknüpft werden dürfen. Dies ist damit gleichbedeutend mit der Existenz der sogenannten Dimensions- oder Einheitenprobe. Auch müssen wegen der Entwicklung transzendenter Funktionen in ihre jeweiligen unendlichen Potenzreihen wegen der darin auftretenden Summanden in allen Potenzen die Argumente transzendenter Funktionen immer dimensionslos sein, da ansonsten die Dimensionshomogenität in der unendlichen Summe nicht erfüllt werden kann.

Die Bedeutung der konsistenten Verwendung physikalischer Dimensionen in dimensionshomogenen Modellvorstellungen ist nicht zu unterschätzen. So benannte 1999 das *Jet Propulsion Laboratory (JPL)* als zentrale Ursache für das Scheitern der „Mars Climate Orbiter“-Mission die fehlende Umrechnung von angelsächsischen Einheiten in das metrische SI-System in einem Softwaremodul⁸ [113]. In der Tat bieten konventionelle Programmiersprachen wie „C“ [117, 182] oder deren objektorientierte Erweiterung „C++“ [216] keine standardmäßige Unterstützung von Datentypen zur zusätzlichen Aufnahme der physikalischen Einheitenrepräsentation.

Es sind daher zu diesem Zweck in den letzten Jahren Softwarebibliotheken zur objektorientierten Überladung der im jeweiligen Sprachstandard verfügbaren Datentypen entstanden [102, 227]. Sie gestatten u.a. eine erweiterte syntaktische Codeanalyse des Quellcodes zur Übersetzungszeit (*compile time*), indem die in modernen Sprachübersetzern (*compiler*) durchgeführte Typüberprüfung (*type checking*) um die Analyse der durch das Programm fortgepflanzten Dimensionsinformation ergänzt wird. Derartige maschinelle Prüfverfahren sind bei der Komplexität und dem großen Umfang von Softwaresystemen auf längere Sicht ohne Alternative. Dies gilt neben der Software natürlich auch für die ihr zugrundeliegenden Algorithmen [90]. Dieses Beispiel zeigt darüber hinaus sehr anschaulich, wie vielfältig die Dimensionsinformation genutzt werden kann.

2.1.5 Dimensionsmatrix

Im folgenden wird die Frage betrachtet, wieviele dimensionslose Potenzprodukte nach Gleichung (8) für eine vorgegebene Menge $(x_1, \dots, x_n)$ dimensionsbehafteter Größen existieren. Hierzu wird entsprechend dem linearen Unabhängigkeitsschema in Abbildung 7 eine sogenannte *Dimensionsmatrix* $E = (\gamma_{ji})$ der Dimensionsexponenten γ_{ji} erstellt (links in Abbildung 8), die jetzt aus n Zeilen für die n physikalischen Variablen⁹ und bis zu $k \leq 7$ Spalten für die beteiligten Dimensionen besteht.

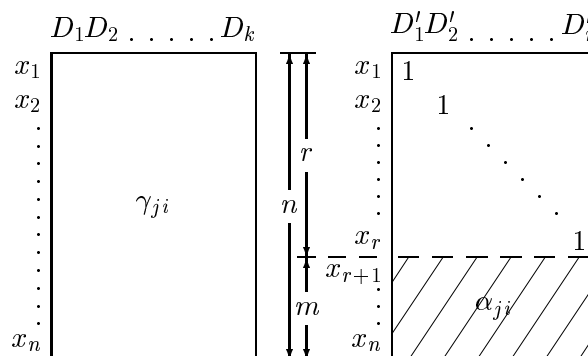


Abbildung 8: Dimensionsmatrix mit Berechnungsschema

Anschließend wird zur Ermittlung der dimensionslosen Potenzprodukte durch rangerhaltende Spaltenadditionen die Dimensionsmatrix auf eine obere Diagonalform gebracht und eventuelle Nullspalten gestrichen, siehe Abbildung 8 rechts.

⁸ „The root cause of the loss of the spacecraft was the failed translation of English units into metric units in a segment of ground-based, navigation-related mission software.“

⁹ Nach Definition 5 gilt z.B. für eine Kraft $P [N]$: $\dim(P) = D_1^1 D_2^1 D_3^{-2} D_4^0 \dots D_7^0$. Der Zeileneintrag in der Dimensionsmatrix für die Größe $P = x_j$ im SI-Einheitensystem ist $\gamma_j = (1, 1, -2, 0, 0, 0, 0)$.

Die Spaltenaddition beim Erzeugen der oberen Diagonalform in der Matrixdarstellung der Dimensionsmatrix in Bild 8 rechts bedeutet dabei auch, daß von einer Darstellung der physikalischen Größen im SI-Einheitensystem mit $k \leq 7$ Dimensionen $D_1, \dots, D_k$ auf eine problemangepaßtere (möglicherweise auch kleinere), in bezug auf die Erfordernisse der Relevanzliste jedoch gleichwertige Dimensionsdarstellung in einem anderen System $D'_1, \dots, D'_r$ mit nur $r \leq k$ Dimensionen übergegangen werden kann [76, 183].

Da dimensionslose Potenzprodukte bestimmt werden sollen, repräsentiert Abbildung 8 ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Exponenten γ_{ji} . Homogene lineare Gleichungssysteme sind immer lösbar [35], dabei ergibt sich je nach Rangabfall des Gleichungssystems ein m -facher Lösungsraum [35]. Durch die Berechnungssystematik der Dimensionsmatrix bilden die in der unteren Rechtecksmatrix verbleibenden Koeffizienten α_{ji} eine spezielle Lösung dieses m -fachen Lösungsraumes. Die gesuchten dimensionslosen Potenzprodukte π_j lauten damit

$$\pi_j = x_{j+r} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} \quad (9)$$

wobei $j = 1, \dots, m$ ist und die Exponenten α_{ji} aus Abbildung 8 entnommen sind. Dabei bestimmt die Höhe des Rangabfalls $m = n - r$ in der Dimensionsmatrix die Anzahl der dimensionslosen Potenzprodukte in Gleichung (9). Eine spezielle Lösungsmenge der m dimensionslosen Potenzprodukte bestehend aus

$$\Pi_m = \{\pi_1, \dots, \pi_m\} \quad (10)$$

wird als *Fundamentalsystem* bezeichnet. Zu jeder *Relevanzliste* $\{x_1, \dots, x_n\}$ von n physikalischen Größen gehört damit ein solches Fundamentalsystem. Aus dem Aufbau der Dimensionsmatrix in Abbildung 8 und dem Berechnungsschema für die dimensionslosen Potenzprodukte nach Gleichung (9) können später noch einige wichtige Eigenschaften gefolgert werden, da die Darstellung der Berechnungssequenz der Dimensionsmatrix in Abbildung 8 dem GAUSSschen Algorithmus [35] zur Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems entspricht. Die Dimensionsmatrix ermöglicht durch Handrechnung die zügige Bestimmung eines Fundamentalsystems und wird in der Literatur [12, 76, 106, 130, 170, 183, 218] in dieser oder in transponierter Form benutzt.

2.1.6 Fundamentalsysteme

Nach PAWLOWSKI [170] kann in Gleichung (11) durch eine quadratische Matrix $B = (\beta_{ji})$ mit nicht verschwindender Determinante ein Fundamentalsystem $\Pi_m = \{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ in

$$\pi'_j = \prod_{i=1}^m \pi_i^{\beta_{ji}} \quad (11)$$

ein anderes Fundamentalsystem $\Pi'_m = \{\pi'_1, \dots, \pi'_m\}$ überführt werden, da die Fundamentalsysteme eine Gruppe bilden [76, 170]. Im mathematischen Sinne sind die Fundamentalsysteme Π_m und Π'_m deshalb einander völlig gleichwertig. In der Praxis arbeitet man jedoch gerne mit bestimmten Fundamentalsystemen, die sich für bestimmte Problemstellungen eingebürgert haben.

2.1.7 Dimensionshomogene Funktionen

Für vollständige dimensionshomogene Funktionen $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ von n dimensionsbehafteten Variablen gilt das Pi-Theorem von Buckingham [33, 39], das hier als zentraler Satz der Dimensionentheorie angegeben wird. Entsprechend dem Beweis in Abschnitt A.2 ist dazu lediglich die Kenntnis der Dimensionsrepräsentationen der in der Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ von f angegebenen Einflußgrößen notwendig. Die klassische Form des Pi-Theorem von Buckingham lautet [76]:

Theorem 2 Pi-Theorem von Buckingham [33, 39]. *Zu jeder vollständigen dimensionshomogenen Beziehung f von n dimensionsbehafteten Größen $x_i \in \mathbb{R}^+$ existiert auch eine dimensionslose Beziehung G von m dimensionslosen Potenzprodukten $\pi_j \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} G(\pi_1, \dots, \pi_m) \quad (12)$$

wobei die $m = n - r$ dimensionslosen Potenzprodukte π_j (auch als Ähnlichkeitskennzahlen oder Transformationsgruppen bezeichnet) nach Gleichung (10) ein Fundamentalsystem

$$\pi_j = x_{r+j} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} \quad (13)$$

bilden, das aus der Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ der n physikalischen Größen gebildeten Dimensionsmatrix mit Rang r in Abbildung 8 bestimmt wird. Dabei gilt $i \in \{\mathbb{N}^+ \mid i = 1, \dots, r\}$, $j \in \{\mathbb{N}^+ \mid j = 1, \dots, m\}$ und $m = n - r$. Die $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$ sind reelle Konstanten.

WEBER sieht im Pi-Theorem der Gleichung (12) ein „allgemeines Ähnlichkeitsprinzip“ und interpretiert dies wie folgt: „Die meßbaren physikalischen Geschehnisse sind von der Art, daß sie in einem geometrisch ähnlich¹⁰ vergrößerten oder verkleinerten System unter der Wirkung gleicher physikalischer Ursachen *physikalisch ähnlich* ablaufen; dies soll heißen: die Vorgänge in den Vergleichssystemen sollen nicht nur den gleichen analytischen Ansatz haben, sondern auch durch die gleiche mathematische Funktion, also durch das gleiche Gesetz zwischen reinen Zahlen, beschrieben werden“ [231].

Wie von GÖRTLER ausführlich diskutiert [76, 77], wurde die ursprüngliche Beweisführung des Pi-Theorems immer wieder verbessert, um mit möglichst wenig Voraussetzungen auszukommen. Die in Anhang A.2 gezeigte moderne Beweisführung des Pi-Theorems macht gegenüber der ursprünglichen Beweisführung keine einschränkenden Annahmen bezüglich des Operators f in Gleichung (12) und ist daher für alle dimensionshomogenen Gleichungen und Gleichungsarten gültig [57, 76].

Neben der klassischen Form des Pi-Theorems hat sich mit Gleichung (15) eine noch modernere Schreibweise des Pi-Theorems etabliert, in der die freien Exponenten $k_i \in \mathbb{R}$ nicht auftreten und daher auch nicht extra bestimmt werden müssen. Darüber hinaus ist in seiner konstruktiven Form garantiert, daß aufgrund der gemachten Voraussetzungen nicht nur die Existenz von F gesichert, sondern auch die Transformationsvorschriften der dimensionslosen Variablen π_j sofort angegeben werden können.

¹⁰Bemerkung: Die besondere Betonung von *geometrisch ähnlich* bzw. der geometrischen Ähnlichkeit kommt aus dem besonderen Interesse WEBERS an Modellversuchen mit Schiffen [231]. Natürlich gibt es viele physikalische Gleichungen der Form (12), in denen die Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ keine geometrischen Größen aufweist und das Pi-Theorem dann andere Interpretationen von Ähnlichkeit ermöglicht.

Theorem 3 (Moderne Form) **Pi-Theorem von Buckingham [57]**. *Aus der Existenz einer beliebigen vollständigen dimensionshomogenen Beziehung f von n dimensionsbehafteten Größen $x_i \in \mathbb{R}^+$ folgt die Existenz einer dimensionslosen Beziehung F mit*

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (14)$$

$$F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0 \quad (15)$$

wobei die $m = n - r$ dimensionslosen Potenzprodukte π_j (auch als Ähnlichkeitskennzahlen oder Transformationsgruppen bezeichnet) nach Gleichung (10) ein Fundamentalsystem

$$\pi_j = x_{r+j} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} \quad (16)$$

bilden, das aus der Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ der n physikalischen Größen gebildeten Dimensionsmatrix mit Rang r in Abbildung 8 bestimmt wird. Dabei gilt $i \in \{\mathbb{N}^+ \mid i = 1, \dots, r\}$, $j \in \{\mathbb{N}^+ \mid j = 1, \dots, m\}$ und $m = n - r$. Die $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$ sind reelle Konstanten.

Bemerkung: Da die in Gleichung (14) dargestellte beliebige Beziehung f dimensionshomogen ist, muß immer mindestens ein x_i aus der Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ in seiner Dimensionsdarstellung von den verbleibenden $(n - 1)$ dimensionsbehafteten Größen linear abhängig sein. Die daraus folgende Dimensionsmatrix in Abbildung 8 rechts besitzt daher stets mehr Zeilen als Spalten. Aus dieser Betrachtung folgt, daß dimensionsbehaftete Gleichungen mindestens eine dimensionslose Ähnlichkeitskennzahl aufweisen. Dies bedeutet weiterhin, daß bei dimensionshomogenen Gleichungen die Existenz von Ähnlichkeitsbegriffen stets gesichert ist.

2.1.8 Rechenregeln für Dimensionen

Über die Behandlung dimensionsbehafteter Größen ist aufgrund des Prinzips der Dimensionshomogenität die Addition und Subtraktion sowie die Dimensionslosigkeit der Argumente transzendenter Funktionen insoweit erklärt, als nur Terme gleicher Dimension addiert werden dürfen [76]. Die Dimensionsdarstellung bei Multiplikation und Division dimensionsbehafteter Größen ist durch das Produkt-Theorem gegeben. Aus Gründen der Vollständigkeit sind hier noch die Rechenregeln für die Integration und Differentiation dimensionsbehafteter Größen angegeben. Für die Integration folgt die Dimensionsdarstellung [76]

$$\dim \left(\int f(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) = \dim (f(x_1, \dots, x_n)) \cdot \dim (x_i) \quad (17)$$

Für die Differentiation folgt die Dimensionsdarstellung [76]

$$\dim \left(\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right) = \frac{\dim (f(x_1, \dots, x_n))}{\dim (x_i)} \quad (18)$$

2.1.9 Ähnlichkeitsfunktionen

Im folgenden werden noch die Abbildungseigenschaften des Pi-Theorems diskutiert und in Abbildung 9 visualisiert. Hierzu muß allerdings die ganz allgemeine Schreibweise des Pi-Theorems in Gleichung (14) als implizite Funktion F auf die Menge aller nach π_m auflösbaren, d.h. expliziten Funktionen $\pi_m = H(\pi_1, \dots, \pi_{m-1})$ beschränkt werden. Dimensionslose Funktionen von Ähnlichkeitskennzahlen werden dabei auch als *Ähnlichkeitsfunktionen* bezeichnet. Ausgehend von der impliziten Funktion in Gleichung (15) folgt

$$\begin{aligned}
 \pi_m &= H(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}) \\
 &= H\left(x_{r+1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{1i}}, \dots, x_{n-1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{(m-1)i}}\right) \\
 x_n &= \left(\prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_{mi}}\right) H\left(x_{r+1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{1i}}, \dots, x_{n-1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{(m-1)i}}\right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

Gleichung (19) kann damit so verstanden werden, daß dimensionshomogene Beziehungen immer so umgeschrieben werden können, daß zunächst eine Transformation auf dimensionslose Variablen erfolgt, zwischen diesen der dimensionslose Zusammenhang H bestimmt wird und dessen Ergebnis anschließend in den dimensionsbehafteten Raum zurücktransformiert wird.

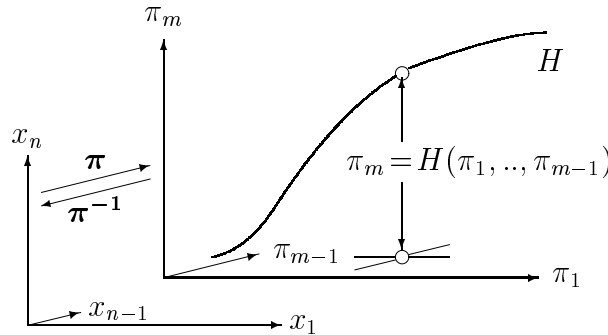


Abbildung 9: Transformationsbeziehungen des X -Raums mit dem Π -Raum

Dies stellt auch die in Abbildung 9 dargestellte Tatsache dar, daß parallel zur dimensionshomogenen Funktion $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$ dimensionsbehafteter Parameter auch immer eine dimensionslose Beziehung $\pi_m = H(\pi_1, \dots, \pi_{m-1})$ dimensionsloser Ähnlichkeitskennzahlen existiert. Die Hin- und Rücktransformationen, durch π und π^{-1} dargestellt, sind in den Definitionen 10 und 11 auf Seite 58 zusätzlich erläutert.

Für den wesentlichen Einsatz des Pi-Theorems ergeben sich damit zwei Alternativen: Entweder wird H durch Transformation aus h analytisch (durch Einsetzen der π_j in h) oder durch Methoden der Funktionsapproximation bestimmt. Ein derartige Vorgehensweise bietet sich in der datengetriebenen Modellbildung insbesondere dann an, falls nur eine gewisse Menge an Punktpunkten $(x_1, \dots, x_n)$ von h bekannt sind und für ein Approximationsverfahren zur Verfügung stehen [184, 185, 186, 187].

2.2 Phänomene

In diesem Abschnitt wird die Eigenschaft der Ähnlichkeit und der Analogie kurz abstrakt dargestellt. Konkrete Beispiele zur Dimensionsanalyse und der Methode der Transformationsgruppen beinhaltet Abschnitt 2.3.

2.2.1 Ähnlichkeit

Der Existenz von Ähnlichkeitsbegriffen liegt die Bildung dimensionsloser Kennzahlen $\{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ aus einer Relevanzliste $\{x_1, \dots, x_n\}$ zugrunde. Das abgeleitete Ähnlichkeitspostulat ist dann durch $\pi_j = \text{const}$ zu validieren, da in den dimensionslosen Koordinaten alle vollähnlichen Objekte oder Vorgänge auf ein und denselben Punkt zusammenfallen müssen. Die Beschreibungsfunktion $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ und die Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ sind dabei über die dimensionslosen Kennzahlen zueinander konsistent. Da die Relevanzlisten aus einer einzigen Domäne $\mathcal{D}_1$ kommen, spricht man von Ähnlichkeit, siehe Abbildung 10.

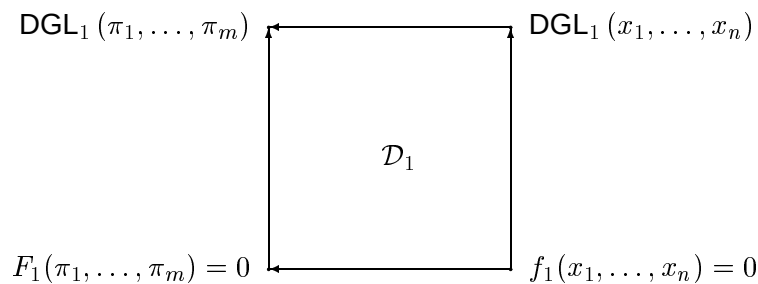


Abbildung 10: Ähnlichkeit

Da in den Naturwissenschaften zur Modellgewinnung oft Bilanzgleichungen an Elementen infinitesimaler Kantenlänge erstellt werden, führt dies auf Differentialgleichungen (DGLn) in den benutzten Variablen. Für diese $DGL_1(x_1, \dots, x_n)$ kann dann unter den herrschenden Randbedingungen je nach Schwierigkeitsgrad analytisch oder numerisch eine Lösungsfunktion $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ bestimmt werden. Da das Pi-Theorem sowohl für die DGL_1 als auch die Lösungsfunktion f_1 gilt, ergibt sich damit das allgemeine Konsistenz- und Ähnlichkeitsschema in Abbildung 10. Daraus folgt, daß die aus f_1 transformierte Funktion F_1 auch eine Lösung der transformierten $DGL_1(\pi_1, \dots, \pi_m)$ ist [25].

Für die Erkennung von Ähnlichkeit ist in der Relevanzliste die Festlegung der Dimensionsbegriffe erforderlich. Diese Dimensionsbegriffe können direkt aus dem Vorrat bekannter Dimensionsbegriffe entnommen sein oder auch in der Festlegung eines vektoriellen Dimensionsbegriffs begründet liegen. Während sich für den ersten Dimensionsbegriff dieser aus der Anschauung begründen läßt, werden für die letztgenannte Möglichkeit in dieser Arbeit in Abschnitt 3.2 noch formale Vorgehensweisen und im Kapitel zur Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen exemplarische Anwendungen angegeben.

Wichtig ist jedoch trotz erfolgreicher Validierung eines neuen Ähnlichkeitsbegriffs, daß dieser nur induktiven Charakter haben kann, wenn die zugrundeliegende Modellvorstellung theoretisch unbekannt ist. Das Gegenteil wäre im Ingenieurwesen i.d.R. nur dann der Fall, wenn die Lösungsfunktion oder die zugehörige Differentialgleichung bekannt

ist und die relevanten Kennzahlen durch Dimensionsanalyse daraus deduktiv gewonnen werden könnten. Dieser Vorbehalt einer induktiven gegenüber einer deduktiven Schlußfolgerung in der Erstellung der Relevanzliste gilt jedoch generell für die Güte einer jeden Modellvorstellung und kann daher nicht prinzipiell nur dieser Vorgehensweise angelastet werden.

Abschließend ist noch zu erwähnen, daß bei Übereinstimmung aller m dimensionsloser Potenzprodukte zweier Objekte oder Vorgänge von vollständiger Ähnlichkeit, bei Nichtübereinstimmung einiger dimensionsloser Potenzprodukte dann entsprechend nur von teilweiser Ähnlichkeit gesprochen wird. Die Behandlung teilweiser Ähnlichkeit erfordert jedoch sehr detailliertes Domänenwissen, da in der Regel nur z.B. ein erfahrener Experimentator die in nicht vollähnlichen Modellversuchen eingegangen physikalischen Vernachlässigungen bewerten kann [12, 85, 130, 214, 241].

2.2.2 Analogie

Können in zwei verschiedenen Domänen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ die problemrelevanten Differentialgleichungen (DGLn) durch die Methode der Transformationsgruppen oder die Lösungsfunktionen der DGLn durch Dimensionsanalyse in eine identische dimensionslose Form gebracht werden spricht man von einer Analogie, die in Abbildung 11 dargestellt ist.

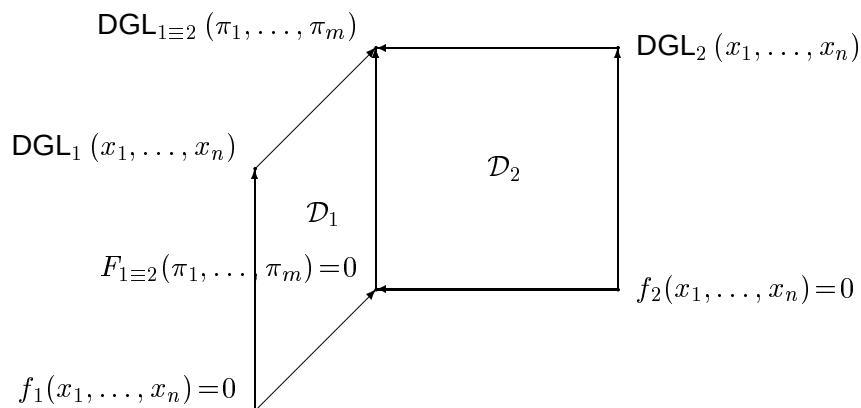


Abbildung 11: Analogie

Ein klassisches Beispiel für Analogie ist z.B. die Analogie von Wärme- und Stofftransport, in der die dimensionsbehafteten DGLn beider Gebiete $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ dimensionslos als $DGL_{1 \equiv 2}(\pi_1, \dots, \pi_m)$ miteinander zusammenfallen [8, 85, 153]. Weitere Beispiele sind z.B. mechanische und elektrische Schwinger, die identisch ineinander transformiert werden können [68, 85]. Besteht eine Analogie zweier reellwertiger und dimensionsbehafteter Domänen, so können vorhandene Simulationssysteme einer Domäne zur beweisbar korrekten Lösungsfindung in der dazu analogen Domäne eingesetzt werden [85].

Da die Relevanzlisten aus verschiedenen Domänen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ stammen, über die Kennzahlen aber ineinander abgebildet werden, sind Analogien in ihrer dimensionslosen Form identisch. Ihre sich über die Kennzahlen entsprechenden Größen in den Relevanzlisten beider Domänen werden auch als strukturelle Analogien bezeichnet [153]. Analogien existieren daher nur bei Erfüllung dieser Zusatzbedingungen, während die Existenz von Ähnlichkeitsbegriffen in dimensionsbehafteten Domänen stets gesichert ist.

2.3 Klassische Anwendungen

In der Physik und im Ingenieurwesen wird das Pi-Theorem vorteilhaft zur Gewinnung und Kontrolle neuer funktionaler Zusammenhänge $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ eingesetzt [76]. Dieser Vorgang der durch das Pi-Theorem unterstützten Modellbildung wird auch als *Dimensionsanalyse* bezeichnet. Im klassischen Ingenieurwesen wird in schwierigen Fragen auf den Gebieten der Strömungsmechanik, der Wärmeübertragung und des Stofftransports die Leistungsfähigkeit der Dimensionsanalyse in den verschiedensten Anwendungen eindrucksvoll demonstriert [122, 206, 212, 241]. Hier soll die wesentliche Vorgehensweise der Dimensionsanalyse und der Methode der Transformationsgruppen anhand zweier Beispiele kurz illustriert werden.

2.3.1 Dimensionsanalyse

Das mathematische Pendel [76] in Bild 12 besteht aus einer Punktmasse m , die an einem masselosen Stab der Länge l im Punkt O drehbar gelagert ist. Unter Vernachlässigung aller Reibungskräfte stellt sich nach Auslenkung um den Winkel $\varphi(t=0) = \theta$ bei loslassen aus der Ruhe $\dot{\varphi}(0) = 0$ unter dem Einfluß der Schwerkraft eine periodische Schwingung ein, deren Schwingungsdauer T gesucht ist.

E_1	D_1	D_2	D_3	(SI)
m	1			$[kg]$
l		1		$[m]$
g		1	-2	$[m/s^2]$
T			1	$[s]$
θ				$[1]$

→

E_2	D'_1	D'_2
l	1	
g	0	1
T	0.5	-0.5
θ		

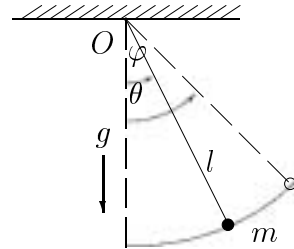


Abbildung 12: Mathematisches Pendel

Dimensionsanalyse. Die aus dem ersten Ansatz einer Relevanzliste (m, l, g, θ, T) gebildete Dimensionsmatrix E_1 in Abbildung 12 links ist nicht dimensionshomogen, da m in der Spalte der Massendimension D_1 nur allein auftritt. Damit kann kein dimensionsloses Potenzprodukt gebildet werden. Mit der formalen Streichung von m aus der Relevanzliste zur Herstellung der Dimensionshomogenität ergibt sich durch Umformen die Dimensionsmatrix E_2 in Abbildung 12. Mit $n = 4$ physikalischen Größen und einem Rang von $r = 2$ folgen unmittelbar $n - r = 2$ dimensionslose Potenzprodukte zu

$$\pi_1 = T \sqrt{g/l} \quad (20)$$

$$\pi_2 = \theta \quad (21)$$

Die nun noch notwendige Bestimmung der Funktion $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ kann im allgemeinen nur durch Approximation experimenteller Daten oder durch die Theorie erfolgen. In Fällen, in denen die Relevanzliste zunächst klein ist und dann im Zuge der wachsenden Verständnisses weiter wächst, werden dann durch das Anwachsen der Dimensionsmatrix weitere dimensionslose Potenzprodukte erzeugt, ohne die früher abgeleiteten Potenzprodukte wieder verwerfen zu müssen.

Geht man in einer ersten Näherung noch davon aus, daß die gesuchte Schwingungsdauer T unabhängig von der Anfangsauslenkung θ ist, entfällt θ ebenfalls in der Relevanzliste und ein dimensionsloses Potenzprodukt $\pi_1 = T \sqrt{g/l}$ verbleibt. Da nach der Funktionentheorie eine Funktion mit nur einem Argument eine Konstante sein muß, könnte deren Zahlenwert in einem einzigen Experiment mit einem beliebigen Pendel bestimmt werden. Es folgt also für das gesuchte T

$$T = \text{const} \sqrt{l/g} \quad (22)$$

Analytische Lösung. Zur Kontrolle der dimensionsanalytischen Betrachtungen seien hier noch die beiden Lösungen der linearisierten und der exakten Differentialgleichung (DGL) [240] angegeben. Dazu wird mit Hilfe des Drallsatzes um Punkt O in Abbildung 12 die DGL hergeleitet.

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi && \text{bzw.} \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0 && \text{(exakte DGL)} \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi &= 0 && \text{(linearisierte DGL)} \end{aligned} \quad (23)$$

Damit ist die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer T von m aus der formalen dimensionsanalytischen Betrachtung sofort bestätigt. Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \theta$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ kann für kleine Winkel durch Linearisierung ($\sin \varphi \approx \varphi$) der DGL und anschließend Koeffizientenvergleich des allgemeinen Ansatzes 24 die Lösung 25

$$\varphi = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (24)$$

$$\varphi = \theta \cos \omega t \quad (25)$$

$$\omega = \sqrt{g/l} \quad (26)$$

bestimmt werden. Aus der Kreisfrequenz ω folgt für die gesuchte Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (27)$$

$$= 2\pi \sqrt{l/g} \quad (28)$$

Damit ist die für kleine Winkel gültige Approximation der Konstanten $\text{const} = 2\pi$ in Gleichung (22) bestimmt.

Exakte analytische Lösung. Zur Berechnung der exakten Lösung wird von der Formulierung im Energiesatz ausgegangen, in dem unter Abwesenheit von Reibung die Gleichheit der Energien in der Anfangs- und in der allgemeinen Lage formuliert wird:

$$\begin{aligned} mgl \cos \theta &= mgl \cos \varphi - \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 && \text{und damit} \\ \dot{\varphi} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (29)$$

Die Integration der Differentialgleichung (29) mittels Separierung $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ führt für die Schwingungsdauer T auf die Normalform eines vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung, das noch eine Funktion des auch als $K(\sin(\theta/2))$ bezeichneten Moduls $\sin(\theta/2)$ und damit der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2) \sin^2 \varphi}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin(\theta/2)) \end{aligned} \quad (30)$$

ist. Die Werte des Integrals können für die verschiedenen Werte des Moduls Tabellenwerken [111] entnommen werden. Für kleine Werte des Moduls gilt die Potenzreihenentwicklung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2(\theta/2) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4(\theta/2) + \dots \right] \quad (31)$$

Die Schwingungsdauer nimmt damit mit steigender Auslenkung nicht-linear zu.

Bemerkung: Berücksichtigt man in der dimensionsanalytischen Betrachtung die zunächst vernachlässigte Anfangsauslenkung θ , so erhält man zwei dimensionslose Potenzprodukte. Die daraus zu bildende Funktion ist T in Gleichung (31). Dadurch zeigt sich, daß durch die zunehmende Detaillierung in der Modellbildung problemlos weitere dimensionslose Kennzahlen hinzukommen.

2.3.2 Methode der Transformationsgruppen

Alle dimensionshomogenen physikalischen Gleichungen sind invariant unter Einheitenänderungen ihrer Grundgrößenarten. Darüber hinaus können die Bestimmungsgleichungen eines physikalischen Zusammenhangs aber auch noch zusätzlich unter weiteren Transformationen invariant sein. Diese, über die bekannte Aussage des Pi-Theorems hinausgehende Anwendung hat sich in den Ingenieurwissenschaften ebenfalls in vielen Fällen als vorteilhaft erwiesen. So ergeben sich z.B. durch die Transformation der allgemeinen NAVIER-STOKES-Gleichungen in eine dimensionslose Form für die bei großen Reynoldszahlen Re begründbare Unterschlagung einiger Terme die PRANDTL'schen Grenzschichtgleichungen und für große Machzahlen Ma die Hyperschallgleichungen, aus denen dann für die jeweilige Problemstellungen asymptotisch gültige Lösungen [77] abgeleitet werden können.

Die als *Methode der Transformationsgruppen* bezeichnete Ermittlung der Invarianten setzt allerdings eine genaue Kenntnis aller physikalischen Bestimmungsgleichungen voraus und bedarf daher einer viel genaueren Kenntnis aller relevanter physikalischer Phänomene als dies bei der Erstellung einer nur vollständigen Relevanzliste für das Pi-Theorem erforderlich ist. Die Methode der Transformationsgruppen an der instationären Wärmeleitungsgleichung deshalb nur kurz dargestellt und illustriert, sie folgt dabei im wesentlichen der Vorgehensweise in [213].

Wärmeleitung. Aus der Bilanz an einem kleinen Volumenelement ergibt sich die Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung [213] in Abwesenheit innerer Wärmequellen zu

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \\ &= \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \vartheta)\end{aligned}\quad (32)$$

die unter Annahme isotroper Materialeigenschaften (λ orts-, richtungs- und temperaturunabhängig) mittels der Definition der Temperaturleitzahl $a = \lambda / \rho c$ als

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \\ &= a \Delta \vartheta\end{aligned}\quad (33)$$

geschrieben werden kann und zu deren Darstellung der Methode der Transformationsgruppen die Beschränkung auf den eindimensionalen Fall genügt. Unter der Annahme der Randbedingungen für das nachfolgende Beispiel, in dem ein heißerer Körper in einem kühleren Medium durch instationäre Wärmeleitung abkühlt, ergibt sich damit die gesuchte Lösungsfunktion der DGL als eine Beziehung

$$f(X, \vartheta_c, \lambda, a, x, \vartheta, t, \alpha) = 0 \quad (34)$$

von acht physikalischen Größen. (Darin bedeutet X eine charakteristische Länge, ϑ_c eine charakteristische Temperatur, λ die Wärmeleitzahl, a die Temperaturleitzahl, x die Ortskoordinate, ϑ die Temperatur, t die Zeit und α die Wärmeübertragungszahl.) Aus der damit gebildeten Dimensionsmatrix in Tabelle 4 werden wegen $m = n - r = 4$ die

	D_1	D_2	D_3	D_4	SI-Einheiten
X		1			m
ϑ_c				1	K
λ	1	1	-3	-1	$W/m K$
a		2	-1		m^2/s
x		1			m
ϑ				1	K
t			1		s
α	1		-3	-1	$W/m^2 K$

Tabelle 4: Dimensionsmatrix der instationären Wärmeleitung

folgenden vier dimensionslosen Potenzprodukte gewonnen.

$$\pi_1 = \frac{x}{X} \equiv \xi \quad (35)$$

$$\pi_2 = \frac{\vartheta}{\vartheta_c} \equiv \theta \quad (36)$$

$$\pi_3 = \frac{a t}{X^2} \equiv \tau \equiv Fo \quad (37)$$

$$\pi_4 = \frac{\alpha X}{\lambda} \equiv Bi \quad (38)$$

Dabei sind für π_1 als dimensionslose Ortskoordinate ξ , für π_2 als dimensionslose Temperaturvariable θ , für π_3 die dimensionslose Zeit τ bzw. die Fourier-Zahl Fo und für π_4 die Biot-Zahl Bi als üblicherweise verwendete Benennungen angegeben, die auch im folgenden benutzt werden. Durch die Transformation der eindimensionalen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (39)$$

auf die neuen Koordinaten ξ, θ und τ ergibt sich durch Einsetzen der partiellen Ableitungen $\partial \vartheta = \vartheta_c \partial \theta$, $\partial x = X \partial \xi$ und $\partial t = (X^2/a) \partial \tau$ und Umformen die Differentialgleichung der eindimensionalen instationären Wärmeleitung in dimensionsloser Form zu

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (40)$$

Damit reduziert sich der gesuchte Zusammenhang einer Lösungsfunktion entsprechend Gleichung 34 auf eine gesuchte Lösungsfunktion von nur 4 Variablen auf

$$g(\xi, Fo, Bi, \theta) = 0 \quad (41)$$

Für einige geometrisch einfache und zur Rechtfertigung nur eindimensionaler Wärmeleitung *halbunendliche* Körper (z.B. Platte, Zylinder und Kugel) können die Lösungen von Gleichung 41 sogar analytisch geschlossen angegeben und in GRÖBER-Diagrammen [8] dargestellt werden. Dies ist in Abbildung 13 für den Fall der ebenen Wand der Dicke $2X$ für die zeitliche Abnahme der Mittentemperatur $\theta = \vartheta_m/\vartheta_c$ der Wand gezeigt. Der

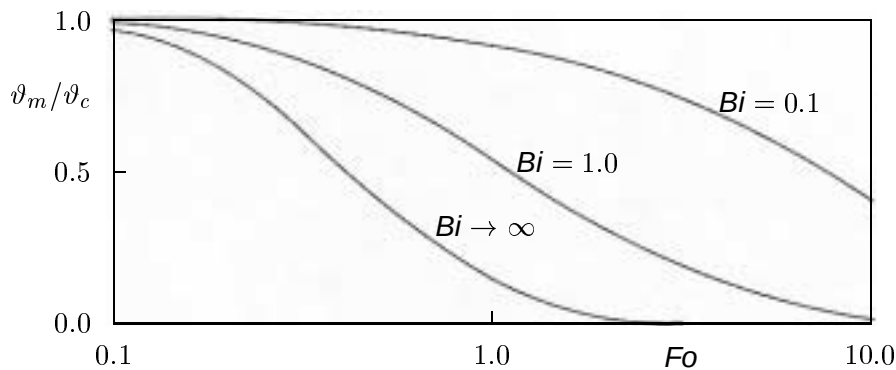


Abbildung 13: GRÖBER-Diagramm der ebenen Wand [1]

für eine bestimmte Wand z.B. natürlich auch experimentell ermittelbare Temperaturverlauf gilt wegen Gleichung 41 damit nicht nur für diese bestimmte Wand, sondern auch für alle anderen Wände, deren Größen identische Kennzahlen bilden und somit neben der verlangten thermischen und geometrischen Ähnlichkeit (π_1 und π_2) auch aus affinen Transformationen (π_3 und π_4) erzeugt werden können.

Damit sei die Kurzdarstellung der Methode der Transformationsgruppen abgeschlossen. Im folgenden werden noch kurz einige wichtige Ergebnisse zur Modellbildung mit der Ähnlichkeitstheorie zusammengefaßt und diskutiert.

2.4 Diskussion

Für die Methodik der Ähnlichkeitstheorie ergeben sich die folgenden Vorteile:

- Reduktion auf wenige Größen. Durch das Pi-Theorem erfolgt eine Reduktion von n physikalischen Größen auf $m = n - r$ dimensionslose Kennzahlen. Jede Kennzahl in Form eines Monoms stellt dabei i.d.R. ein Verhältnis von bis zu $r + 1$ verschiedenen physikalischen Größen dar, die in die Kennzahl eingehen und die einen bestimmten Vorgang oder ein Objekt charakterisieren. Durch das Auftreten derselben Kennzahl in verschiedenen Gleichungen werden die Gemeinsamkeiten der unterschiedlichen physikalischen Objekte und Vorgänge formal sichtbar.
- Bildung physikalisch interpretierbarer Invarianten. Durch die theoretische Grundlage der Ähnlichkeitstheorie existiert eine beweisbare Methode, Ähnlichkeitsbegriffe für jede dimensionsbehaftete Beschreibung abzuleiten und die Existenzfrage nach Ähnlichkeit durch die Definition „Ähnlichkeit ist Gleichheit im Sinne einer Abstraktion“ (Seite 6) zu beantworten. Durch die formale Eigenschaft $\pi_j = \text{const}$ wird darüber hinaus die Menge der vollähnlichen Objekte oder Vorgänge festgelegt, die im Sinne ihrer dimensionslosen Darstellung ununterscheidbar sind.
- Gewinnung neuer Ähnlichkeitsbegriffe. Die mit neuen vektoriellen Dimensionsbegriffen in den Relevanzlisten abgeleiteten neuen Ähnlichkeitsaussagen können durch Konsistenzbetrachtungen überprüft werden. Dies kann entweder analytisch oder experimentell erfolgen. Ist die Ähnlichkeitsaussage nicht haltbar, können die verwendeten Dimensionsbegriffe verworfen bzw. einer Revision unterzogen werden. Die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen bietet damit trotz ihres starken experimentellen Charakters gute Möglichkeiten des Erkenntnisgewinns.
- Nutzen von Vorwissen. Für die Erstellung der Dimensionsmatrix aus einer Relevanzliste müssen lediglich die Dimensionsdarstellungen der physikalischen Größen $x_1, \dots, x_n$ bekannt sein. Damit können einzelne Punktproben $x_1, \dots, x_n$ aus experimentellen, numerischen oder analytischen Untersuchungen in den Raum der dimensionslosen Kennzahlen $\pi_1, \dots, \pi_m$ abgebildet und über die Voll- bzw. Teilähnlichkeitsbedingungen $\pi_j = \text{const}$ systematische Untersuchungen zur Validierung der Modellvorstellung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ durchgeführt werden.

Dem stehen die folgenden Nachteile der Methodik gegenüber:

- Verlust der Eindeutigkeit in der Größenausprägung. Durch die Verwendung dimensionsloser Kennzahlen charakterisiert eine einzelne Bewertungsaussage $\pi_j = \text{const}$ nicht mehr eindeutig ein Objekt oder einen Vorgang, sondern umfaßt die ganze Klasse aller vollähnlichen Objekte oder Vorgänge. Dies bedeutet, daß zur eindeutigen Festlegung der Größenausprägung eines Objekts oder Vorgangs i.d.R. bis zu r Randbedingungen mitgeführt werden müssen, da eine dimensionslose Kennzahl i.d.R. aus bis zu $r + 1$ physikalischen Größen gebildet ist.
- Fehlerquellen im Aufbau der Relevanzliste. Durch falsche bzw. fehlende Größen im Aufbau der Relevanzliste (z.B. durch vergessene Naturkonstanten) können zusätzliche dimensionslose Kennzahlen entstehen oder fehlen, die nicht zur Ableitung der richtigen Ähnlichkeitsfunktion führen. Derartige Fehlerquellen können lediglich durch umfassende Konsistenzbetrachtungen aufgespürt werden.

3 Notwendige Voraussetzungen für die Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen

Nach der erfolgten Darstellung verschiedener klassischer Einsatzmöglichkeiten ähnlichkeitstheoretischer Methoden im Ingenieurwesen stellt sich die Frage, ob die Ähnlichkeitstheorie prinzipiell auf Anwendungen im Ingenieurwesen begrenzt ist oder unter welchen Voraussetzungen sie auch in anderen Wissenschaftsgebieten eingesetzt werden kann.

Da diese Frage letztendlich nur durch eine genaue Analyse der für die Gültigkeit des Pi-Theorems notwendigen Voraussetzungen beantwortet werden kann, werden diese im folgenden nochmals betrachtet. Die Existenz entsprechender Dimensionsbegriffe, einer Repräsentationsform bzw. Modelldarstellung in Form funktionaler Beziehungen sowie die Bedingung der Dimensionshomogenität, die hierfür notwendigerweise erfüllt sein muß, wird daher unter diesem Gesichtspunkt untersucht. Die notwendigen Voraussetzungen für die Übertragung von dimensionslosen Ähnlichkeitsbegriffen auf neue Anwendungsgebiete werden dann in einem Einbettungssatz zusammengefaßt.

3.1 Dimensionssysteme

Nach Definition 3 setzen sich dimensionsbehaftete physikalische Größen x entsprechend der hier nochmals dargestellten Gleichung (2) aus dem Produkt einer Zahl $\{x\}$ und ihrer Einheit $[x]$ zusammen. Für die Definition einer physikalischen Größe

$$x_i = \underbrace{\{x_i\}}_{\text{Zahl}} \cdot \underbrace{[x_i]}_{\text{Einheit}} \quad (42)$$

wird daher die Festlegung eines kohärenten Einheitensystems benötigt, wie es z.B. in Form des international genormten SI-Einheitensystems [53, 109, 172] vorliegt. Die darin verwendeten Einheiten besitzen alle einen theoretisch absoluten, nicht frei wählbaren Nullpunkt sowie eine frei definierte Intervallgröße für die Definition der jeweiligen Einheit (d.h. die gesetzlich festgelegte Einheitengröße „1 $[x]$ “).

Aufgrund der auf dem Dimensionsbegriff beruhenden Einheiten ist auch die Existenz der dimensionslosen Gruppen π_j gesichert, die sich für eine Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ unter Verwendung von Gleichung (42) durch die Wahl z.B. der in der Dimensionsmatrix in Abbildung 8 bestimmten α_{ji} zu rein dimensionslosen Größen π_j der Dimension $[1]$ mit

$$\pi_j = x_{j+r} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} = \underbrace{\{x_{j+r}\} \prod_{i=1}^r \{x_i\}^{-\alpha_{ji}}}_{\{\pi_j\}} \cdot \underbrace{[x_{j+r}] \prod_{i=1}^r [x_i]^{-\alpha_{ji}}}_{[1]} \quad (43)$$

ergeben. Neben den im SI-Einheitensystem festgelegten Einheiten, die in der Physik eingesetzt werden ist es aber auch möglich, sich wie bei der Verwendung vektorieller Dimensionen im nächsten Abschnitt auf die rein formalen Bildungsaspekte dimensionsloser Gruppen zurückzuziehen und auch künstliche Einheitensysteme zum Aufbau künstlicher Modellwelten zuzulassen. Innerhalb dieser Modellwelten sind dann formal die aus den dimensionslosen Gruppen abgeleiteten Ähnlichkeitsaussagen gültig.

3.2 Vektorielle Dimensionen

Die Loslösung aus der inhaltlichen Anschaulichkeit von Dimensionsbegriffen (also Masse, Länge, Zeit, ...) und die damit verbundene Erweiterung des Raums der physikalischen Dimensionen auf Basissysteme vektorieller Dimensionen, die das rein formale Kriterium linearer Unabhängigkeit in Abbildung 7 erfüllen, birgt mehrere Vorteile. Zum einen können durch die so mögliche Erweiterung des Anwendungsbereichs der formalen Gültigkeit des Pi-Theorems der Ähnlichkeitstheorie und den aus ihr folgenden Ähnlichkeitsbetrachtungen interessante neue Anwendungsgebiete erschlossen werden. Die Rechtfertigung eines solchen Vorgehens muß entweder theoretisch deduktiv, oder, falls dies (noch) nicht gelingt, für einen begrenzten Anwendungsfall anhand der Konsistenzbetrachtungen in den Abschnitten 4.j.4 mit $j = 1, \dots, 6$ einzeln gerechtfertigt werden.

Zum zweiten kann sich bei Verwendung vektorieller gegenüber klassischen physikalischen Dimensionen eine Rangerhöhung $r_v > r$ der Dimensionsmatrix ergeben, wodurch sich für die inhaltlich identische dimensionsbehaftete Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ eine „kompaktere“ Ähnlichkeitsfunktion mit nur noch $m_v = (n - r_v)$ Kennzahlen [106] ergibt.

Doch zunächst muß dazu die formale Grundlage geschaffen werden, indem die klassische Auffassung der gesetzlich im SI-System festgeschriebenen physikalischen Dimension in Definition 5 in Anlehnung an die Begriffsprägung durch HUNTLEY [106] auf die vektorielle Dimension in Definition 7 erweitert wird:

Definition 7 Vektorielle Dimension. *Als vektorielle Dimension $\dim(x_j)$ einer reellwertigen Größe wird das Potenzprodukt der vektoriellen Basisdimensionen ihrer Definitionsgleichung bezeichnet. Dadurch kann der physikalische Dimensionsbegriff auf vektorielle Dimensionen erweitert werden, die gegenüber allen anderen in der jeweiligen Problemstellung benutzten Dimensionen linear unabhängig sind. Die Schreibweise*

$$\dim(x_j) = \dim(x_1^{\gamma_{j1}} x_2^{\gamma_{j2}} \dots x_r^{\gamma_{jr}}) = D_1^{\gamma_{j1}} D_2^{\gamma_{j2}} \dots D_r^{\gamma_{jr}} \quad (44)$$

wird für vektorielle und physikalische Dimensionen beibehalten, auch ansonsten gelten alle Rechen- und Schreibregeln für physikalische Dimensionen und die Anforderungen an Basisgrößen x_i und deren Einheiten (linear skalierbare Intervallgröße λ_i mit absolutem Nullpunkt $\delta_i = 0$), die dann entsprechend vektorielle Basisgrößen genannt werden.

Vektorielle Vorstellungen von Größen wie z.B. der Kraft $P = (P_x, P_y, P_z)^T$ in Abbildung 14 sind im Ingenieurwesen überall anzutreffen. Während dort die betragsmäßige Aufspaltung von P über Winkelbeziehungen gängige Praxis ist, wird oft die Möglichkeit auch die zugehörige Dimensionsdarstellung vektoriell zu formulieren, nicht immer genutzt. Dies wird am Beispiel des Volumens V des Würfels in Abbildung 14 erläutert.

Das durch HUNTLEY [106] in Abbildung 14 erarbeitete Beispiel für die sinnvolle, jedoch stets problemabhängige Verwendung vektorieller Dimensionen ist die Aufspaltung des Dimensionsbegriffs der Länge L mit der Basisgröße Meter l und der Einheit $[m]$ in die drei Raumrichtungen x , y und z . Sie werden so zu den unabhängigen vektoriellen Dimensionen Tiefe L_x , Breite L_y und Höhe L_z mit den Basisgrößen l_x, l_y und l_z Meter und den Einheiten $[m_x], [m_y], [m_z]$. Die Sinnngerechtigkeit dieser Aufspaltung kann hierbei mit der über die gesamte Problemstellung der Volumenberechnung des Würfels $V = l_x \cdot l_y \cdot l_z$ hinweg erfüllten Unabhängigkeit der vektoriellen Dimensionen begründet werden.

Die Methode der Dimensionsanalyse setzt daher nur ein kohärentes Einheitensystem voraus, um die Existenz und die Erstellung von dimensionslosen Kennzahlen zu garantieren. In dieser Hinsicht ist auch für jede nicht streng physikalische Welt, zumindest aus einer rein formalen Sichtweise heraus, der Aufbau dimensions homogener Modelle und damit die Erstellung eines Kennzahlenmodells denkbar.

Die Verallgemeinerung physikalischer Dimensionsbegriffe auf vektorielle Dimensionen läßt das große Potential möglicher Übertragungen, d.h. die Benutzung dimensionsloser Invarianten in neuen Anwendungen erahnen. Zahlreiche Wissensgebiete wie z.B. die Betriebswirtschaft und das Finanzwesen mit den Begriffsbildungen von Arbeitszeit (Einheit $[h]$), Währungen (Einheit $[EUR]$) Stückzahl von Produkten (Einheit $[Q]$) zeigen die Existenz und vielfältigen Möglichkeiten zur Bildung unabhängiger vektorieller Dimensionssysteme auf. Die Vorteile und Anwendung dieser Betrachtungen im Finanzwesen, der Statistik sowie dem Operations Research wurde von DE JONG [112] und VIGNAUX [229] dargestellt. Die meist direkt erkenntliche Ableitung der verwendeten vektoriellen Basisdimensionen (z.B. der Arbeitszeit aus der physikalischen Dimension der Zeit) stellt dabei die erforderliche Befriedigung von Gleichung (42) bzw. von Definition 7 sicher.

Die vektoriellen Dimensionen sind somit die Obermenge der klassischen physikalischen Dimensionen wie Masse, Länge, Zeit etc. sowie anderen künstlichen Dimensionsbegriffen, die sich aufgrund von über das Problem hinweg unveränderlichen topologischen Zwangsbedingungen ergeben. Dazu gehören z.B. in den Koordinaten unterscheidbare vektorielle Längendimensionen in x -, y - oder z -Richtung bzw. r - und φ -Richtung, die sich oft auch durch die Existenz von problemvereinfachenden Koordinatentransformationen (kartesisch, polar, zylindrisch etc.) begründen lassen. Im folgenden wird daher nicht mehr explizit zwischen physikalischen und vektoriellen Größen, Einheiten und Dimensionsbegriffen unterschieden, da alle Argumente und Beschränkungen gleichfalls auch für ihre vektoriellen Verallgemeinerungen gelten sollen.

3.3 Repräsentationsformen

Im folgenden soll aus der Menge aller möglichen Modellwelten diejenige herausgegriffen werden, in der ein Schließverfahren (*reasoning mechanism*) aus der Künstlichen Intelligenz (KI) als eine *Prämissen-Konklusionsbeziehung* in der Form von Beziehung (45) gültig ist. Man interpretiert die Beziehung (45) dabei so, daß die Konklusion immer dann eintritt, wenn die Prämisse erfüllt ist. Repräsentationsformen in der Art [193] von

$$\underbrace{h_1, \dots, h_{n-1}}_{\text{Prämisse}} \rightarrow \underbrace{h_n}_{\text{Konklusion}} \quad (45)$$

werden in der KI bevorzugt zum Aufbau von fall- und regelbasierten Expertensystemen verwendet, da Beziehung (45) die einfache Darstellung einzelner Erfahrungen (d.h. eines Falles) ermöglicht. Beziehung (45) stellt in dieser Hinsicht im später ab Seite 53 detailliert beschriebenen fallbasierten Schließen (*case-based reasoning*) nach Definition 8 die Form einer sogenannten Fallbeschreibung dar, die in der Datenbank eines fallbasierten Systems abgespeichert ist. Durch die Abspeicherung der Prämissen in einer Datenbank ist es möglich, durch Vergleich mit den vorliegenden Fakten die im jeweiligen Fall richtige Konklusion aus der Datenbank auszuwählen.

Stellt man der Beziehung (45) aus der Welt der Künstlichen Intelligenz (KI) eine Darstellung bzw. die Repräsentationsform einer vollständigen *Ursache-Wirkungskette* einer dimensionshomogenen Funktion nach Beziehung (46) vergleichend gegenüber, so stellt man fest, daß bei Punktproben dimensionshomogener Funktionen neben der Form

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\text{Ursache}} \rightarrow \underbrace{x_n}_{\text{Wirkung}} \quad (46)$$

auch die verallgemeinerte *Ursache-Wirkungskette* in der Schreibweise dimensionsloser Kennzahlen gültig ist, da sich die Form der Beziehung (48) lediglich aus der Umformung der Beziehung (47) entsprechend (46) mit Gleichung (43) ergibt. Die Beziehung (48) mit

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\text{Ursache}} \rightarrow \underbrace{x_n}_{\text{Wirkung}} \quad (47)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \text{Skalenunabhängigkeit} \\ \underbrace{\pi_1, \dots, \pi_{m-1}}_{\text{Ursache}} & \rightarrow & \underbrace{\pi_m}_{\text{Wirkung}} \end{array} \quad (48)$$

kann in der dimensionslosen Schreibweise als verallgemeinerte, da skalenunabhängige Klassenaussage der ursprünglich isolierten Einzelerfahrung verstanden werden, die ihre Gültigkeit als Klassenaussage der Eigenschaft dimensionsloser Invarianten verdankt.

Kommt zu dieser Betrachtung zunächst isolierter Einzel- und Klassenereignisse hinzu, daß sich die Einzelereignisse als Punktproben einer vollständigen und dimensionshomogenen Funktion nach Gleichung (49) angeben lassen, so existiert nach dem Pi-Theorem der folgende beweisbare Zusammenhang zwischen der dimensionsbehafteten und der dimensionslosen Ursache-Wirkungskette nach Beziehung (50):

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\text{Ursache}} \xrightarrow{f} \underbrace{x_n}_{\text{Wirkung}} \quad (49)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \text{Skalenunabhängigkeit} \\ \underbrace{\pi_1, \dots, \pi_{m-1}}_{\text{Ursache}} & \xrightarrow{F} & \underbrace{\pi_m}_{\text{Wirkung}} \end{array} \quad (50)$$

Formal ergibt sich die Konsistenz dieser Betrachtungsweise aus der Definition des Pi-Theorems, dessen Voraussetzungen auf die Existenz einer vollständigen dimensionshomogenen Beziehung f lauten. Diese Verträglichkeit von (50) mit (49) kann auch aus Abbildung 9 ersehen werden, in der die konsistente Abbildung der dimensionsbehafteten und der dimensionslosen Funktionen f und F aufeinander graphisch dargestellt ist.

Im folgenden wird nun untersucht, welche Konsequenzen sich für die Schlußfolgerungsmechanismen der Künstlichen Intelligenz in der Form von Beziehung (45) ergeben, wenn sie auf dimensionsbehaftete Begriffe aus dimensionshomogenen Modellwelten angewendet werden, für die die notwendigen Bedingungen der Beziehungen (47) und (48) sowie (49) und (50) gelten. Aus der formalen Verträglichkeitsbedingung dieses Modellübergangs kann dann daraus der Einbettungssatz abgeleitet werden, der die formal zu erfüllende Logik der Einbettung zusammenfaßt.

3.4 Einbettungsbedingungen

Zur Veranschaulichung der Einbettungsbedingungen werden die Abbildungen 15, 16 und 17 verwendet. Zu Beginn ist in Abbildung 15 unterstellt, daß die Modellwelt dimensionshomogener Funktionen (abgekürzt DH) und der Künstlichen Intelligenz (abgekürzt KI) völlig unterschiedliche Wissensgebiete sind, die deshalb keine Operanden, d.h. einzelne Elemente $h_i \in KI$ und $x_i \in DH$ miteinander teilen.

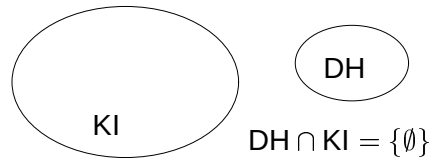


Abbildung 15: KI und DH als getrennte Modellweltmengen

Da beide Gebiete DH und KI keine gemeinsamen Elemente besitzen, ist die Schnittmenge leer, es gilt daher $DH \cap KI = \{\emptyset\}$. Aufgrund der Verschiedenheit der Operanden (d.h. der Elemente h_i und x_i) muß in der KI auch nicht die in dimensionshomogenen Funktionen notwendige Bedingung der Dimensionshomogenität erfüllt sein, die in den dimensionshomogenen Modellwelten wie z.B. in der Physik und der Betriebswirtschaft zur Darstellung beliebiger Beziehungen dimensionsbehafteter Größen gefordert wird.

Werden jedoch Operationen, d.h. die Schließverfahren der KI in der Form von Beziehung (45) auf Problemstellungen dimensionshomogener Modellwelten wie z.B. in der Physik und dem Ingenieurwesen (oder einem anderen vergleichbar dimensionsbehafteten Wissensgebiet) angewandt, besitzen die Operanden zum ersten sofort physikalische bzw. vektorielle Dimensionen, zum zweiten wird dadurch die Menge aller möglichen Beziehungen automatisch auf die Menge aller dimensionshomogenen Funktionen DH eingegrenzt und zum dritten existieren aus diesem Grunde parallel dazu skalenunabhängige dimensionslose Kennzahlentsprechungen in der Form von Beziehung (50).

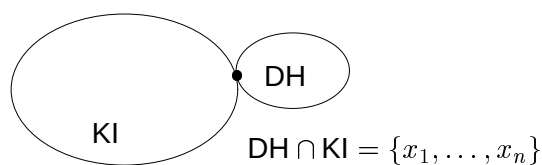


Abbildung 16: Berührfall zwischen KI und DH

Formal kommt es daher in einer technischen KI-Anwendung genau dann zum „Berührfall“ zwischen KI und DH, wenn der Grenzübergang in der Form (51) eintritt und die früheren Elemente $h_i \in KI$ die Eigenschaften der Elemente $x_i \in DH$ annehmen:

$$\lim_{h_i \rightarrow x_i} (h_1, \dots, h_{n-1} \rightarrow h_n) = (x_1, \dots, x_{n-1} \rightarrow x_n) \Rightarrow (\pi_1, \dots, \pi_{m-1} \rightarrow \pi_m) \quad (51)$$

Dabei gilt jedoch für die gesamte Menge DH das Postulat der Dimensionshomogenität, da in der dimensionshomogenen Modellwelt „in der Naturwissenschaft im allgemeinen davon ausgegangen wird, daß nicht-dimensionshomogene Modellvorstellungen prinzipiell nicht richtig sein können“ [76]. Deshalb kann in Bezug auf die Bedingung der Dimensionshomogenität das ganze Gebiet von DH auf einen Punkt (d.h. den Berührungspunkt)

zusammengezogen werden, so daß sich als Konsequenz des Berührfalls in Abbildung 16 die Einbettung $DH \subset KI$ in Abbildung 17 der Schließverfahren auf der Modellweltmenge DH in die Modellweltmenge KI ergibt. Die Bedingung der Dimensionshomogenität in DH muß daher auch im eingebetteten Gebiet $DH \subset KI$ erfüllt bleiben.

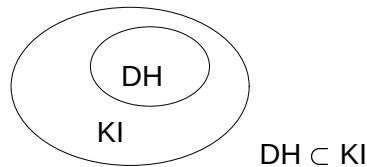


Abbildung 17: Modellweltmenge DH in KI eingebettet

Diese in Abbildung 17 dargestellte Einbettung $DH \subset KI$ kann so verstanden werden, daß jede beliebige Operation bzw. jedes beliebige Schließverfahren, solange es nur auf eine vollständige Menge dimensionsbehafteter Größen $(x_1, \dots, x_n) \in DH$ angewandt wird, die Bedingung der Dimensionshomogenität erfüllen muß und damit eine dimensionslose Entsprechung in der Form von Beziehung (51) besitzt.

Die Konsequenz aus der Gültigkeit des Prinzips der Dimensionshomogenität stellt der im nachfolgenden formulierte Einbettungssatz dar, der damit die zentrale Grundlage für die Übertragbarkeit der Methoden der Ähnlichkeitstheorie in die technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen der KI darstellt. Der Einbettungssatz lautet:

Satz 1 Einbettungssatz. *Eine allgemeinere Theorie muß auch eine speziellere Theorie formal als Spezialfall enthalten, da sonst die speziellere Theorie durch die allgemeinere Theorie falsifiziert werden würde und umgekehrt.*

Da es auf demselben Gebiet nicht zwei widersprüchliche Theorien geben kann, stellt der Einbettungssatz eine Umformulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch (lat. *principium contradictionis*) dar, der als Prinzip der Logik „keine Aussage ist zugleich wahr und falsch“ bis auf ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) zurückgeht und „zu den obersten Grundsätzen gehört, die jeder, der überhaupt über etwas argumentieren will, anerkennen muß“ ([156] ↑Widerspruch, Satz vom). So besagt ARISTOTELES, der den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch für Elementaraussagen erstmals wie folgt formulierte: „Es ist unmöglich, daß dasselbe [Prädikat] demselben [Subjekt] in derselben Hinsicht zugleich zukommt und nicht zukommt“ ([156] ↑Widerspruch, Satz vom). Die Dimensionshomogenität in DH muß daher auch in der Einbettung $DH \subset KI$ erfüllt bleiben.

In der zeitgenössischen Auffassung vom ausgeschlossenen Widerspruch bzw. dem dafür erforderlichen Widerspruchsfreiheitsbeweis ist nach GEORG KREISEL (1923–) dabei „die philosophische oder begriffliche Signifikanz nicht im Resultat der (vermeintlich absoluten) Widerspruchsfreiheit, sondern in den dabei verwendeten Methoden und bewiesenen Resultaten zu sehen, insbes. zur Einbettung von Theorien in andere Theorien“ ([156] ↑Widerspruchsfreiheitsbeweis).

Neben dem hier betrachteten Einbettungsfall der Modellweltmenge DH in die Modellweltmenge KI wird die Widerspruchsfreiheit in den verschiedensten Gebieten der Wissenschaften gefordert. Aufgrund der Widerspruchsfreiheit können auf ein und demselben Wissensgebiet keine zwei verschiedenen widersprüchlichen Theorien existieren, da sonst deren wesentliche Aussagen nicht widerspruchsfrei bzw. konsistent sind. In der

Physik hat diese Erkenntnis z.B. bei der Verallgemeinerung des konstanten Massenbegriffs von SIR ISAAC NEWTON (1643-1727) mit $m = m_0 = \text{const}$ durch den relativistischen Massenbegriff nach ALBERT EINSTEIN (1879-1955) mit $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ zu

$$\lim_{v/c \rightarrow 0} m = \lim_{v/c \rightarrow 0} \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 \quad (52)$$

der im Grenzübergang (52) erfüllten Form einer Verträglichkeitsbedingung geführt [204]. Durch die Erfüllung dieses Grenzübergangs ist die klassische Mechanik NEWTONS formal konsistent in die relativistische Physik EINSTEINS eingebettet [204]. In der ständig weiter vorangetriebenen Vereinheitlichung der Physik (*theory of everything*, TOE [15, 141], *great unified theory*, GUT [91, 143]) beruht diese Vorgehensweise der formalen Einbettung daher ebenfalls auf einer derartigen Konsistenzforderung.

3.5 Diskussion

Es mag in der Ableitung des Einbettungssatzes in Abbildung 17 zunächst irritieren, daß die Modellweltmenge KI der Künstlichen Intelligenz optisch „größer“ als die Modellweltmenge DH der dimensionshomogenen Funktionen dargestellt wurde. Dies mag umso verwunderlicher sein, als die KI als relativ junges Forschungsgebiet ein im Verhältnis zur dimensionshomogenen Modellwelt DH, die ja z.B. die Physik, das Ingenieurwesen und die Betriebswirtschaft usw. abdeckt, ein noch sehr junges und sich noch sehr entwickelndes Gebiet ist, dessen Begriffs- und Verfahrensbildungen derzeit eher noch unter einer Methodensammlung als unter einer geschlossenen Theorievorstellung eingeordnet werden muß.

Dies gilt jedoch nur für die erreichte Breite und formale Konsistenz der KI, denn was die Logik der abbildbaren Schlußfolgerungen angeht, kennt die KI nicht nur alle die in dimensionshomogenen Modellwelten wie der Physik und dem Ingenieurwesen dienlichen logischen Schemata, sondern besitzt darüber hinaus noch all diejenigen Schlußfolgerungsmechanismen, die der eigentlichen Zielvorstellung der KI, nämlich intelligentes menschliches Problemlösungsverhalten zu emulieren, nahe kommen (sollen). In dieser Hinsicht ist es durchaus angebracht, wenn die dimensionshomogenen Modellwelten, die in der Konzeption z.B. zur Modellierung naturgesetzlicher Ursache-Wirkungsbeziehungen der uns umgebenden Realität gedacht sind, in den weiteren Kontext aller menschlich denkbaren Prämissen-Konklusionsbeziehungen eingebettet werden.

Es ist dabei kein Anliegen dieser Arbeit über die vermeintliche (absolute bzw. relative) Größe oder gar die Gleichwertigkeit der Forschungsansätze der dimensionshomogenen Modellwelten DH und der Künstlichen Intelligenz KI zu urteilen. Es ist lediglich einer der zentralen Punkte dieser Arbeit herauszustellen, daß die KI bis jetzt die Bedeutung des Begriffs der physikalischen Dimension völlig unterschätzt, und, wenn überhaupt, dann nur randständig behandelt, zumeist aber völlig ignoriert hat. Es wurde daher schlichtweg versäumt, in technischen Anwendungen die Dimensionshomogenität der verwendeten Algorithmen zu überprüfen und sicherzustellen. Um dies zu erreichen ist es sinnvoll, genau die Argumentation des Einbettungssatzes in Satz 1 zu verwenden und damit in technischen Anwendungen einen formalen Grenzübergang als Verträglichkeitsbedingung zwischen beiden Modellvorstellungswelten zu schaffen.

4 Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen

Dieses Kapitel beinhaltet die einzelnen Übertragungen des physikalisch motivierten Ähnlichkeitsbegriffs auf neue Anwendungsfelder und beschreibt in kurzer und prägnanter Form die wesentlichen formalen Konsequenzen und Folgerungen, die sich aus dem Prinzip der Dimensionshomogenität für die betrachteten Methoden des Ingenieurwesens, der Informatik und der Künstlichen Intelligenz ergeben. Dies sind im einzelnen die

- ☐ *Entwurfsbewertungsverfahren*, die
- ☐ *Neuronalen Netze*, das
- ☐ *Fallbasierte Schließen*, die
- ☐ *Mustererkennung*, die
- ☐ *Geräuschklassifikation*, das
- ☐ *Data Mining*, sowie der
- ☐ *Computergestützte Ingenieurentwurf*.

Die zentralen Grundlagen für die Übertragbarkeit des Ähnlichkeitsbegriffs wurden mit dem Einbettungssatz geschaffen, der im Abschnitt 3.4 eingeführt und erläutert wurde. Durch den Einbettungssatz wird der formal konsistente Anschluß und widerspruchsfreie Übergang der in der Künstlichen Intelligenz verwendeten Notationsformen an die in der Physik und im Ingenieurwesen als gültig postulierte Modellvorstellung dimensions homogener Funktionen erreicht und die damit einhergehende Existenz dimensionsloser Ähnlichkeitskennzahlen gewährleistet.

Die aus der Übertragung dieser Ähnlichkeitsbegriffe resultierenden und hier dargestellten Ergebnisse werden dann in Kapitel 5 *Zusammenfassung* mit den sich daraus ergebenden weiteren Forschungsperspektiven übergreifend diskutiert. Doch zunächst folgen hier die detaillierten Einzeldarstellungen der Übertragungen von Ähnlichkeitsbegriffen in die vorgenannten Anwendungsgebiete.

4.1 Entwurfsbewertungsverfahren

Entwurfsbewertungsverfahren für die Bewertung von Entwurfsvarianten besitzen eine zentrale Bedeutung im Entwurf, da durch die Bewertung und die daran anschließende Selektion natürlich die Verteilung der vorhandenen Ressourcen (Zeit, Geld, ...) auf die untersuchten bzw. zu untersuchenden Entwurfsvarianten gesteuert wird. Neben dieser eher logischen Begründung kann die große wirtschaftliche Bedeutung der Bewertungsverfahren leicht auch an den umfangreichen Untersuchungen festgemacht werden die zeigen, daß durch die Entscheidungen in der frühen Entwurfsphase der ersten 20% des Entwurfs bis zu 80% der zukünftigen Kosten der Produktentwicklung und des Produktlebenszyklus festgelegt werden [167].

Da Bewertungsverfahren naturgemäß sehr eng mit dem eigentlichen Entwurfsprozeß verzahnt sind, wird der Entwurfsprozeß zunächst kurz dargestellt, um den Kontext der Entwurfsbewertungsfrage besser einzuordnen zu können und die Problematik der Entwurfsbewertung genau herausarbeiten [133].

4.1.1 Entwurfsprozeß

In der Modellvorstellung über den Entwurfsprozeß besteht trotz des nur unvollständigen Verständnisses über den genauen Ablauf des Entwurfsprozesses darüber Einigkeit, daß der Entwurfsprozeß im Prinzip als eine iterative Sequenz von *Entwurfssynthese* und *Entwurfsanalyse* aufgefaßt werden kann [165, 167, 183]. Nach Abbildung 18 werden anhand von Lösungsideen in der Synthese ständig eine gewisse Anzahl an konstruktiven Varianten entwickelt, die dann in einer Analyse hinsichtlich der Zielvorstellungen des entwerfenden Ingenieurs bewertet, ausgewählt und dann weiter verfeinert werden.

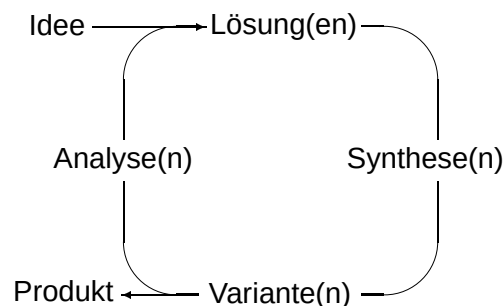


Abbildung 18: Sequenz von Aktivitäten im Entwurfsprozeß [183]

Diese iterative Sequenz von Entwurfssynthese und -analyse in Abbildung 18 betont den *dynamischen* Charakter des Entwurfsprozesses, dessen prozeßhafter Charakter auch Gegenstand von Forschungsarbeiten ist. Bei eingehender Betrachtung wird jedoch offensichtlich, daß ein in der Zeit t fortschreitender Entwurfsprozeß in keiner direkten Kausalbeziehung mit der Zeit t stehen kann, wie dies z.B. in dynamischen Systemen und

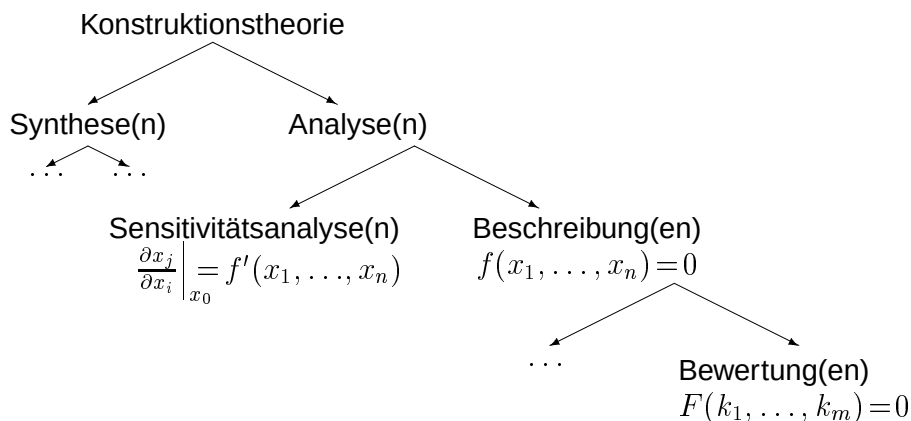


Abbildung 19: Statische Elemente einer Konstruktionstheorie [192]

deren Beschreibung ansonsten der Fall ist. Dies ist leicht mit der Einsicht erklärbar, daß ein guter Entwurf theoretisch in nur einem einzigen Schritt erreicht werden könnte. Ist die Ergebnisqualität im Entwurfsprozeß daher nicht streng kausal mit der Zeit t , so können die in Abbildung 18 *dynamisch* durchlaufenen Iterationsschritte in die in Abbildung 19 dargestellten *statischen* Gliederungsbeziehungen umgeschrieben werden.

Aus dieser Sichtweise kann das beiden Darstellungen einer eher dynamischen oder eher statischen Entwurfsauffassung gleichermaßen zentrale Kernproblem der Entwurfsanalyse, das sogenannte *Bewertungsproblem*, leicht identifiziert werden. Dies kann deshalb

so klar herausgestellt werden, da die *Bewertung* in Abbildung 19 als die Kenntnis der qualitativen *Beschreibung* (d.h. der „Qualität des Ist-Zustands“) verstanden werden kann, die die Bewertung $F(k_1, \dots, k_m) = 0$ der vorliegenden Entwurfsvarianten $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in bezug auf die Zielvorstellungen bzw. Kriterien $k_1, \dots, k_m$ des Ingenieurs gestattet.

Erst die Kenntnis dieser Beschreibung, aus der in Form von Maßzahlen eine *Bewertung* gewonnen wird, ermöglicht die Erstellung objektiver und systematischer Konstruktionsbewertungsverfahren, die die richtige Reihung und die Auswahl der besten betrachteten Konstruktionsalternativen gestatten. In der Forschung wird daher an der Entwicklung von Bewertungsverfahren gearbeitet, die eine rationale, objektive und transparente Entscheidungsfindung des Entwerfers ermöglichen sollen [133, 183].

4.1.2 Bewertungsproblem

Unter *Bewertungsverfahren* versteht man Methoden, die eine *Entscheidungsunterstützung* (*decision making support* [78, 32]) in der Auswahl von Konstruktions-, Handlungs- oder Planungsalternativen ermöglichen. Auf dem Gebiet der Entwurfsbewertungsverfahren wird dabei kontrovers diskutiert, inwiefern ein derartiges Bewertungsverfahren hierfür prinzipiell aus einer *Konstruktionsmethodik* (engl. *design methodology*) als Baustein innerhalb einer allgemein gültigen *Konstruktionstheorie* (engl. *design theory*) abgeleitet werden muß, wie dies auch in Abbildung 19 dargestellt ist [192].

Bei der formalen wie auch der praktischen Erstellung von Bewertungsmodellen geht man im Bewertungsverfahren davon aus, daß sich eine ganzheitliche, d.h. möglichst umfassende Gesamtbewertung k_m aus verschiedenen Bewertungskriterien $k_1, \dots, k_{m-1}$ zusammensetzt. In Abbildung 20 „beleuchten“ dabei die einzelnen Kriterien die verschiedenen Teilaspekte, die in die Gesamtbewertung eingehen.

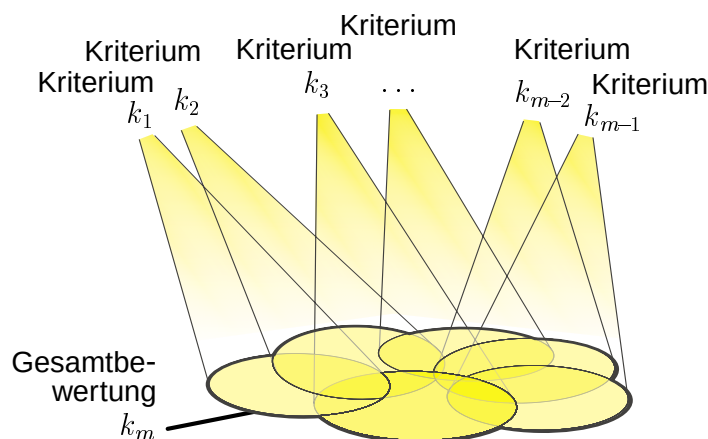


Abbildung 20: Bewertungskriterien als Teilaspekte der Gesamtbewertung

Wie in Abbildung 20 zu erkennen ist, spielt dabei die Vollständigkeit und Unabhängigkeit der einzelnen Bewertungskriterien $k_1, \dots, k_{m-1}$ für die Korrektheit der Gesamtbewertung k_m eine entscheidende Rolle, da sonst neben der beabsichtigten Aggregation einzelne Kriterienaspekte entweder gar nicht oder sogar (siehe die dargestellten Überlappungen in Abbildung 20) unbewußt mehrfach in die Gesamtbewertung eingehen würden.

Eine systematische Bewertungsmethode muß daher beweisbar richtige Antworten für die folgenden drei Kernfragen des Bewertungsproblems zur Verfügung stellen [183]:

- ☐ Wie werden *Gliederung und Vollständigkeit der Kriterien* überprüft?
- ☐ Wie werden die *einzelnen Bewertungsmaßzahlen der Teilkriterien* gewonnen?
- ☐ Wie werden *Teilbewertungen zu einer Gesamtbewertung aggregiert*?

Die Erstellung eines beweisbar richtigen Bewertungsverfahrens für die vergleichende Analyse von Entwurfsobjekten kann mathematisch mit der Identifikation einer Norm des Entwurfsraums gleichgesetzt werden. Mit dieser Norm steht dann ein beweisbares Maß zur qualitativen und quantitativen Bewertung von Konstruktionsvarianten in bezug auf technische Bewertungskriterien zur Verfügung.

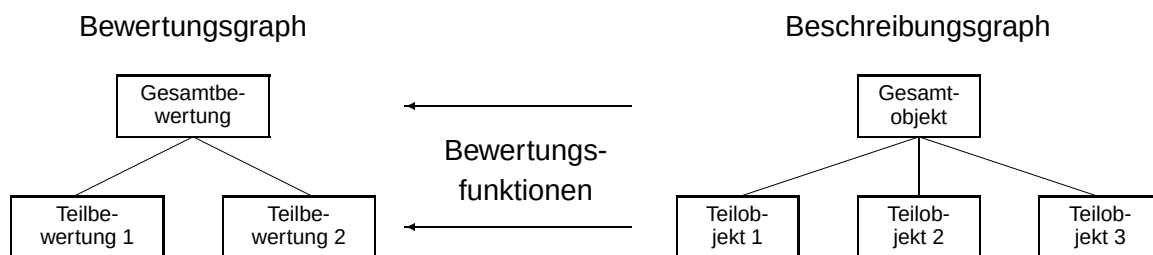


Abbildung 21: Verbale Definition des Bewertungsproblems

Entsprechend Abbildungen 21 und 22 bedeutet dies, daß die Lösung des Bewertungsproblems in der Identifikation sogenannter *Bewertungsfunktionen* in Abbildung 21 besteht, die den sogenannten *Beschreibungsgraphen* des Entwurfsobjektes rechts auf den sogenannten *Bewertungsgraphen* des Entwurfsobjekts links abbilden.

Der Beschreibungsgraph enthält dabei alle für die Beschreibung des Objekt notwendigen Informationen, die entsprechend ihren Abhängigkeiten hierarchisch gegliedert sein können. Der Bewertungsgraph enthält die Zielvorstellungen des entwerfenden Ingenieurs, die ebenfalls entsprechend ihren Abhängigkeiten hierarchisch gegliedert sein können.

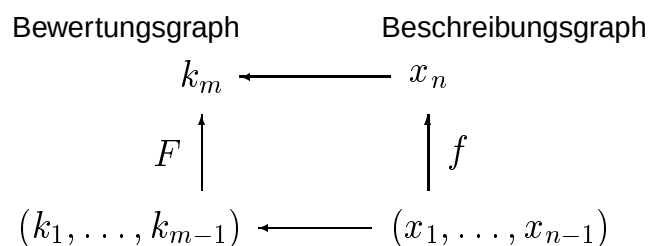


Abbildung 22: Mathematische Definition des Bewertungsproblems

In Abbildung 22 wird eine Notation eingeführt, die genau entsprechend Abbildung 21 die mathematisch notwendigen Definitionen des Beschreibungs- und Bewertungsgraphen beinhaltet. Die Darstellung des Beschreibungsgraphen in Abbildung 22 kann dabei so verstanden werden, daß sich die Eigenschaftsbeschreibung eines Entwurfsobjekts aus den physikalischen Einzel(teil)beschreibungen $x_1, \dots, x_{n-1}$ zusammensetzt, die zusammen die Gesamtbeschreibung x_n des Entwurfsobjekts ergeben. Dies bedeutet, daß

die physikalischen Eigenschaftsbeschreibungen $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in der Form impliziter Funktionen von physikalischen Variablen erfolgen können und der graphischen Darstellungsform des Beschreibungsgraphen in Abbildung 22 entsprechen.

Die Erstellung des Bewertungsgraphen aus den Teilbewertungskriterien $k_1, \dots, k_{m-1}$ in Abbildung 22 links, die die Gesamtbewertung k_m des Entwurfsobjekts ergeben, erfolgt entsprechend. Die Aggregationsfunktion $F(k_1, \dots, k_m) = 0$ stellt dabei klar, welches relative Gewicht einzelne Teilkriterien bezüglich der Gesamtbewertung einnehmen.

Zur Motivation des Bewertungsmodells, das im folgenden eingeführt wird, sind nun die erkenntnistheoretischen Annahmen aufzuzählen. Über diese Voraussetzungen muß genauso wie z.B. über die axiomatischen Annahmen der klassischen Thermodynamik, daß die Beobachtung lehrt, daß Wärme nur vom heißeren zum kälteren Körper fließen kann, wissenschaftsphilosophisch diskutiert werden; wird eine derartige Annahme einmal als „einleuchtend“ bzw. „gültig“ akzeptiert, folgt aus ihrem formalen Äquivalent zwangsläufig die axiomatische Fundierung der mathematischen Modellvorstellung.

4.1.3 Bewertungshypothese

Für die entsprechenden erkenntnistheoretischen Grundlagen des hier betrachteten Bewertungsproblems kann dazu entsprechend festgestellt werden [183]:

- ☐ *Eine reproduzierbare Bewertungsgröße kann nur dann existieren, wenn sie auf einer Gesetzmäßigkeit beruht. Für die in Gleichungsform erfolgende physikalische Modellbildung bedeutet dies, daß die verwendeten Beschreibungsgleichungen, wie alle physikalischen Gesetze, vollständig und dimensionshomogen sein müssen.*
- ☐ *Unter der Voraussetzung, daß eine objektive und eindeutige Bewertung eines Objekts existiert, kann die Bewertungsgröße nicht von den willkürlich gewählten Definitionen der Einsintervalle des Maßeinheitensystems (z.B. Meter gegenüber Inch) abhängen, in denen das Objekt beschrieben ist. Daraus folgt, daß die Bewertungsmaßzahlen nur dimensionslose Größen sein können.*
- ☐ *Die verwendeten Bewertungskriterien müssen die Eigenschaft der Redundanzfreiheit erfüllen, da sonst bestimmte Objekteigenschaften unbemerkt mehrfach in das Bewertungsergebnis eingehen würden. Das bedeutet, daß der Bewertungsgraph in Abbildung 22 aus einer vollständigen aber redundanzfreien Menge von Bewertungskriterien gebildet werden muß und daher eine Minimalform besitzt.*

Formuliert man diese Forderungen zusammenfassend um, so ergeben sich insgesamt die folgenden allgemein gültigen, je zwei notwendigen mathematischen Eigenschaften für die Entwurfsbeschreibung und -bewertung zu [183]:

- ☐ *vollständige und dimensionshomogene Beschreibung,*
- ☐ *dimensionslose und minimale Bewertung.*

Vergleicht man diese vier mathematischen Forderungen mit den Eigenschaften des Pi-Theorems, so stellt man fest, daß genau diese Forderungen durch das Pi-Theorem erfüllt werden. Dadurch ergibt sich die gesuchte Bewertungsfunktion $F(k_1, \dots, k_m) = 0$ in Abbildung 22 durch das Pi-Theorem zu $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$. Daraus kann ein formal konsistentes

und in diesem Sinne beweisbares Bewertungsmodell abgeleitet werden. Die Eigenschaften dieses Bewertungsmodells nach dem Pi-Theorem können dabei in der sogenannten *Bewertungshypothese* [183] zusammengefaßt werden:

These 2 „Jede im Sinne des Pi-Theorems minimale Beschreibung ist eine Bewertung.“

Als zentrale Konsequenz der *Bewertungshypothese* [183] folgt sofort, daß die Lösung des Bewertungsproblems grundsätzlich auf die Lösung des entsprechenden Beschreibungsproblems zurückgeführt werden kann. Damit ist das Bewertungsproblem genau dann vollständig gelöst, wenn eine vollständige Beschreibung vorliegt.

Die Bewertungshypothese kann so interpretiert und verstanden werden, daß wenn von einem Objekt eine Beschreibungsfunktion $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ vorliegt, seine Verhaltensweisen damit festliegen. Soll dieses Verhalten des Objekts dann im Hinblick auf bestimmte Kriterien bewertet werden, muß nur die Beschreibungsfunktion f in Form der Kriterien π_j umgeschrieben werden, um die Bewertungsfunktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ zu erhalten. Dies ist nach dem Pi-Theorem für dimensionshomogene Funktionen immer möglich.

Für die weiteren Eigenschaften des auf der Bewertungshypothese beruhenden Bewertungsmodells folgt aus den Eigenschaften des Pi-Theorems direkt [183, 188]:

Maßzahlen. Die Lösung des Bewertungsproblems kann auf die Lösung des entsprechenden Beschreibungsproblems reduziert und zurückgeführt werden. Die aus der Beschreibung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ erzeugbaren m dimensionslosen Größen π_j nach Gleichung (16) heißen (*Ähnlichkeits-*)*Kennzahlen* und sind die gesuchten Maßzahlen der Bewertungsmethode. Die Menge aller gleich bewerteten Objekte oder Vorgänge entspricht damit genau der Menge der physikalisch ähnlichen Objekte oder Vorgänge und stellt die gesuchte *Lösung des Bewertungsproblems* dar.

Minimalität. Die Kennzahlen π_j bilden im Sinne der linearen Algebra ein Fundamentalsystem und haben daher dieselben Eigenschaften wie die Basis eines linearen Vektorraums. Die notwendige und minimale Anzahl von Basisvektoren eines linearen Vektorraums ist gleich der Dimension des Raumes, der durch das Basensystem aufgespannt wird. Die Austauschbarkeit von Basensystemen kann damit als formale Entsprechung zu Bemühungen um die Entkoppelung sprachlicher Begriffe bei der Erstellung von Hierarchien der Bewertungskriterien interpretiert werden.

Vollständigkeit. Linearkombinationen unabhängiger Basisvektoren eines linearen Vektorraums können den gesamten Vektorraum aufspannen und besitzen daher die Eigenschaft der Vollständigkeit. Damit ist gewährleistet, daß das aus einer vollständigen Beschreibung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ abgeleitete Set dimensionsloser Kennzahlen $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ ein vollständiges Set von Bewertungsgrößen darstellt. Die physikalische Interpretation der Kennzahlen als Verhältnisse charakteristischer Kräfte, Längen oder Zeiten [138] liefert dabei die inhaltliche Bedeutung der Bewertung. Dies stellt die gesuchte *Lösung des Gliederungsproblems* dar.

Granularität. Wird die Modellbildung weiter verfeinert, können die in der Beschreibung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ bisher unberücksichtigte weitere k Größen x_{n+k} hinzukommen. Dabei bleiben die früheren Bewertungskriterien $\pi_1, \dots, \pi_m$ unverändert und werden nur um die zusätzlichen Bewertungskriterien π_{m+k} ergänzt. Dadurch wird das hierarchische Prinzip der Detaillierung im Zuge einer fortschreitenden Verbesserung

der Beschreibung gut unterstützt, da die früheren Bewertungsmaßzahlen aus der größeren Bewertung unverändert erhalten bleiben und nur durch die Hinzunahme weiterer Bewertungskriterien „additiv“ ergänzt werden.

Modularität. Besitzt ein Objekt mehrere verschiedene Eigenschaften, so können diese getrennt modelliert, bewertet und danach zusammengefügt werden. Die Kompatibilität der durch die verschiedenen Beschreibungen f erzeugten Kennzahlen ist dabei gesichert, da der jeweilige Aufbau der Potenzprodukte bekannt ist und miteinander verglichen werden kann.

Hierarchie. Der Beschreibungsgraph zu $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ und der entsprechende Bewertungsgraph zu $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ besitzen die Hierarchiestufe, die sich aus der gewählten Auflösung der impliziten Funktionen $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ nach x_n und von $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ nach π_m ergibt. Aufgrund der automatischen Erzeugung des Bewertungsgraphen aus dem Beschreibungsgraphen ist damit die Auflösung der impliziten Funktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ nach einer Variablen ausreichend, um als oberstes Bewertungsziel die Kennzahl π_m zu identifizieren. Dies stellt damit die gesuchte **Lösung des Aggregationsproblems** dar.

Zusammenfassend kann für das Bewertungsproblem festgehalten werden, daß sich aus der vollständigen Beschreibung f sowohl die Form als auch die Inhalte und die Maßzahlen der Bewertung F durch Transformation sofort automatisch ergeben.

4.1.4 Kontrollen

Um die Plausibilität der Bewertungshypothese zu überprüfen, sind hier zusätzlich alle wichtigen Argumente und Überlegungen zusammengefaßt, die der Kontrolle der aufgestellten Hypothese dienen können. Sie sind sowohl vom erkenntnistheoretischen als auch vom mathematischen Standpunkt her begründet und lauten im einzelnen [183]:

Konsistenz. Bei Bewertungen in unterschiedlichen Hierarchiestufen ist zu gewährleisten, daß sich trotz unterschiedlicher Rechenwege für π_m zueinander konsistente Bewertungsergebnisse ergeben [123]. Dies ist durch einen Ergebnisvergleich der beiden möglichen Aggregationsreihenfolgen über f versus über F in Abbildung 23 überprüfbar. Darin entspricht f der Beschreibungsfunktion, die die Teilbeschreibungen

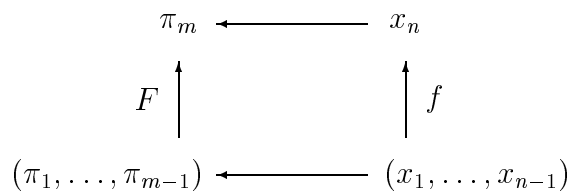


Abbildung 23: Konsistenzschema und Pi-Theorem

gen zu einer Gesamtbeschreibung aggregiert, die dann insgesamt bewertet wird. Alternativ können dazu auch die Teilbewertungen durch F zu einer Gesamtbewertung aggregiert werden. Die Konsistenz der Bewertungsermittlung von π_m wird durch das Pi-Theorem auf die Konsistenz der Beschreibung f zurückgeführt.

Kausalität. Die für die Existenz einer reproduzierbaren Bewertungsgröße geforderte Gesetzmäßigkeit wird durch das in Abbildung 24 dargestellte Kausalprinzip [40] untermauert. Das Kausalprinzip, in dem sich die Bewertung allein aus der Be-

$$(\pi_1, \dots, \pi_m) \longleftarrow (x_1, \dots, x_n)$$

Abbildung 24: Kausalprinzip und Pi-Theorem

schreibung im Sinne einer *Ursache-Wirkungs-Kette* ergibt, stimmt mit den in der Modellbildung mittels einer vollständigen Relevanzliste physikalischer Größen gegebenen Voraussetzungen des Pi-Theorems überein.

Kontext. Da über das Rückeinsetzen der Kennzahlenbeziehungen in Gleichung (16) in die Bewertungsfunktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ sofort auch die Beschreibungsfunktion $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ erzeugt werden könnte folgt, daß die Lösung des Bewertungsproblems prinzipiell nie der Lösung des Beschreibungsproblems „vorausseilen“ kann.

Die Verwendung von der Kenntnis der physikalischen Eigenschaften entkoppeltes bzw. unabhängiges Bewertungsverfahren stellt damit eines der bislang zentralen wissenschaftlichen Mißverständnisse und die wahre Ursache für das zwangsläufige theoretischen Scheitern der Integrationsbemühungen bisheriger, scheinbar praxistauglicher klassischer Bewertungsansätze in eine die Physik mit umfassende zukünftige Konstruktionsbewertung dar.

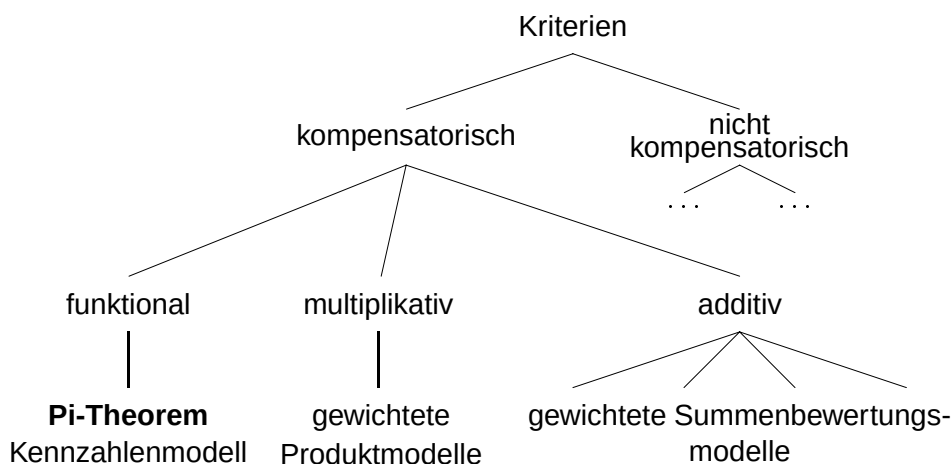


Abbildung 25: Übersicht über den Aufbau von Bewertungsverfahren [124]

Abbildung 25 zeigt abschließend den Zusammenhang und die methodische Einordnung des gezeigten Bewertungsverfahrens nach dem Pi-Theorem im Kontext klassischer Bewertungsverfahren aus der Literatur wie z.B. gewichteten Summen- oder Produktmodelle. So besitzt nur das auf dem Pi-Theorem beruhende Kennzahlenmodell die korrekte funktionale Kopplung der Teilkriterien untereinander [191, 225].

Damit sei hier die Darstellung der theoretischen Eigenschaften des Bewertungsmodells nach dem Pi-Theorem abgeschlossen und für weitergehende Details auf [183] verwiesen. Ein Beispiel der Bewertungsmethodik enthält der Abschnitt A.3, Dort ist dargestellt, wie die Bewertungsmethodik über mehrere Verfeinerungsstufen der Beschreibung hinweg zur Gewinnung einer konsistenten Entwurfsbewertung verwendet werden kann.

4.2 Neuronale Netze

Unter künstlichen neuronalen Netzen versteht man eine informationsverarbeitende Struktur nach biologischen Vorbild. Ein Ziel der Forschung über künstliche neuronale Netze ist es, Erkenntnisse über die Leistungsfähigkeit der biologischen Informationsverarbeitungsstrukturen wie z.B. *Lernfähigkeit*, *Generalisierungsfähigkeit*, sowie *Fehlertoleranz* und *Robustheit* gegenüber Rauschen zu erhalten. Zur numerischen Untersuchung der für diese Konzepte entworfenen neuronale Netzmodelle werden vorwiegend geeignete Softwareprogramme (Simulatoren) eingesetzt.

Die Eigenschaften nicht-linearer neuronaler Netze bei der Funktionsapproximation wurden in bezug auf das Lernverhalten sowie die Generalisierungsfähigkeit (d.h. der Inter- sowie der Extrapolation) nach erfolgtem Lernen bereits in zahlreichen Arbeiten untersucht [152, 166, 197, 199, 215]. Dabei wurde gezeigt, daß neuronale Netze als *universelle Funktionsapproximatoren* eingesetzt werden können [23, 51, 105]. Dies bedeutet, daß neuronale Netze in der Lage sind, einen unbekannten funktionalen Zusammenhang $g(x)$ zu approximieren, von dem nur eine beschränkte Menge von $p = 1, \dots, n$ *Punktproben* $\{x_1, \dots, x_n\}_p$ gegeben sind. Diese Approximation eines über die Punktproben nur implizit gegebenen Zusammenhangs wird als Lernfähigkeit bzw. als das „Lernen“ des neuronalen Netzes aus *Muster-* bzw. *Trainingsdaten* bezeichnet.

Trotz dieses prinzipiellen Nachweises, daß künstliche neuronale Netze universelle Funktionsapproximatoren sein können, gibt es derzeit für nichtlineare Problemstellungen noch keine weitergehenden Erkenntnisse oder allgemeingültigen Beweise über die

- ☐ *Netzgröße und den Netzaufbau (das Netztopologieproblem), die*
- ☐ *Korrektheit der Generalisierung (das Generalisierungsproblem), sowie über den*
- ☐ *Netzzustand nach erfolgtem Lernen (das Interpretationsproblem).*

Diese drei Fragestellungen werden deshalb im folgenden speziell unter dem Blickwinkel der Dimensionshomogenität untersucht.

4.2.1 Rückkopplungsfreie Neuronale Netze

Nichtlineare neuronale Netze bestehen aus k Schichten mit bis zu j Neuronen s_j je Schicht, die die jeweiligen Neuronenwerte n_i der vorhergehenden Schicht gewichtet aufsummieren. Die Weiterleitung (*Propagation*) der Informationen durch das Netz erfolgt dabei in rückkopplungsfreien Netzen (*feed-forward neural networks*) nur vorwärtsgerichtet. Die Matrizen w der Verbindungsgewichte werden durch das gewählte Lernverfahren in den Trainingsphasen des neuronalen Netzes festgelegt bzw. iterativ verändert. Das Summationsergebnis s an einem Neuron bestimmt sich aus den Vorgängerneuronen und dem Offset w_0 zu

$$s = \sum_i w_i n_i + w_0 \quad (53)$$

Das Ergebnis wird dann durch eine nichtlineare Funktion des Neurons $h(s)$, die auch als Transfer- oder Aktivierungsfunktion bezeichnet wird, propagiert und dient dann als einer

der Eingangswerte in der nächsten Schicht. In der Regel werden für die Funktionen $h(s)$ nichtlineare Funktionen des Typs

$$h(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}} \quad (54)$$

verwendet, die als *sigmoidale* Funktionen [199] bezeichnet werden. Die spezielle Wahl bestimmter Aktivierungsfunktionen ist hierbei biologisch motiviert [199] und dient gleichzeitig der Namensgebung des erstellten neuronalen Netzes.

Da neuronale Netze typischerweise aus mehreren Schichten mit einer Vielzahl von Knoten und Verbindungen bestehen, werden sie alternativ zur mathematisch orientierten Gleichungsschreibweise mehrfach ineinander geschachtelten Beziehungen bevorzugt wie in Abbildung 26 als Netzstruktur graphisch visualisiert.

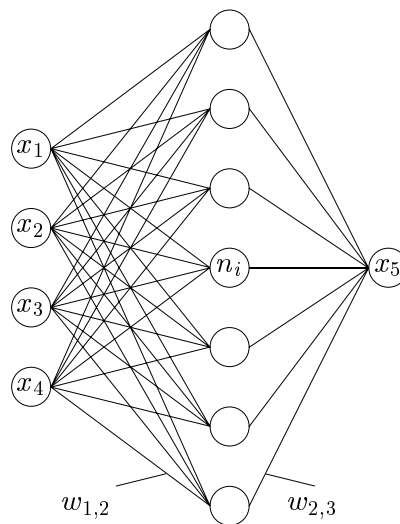


Abbildung 26: Neuronale (4, 7, 1)-Netztopologie für $g(x)$

In Abbildung 26 ist ein rückkopplungsfreies Netz mit *vier* Eingängen $x_1, \dots, x_4$ in der Eingangsschicht, mit *sieben* Neuronen in einer verdeckten Schicht und mit *einem* Ausgang x_5 in der Ausgangsschicht dargestellt. Für neuronale Netztopologien wird auch die Schreibweise (4, 7, 1)-Netz verwendet, die Wahl der einzelnen Aktivierungsfunktionen ist hierbei noch offen.

Die Approximationsfähigkeit rückkopplungsfreier neuronaler Netze beruht dabei vorrangig auf den nichtlinearen Aktivierungsfunktionen $h(s)$. Die prinzipiellen Beschränkungen dazu alternativer linearer neuronaler Netzwerkmodelle sind bekannt und in der Literatur dokumentiert [155, 197].

Auf eine spezielle Eigenschaft sei an dieser Stelle besonders hingewiesen: Das Netz in Abbildung 26 setzt sich teilweise aus einer Superposition einzelner, topologisch identischer (Sub-)Netze zusammen, dies zeigt Abbildung 27.

In bezug auf die während eines Lernverfahrens auftretenden Gewichtsänderungen ist es daher denkbar, daß sich in bestimmten Fällen die in den einzelnen (Sub-)Netzen vorgenommenen Gewichtsänderungen in bezug auf das Gesamtnetz kompensieren können. Dieser Gedanke wird später in der Erstellung minimaler dimensionshomogener Netze

noch eine Rolle spielen, da dort aufgrund von Dimensionsbetrachtungen die Redundanzfreiheit von Gewichten und Verbindungen insofern gezeigt werden kann, als daß die spezielle Wahl eines Fundamentalsystems dimensionsloser Koordinaten und die damit einhergehende spezielle Form einer dimensionslosen Ähnlichkeitsfunktion verbleibt.

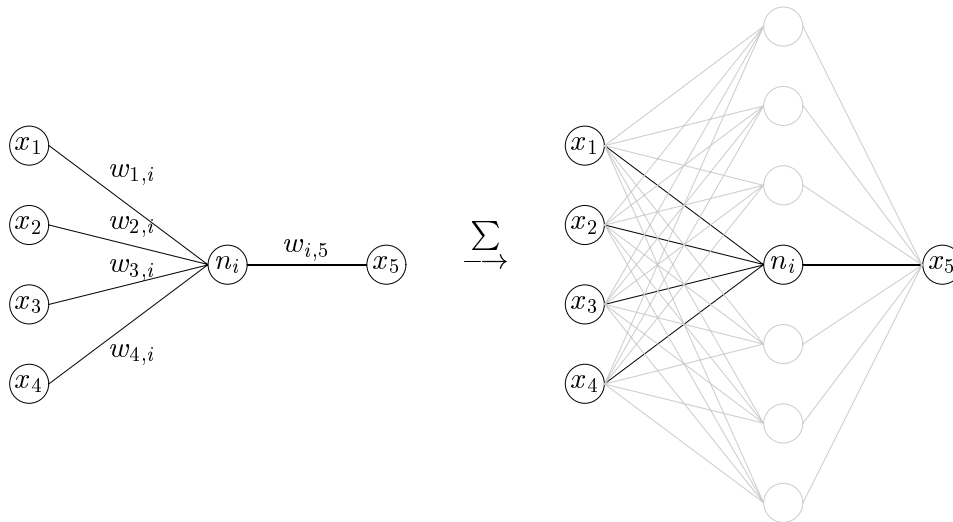


Abbildung 27: Superposition mehrerer neuronaler (Sub-)Netze in ein Gesamtnetz

Diese Betrachtung gilt insbesondere dann, wenn die (Sub-)Netze identischen topologischen Aufbau (Verbindungen, Aktivierungsfunktionen) besitzen, jedoch ist eine allgemeine mathematische Analyse solcher zusammengesetzter Netze durch die mehrfache Verschachtelung und mögliche Verknüpfung der auftretenden Nichtlinearitäten über mehrere Netzschichten hinweg i.d.R. nicht mehr geschlossen durchführbar.

Andererseits sind es nach Meinung vieler Autoren gerade diese Verschachtelungen von Nichtlinearitäten, die trotz des Mangels einer tiefergehenden mathematischen Netzwerkanalyse sehr gute Approximationseigenschaften unbekannter funktionaler Zusammenhänge aufweisen [144, 199, 169]. Neuronale Netze werden deshalb auch als Black-Box-Modellierungsmethode bezeichnet, wie dies in Abbildung 28 dargestellt ist.

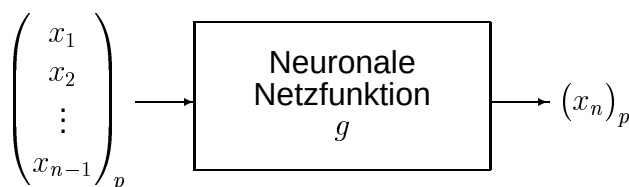


Abbildung 28: Neuronales Netz als „Black-Box“ $g(x)$

Es ist einsichtig, daß solange der Black-Box-Charakter der neuronalen Netze nicht (oder wenigstens teilweise) durchbrochen werden kann und damit einer sinnvollen mathematischen Analyse zugänglich wird, es sehr schwierig erscheint, die entstehenden Netzstrukturen wie in Abbildung 26 bzw. deren Äquivalent in Gleichungsschreibweise auf sinnvolle Art und Weise physikalisch zu interpretieren.

4.2.2 Generalisierung

Wird die Approximationsaufgabe der ursprünglichen neuronalen Netzfunktion $g(x)$ in Abbildung 28 auf dimensionshomogene Funktionen $f(x)$ eingeschränkt, ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Gültigkeit des Pi-Theorems gegeben. Dies bedeutet, daß zur dimensionshomogenen (Approximations-)Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ automatisch auch eine dimensionslose (Approximations-)Funktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ existiert, die wie Abbildung 29 zeigt, über die Hin- und Rücktransformation π^1 bzw. π^{-1} in die dimensionsbehaftete Funktion f eingebettet ist.

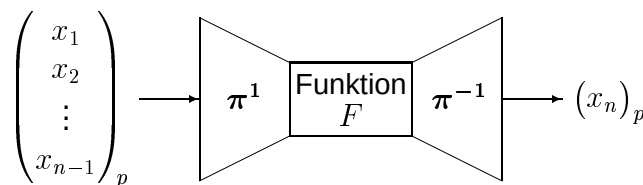


Abbildung 29: Ähnlichkeitsnetztopologie von f über F [187]

In Abbildung 29 repräsentiert damit die jeweils erste und letzte Knotenschicht die Hin- und Rücktransformation π in bzw. π^{-1} aus dem dimensionslosen Raum. Durch Justierung der Gewichte in den inneren Netzschichten mittels eines Lernverfahrens kann dann die Approximation der unbekannten Ähnlichkeitsfunktion F erreicht werden.

Die physikalische Interpretation der Netzknoten als Kennzahlen bzw. deren Kennzahlenfunktionen erschließt damit die Netztopologie erstmalig einem teilweisen ingenieurwissenschaftlichen Verständnis [187]. Dies ermöglicht die Ableitung zweier zentraler Aussagen über die Generalisierungsfähigkeit dieser neuen Klasse streng dimensionshomogener neuronaler Netze, die im folgenden genannt sind. So ist die Generalisierung in einem dimensionshomogenen neuronalen Netz dann und nur dann

- **punktwise** für eine unbekannte Punktprobe $(x_1, \dots, x_n)_q$ korrekt, wenn das dimensionshomogene neuronale Netz ein dazu vollähnliches Trainingsmusterpaar $(x_1, \dots, x_n)_p$ fehlerfrei approximiert. Dies stellt die mathematisch *notwendige* Bedingung für die punktwise korrekte Generalisierungsfähigkeit dar, da alle physikalisch vollähnlichen Punkte $(x_1, \dots, x_n)_p$ auf ein und denselben Punkt mit $\pi_{j,p} = \text{const}$ zusammenfallen.
- **auf dem gesamten Definitionsbereich** der dimensionshomogenen Funktion f korrekt, wenn das neuronale Netz nach dem Lernen die richtige dimensionslose Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ approximiert. Dies stellt die mathematisch *notwendige und hinreichende* Bedingung für die korrekte Generalisierungsfähigkeit dar, da aus der Ähnlichkeitsfunktion F durch Einsetzen der dimensionslosen Potenzprodukte sofort die korrekte Funktion f dargestellt werden kann.

Bei diesen Aussagen zur Generalisierungsfähigkeit ist anzumerken, daß es sich bei beiden Bedingungen um theoretische Ergebnisse handelt, die zunächst nur für ideal rauschfreie Musterdaten gelten. Dies ist in praktischen Anwendungen nicht notwendigerweise erfüllt, jedoch sind trotz der auch auf Seite 9 bereits diskutierten Allgegenwärtigkeit von Meßfehlern und Rauschen die Eigenschaften von Meßdaten als dimensionsbehaftete Größen und die daraus abgeleiteten Prinzipaussagen unverändert gültig.

4.2.3 Topologieinterpretation

Aus der notwendigen und hinreichenden Aussage zur korrekten Generalisierung in nichtlinearen rückkopplungsfreien neuronalen Netzen ergibt sich ein neues Topologieentwurfs- und Interpretationsschema für diesen Netztyp in Abbildung 30, der auch als *Ähnlichkeitsnetz* (*similarity network*) bezeichnet wird [187].

Als Folgerung aus dem Pi-Theorem ergibt sich, daß die erste und die letzte Schicht eines neuronalen Netzes die entsprechenden Hin- und Rücktransformationen der Ähnlichkeitsfunktion F darstellen müssen, wie dies bereits in Abbildung 29 dargestellt ist. Durch die Reduktion auf $m = n - r$ dimensionslose Variablen der Ähnlichkeitsfunktion F steht damit in Abbildung 30 die minimal erforderliche Anzahl von Netzknoten und Transferfunktionen in der ersten, zweiten, vorletzten und letzten Netzwerkschicht fest.

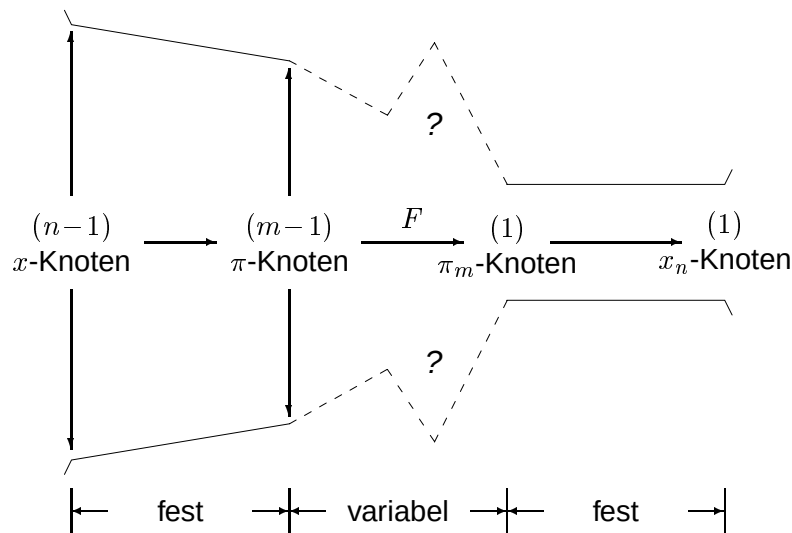


Abbildung 30: Topologieschema von Ähnlichkeitsnetzen

Über den inneren Teil der unbekannten Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$, die hierfür notwendigen Anzahlen von Knoten und Schichten kann jedoch nichts in voller Allgemeinheit gesagt werden, da dies vorwiegend von der Wahl der π_j und der Komplexität des unbekannten physikalischen Zusammenhangs von f bestimmt wird. Dies ist in Abbildung 30 durch die Fragezeichen der inneren Schicht(en) dargestellt.

Desweiteren ist erforderlich, daß in Abbildung 30 zur Auflösung des letzten dimensionslosen Potenzprodukts π_m nach x_n bis zu r Basisvariablen von der ersten bis zur letzten Netzwerkschicht durchgeschleift werden müssen. Die Notwendigkeit solcher in biologischen Vorbildern gefundener und als *information shortcuts* bezeichneter Verbindungen über mehrere Schichten hinweg [197, 199] besitzt daher in der Modellvorstellung dimensionshomogener Ähnlichkeitsnetze eine ganz natürliche theoretische Erklärung.

Es stellt sich daher die Frage, inwieweit durch die Transformation des Approximationsproblems in den dimensionslosen Raum die Schwierigkeit des ursprünglichen Approximationsproblems reduziert oder erhöht wird. Da hierfür jedoch kein allgemeingültiger mathematischer Beweis vorliegt, kann diese Frage nur durch umfangreiche numerische Simulationsstudien untersucht werden, die im folgenden Abschnitt dargestellt sind.

4.2.4 Kontrollen

Durch die notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen für die korrekte Generalisierung ist zwar gezeigt, daß sich jedes korrekte Ergebnis einer Approximationsfunktion f stets auch in Form einer dimensionslosen Ähnlichkeitsfunktion F angeben läßt. Das Kernproblem der Funktionsapproximation (d.h. der Lernbarkeit) einer unbekannten Funktion f bzw. F aus einer begrenzten Menge von p Stützstellen (d.h. von Musterdaten) wird damit zwar in einen anderen Raum transformiert, bleibt aber nach wie vor bestehen.

In Ermangelung eines mathematischer Beweises für die Vorteilhaftigkeit der Transformation des Approximationsproblems von f auf F wurden umfangreiche numerische Simulationen durchgeführt, die im Rahmen der Untersuchungen die Sinn- und Vorteilhaftigkeit der dargestellten Ähnlichkeitsnetze voll bestätigen konnten und auch durch andere numerischen Beobachtungen [83, 185, 186] gestützt werden. Für die numerischen Simulationen wurde das im Anhang A.5 dargestellte Wärmeleitproblem zur Untersuchung der Frage benutzt, ob sich die theoretische Konstruktion dimensionshomogener neuronaler Ähnlichkeitsnetze nach dem Pi-Theorem auch in der stochastischen Suche mit genetischen Algorithmen in der Praxis als das bestapproximierende neuronale Netz ergibt.

Aus der Vielzahl der in zahlreichen Läufen des genetischen Algorithmus gefundenen Lösungstopologien sind hier zwei typische Lösungen in Abbildung 31 und Abbildung 32 herausgegriffen. Hierbei zeigt Abbildung 31 ein neuronales Netz nach 49 Generationen.

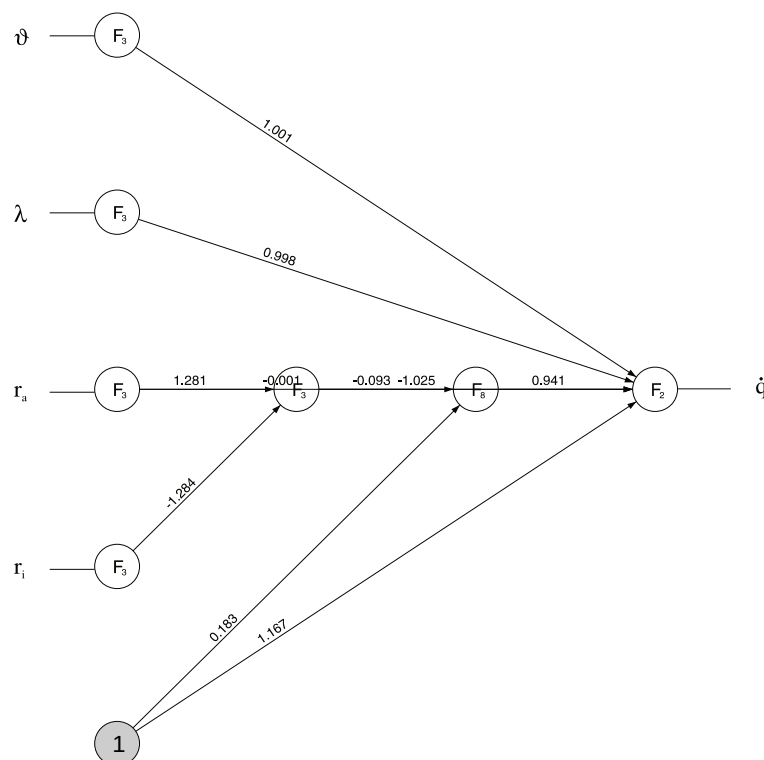


Abbildung 31: Netztopologie mit 0.0362 % Fehler nach 49 Generationen [185]

Als entsprechende analytische Funktion der Netzdarstellung in Abbildung 31 ergibt sich für das neuronale Netz in der 49-ten Generation mit den Transferfunktionen nach Glei-

chung (205) die folgende funktionale Beziehung

$$\dot{q} = 3.212\lambda^{1.001}\vartheta^{0.998} \frac{e^{0.941 \cos(0.183 - (0.093 \ln |1.281 \ln |r_a| - 1.284 \ln |r_i|) - 0.001 \ln |r_a|)}}{(1.281 \ln |r_a| - 1.284 \ln |r_i|)^{1.025}} \quad (55)$$

die sofort als nicht-dimensionshomogene Funktion $g(x)$ identifiziert werden kann, da z.B. die Argumente der transzendenten Funktionen nicht dimensionslos sind. Verfolgt man den genetischen Algorithmus über mehrere Generationen weiter, zeigt Abbildung 32 wieder ein exemplarisch ausgewähltes neuronales Netz nach 71 Generationen.

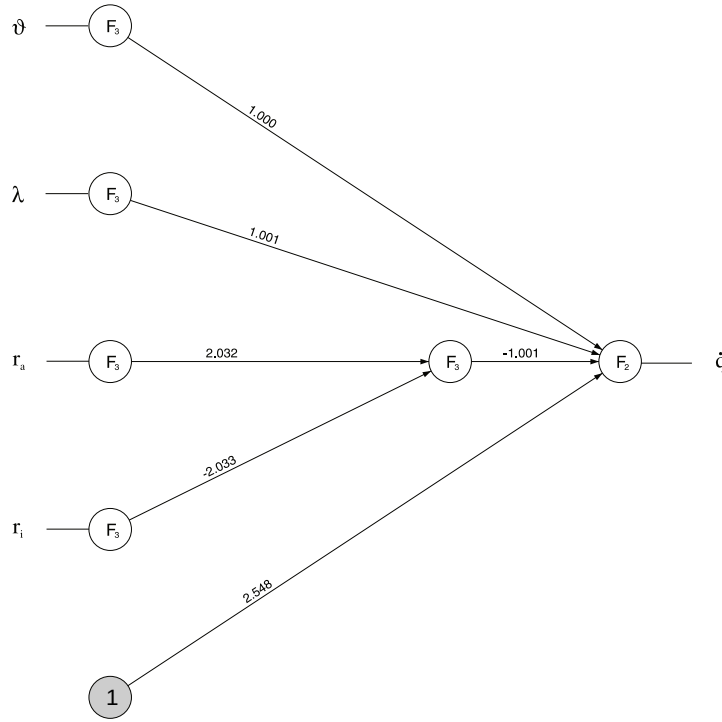


Abbildung 32: Netztopologie mit 0.0011 % Fehler nach 71 Generationen [185]

Als analytische Funktion repräsentiert das neuronale Netz in der 71-ten Generation mit den Transferfunktionen nach Gleichung (205) jetzt die funktionale Beziehung

$$\dot{q} = 12.782\lambda^{1.001}\vartheta^{1.000}(2.032 \ln |r_a| - 2.033 \ln |r_i|)^{-1.001} \quad (56)$$

Eine genaue Inspektion von Gleichung (56) macht den großen Fortschritt in der Modellierung des physikalischen Phänomens durch das neuronale Netz nach 71 Generationen deutlich. Vernachlässigt man jeweils die dritte Nachkommastelle (indem für zwei der Exponenten die Näherung $\pm 1.001 \approx \pm 1$ und für die Vorfaktoren beider Logarithmen die Näherung $2.032 \approx 2.033$ verwendet wird), so lassen sich die Summanden zu

$$\dot{q} \approx 6.292 \frac{\lambda \vartheta}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} \approx 2\pi \frac{\lambda \vartheta}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} \quad (\text{exakte Lösung}) \quad (57)$$

zusammenfassen. Dies entspricht bis auf einen kleinen numerischen Fehler ($\approx 0,15\%$) des Vorfaktors bereits der Form der exakten Lösung in Gleichung (207) im Anhang.

Trägt man die analytischen Beziehungen beider Netze samt den p Musterdaten im dimensionslosen Raum der Transformationsgruppen (π_1, π_2) nach Gleichung (208) und (209) auf, so erhält man die Darstellung der Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ in Abbildung 33.

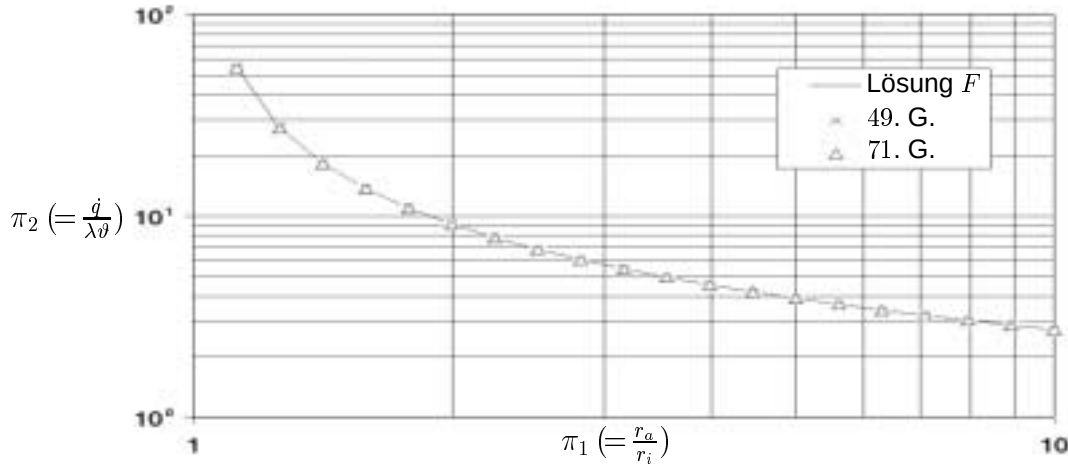


Abbildung 33: Netzapproximationen der Ähnlichkeitsfunktion F mit $\pi_2 = 2\pi / \ln \pi_1$ [185]

Da sich beide Näherungen nahezu überdecken, ist in Abbildung 34 der relative dimensionslose Fehler $\Delta F/F$ beider Netztopologien über alle $p \cdot k = 60$ Bewertungsmuster aufgetragen (siehe Anhang A.5). Da das erste Netz nach 49 Generationen bereits einen sehr kleinen Approximationsfehler besitzt wird klar, daß ein numerisches Fehlerkriterium allein nicht ausreicht, um dimensionshomogene Netztopologien zu erzwingen.

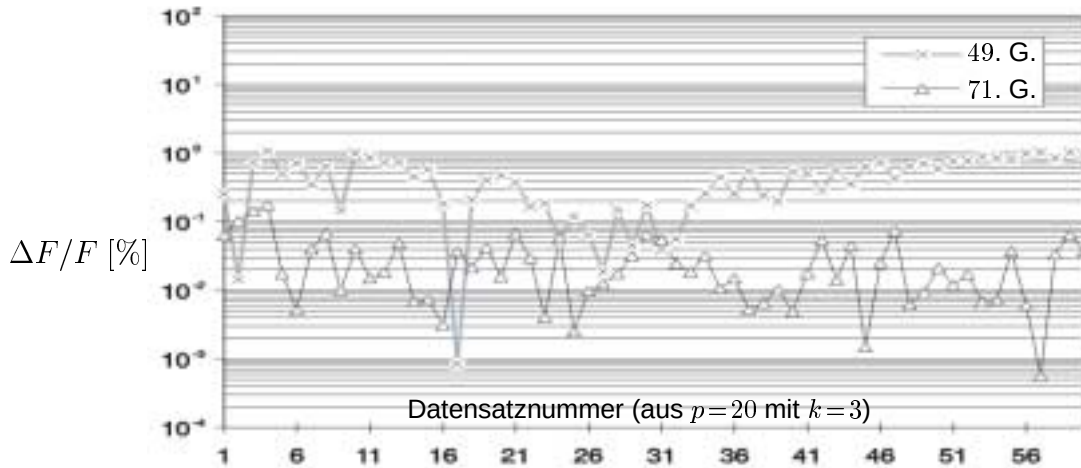


Abbildung 34: Relative Netzfehler der $p \cdot k$ Bewertungsmuster [185]

Abbildung 34 zeigt, daß nicht-dimensionshomogene Netze durchaus lokal an einzelnen Punkten die dimensionshomogene Lösung in numerischer Genauigkeit übertreffen können, jedoch skaliert die Approximationsgüte nicht-dimensionshomogener Netze außerhalb der Musterdaten wesentlich schlechter, da im Gegensatz zu den dimensionslosen Transformationsgruppen einer dimensionshomogenen Funktion nicht die korrekte Skalierung über den gesamten Definitionsbereich vorliegt.

Aus diesen Ergebnissen ist die Vorteilhaftigkeit der Problemtransformation [83] sowie die verbesserte Interpretation der Netztopologie leicht einsehbar, den noch offenen mathematischen Beweis [123] können die Simulationsergebnisse jedoch nicht ersetzen.

4.3 Fallbasiertes Schließen

In der Künstlichen Intelligenz wird versucht, durch *Softwareprogramme* eine maschinelle Verarbeitung und Ableitung von neuem Wissen aus bereits bekanntem Wissen zu erreichen. Hierfür werden in innerhalb verschiedener *Schlußfolgerungsmechanismen (reasoning techniques)* das *fallbasierte (case-based reasoning)* und das *regelbasierte Schließen (rule-based reasoning)* unterschieden. Auf diese Mechanismen soll hier unter dem Blickwinkel der Dimensionshomogenität besonders eingegangen werden.

4.3.1 Prozeßmodell

Das Prozeßmodell im fallbasierten Schließen (*case-based reasoning, CBR*) formt sich aus der Erfahrung, daß *menschliches Problemlöseverhalten* auf der Übertragung bekannter Problemlösungen auf neue Problemstellungen (d.h. „Fällen“) beruht [1, 6, 20, 120, 140, 209, 233]. Dadurch soll ermöglicht werden, zur Lösung von neuen Problemstellungen bekannte alte, aber „*ähnliche*“ Problemstellungen in einer Falldatenbasis nachzuschlagen und deren bekannte Lösungen geeignet auf den neuen Fall zu adaptieren.

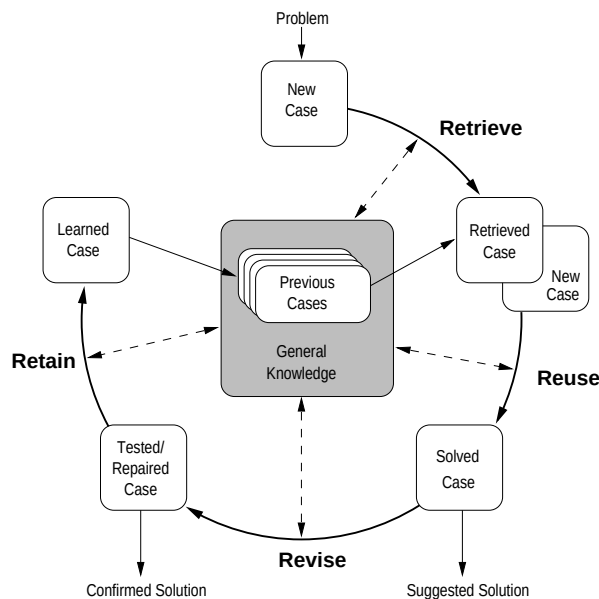


Abbildung 35: Prozeßmodell im fallbasierten Schließen (nach [1])

Für die Erzeugung einer fallbasierten Schlußfolgerung lassen sich daher die folgenden *vier Kernfragen* [1, 7, 233] aufzählen, die in der Literatur als sogenanntes *Prozeßmodell* [1] bekannt sind. Die Kernfragen sind das

- ☐ Bereitstellen des ähnlichsten Falles (*Retrieve*), das
- ☐ Wiederverwenden des darin enthaltenen Wissens (*Reuse*), das
- ☐ Anpassen der vorgeschlagenen Lösung (*Revise*), sowie das
- ☐ Aufbewahren der Erfahrungen (*Retain*).

Diese Ablaufsequenz des aus *Retrieve*, *Reuse*, *Revise* und *Retain* bestehenden Prozeßmodells ist zunächst in Abbildung 35 dargestellt und dient zur Visualisierung der offenen Fragestellungen im fallbasierten Schließens.

Ein genaueres Ablaufschema des Prozeßmodells in Abbildung 35 ist in Abbildung 36 dargestellt. Da für die Korrektheit des fallbasierten Schließens bisher kein allgemeingültiger Beweis bekannt ist, sind die in der Vorgehensweise angenommenen Vorgänge als Rechtecke und die erforderlichen Wissensbausteine als Ovale dargestellt [209]:

- (*Assign Indexes*). Aus der Repräsentationsform eines neuen Falles muß eine geeignete Abstraktionsform (*Index*) erzeugt werden. Hierfür wird in Abschnitt 4.3.2 eine geeignete Methode entwickelt.
- (*Retrieve*). Die erzeugte Abstraktion der Fallrepräsentation wird zum Durchsuchen der Fallbasis verwendet, mit der auf existierende Lösungen zurückgegriffen werden kann. Das Suchergebnis eines alten Falles enthält auch die frühere Lösung.
- (*Modify*). Die frühere Lösung wird an den neuen Fall angepaßt und als Lösung für den neuen Fall vorgeschlagen. Die Adaption gehörte bisher zu den am schlechtesten verstandenen Teilen des fallbasierten Schließens [20, 43, 233] und wird in Abschnitt 4.3.3 behandelt.

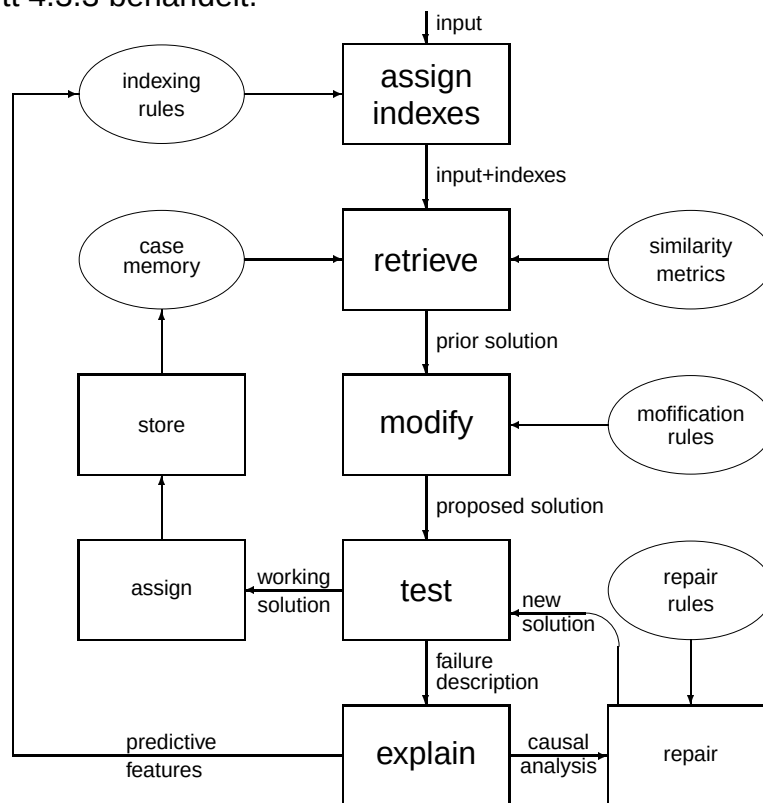


Abbildung 36: Case-Based Reasoning Flowchart (nach [209])

- (*Test*). Die vorgeschlagene Lösung wird erprobt, indem sie ausprobiert wird und entweder die Erwartungen erfüllt oder nicht. Hierfür wird in diesem Kapitel ein geeignetes Kriterium angegeben.
- (*Assign and Store*). Neue vorgeschlagene Lösungen werden in geeigneter Form in der Falldatenbasis abgelegt. Durch die in Abschnitt 4.3.3 dargestellte Methode kann eine redundanzfreie Minimalform der Falldatenbasis erreicht werden.
- (*Explain, Repair and Test*). Scheitert die vorgeschlagene Lösung, wird das Scheitern versucht zu erklären, die vorgeschlagene Lösung erneut geeignet abgeändert und nochmals getestet.

Notwendig für die in Abbildung 36 enthaltenen Schritte ist die geeignete Bildung der Fallabstraktionen [20], die den Zugriff auf die Falldatenbasis ermöglichen. Die hierfür als notwendig erachteten Wissensbausteine sind in Abbildung 36 als Ovale gekennzeichnet und umfassen im einzelnen [209]:

- (*Indexing Rules*). Nach dem bisherigen Kenntnisstand hängt die Bildung von Abstraktionen vom interessierenden Zweck ab und muß jeweils geeignet konstruiert werden.
- (*Case Memory*). Die Falldatenbasis umfaßt das gesammelte Fallwissen. Hierfür kann auf geeignete vorhandene Datenbanken, Speicher- und Retrievalverfahren zurückgegriffen werden.
- (*Similarity Metrics*). Passen mehrere Fälle auf die Fallabstraktion, ist über einen geeigneten Ähnlichkeitsbegriff der ähnlichste Fall in der Falldatenbasis zu bestimmen. Dies stellt eine der zentralen Problemstellungen dar.
- (*Modification Rules*). Die Modifikationsregeln legen fest, wie die Lösung eines alten Falles auf einen neuen Fall angepaßt werden kann.
- (*Repair Rules*). Die Ursachenanalyse gescheiterter Lösungen hängt wesentlich von verfügbarem Zusatzwissen ab.

Prototypische Implementationen sogenannter *Expertensystemschalen (shells)* sind mit den CBR-Systemen INRECA [21] und CBR WORKS [203] für fallbasierte Systeme verfügbar. Entsprechend dem „Schalencharakter“ dieser Systeme stellen diese zwar die Funktionalitäten der Datenzugriffe bereit, jedoch muß der in einer bestimmten Anwendung zu verwendende Ähnlichkeitsbegriff noch vom Benutzer zur Verfügung gestellt werden. Dies liegt in der in voller Allgemeinheit in der Informatik noch ungeklärten Frage nach dem Ursprung und Wesen von „Ähnlichkeit“ begründet. Die Erstellung eines Ähnlichkeitsbegriffes wird daher im CBR als eine der zentralen Problemstellungen benannt [233].

Die Grundlage für die Erstellung eines Ähnlichkeitsbegriffs stellt die Fallbeschreibung dar, die kurz nur als „Fall“ (case) bezeichnet wird. Ein Fall besteht aus einer Problembeschreibung, einer Lösung und einer Erläuterung [16]. Diese Definition der Fallrepräsentation kann für die hier im folgenden betrachtete reellwertige Fallklasse auf eine Prämisse samt zugehöriger Konklusion eingeschränkt werden, die nach Definition 8 aus einer Liste reellwertiger Attribute besteht, die der unbekannten funktionalen Modellvorstellung f (d.h. einer unbekannten Regel) in der Problemdomäne genügen.

Definition 8 Existiere als Regel die unbekannte Funktion $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ in einer Problemdomäne, so gilt für eine bestimmte Punktprobe dieser Funktion, d.h. eine bestimmte Wahl p der Parameter $(x_1, \dots, x_n)_p$ die f erfüllen

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\text{Prämisse}} \longrightarrow \underbrace{x_n}_{\text{Konklusion}} \quad (58)$$

Diese Beziehung wird innerhalb der gewählten funktionalen Modellvorstellung zur Definition des Begriffs des fallbasierten Schließens verwendet. In der speziellen Terminologie der Künstlichen Intelligenz bedeutet dies, daß die Konklusion x_n immer dann eintritt, wenn die Prämisse $x_1, \dots, x_{n-1}$ erfüllt ist.

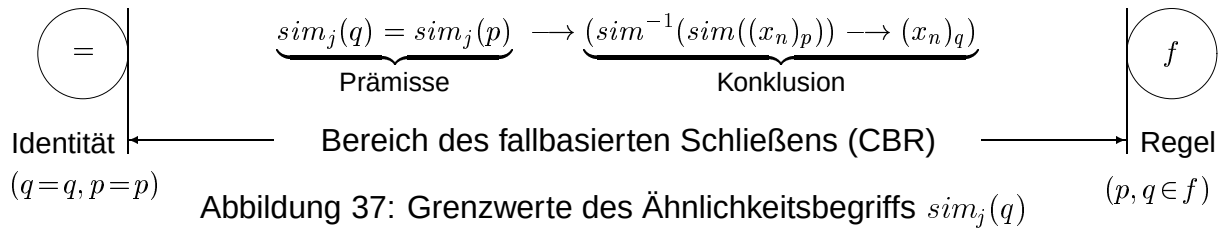
Für das regelbasierte Schließen ergibt sich dann in diesem Zusammenhang sofort die entsprechende Definition 9.

Definition 9 Existiere in einer Problemdomäne die Funktion $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ als Regel, so gilt für den Zusammenhang zwischen Prämisse $(x_1, \dots, x_{n-1})$ und Konklusion x_n die Beziehung

$$\underbrace{f(x_1, \dots, x_{n-1})}_{\text{Prämisse}} \longrightarrow \underbrace{x_n}_{\text{Konklusion}} \quad (59)$$

die sich über den gesamten Definitionsbereich der Einflußgrößen erstreckt. Diese Beziehung wird innerhalb der gewählten funktionalen Modellvorstellung zur Definition des Begriffs des regelbasierten Schließens verwendet.

Aus den Modellvorstellungen der Definitionen 8 und 9 kann nun das zentrale Problem des fallbasierten Schließens, die Übertragung der „Schlußfolgerung eines bekannten Falles p auf einen unbekannten neuen Fall q “, als Funktion des Ähnlichkeitsbegriffs $\text{sim}_j(q)$ (von similarity) in Abbildung 37 definiert werden. Der/die gesuchte(n) Ähnlichkeitsbegriff(e)



$\text{sim}_j(q)$ müssen daher als Grenzfälle sowohl die Identität (d.h. die Schlußfolgerung von q auf q selbst) als auch beliebige bestimmte Instantiierungen q aus dem gesamten Definitionsbereich der Regel (d.h. $q \in f$) korrekt erfüllen können. Daraus folgt, daß die Konstruktion eines Ähnlichkeitsbegriffs $\text{sim}_j(q)$ als Kernproblem des fall- bzw. regelbasierten Schließens anzusehen ist, der entsprechend Abbildung 37 konsistent in die Identität und die Regel übergehen können muß.

Im Vergleich zu dem hier später in Gleichung (65) abgeleiteten objektiven Ähnlichkeitsbegriffs hing bisher im fallbasierten Schließen die Wahl eines speziellen Ähnlichkeitsbegriffs jeweils vom interessierenden Zweck ab. Um gewisse Mengen von Objekten, die einander als „ähnlich“ angesehen wurden, zu Clustern zusammenzufassen und die gemeinsamen Merkmale des Clusters als eine Abstraktion der Objekteigenschaften aufzufassen, wurde bisher unter „Ähnlichkeit“ eine unscharfe Relation zwischen zwei Fallrepräsentationen verstanden, deren „Ähnlichkeit“ in der Regel durch reellwertige Funktionen als ein sogenanntes *Ähnlichkeitsmaß* dargestellt wurden [132, 233].

Als Ähnlichkeitsmaß wurde bisher (neben anderen Möglichkeiten wie z.B. gewichteten Varianten [6] (Hyperellipsiode) von Gleichung (60) und Voronoi-Umgebungen [233]) für reellwertige Attribute die folgende MINKOWSKI-Norm $d^\kappa(x_p, x_q)$ mit

$$d^\kappa(x_p, x_q) = d^\kappa((x_1, \dots, x_n)_p, (x_1, \dots, x_n)_q) = \left[\sum_{i=1}^n |x_{i,p} - x_{i,q}|^\kappa \right]^{1/\kappa} \quad (60)$$

und $\kappa \in \{\mathbb{R}^+ \mid \kappa \geq 1\}$ zur Erstellung des Abstandsmaßes aus der Fallrepräsentation zweier Fälle p und q verwendet [97]. Diese Norm d^κ geht für $\kappa = 1$ in die *Betragsnorm*, für $\kappa = 2$ in die *EUKLIDISCHE Norm* und für $\kappa \rightarrow \infty$ in die *Maximumnorm* über.

4.3.2 Schließverfahren

Wird entsprechend dem Einbettungssatz das in Abschnitt 3.4 dargestellte dimensionshomogene Funktionenmodell nach dem Pi-Theorem als formale Grundlage für die Einbettung des fallbasierten (und des regelbasierten) Schließens in den Bereich der Naturwissenschaft und des Ingenieurwesens verwendet, so ergeben sich für die Definitionen 8 und 9 sofort deren dimensionshomogene Entsprechungen in den Sätzen 2 und 3.

Satz 2 *Gilt in einem Fall p mit der vollständigen und dimensionshomogenen Fallbeschreibung $(x_1, \dots, x_n)_p$ und der Prämisse $(x_1, \dots, x_{n-1})_p$ die Konklusion x_n , so gilt die transformierte Prämissen-Konklusions-Beziehung*

$$\underbrace{\pi_1, \dots, \pi_{m-1}}_{\text{Prämisse}} \longrightarrow \underbrace{\pi_m}_{\text{Konklusion}} \quad (61)$$

außer für Fall p auch für alle Fälle q , die zum Fall p physikalisch vollähnlich sind und deshalb eine zum Fall p identische Prämisse besitzen. Dies ist der konstruktive Beweis für die Korrektheit des fallbasierten Schließens.

Nach der Befriedigung von Definition 8 durch Satz 2 ergibt sich durch Ausdehnung von Satz 2 auf den Definitionsbereich von f das gesuchte Ergebnis für das regelbasierte Schließen durch:

Satz 3 *Sei $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ die korrekte Konklusion der Regel f aller Fallbeschreibungen p einer physikalischen Beziehung mit der Prämisse $(x_1, \dots, x_{n-1})_p$, so gilt auch immer die transformierte Regel F in der Form*

$$\underbrace{F(\pi_1, \dots, \pi_{m-1})}_{\text{Prämisse}} \longrightarrow \underbrace{\pi_m}_{\text{Konklusion}} \quad (62)$$

da F lediglich die durch das Pi-Theorem garantierte und in den Transformationsgruppen umgeschriebene Form von f ist. Dies ist der konstruktive Beweis für die Korrektheit des regelbasierten Schließens.

Satz 2 stellt die Befriedigung von Definition 8 dar und macht darüber hinaus deutlich, warum in Definition 8 und in Abbildung 37 links fallbasiertes Schließen zunächst als die Identität, d.h. als die Abbildung von q auf q selbst, definiert werden mußte. Es wäre jedoch falsch anzunehmen, daß die Abbildung von q auf q selbst sich aus der notwendigen Betrachtung des fallbasierten Schließens herausnehmen ließe und z.B. mit dem definitorisch unschärferen Ausdruck des „Fallwissens“ bezeichnet werden könnte.

Dies wäre nur unter starkem Verlust der verstandesmäßigen Schärfe für das Problemverständnis möglich, da bei Vorliegen der Prämisse von q aufgrund des experimentell überprüfbaren Kausalitätscharakters von F immer die Konklusion von q im Sinne des fallbasierten Schließens eintreten muß, unabhängig davon, ob der Fall q nun schon bekannt ist oder nicht.

4.3.3 Ähnlichkeitsbegriff

Zur Ermittlung der Lösungsmenge der zu p vollähnlichen Fälle q , die durch die dimensionslosen Gruppen π_j nach Gleichung (16) festgelegt sind, wird der verwendete Ähnlichkeitsbegriff in Form der folgenden zwei Definitionen 10 und 11 angegeben.

Definition 10 Die Ähnlichkeitstransformation (d.h. die Abstraktion) $\pi : X \mapsto \Pi$ des dimensionsbehafteten Raumes X in den dimensionslosen Raum Π mit $j = 1, \dots, m$ lautet

$$\text{sim}_j(x_1, \dots, x_n) = \pi_j = x_{j+r} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} \quad (63)$$

und ist surjektiv, da mit $m = n - r$ der $\mathbb{R}^n$ auf einen $\mathbb{R}^m$ abgebildet wird. Durch die Dimensionsreduktion mit $m \leq n$ können verschiedene Urbilder identische Bilder haben.

Daher wird im folgenden unter den Begriffen „Ähnlichkeit“ und „Ähnlichkeitsbegriff“ immer die physikalisch begründete Bildung von Ähnlichkeitskennzahlen verstanden und der physikalische Ähnlichkeitsbegriff in der Informatik im Sinne einer Abstraktion verwendet.

Definition 11 Die inverse Ähnlichkeitstransformation $\pi^{-1} : \Pi \mapsto X$ des dimensionslosen Raumes Π in den dimensionsbehafteten Raum X mit $j = 1, \dots, m$ lautet

$$\text{sim}_j^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_{j+r} = \pi_j \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_{ji}} \quad (64)$$

und ist nicht eindeutig, da mit $n = m + r$ der $\mathbb{R}^m$ auf einen $\mathbb{R}^n$ abgebildet wird. Die Dimensionsexpansion bedeutet, daß identische Urbilder verschiedene Bilder haben können.

Für die allgemeine Ähnlichkeitsaussage ergibt sich mit Abbildung 37 und Gleichung (63) bzw. (64) in Übereinstimmung mit dem Pi-Theorem als formal notwendige und hinreichende Bedingung ganz allgemein über die Ähnlichkeitsfunktion F

$$x_n = \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_{mi}} F(x_{r+1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{1i}}, \dots, x_{n-1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{(m-1)i}}) \quad (65)$$

wobei sich Gleichung (65) natürlich im speziellen Fall der Vollähnlichkeit zweier Fälle p und q mit $\pi_{j,p} = \pi_{j,q}$ sich ohne Kenntnis von F zu einer reinen Umskalierung auf

$$x_{n,q} = \text{sim}_j^{-1}(\text{sim}_j(x_{n,p})) = \prod_{i=1}^r x_{i,q}^{\alpha_{mi}} \cdot x_{n,p} \prod_{i=1}^r x_{i,p}^{-\alpha_{mi}} \quad (66)$$

reduziert. Entscheidend ist, daß damit die zwei Ähnlichkeitsbegriffsbildungen nach Gleichungen (66) oder (65) mit (60) i.A. unverträglich sind. Dies liegt darin begründet, daß nach Gleichung (65) der Ähnlichkeitsbegriff in dimensionslosen Größen ermittelt wird, während der klassische Abstandsbegriff in Gleichung (60) im Raum der dimensionsbehafteten Größen bestimmt wird. Es wäre bereits ein erster Fortschritt, die MINKOWSKI-Norm dimensionslos als $d^\kappa(\pi_p, \pi_q)$ zu bestimmen. Die Ähnlichkeitsaussage in Gleichung (60) z.B. für $\kappa = 2$ besitzt jedoch wegen ihrer isotropen Eigenschaften als Norm i.A. nicht die völlig gleichen Eigenschaften wie die Gleichung (65) [189]. Diese Inkonsistenz wird im folgenden Beispiel illustriert.

4.3.4 Kontrollen

Stellt man den neuen dem klassischen Ähnlichkeitsbegriff am Beispiel der Gasturbine im Anhang A.3 gegenüber, so erhält man für Gleichung (65) die in Abbildung 38 enthaltene Ähnlichkeitsaussage, die auf dem beweisbaren Zusammenhang zwischen der Beziehung $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ im 2-dimensionalen Π -Raum und der nach Gleichung (64) rücktransformierten Beziehung $f(\dot{W}_N, \dot{Q}_A, \dot{Q}_Z) = 0$ im 3-dimensionalen X -Raum beruht.

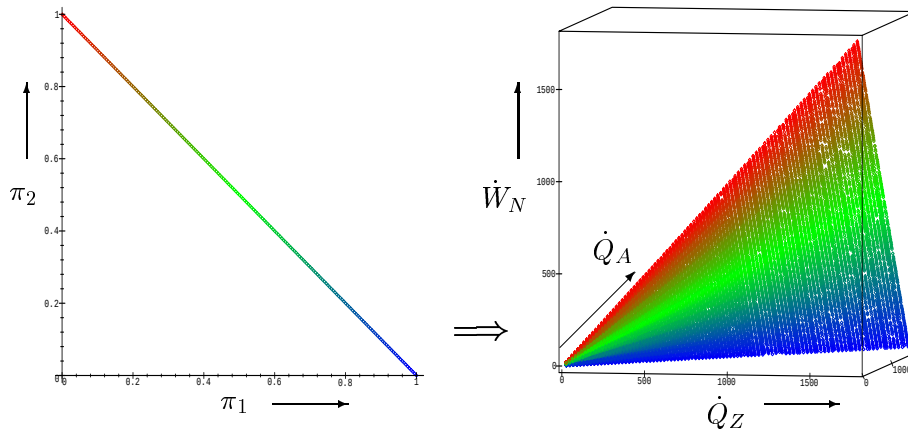


Abbildung 38: Rücktransformation vollähnlicher Fälle (gleichfarbig)

In Abbildung 38 sind dazu die Farbtöne so gewählt, daß identische Farbtöne die im Sinne der Ähnlichkeitstheorie vollähnlichen und damit korrekt aufeinander abbildbaren Gasturbinen bedeuten. Entsprechend Satz 2 kann daher von der Kenntnis einer bestimmten Turbine p mit einer bestimmten Farbe in X mit der Falldarstellung $(\dot{W}_N, \dot{Q}_A, \dot{Q}_Z)_p$ korrekt fallbasiert auf alle anderen gleichfarbigen (d.h. vollähnlichen) Fälle q (entlang von Ursprungsgeraden) geschlossen werden.

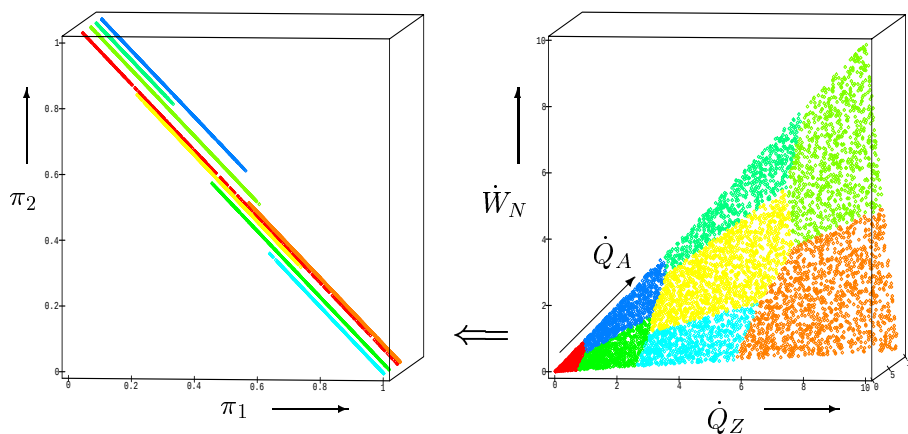


Abbildung 39: Isotrope Distanzmaßbetrachtung (Voronoi-Gebiete gleichfarbig)

Im Gegensatz dazu ist in Abbildung 39 die physikalische Aussage eines klassischen isotropen Distanzmaßes nach Gleichung (60) im fallbasierten Schließen dargestellt. Dazu werden acht Voronoi-Umgebungen von acht bekannten Fällen als „Einzugsgebiete“ für die Erzeugung einer fallbasierten Schlußfolgerung verwendet [233]. In Abbildung 39

wurde dazu jedes der acht Voronoi-Gebiete im 3-dimensionalen X -Raum mit einer eigenen Farbe versehen und anschließend ähnlichkeitstransformiert. In der Ergebnisvisualisierung wurden dabei die resultierenden Farbstreifen im 2-dimensionalen Π -Raum leicht perspektivisch nach hinten verschoben. Dabei ergeben sich aus der Isotropie des Distanzmaßes nach Gleichung (60) physikalisch falsche Ergebnisse, da nach Gleichung (65) physikalisch korrekt nur jedes der acht Farbgebiete (d.h. jeder der acht Fälle) einen einzigen *vollähnlichen Punkt* im Π -Raum besitzt und sich daher keine ausgedehnten Farbstreifengebiete ergeben dürften.

Dieser Widerspruch führt zur Verwerfung des bisherigen, auf einem Abstandsmaß beruhenden Ähnlichkeitsbegriffs, da nach dem Einbettungssatz von Seite 35 keine inkonsistente Begriffsauffassung von „Ähnlichkeit“ im offenen Widerspruch zur Physik existieren kann. Für das in Abbildung 36 dargestellte Flußdiagramm des fallbasierten Schließens ergibt sich damit das folgende theoretisch gestützte Ablaufschema nach Abbildung 40, in dem alle theoretischen Entsprechungen zu den verbalen Beschreibungen in Abbildung 36 enthalten sind.

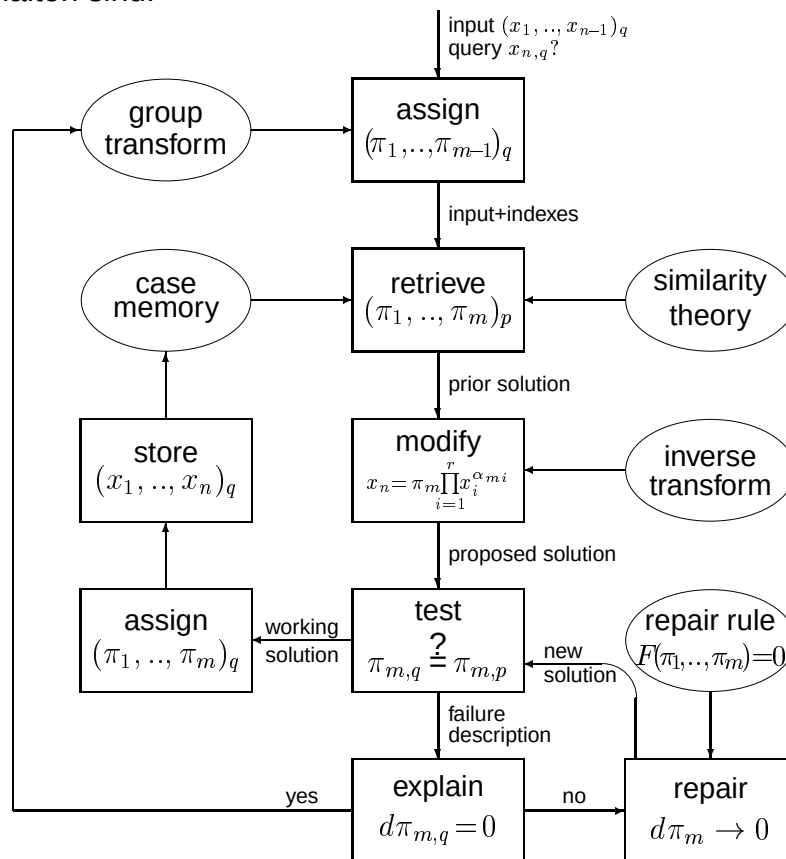


Abbildung 40: Theoretisch gestütztes Case-Based Reasoning Flowchart [189, 190]

Dem Gültigkeitsbereich dimensionshomogener Modellvorstellungen kommt daher in der Konstruktion von Ähnlichkeitsbegriffen eine zentrale Bedeutung zu [189, 190]. Für das fall- und regelbasierte Schließen folgt für reellwertige und dimensionsbehaftete Fallbeschreibungen allgemein, daß bisherige klassische, im X -Raum definierten Distanzmaße nach Gleichung (60) immer dann keine korrekten und physikalisch konsistenten Ähnlichkeitsmaße darstellen können, wenn sie den im dimensionslosen Π -Raum gültigen Ähnlichkeitsaussagen (insbesondere den Isolinien mit $\pi_j = \text{const}$) widersprechen.

4.4 Mustererkennung

Die Forschungsanstrengungen auf dem Gebiet der Mustererkennung z.B. in der Schrift- und der Spracherkennung sowie des Computersehens haben in den letzten 25 Jahren eine starke Zunahme erfahren. Hierbei lässt sich die Mustererkennung als inverse Problemstellung zu der digital bereits sehr weitgehend beherrschten Erzeugung von Bild- und Tonmedien auffassen und kann damit im Verständnis einer echten zukünftigen Mensch-Maschine-Kommunikation als einer der letzten großen Engpässe in der Erstellung dieser Informationsschnittstelle angesehen werden.

Entsprechend den Grundlagen zur Mustererkennung [52, 84, 110, 174] werden die Verarbeitungsschritte und Fragestellungen der Bildrepräsentation, sowie der anschließenden Objektklassifikation in Abbildung 41 zunächst vereinfacht dargestellt.

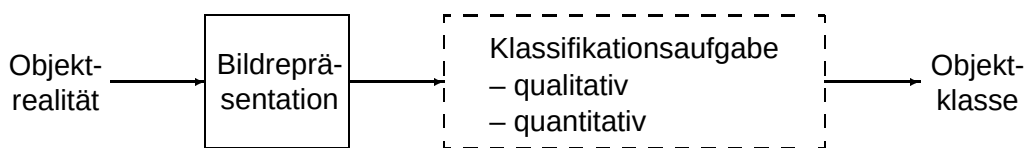


Abbildung 41: Klassifikationsaufgabe in der Mustererkennung

Diese Verarbeitungsschritte können natürlich nur einen zentralen Ausschnitt aller methodisch sehr unterschiedlichen Lösungsansätze im Gesamtgebiet der Bildverarbeitung darstellen. Hierzu zählen auch z.B. Verfahren zur Rauschfilterung und zur Objektsegmentierung, die der Objektklassifikation in Abbildung 41 vorgeschaltet werden können.

Die Klassifikation in der Bildverarbeitung ist im weitesten Sinne nicht nur eine Objekteigenschaft, sondern hängt vom Kontext ab. Für das erforderliche Weltmodell kommen daher Techniken aus der Künstlichen Intelligenz (String- und graphenbasierte Grammatiken, Expertensysteme, neuronale Netze, sowie weitere numerische, symbolische und wissensbasierte Verfahren [119, 160, 161, 208, 235]) zum Einsatz. Diese Verfahren beinhalten jedoch stets auch die Klassifikationsaufgabe in Abbildung 41.

4.4.1 Modellvorstellung

Für die algorithmische Implementierung der Objektklassifikation wird in der Mustererkennung typischerweise die Vorstellung in Abbildung 42 verwendet. Von zentraler Bedeutung ist die darin auftretende Dimensionsreduktion der Informationsdarstellung des Objekts.

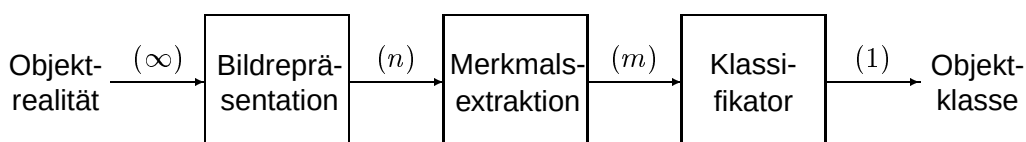


Abbildung 42: Dimensionsreduktion in der Klassifikation

Die Objektrepräsentation der ursprünglich unendlich feinen Auflösung wird dabei im Zuge der Abbildung auf eine Bildrepräsentation mit n Pixel, der anschließenden Extraktion einer bestimmten Anzahl von m Merkmalen sowie in einem Klassifikator, der eine Zuordnung des Objekts in eine Objektklasse ermöglichen soll, immer weiter reduziert.

Während in Abbildung 42 für den ersten Schritt der Digitalisierung mittels Scanner oder CCD-Kamera eine Theorievorstellung existiert, ist für die folgenden zwei Schritte der Merkmalsextraktion und der darauf aufgebauten Klassifikation noch keine umfassende Theorie der Mustererkennung bekannt, die befriedigende bzw. beweisbare Antworten auf die drei folgenden zentralen Fragen der Mustererkennung geben könnte:

- ☐ Kann es (überhaupt) eine minimale Menge von (Bild-)Merkmalen geben und wie werden diese Merkmale konstruktiv gefunden ?
- ☐ Gibt es eine Klassenzugehörigkeitsfunktion der Bildobjekte und wie kann diese gefunden werden ?
- ☐ Wie hängen Auflösung, Merkmalsanzahl und die Diskriminanz der Klassenzugehörigkeitsfunktion qualitativ und quantitativ zusammen ?

Bereits die Formulierung der dritten Kernfrage zeigt, daß diese Fragen keinesfalls unabhängig voneinander zu stellen sind. Insbesondere zeigt sie, daß eine Unvollkommenheit in der Auflösung und jede Unsicherheit in der Merkmalsselektion natürlich auch die Präzision und Eindeutigkeit der nachfolgenden Klassifikation und der daraus im Klassifikator abgeleiteten Klassenaussage mit beeinflussen wird.

Wesentlich für das grundlegende Verständnis der drei Kernfragen in der Mustererkennung ist die mit der Dimensionsreduktion $\infty \rightarrow n$, $n \rightarrow m$ und $m \rightarrow 1$ aus Abbildung 42 folgende Erkenntnis, daß im mathematischen Sinne die Abbildung der realen Bildszene auf eine Darstellung als Analog- bzw. Digitalbild möglichst bijektiv sein sollte, während die anschließende Merkmalsextraktion aus dieser Repräsentation sowie die Bildung eines Klassenbegriffes aus diesen Merkmalen dagegen surjektiv sein muß.

Für die Bildrepräsentation garantiert die Forderung der Bijektivität, daß die Repräsentation eine zwar andersartige aber gleichwertige Darstellung ist, die (unter der aus der Endlichkeit folgenden Einschränkung $n \ll \infty$) durch Rücktransformation wieder in das Urbild zurück verwandelt werden könnte. Diese bijektive Forderung der Gleichwertigkeit der Darstellungen wird von vielen Integraltransformationen (z.B. Fourier-, Wavelet- oder Momententransformation) erfüllt. Oft werden deshalb die Koeffizienten a_{pq} einer Integraltransformation nach Gleichung (67) zur Bildrepräsentation und anschließender Merkmalsextraktion verwendet.

$$a_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, p, q) h(x, y) dx dy \quad (67)$$

In Gleichung (67) ergeben sich für die Wahl des Kerns zu $g(x, y, p, q) = x^p y^q$ die sehr häufig verwendete Koeffizientendarstellung der Bildfunktion $h(x, y)$ als höhere Momente.

Für die in Abbildung 42 im Anschluß an die Bildrepräsentation weiter erforderlichen Verarbeitungsschritte, in denen von der Bildrepräsentation über die Merkmalsextraktion und Klassifikation zu einer Klassenzugehörigkeit abstrahiert wird, kann die geforderte Abstraktion nur durch einen surjektiven und damit nicht mehr eindeutig umkehrbaren Abbildungscharakter der Merkmale und der Klassifikationsfunktion gewonnen werden.

Der Einsatz der Momententransformation als Bildrepräsentation und zur anschließenden Merkmalsgenerierung in Form von Invarianten ist eine klassische Vorgehensweise in der

Mustererkennung [208, 219]. Hierfür werden entsprechend Gleichung (67) mittels Gleichung (68) die sogenannten regulären Momente r_{pq} eines Bildes [98] definiert.

$$r_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q h(x, y) dx dy \quad (68)$$

Die Funktion h ist der Bildwert $h(x, y)$ an der Stelle (x, y) . Bei einem monochromen Bild (kurz: S/W-Bild) sind die möglichen Werte von h lediglich 0 und 1, in Grauwertbildern mit z.B. 16 Graustufen nimmt h die Werte $\{0, 1/15, 2/15, \dots, 15/15\}$ an. Die uneigentlichen Integrale beziehen sich stets auf den Bildbereich und sind daher immer endlich.

Die bevorzugte Verwendung von höheren Momenten rührt dabei aus der Eigenschaft her, daß sich die Momente r_{pq} in Gleichung (68) mit den hierfür gültigen Vereinbarungen

$$r_{00} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx dy \quad (69) \quad r_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y h(x, y) dx dy \quad (72)$$

$$r_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x, y) dx dy \quad (70) \quad r_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x, y) dx dy \quad (73)$$

$$r_{01} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y h(x, y) dx dy \quad (71) \quad r_{02} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 h(x, y) dx dy \quad (74)$$

durch Wahl geeigneter Schwerpunktskoordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ und einer Drehung φ (zur Vorzeichendefinition siehe Tabelle 27) in bezug auf das objekteneigene Hauptachsensystem (x_b, y_b) in Abbildung 43 invariant gegenüber Translation und Rotation machen lassen. Mit

$$\bar{x} = \frac{r_{10}}{r_{00}} \quad (75)$$

$$\bar{y} = \frac{r_{01}}{r_{00}} \quad (76)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 r_{11}}{r_{20} - r_{02}} \right) \quad (77)$$

kann mit den Schwerpunktskoordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ eine Translationsinvarianz der ursprünglichen Momente r_{pq} in Gleichung (68) erreicht werden, die dann als Zentralmomente μ_{pq} bezeichnet werden.

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q h(x, y) dx dy \quad (78)$$

Für die Formulierung der Rotationsinvarianz ergibt sich Gleichung (79), die aus den Zentralmomenten μ_{pq} unter Verwendung des Winkels φ eine genaue numerische Berechnung

der rotationsinvarianten Zentralmomente μ'_{jk} des gedrehten Pixelbildes ermöglicht.

$$\mu'_{jk} = \sum_{r=0}^j \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{j}{r} \binom{k}{s} (\cos \varphi)^{j-r+s} (\sin \varphi)^{k+r-s} \mu_{j+k-r-s, r+s} \quad (79)$$

Abbildung 43 zeigt die Vereinbarungen des neuen objekteneigenen Hauptachsensystems (x_b, y_b) nach den Definitionen in Gleichungen (75), (76) und (77).

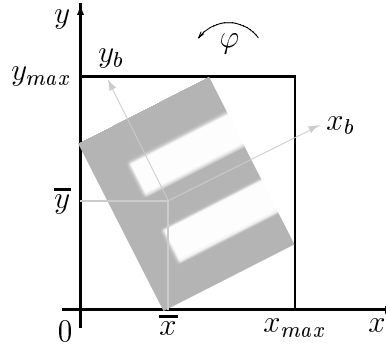


Abbildung 43: Koordinatendefinitionen eines Bildobjekts

In der Praxis der computergestützten Bildverarbeitung treten vorrangig digitale Bilder endlicher Größe auf, wobei der Speicherplatzbedarf von der Auflösung und der Anzahl der Farbwerte (Farbtiefe) etc. abhängt. Liegen die Objektbilder in digitaler Form vor, werden die Integrale damit zu Summen, die Integrationsgrenzen $\pm\infty$ werden entsprechend auf die Größe des vorliegenden Pixelbildes (x_{max}, y_{max}) bezogen. Für die vorherigen Definitionen ergeben sich damit die Entsprechungen der Gleichungen (68), (78) und (79) in Summenschreibweise:

$$r_{pq} = \sum_{y=0}^{y_{max}} \sum_{x=0}^{x_{max}} x^p y^q f(x, y) \quad (80)$$

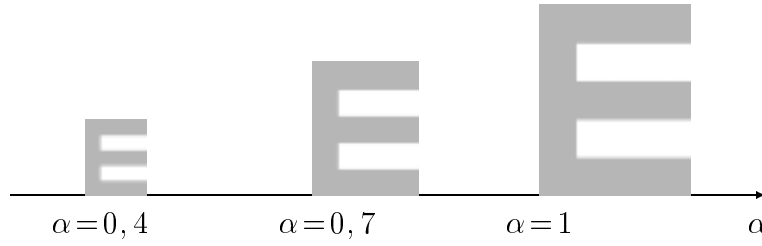
$$\mu_{pq} = \sum_{y=0}^{y_{max}} \sum_{x=0}^{x_{max}} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) \quad (81)$$

$$\mu'_{jk} = \sum_{r=0}^j \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{j}{r} \binom{k}{s} (\cos \varphi)^{j-r+s} (\sin \varphi)^{k+r-s} \mu_{j+k-r-s, r+s} \quad (82)$$

Die Zentralmomente können desweiteren durch geeignete Normierung auch invariant gegenüber einer isotropen Skalierung der Objektanmessungen gemacht werden. Unter isotroper Skalierung ist hierbei die Streckung aller Bildanmessungen um einen Faktor α zu verstehen, siehe Abbildung 44.

Um den Skalierungsfaktor α in den Bildmerkmalen zu eliminieren, werden in der Mustererkennung die Zentralmomente traditionell geeignet normiert. Die normierten Zentralmomente η_{pq} werden dazu mit dem Moment μ_{00} in folgender Weise gebildet [98]:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\frac{p+q}{2}+1}} \quad (83)$$

Abbildung 44: Skalierung eines Bildobjekts mit α

Die normierten Zentralmomente η_{pq} sind damit dimensionslos und invariant gegen eine richtungsunabhängige Skalierung. Im Vorgriff auf die im Abschnitt 4.4.2 dargestellte dimensionshomogene Merkmalsgewinnung wird darauf hingewiesen, daß die normierten Zentralmomente dimensionslose Potenzprodukte sind. Aufgrund dieser Eigenschaft sind sie automatisch invariant gegen Maßstabsänderungen der Form

$$x' = \alpha x \quad (84)$$

$$y' = \alpha y \quad (85)$$

wie sie durch die richtungsunabhängige Skalierung in Abbildung 44 dargestellt ist. Desweiteren wird im Vorgriff auf die im Abschnitt 4.4.2 folgende dimensionshomogene Merkmalsgewinnung untersucht, wie sich bei in x - und y -Richtung unterschiedlicher Skalierung der Objektanmessungen in Gleichungen (86) und (87) mit

$$x' = \alpha x \quad (86)$$

$$y' = \beta y \quad (87)$$

die Beziehungen zwischen den nun richtungsabhängig skalierten regulären Momenten r'_{pq} und den ursprünglichen regulären Momenten r_{pq} ergeben [58].

$$\begin{aligned} r'_{pq} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x'^p y'^q f(x', y') dx' dy' \\ &= \alpha^{p+1} \beta^{q+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy = \alpha^{p+1} \beta^{q+1} r_{pq} \end{aligned} \quad (88)$$

Ebenso ergeben sich $\mu'_{pq} = \alpha^{p+1} \beta^{q+1} \mu_{pq}$ und insbesondere $\mu'_{00} = \alpha \beta \mu_{00}$. Für die normierten richtungsabhängig skalierten Zentralmomente η'_{pq} folgt somit [58]:

$$\eta'_{pq} = \frac{\mu'_{pq}}{\mu'_{00}^{\frac{p+q}{2}-1}} = \frac{\alpha^{p+1} \beta^{q+1} \mu_{pq}}{(\alpha \beta \mu_{00})^{\frac{p+q}{2}-1}} = \alpha^{\frac{p-q}{2}} \beta^{\frac{q-p}{2}} \eta_{pq} \quad (89)$$

Aus Gleichung (89) ist ersichtlich, daß das normierte Zentralmoment η_{pq} eines Objektes nur dann ein konstantes Merkmal darstellen kann, wenn die Skalierungsfaktoren in beiden Richtungen gleich sind, dies bedeutet daß $\eta'_{pq} = \eta_{pq}$ nur gilt falls $\alpha = \beta$ ist.

In [176, 177] wird für die Berechnung der richtungsabhängig skalierten Zentralmomente die folgende Gleichung (90) angegeben, die Gleichung (89) entspricht:

$$\eta'_{pq} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{p-q}{2}} \eta_{pq} \quad (90)$$

Eine explizite Berechnung von η'_{pq} ist in Gleichung (90) jedoch nur mit Kenntnis des Quotienten von α und β möglich. Bei gleichmäßiger Skalierung aller Längen eines Bildes um den gleichen Faktor $\alpha = \beta$ folgt mit $\eta'_{pq} = \eta_{pq}$ die Invarianz gegen gleichmäßige Skalierung. Abbildung 45 zeigt anschaulich die richtungsabhängigen und -unabhängigen Skalierungen mit unterschiedlichen bzw. gleichen Faktoren α und β .

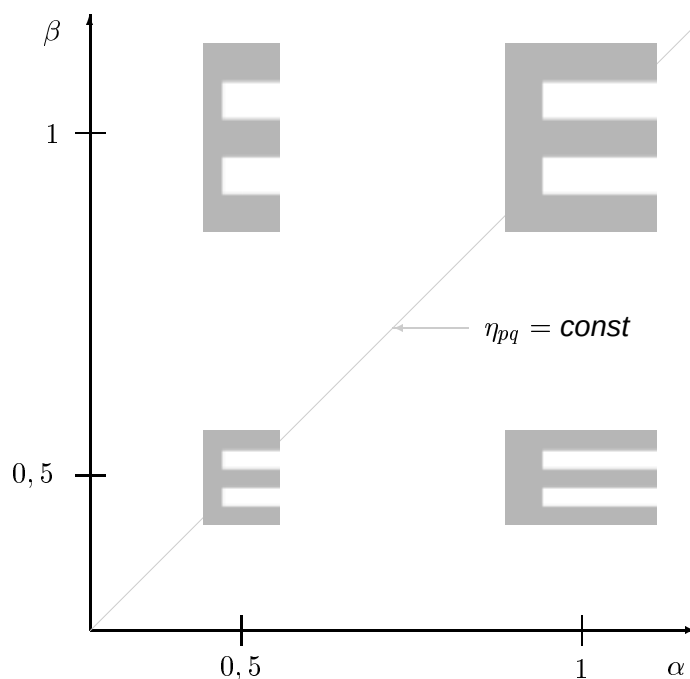


Abbildung 45: Skalierung eines Bildobjekts mit α und β in unterschiedliche Richtungen

In der Umsetzung der klassischen Mustererkennung nach der Momentenmethode ergibt sich entsprechend Abbildung 42 mit den gezeigten Überlegungen und Herleitungen die folgenden Teilschritte: Bildrepräsentation in die regulären Momente r_{pq} , anschließende Extraktion von m translations-, rotations- und skaleninvarianten Merkmalen η_{pq} , sowie der abschließenden Klassifikation in einem Klassifikator, siehe Abbildung 46.

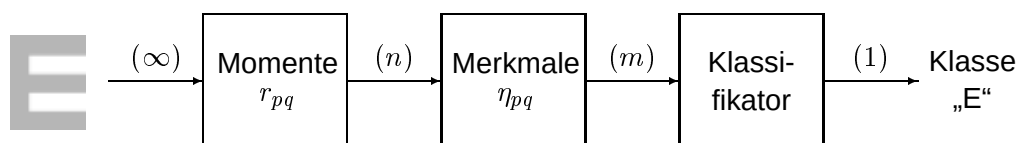


Abbildung 46: Klassische Merkmalsextraktion in der Mustererkennung

Im Aufbau des Klassifikators in Abbildung 46 kommen z.B. neuronale Netze [58] oder auch statistische Klassifikatoren zum Einsatz [110, 174]. Die erwähnte Surjektivität der extrahierten Merkmale und in der Klassifikation sind durch die Abbildung mehrerer Objekte auf eine identische Merkmalsrepräsentation und Klassenzugehörigkeit erfüllt.

Für das Verständnis der bisherigen Vorgehensweise ist es wesentlich, sich die Konsequenzen der gezeigten Vorgehensweise in der Merkmalsgewinnung zu verdeutlichen. Sind die regulären Momente r_{pq} der Bildrepräsentation noch bijektiv, so fassen die aus ihnen berechneten Merkmale η_{pq} bereits alle Bilddarstellungen, die mittels Translation, Rotation und Skalierung ineinander überführt werden können, zusammen und sind daher surjektiv. Der nachfolgende, ebenfalls surjektive Klassifikator führt mit diesem Merkmalsatz eine endgültige Klassifikation in eine Merkmalsklasse durch.

Die dabei in der Klassifikation der Muster erzielbaren Klassifikationsraten sind in der Praxis zwar kleiner 100%, sind jedoch in der hier unternommenen methodischen Betrachtung zur Merkmalsgewinnung nicht von vorherrschender Bedeutung. Es steht außer Zweifel, daß wie in der Geschichte der Mustererkennung vielfach gezeigt, es durch gezieltes „Probieren“ gelingen kann, aussagekräftige Merkmale für einen begrenzten Musterdatensatz und damit auch akzeptable Erkennungsraten in einer speziellen Situation zu erzielen.

Dem wird hier gegenüber gestellt, wie sich die Aufgabenstellung der Mustererkennung unter dem Blickwinkel der Dimensionshomogenität systematisch untersuchen und zur konstruktiven Merkmalsgewinnung und -extraktion nutzen läßt. Dies ist umso wichtiger, als daß bei auf „Probieren“ angewiesene Vorgehensweisen natürlich beim Übergang von S/W-Bildquellen auf Grauwertbilder und Farbbilder den Suchprozeß für leistungsfähige Merkmale erneut durchlaufen müssen, da sich wie in der Mustererkennung gezeigt, die Lösungsstrategien für die Merkmalsgewinnung nicht einfach von S/W-Bildquellen auf Grauwertbilder und von Grauwertbilder auf Farbbilder übertragen lassen.

4.4.2 Merkmalsextraktion

Ausgangspunkt einer dimensionshomogenen Betrachtung der Mustererkennung und der darin erfolgenden Merkmalsbildung ist der Begriff der physikalischen Bilddimension. Es sind physikalische Dimensionen, die zur Gewinnung dimensionsloser Potenzprodukte erforderlich sind. Es ist daher notwendig, den physikalischen Dimensionsbegriff der regulären (Bild-)Momente r_{pq} in Gleichung (68) bzw. deren Skalierungseigenschaften unter Gleichungen (84) bis (87) zu untersuchen. Vorteilhafterweise ist aus dem Vergleich der Definitionen der Maßstabsänderung und dem physikalischen Dimensionsbegriff erkennbar, daß die Skalierung mit α, β direkt der Definition vektorieller Längeneinheiten L_x, L_y in x - und y -Richtung entspricht, die auf Seite 30 eingeführt wurden.

Es ist daher möglich, der Bilddarstellung zwei vektorielle Dimensionen (z.B. in Form von Längeneinheiten L_x, L_y in x - und y -Richtung) zuzuordnen, da wie in Gleichungen (86) und (87) gezeigt, zwei unabhängige lineare Skalierungsbeziehungen α, β existieren. Dies bedeutet, daß sich die regulären Momente r_{pq} aus Gleichung (68) hier in 2-dimensionale höhere Momente r_{pq} mit expliziter Dimensionsdarstellung ergeben:

$$r_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q h(x, y) dx dy \quad [L_x^{p+1} L_y^{q+1}] \quad (91)$$

Dabei stehen in Gleichung (91) die Variablen x, y für die geometrische 2-Dimensionalität der Bilddarstellung, während $L_x^{p+1} L_y^{q+1}$ die vektoriellen Längeneinheiten angeben.

Neben der in Gleichung (91) resultierenden Dimensionsdarstellung kann in der dimensionshomogenen Betrachtung (bis auf (Un-)Kenntnis eventuell beteiligter fundamentaler Konstanten) die Existenz einer dimensionshomogenen Bildrepräsentationsfunktion $f(r_{pq}) = 0$ mit $p, q = 0, 1, \dots, \infty$ unterstellt werden. Diese Forderung wird zwar zunächst nur für die formale Gültigkeit des Pi-Theorem gefordert, kann aber über die Bijektivität der Momententransformation auch über die Gleichwertigkeit zu der sonst streng dimensionshomogenen Modellvorstellung in den Naturwissenschaften begründet werden.

Für die bisherige Vorgehensweise der Mustererkennung in Abbildung 46 ergeben sich die in Abbildung 47 dargestellten Modifikationen. Da zu jeder dimensionshomogenen Funktion $f(r_{pq}) = 0$ Kennzahlen in Form dimensionsloser Potenzprodukte π_{pq} existieren, muß jetzt der Klassifikator die Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_{pq}) = 0$ korrekt approximieren. Hierfür werden nach dem Pi-Theorem exakt $m = n - r$ Merkmale benötigt.

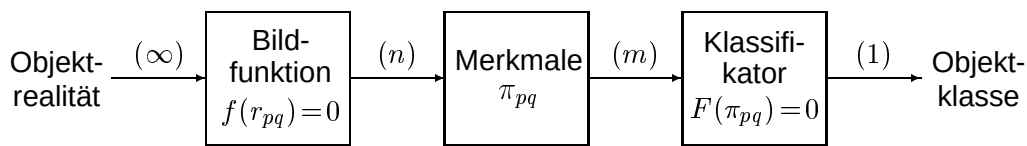


Abbildung 47: Dimensionshomogene Mustererkennung und Merkmalsextraktion

Im Klassifikator in Abbildung 47 spielt die jetzt vorliegende formale Definition von „Ähnlichkeit“ in den Merkmalen auf der Basis der physikalischen Dimensionentheorie eine entscheidende Rolle, welche Objekte als „ähnlich“ einzustufen sind. Denn Objekte, die durch den surjektiven Kennzahlenbegriff auf Merkmale mit $\pi_{pq} = \text{const}$ fallen, kann der nachgeschaltete Klassifikator bereits nicht mehr unterscheiden. Sie werden daher alle der gleichen Klasse zugeordnet. Aus diesem Grunde sind die Eigenschaften der auf dem Kennzahlenbegriff beruhenden Bildmerkmale genauer zu untersuchen.

Die Bildmerkmale π_{pq} werden entsprechend der standardisierten Ableitung dimensionslosen Potenzprodukte über die Dimensionsmatrix in Tabelle 6 vorgenommen, die aus der Relevanzliste der dimensionshomogenen Funktion $f(r_{pq}) = 0$ erstellt wird.

	L_x	L_y			L'_x	L'_y
μ_{20}	3	1	$\Rightarrow$	μ_{20}	1	0
μ_{02}	1	3		μ_{02}	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_{pq}	$p+1$	$q+1$		μ_{pq}	$\frac{3p-q+2}{8}$	$\frac{-p+3q+2}{8}$

Tabelle 6: Dimensionsmatrix und Normalform

Der formale Aufbau der dimensionslosen Potenzprodukte ist jetzt direkt aus der diagonalisierten Tabelle (in Abbildung 6 rechts) nach Gleichung (16) ablesbar. Bei dem in Abbildung 6 dargestellten Aufbau ergeben sich unter Berücksichtigung der in [58] diskutierten Wahlfreiheiten die folgenden Pi-normierten Zentralmomente:

$$\pi_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{02}^{\frac{-p+3q+2}{8}} \mu_{20}^{\frac{3p-q+2}{8}}} \quad (92)$$

Für den in den vorangegangenen Abbildungen verwendeten Buchstaben „E“ mit den Größenausprägungen a, b in Abbildung 48 ist in Gleichung (93) die Matrix π_E der resul-

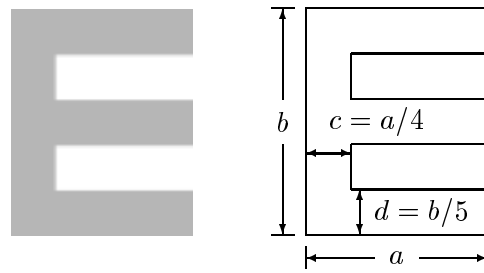


Abbildung 48: Geometrieparameter des Buchstabens „E“ (nach [58])

tierenden dimensionslosen Potenzprodukte π_{pq} in Gleichung (92) nach [58] einmal (aus Platzgründen nur als (5×5) -Matrix) angegeben. Darin fällt auf, daß die π_{pq} reine Zahlen und damit von der Wahl von a und b unabhängige, invariante Merkmale sind.

$$\pi_E = \begin{bmatrix} \frac{14\sqrt{174}\sqrt[4]{65757517}}{6119} & 0 & 1 & 0 & \frac{2523 \cdot 7^{3/4} \sqrt{174} \sqrt[4]{211}}{890420} \\ 0 & 0 & \frac{180 \cdot 7^{3/8} \sqrt[4]{174} \sqrt[8]{211}}{42833} & 0 & \frac{162 \cdot 174^{3/4} \sqrt[8]{65757517}}{1291109} \\ 1 & 0 & \frac{173851 \cdot 7^{3/4} \sqrt{174} \sqrt[4]{211}}{104341188} & 0 & \frac{2057043 \sqrt{1477}}{361510520} \\ \frac{1620 \cdot 7^{3/8} \sqrt[4]{174} \sqrt[8]{211}}{170723} & 0 & \frac{47970 \cdot 174^{3/4} \sqrt[8]{65757517}}{252157871} & 0 & \frac{414801 \cdot 7^{7/8} \sqrt[4]{174} \sqrt[8]{418227202051}}{3669331778} \\ \frac{2057043 \cdot 7^{3/4} \sqrt{174} \sqrt[4]{211}}{693135380} & 0 & \frac{434014473 \sqrt{1477}}{70604203880} & 0 & \frac{741361527 \sqrt{174} \sqrt[4]{65757517}}{6080606946400} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Für besseren Überblick und leichteren Ablesbarkeit sind in der folgenden Gleichung (94) die Elemente in der Matrix (93) numerisch ausgewertet, dabei fällt u.a. auf, daß die dimensionslosen Merkmale mit zunehmender Ordnung verschwinden [58].

$$\pi_E = \begin{bmatrix} 2.7177440 & 0 & 1 & 0 & 0.6130432 \\ 0 & 0 & 0.0618127 & 0 & 0.0570436 \\ 1 & 0 & 0.3604874 & 0 & 0.2186818 \\ 0.1395749 & 0 & 0.0864872 & 0 & 0.0639039 \\ 0.6420872 & 0 & 0.2362456 & 0 & 0.1448251 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Alle Objekte zeigen (wie z.B. die geometrischen Grundfiguren Kreis, Ellipse, Viereck, Quadrat, ...) in Abbildung 49 dasselbe Verhalten wie der Buchstabe „E“ in Abbildung 48. Auch deren Merkmalsmatrizen $\pi_{\square}$ und $\pi_{\circ}$ bestehen aus reinen Zahlen und stellen damit von der Wahl von a und b unabhängige, invariante Merkmale dar.

So ergeben sich für das Rechteck (einschließlich des Sonderfalls des Quadrats mit $a = b$) die folgende Merkmalsmatrix $\pi_{\square}$ in Gleichung (95) [58]:

$$\pi_{\square} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10}\sqrt{3} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & \frac{9}{200}\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (95)$$

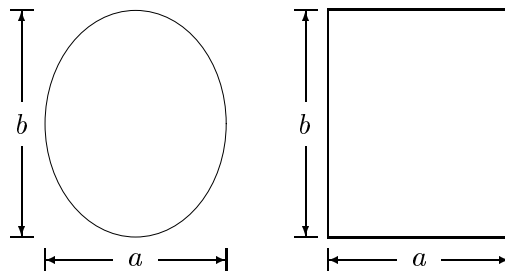


Abbildung 49: Geometrieparameter von Ellipse und Rechteck (nach [58])

Hinweis: Beide Laufindizes p und q beginnen in diesen Matrizen mit Null, das erste Element hat daher den Doppelindex π_{00} . Für die Ellipse (einschließlich des Sonderfalls des Kreises mit $a = b$) ergibt sich die Merkmalsmatrix $\pi_{\circ}$ zu [58]:

$$\pi_{\circ} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\pi} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{\pi}} & 0 & \frac{1}{4\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} & 0 & \frac{1}{4\pi} & 0 & \frac{3}{20\pi^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Erwähnenswert ist desweiteren die Tatsache, daß zahlreiche Zeilen p bzw. Spalten q der gezeigten Merkmalsmatrizen π_E , $\pi_{\square}$ und $\pi_{\circ}$ zu Null werden. Entsprechend der Definitionsgleichung (92) bedeutet dies, daß zahlreiche Zentralmomente μ_{pq} Null sind, da für nicht verschwindende Objekte immer $\mu_{20} > 0$ und $\mu_{02} > 0$ gilt. Die $\mu_{pq} = 0$ mit ungeraden p, q als Exponenten des Integralkerns $x^p y^q$ in Gleichung (91) drücken aufgrund des als „Hebelarme“ interpretierbaren Integralkerns automatisch Symmetrien betreffend der Koordinatenachsen aus. Dies kann durch Inspektion der gegebenen Geometrien leicht überprüft werden. Derartige Eigenschaften lassen sich natürlich leicht zur Bildung weiterer Invarianten mit entsprechenden Objektaussagen verwenden [98].

Für die algorithmische Implementierung der dimensionshomogenen Mustererkennung aus Abbildung 47 ergibt sich demnach die folgende schematische Darstellung der einzelnen Verarbeitungsschritte in Abbildung 50.

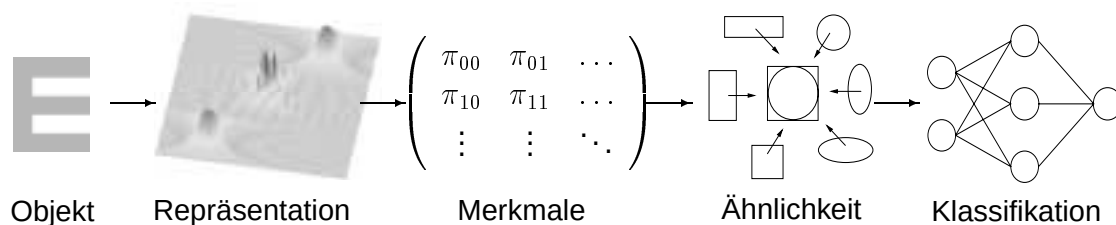


Abbildung 50: Dimensionshomogenes Mustererkennungsschema [222]

Wichtig für die Vorgehensweise in Abbildung 50 ist die Merkmalsgewinnung, die in Form der π_{pq} einen Ähnlichkeitsbegriff einführt und daher bereits vorab verschiedene Objekte in für den nachfolgenden Klassifikator ununterscheidbare Objektklassen zusammenfassen. Derartige Zusammenfassungen werden durch die Merkmalsmatrizen der Gleichungen (94), (95) und (96) bereits exemplarisch aufgezeigt.

Für den Klassifikator in Abbildung 50, der wie dort symbolisiert z.B. als lernfähiges künstliches neuronales Netz ausgeführt werden kann, bleibt damit „nur noch“ die Aufgabe, die passende Ähnlichkeitsfunktionen $F(\pi_{pq}) = 0$ aller Objekte abzubilden. Die dabei zugrundeliegende Aufgabenstellung zeigt exemplarisch Abbildung 51.

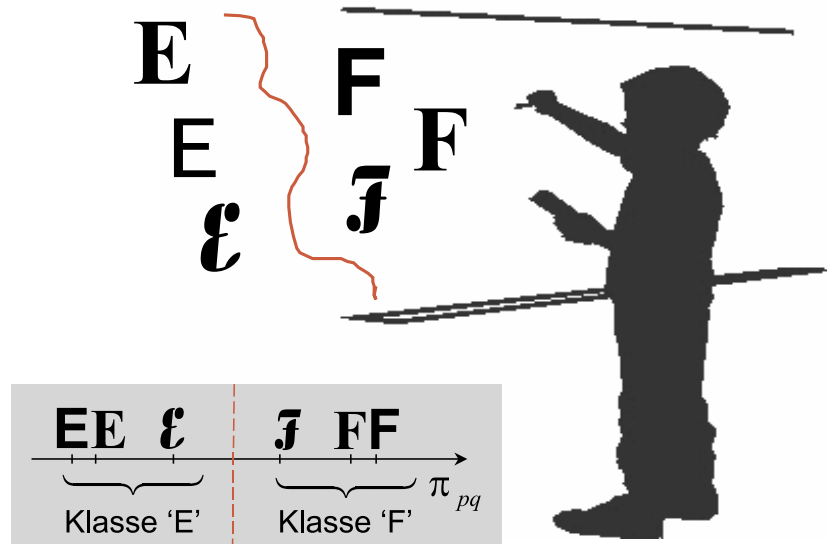


Abbildung 51: Was trennt Klasse „E“ von Klasse „F“ ? [222]

Die Fragestellung der Trennung von Klasse „E“ und Klasse „F“ in Abbildung 51 darf nicht mit der Frage „Was ist geometrische Ähnlichkeit?“ verwechselt werden. Dieser Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß geometrische Ähnlichkeit z.B. auf einem formalen Ähnlichkeitsbegriff wie dem Pi-Theorem beruht und daher objektiviert werden kann, während die Trennung von Buchstabenklassen sozio-kulturell bedingt ist und daher geschichtlichen wie gesellschaftlich-kulturellen Einflüssen unterliegt.

In der Praxis werden daher die Klassifikatoren mit einer gewissen Menge entsprechend vorklassifizierter Musterdatensätze entworfen bzw. vortrainiert. Für den Einsatz der Momentenmethode in der Mustererkennung sind hierfür zahlreiche Untersuchungen zur Erkennungsrate durchgeführt worden. Aufgrund der Verwendung dimensionsloser Bildmerkmale π_{pq} wird in [58] über das sehr gute Klassifikations- und Generalisierungsverhalten des als Klassifikator verwendeten neuronalen Netzes berichtet.

4.4.3 Merkmals-Editor

Da die exakten Ähnlichkeitsfunktionen für komplexe Objektklassen oft unbekannt oder schwer zu bestimmen sind, gibt es mit dem Merkmals-Editor (Feature-Editor [149]) in Abbildung 52 die Möglichkeit, falls die Klassifikationsfunktion $F(\pi_{pq}) = 0$ nicht exakt bestimmt werden kann, die im Klassifikator approximierten Klassengrenzen in Form einzelner Randpunkte $\bar{\pi}_{pq}$ gezielt zu untersuchen und wieder zu visualisieren

Die Gewinnung solcher Punkte $\bar{\pi}_{pq} = \pi_{pq} + \Delta\pi_{pq}$ kann entweder aus der frei gewählten Interpolation zwischen zwei bekannten Bildmerkmalsmatrizen oder z.B. durch gezielte Beaufschlagung eines repräsentativen π_{pq} mit Merkmalsgrößen $\Delta\pi_{pq}$ erreicht werden, die sich aus der Analyse des mehrdimensionalen Klassenraumes ergeben haben.

Die eigentliche Untersuchung erfolgt in Abbildung 52 durch gezielte Rücktransformation modifizierter Merkmale $\bar{\pi}_{pq} = \pi_{pq} + \Delta\pi_{pq}$ in den Urbildraum. Dort kann der menschliche Betrachter im Sinne von Abbildung 51 die Korrektheit der vom Klassifikator erzeugten Klassifikation selbst (und subjektiv) am daraus rücktransformierten Bild überprüfen.

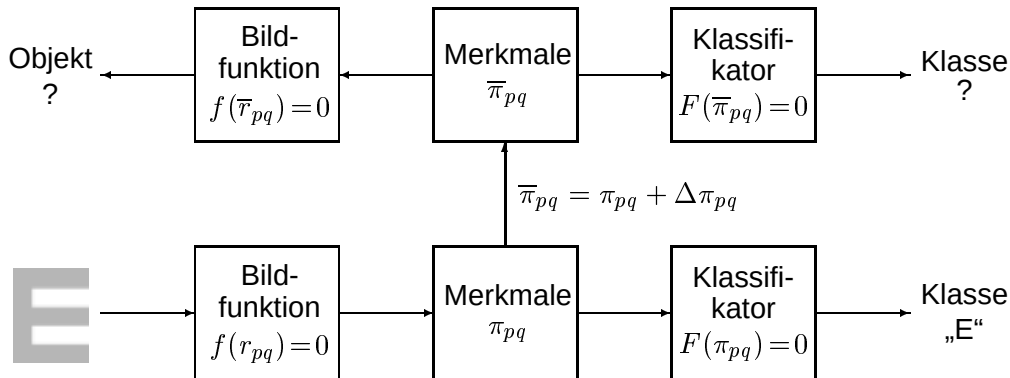


Abbildung 52: Informationsfluß im Merkmals-Editor

Bei der Rücktransformation ist zu beachten, daß der Integralkern der Momente $x^p y^q$ keine orthogonale Basis des Funktionenraumes darstellt. Da man in der Rücktransformation nur über eine begrenzte Anzahl von Momenten verfügt, ist die Rekonstruktion der Bildfunktion $h(x, y)$ mit orthogonalen Momenten am besten, wenn diese über einem bestimmten Intervall orthonormale Basisfunktionen darstellen [73, 158].

Wie im folgenden gezeigt, können Legendrepolynome die Forderungen nach orthonormalen Basisfunktionen erfüllen und werden daher vorzugsweise in der Rücktransformation eingesetzt. Ein Legendrepolynom kann wie folgt geschrieben werden:

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m C_{mj} x^j \quad (97)$$

Die Koeffizienten C_{mj} sind dazu in [49] abgeleitet. Die klassische Definition der Legendrepolynome lautet wie folgt [35, 58]:

$$P_0(x) = 1 \quad (98)$$

$$P_m(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (99)$$

Soll die Bildfunktion $h(x, y)$ aus orthogonalen Legendrepolyomen rekonstruiert bzw. aufgebaut werden, so ergibt sich die Bildfunktion aus der Superposition der orthogonalen Basisfunktionen in Gleichung (100).

$$h(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} P_m(x) P_n(y) \quad (100)$$

Hinweis: Die Legendrepolynome sind im Intervall $x, y \in [-1, +1]$ definiert und orthogonal, man arbeitet deshalb in der Praxis der Objektrekonstruktion mit auf ± 1 normierten

Seitenlängen. Dies bedeutet, daß die Rekonstruktion der Bildfunktion auf einem Einheitsquadrat im Intervall $x, y \in [-1, +1]$ durchgeführt wird.

Für die Bedingung der Orthonormalität ergibt sich aus dem Skalarprodukt die folgende Normalisierung der Legendrepolynome [49]:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_{m'}(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{mm'} \quad (101)$$

Das orthogonale Legendremoment λ_{mn} der Bildfunktion $h(x, y)$ ist wie folgt definiert:

$$\lambda_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(y) f(x, y) dx dy \quad (102)$$

Die Beziehung zwischen den λ_{mn} und den Zentralmomenten μ_{mn} läßt sich ermitteln, indem man Gleichung (97) in Gleichung (102) einsetzt. Dadurch erhält man den gewünschten Zusammenhang zwischen den Legendremomenten und den Zentralmomenten:

$$\lambda_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n C_{mj} C_{nk} \mu_{jk} \quad (103)$$

Nun geschieht die Summation in Gleichung (100) theoretisch für unendliche Summen. In der Praxis summiert man aber in folgender Weise entlang der Diagonalen und schneidet bei einer gewissen Ordnung ab:

$$h(x, y) \cong \sum_{N=0}^{N_{max}} \sum_{n=0}^N \lambda_{N-n,n} P_{N-n}(x) P_n(y) \quad (104)$$

Auf diese Weise kann die Bildfunktion $h(x, y)$ bestmöglichst aus den Legendremomenten zurücktransformiert werden. Dazu müssen lediglich die Legendremomente aus festgelegten Linearkombinationen der Zentralmomente gebildet werden. Im allgemeinen kann eine relativ kleine Anzahl von Momenten ein Bild bereits sehr gut beschreiben [220], diese Anzahl ist in der Klassifikation meist noch kleiner als in der Objektrekonstruktion.

Verwendet man für die Rekonstruktion der Bildfunktion dimensionslose Bildmerkmale π_{pr} anstatt der translationsinvarianten Momente μ_{pr} , so müssen die Gleichungen (103) und (104) für die Berechnung der Legendermomente entsprechend angepaßt werden. So folgt für die Berechnung der λ_{mn} mit Gleichung (92)

$$\lambda_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n C_{mj} C_{nk} \mu_{02}^{\frac{-j+3k+2}{8}} \mu_{20}^{\frac{3j-k+2}{8}} \pi_{jk} \quad (105)$$

Die Faktoren $\mu_{02}^{\frac{-j+3k+2}{8}}$ und $\mu_{20}^{\frac{3j-k+2}{8}}$ in Gleichung (105) stehen für die gewählten Normierungsmomente bei vektoriellen Dimensionen nach Gleichung (92), sie sind damit abhängig von der jeweiligen Ordnung j, k des betrachteten Moments.

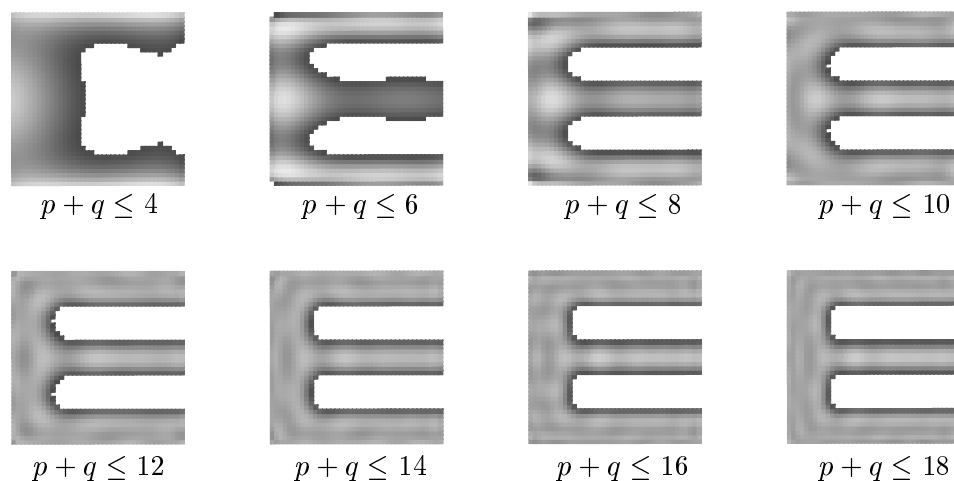


Abbildung 53: Rücktransformation der Bildmerkmale π_{pq} des Buchstabens „E“

Die Abbildungen 53 zeigen die Rücktransformation der Bildfunktion $h(x, y)$ des Buchstabens „E“ für verschieden hohe Ordnungen auf dem Einheitsquadrat, das mit einer Auflösung von 40×40 Pixel dargestellt wird. Die Schwankungen im Grauwert sind dabei die Rekonstruktionsfehler gegenüber Abbildung 48.

Wie Abbildung 54 dargestellt ist, kann die Merkmalsextraktion und Rücktransformation auch auf Grauwertbilder mit der Bildfunktion $h(x, y, \rho)$ erweitert werden. Darin bedeutet der Grauwert ρ eine weitere Dimension der Bildfunktion. Das Originalbild „Lena“ [131] hat eine Auflösung von 128×128 Pixel und wird in Abbildungen 54 mit verschiedenen Ordnungen rekonstruiert.

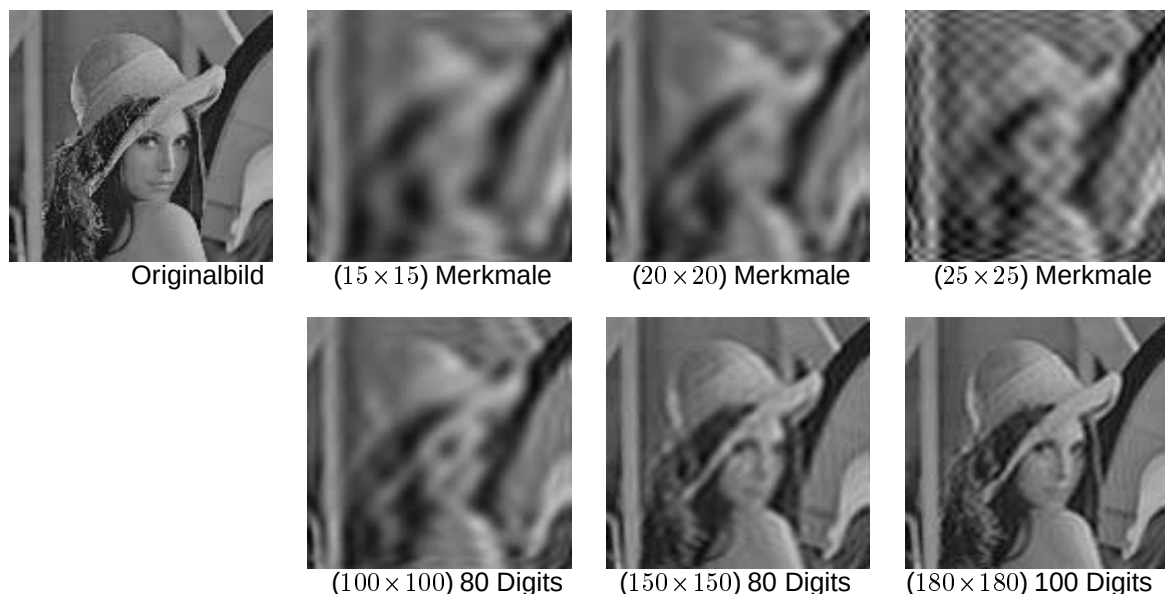


Abbildung 54: Rücktransformation eines Grauwertbildes [148]

Nimmt man in der Rücktransformation mittels Legendrepolynomen allerdings Ordnungen oberhalb von $p, q > 20$ mit, treten bei der numerischen Auswertung der Gleichung (104) numerische Instabilitäten auf, siehe Abbildung 54 oben rechts.

Durch die Verwendung einer beliebig genauen Zahldarstellung, die durch eine Stringarithmetik [56] realisiert wird, kann die numerische Berechnung der höheren Ordnungen für eine frei wählbare Stellenanzahl (Digits) erfolgen. Die dann numerisch stabil berechenbare Rücktransformation ergibt eine akzeptable Güte des Originalbilds, siehe Abbildung 54 unten rechts. Durch die erfolgreiche Rücktransformation ist davon auszugehen, daß trotz einer nur endlichen Anzahl von Bildmerkmalen π_{pq} die „wesentliche“ Bildinformation in den Merkmalen enthalten ist und somit im Klassifikator zur Verfügung steht.

Im folgenden wird untersucht, wie die Verallgemeinerung der Bildfunktion $h(x, y, \rho)$ in noch höherdimensionale Funktionen der Bildfunktion vorgenommen werden kann.

4.4.4 Kontrollen

Es ist formal korrekt, einer Bilddarstellung genau so viele vektorielle Dimensionen (z.B. in Form von Längeneinheiten L_x, L_y, L_z in x -, y - und z -Richtung) zuzuordnen, wie unabhängige lineare Skalierungsbeziehungen bekannt sind bzw. unterstellt werden können. Dies bedeutet, daß sich z.B. für 3-D Objekte die Zentralmomente μ_{pq} aus Gleichung (78) in die 3-dimensionalen Zentralmomente μ_{pqr} erweitern bzw. verallgemeinern lassen:

$$\mu_{pqr} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q (z - \bar{z})^r h(x, y, z) dx dy dz \quad (106)$$

Dabei stehen in Gleichung (106) die Variablen x, y, z für die geometrische 3-Dimensionalität eines Objekts, die $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ stellen die nach Art von Gleichung (75) ermittelten Schwerpunktskoordinaten dar. Die resultierenden Zentralmomente μ_{pqr} besitzen die Dimensionsdarstellung $L_x^{p+1} L_y^{q+1} L_z^{r+1}$.

Für die Bestimmung der als (Bild-)Merkmale verwendeten dimensionslosen Potenzprodukte π_{pqr} dient die in Tabelle 7 links erstellte Dimensionsmatrix.

	L_x	L_y	L_z		L'_x	L'_y	L'_z
μ_{200}	3	1	1	$\Rightarrow$	1	0	0
μ_{020}	1	3	1		0	1	0
μ_{002}	1	1	3		0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_{pqr}	$p+1$	$q+1$	$r+1$		$\frac{4p-q-r+2}{10}$	$\frac{-p+4q-r+2}{10}$	$\frac{-p-q+4r+2}{10}$

Tabelle 7: 3-D Dimensionsmatrix und Normalform

Die dimensionslosen Potenzprodukte π_{pqr} lassen sich aus der Dimensionsmatrix in Tabelle 7 rechts berechneten Normalform ablesen, sie stellen die skaleninvarianten Merkmale einer 3-dimensionalen Geometrie dar und werden z.B. in Abschnitt 4.7.2 verwendet.

$$\pi_{pqr} = \frac{\mu_{pqr}}{\mu_{200}^{\frac{4p-q-r+2}{10}} \mu_{020}^{\frac{-p+4q-r+2}{10}} \mu_{002}^{\frac{-p-q+4r+2}{10}}} \quad (107)$$

Interessiert man sich für die Merkmale π_{pqr} eines Grauwertbilds wie in Abbildung 54, muß die Bedeutung der dritten Spalte mit der vektoriellen Dimension L_z der Dimensionsmatrix

in Tabelle 7 diskutiert werden. Dabei ist klar, daß der Grauwert unabhängig von seiner wirklichen physikalischen Realisierung in der Praxis als Höhe über dem (Bild-)Gebiet x, y aufgetragen wird und damit in seiner Dimensionsdarstellung mit der einer vektoriellen (Längen-)Dimension L_z übereinstimmt. Als Folge daraus ist die Bildungsweise und Form der dimensionslosen Potenzprodukte π_{pqr} von Grauwertbildern gleich der der dimensionsloser Merkmale π_{pqr} 3-dimensionaler Objekte in Gleichung (107), da die Einträge bei der Dimensionsmatrix bis auf die unterschiedliche Bedeutung der Dimensionsspalte L_z genau übereinstimmen.

Aus diesen 3-D Betrachtungen lassen sich die 2-D und 1-D Spezialfälle sehr einfach ableiten, da in der Dimensionsmatrix in Tabelle 7 lediglich eine oder zwei der rechten Spalten

	L_x	L_y	$\Rightarrow$		L'_x	L'_y
μ_{20}	3	1		μ_{20}	1	0
μ_{02}	1	3		μ_{02}	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_{pq}	$p+1$	$q+1$		μ_{pq}	$\frac{3p-q+2}{8}$	$\frac{-p+3q+2}{8}$

Tabelle 8: 2-D Dimensionsmatrix und Normalform

wegfallen. Der 2-dimensionale Fall, der in Gleichung (92) bereits abgeleitet wurde, ist hier der Vollständigkeit halber in Tabelle 8 und in Gleichung (108) nochmals dargestellt.

$$\pi_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{20}^{\frac{3p-q+2}{8}} \mu_{02}^{\frac{-p+3q+2}{8}}} \quad (108)$$

Für den 1-dimensionalen Fall ergibt sich aus der mangelnden Aufsplittung der vektoriellen Längendimensionen L_x, L_y für dann (physikalisch) 1-dimensionale S/W-Bilder mit der

	L	$\Rightarrow$		L'
μ_{00}	2		μ_{00}	1
μ_{10}	3		μ_{10}	$3/2$
μ_{01}	3		μ_{01}	$3/2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
μ_{pq}	$p+q+2$		μ_{pq}	$\frac{p+q}{2}+1$

Tabelle 9: 1-D Dimensionsmatrix und Normalform

Dimension L die folgenden Merkmale π_{pq} , die mit den empirisch gefundenen Bildmerkmalen in Gleichung (83) übereinstimmen.

$$\pi_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\frac{p+q}{2}+1}} \quad (109)$$

Es ist bemerkenswert, daß die rein aus der Dimensionsbetrachtung der Bildfunktion abgeleiteten dimensionslosen Bildmerkmale mit den in der Mustererkennung empirisch gefundenen Bildmerkmalen für S/W- und Grauwertbilder übereinstimmen und zusätzlich aufgrund der konstruktiven Vorgehensweise der Dimensionsanalyse systematisch auf die Gewinnung höherdimensionaler Bildmerkmale verallgemeinert werden kann.

Erweitert man die Bilddarstellung aus Gleichung (106) um zusätzliche vektorielle Dimensionen (z.B. in Form der (Farb-)Wellenlänge L_λ in Meter $[m]$, usw., da diese Dimensionen vektorielle Eigenschaften haben, werden sie in der Folge durch vektorielle Längendimensionen abstrahiert) bedeutet dies, daß sich die 3-dimensionalen Zentralmomente μ_{pqr} aus Gleichung (106) in 5-dimensionale höhere Momente μ_{pqrst} verallgemeinern lassen:

$$\mu_{pqrst} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q (z - \bar{z})^r (\lambda - \bar{\lambda})^s (\rho - \bar{\rho})^t \cdot h(x, y, z, \lambda, \rho) dx dy dz d\lambda d\rho \quad (110)$$

Dabei ist ein möglicher Einfluß der Phase noch unberücksichtigt. Natürlich spielt hier die für das Licht und die Farbe benutzte Modellvorstellung hinsichtlich der darin auftretenden Größen und Dimensionsbegriffe eine zentrale Rolle. Spielte die Phase ϕ des Farbsignals (elektromagnetische Welle) eine Rolle, könnte sie als sechste Einflußgröße hinzu kommen. Die gewählte vektorielle Dimensionsdarstellung in Gleichung (110) ergibt sich so zu $L_x^{p+1} L_y^{q+1} L_z^{r+1} L_\lambda^{s+1} L_\rho^{t+1}$. Die erstellte Dimensionsmatrix zeigt Tabelle 10 oben.

	L_x	L_y	L_z	L_λ	L_ρ
μ_{20000}	3	1	1	1	1
μ_{02000}	1	3	1	1	1
μ_{00200}	1	1	3	1	1
μ_{00020}	1	1	1	3	1
μ_{00002}	1	1	1	1	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_{pqrst}	$p+1$	$q+1$	$r+1$	$s+1$	$t+1$

↓

	L'_x	L'_y	L'_z	L'_λ	L'_ρ
μ_{20000}	1	0	0	0	0
μ_{02000}	0	1	0	0	0
μ_{00200}	0	0	1	0	0
μ_{00020}	0	0	0	1	0
μ_{00002}	0	0	0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_{pqrst}	$\frac{6p-q-r-s-t+2}{14}$	$\frac{-p+6q-r-s-t+2}{14}$	$\frac{-p-q+6r-s-t+2}{14}$	$\frac{-p-q-r+6s-t+2}{14}$	$\frac{-p-q-r-s+6t+2}{14}$

Tabelle 10: 5-D Dimensionsmatrix und Normalform

Für die 5-D dimensionslosen Potenzprodukte π_{pqrst} ergibt sich aus der in Tabelle 10 unten berechneten Normalform der Dimensionsmatrix die folgende Form:

$$\pi_{pqrst} = \frac{\mu_{pqrst}}{\mu_{20000}^{\frac{6p-q-r-s-t+2}{14}} \mu_{02000}^{\frac{-p+6q-r-s-t+2}{14}} \mu_{00200}^{\frac{-p-q+6r-s-t+2}{14}} \mu_{00020}^{\frac{-p-q-r+6s-t+2}{14}} \mu_{00002}^{\frac{-p-q-r-s+6t+2}{14}}} \quad (111)$$

Natürlich können in der Aufstellung der Relevanzliste für die Dimensionsmatrix z.B. möglicherweise unbekannte Konstanten fehlen. Dies schlägt sich jedoch nach der auf Seite 42 dargestellten Eigenschaft der Granularität lediglich im Fehlen weniger einzelner dimensionsloser Potenzprodukte nieder und läßt die Form der übrigen Bildmerkmale unverändert. Die konstruktive Erzeugung neuer Bildmerkmale stellt daher trotz dieser prinzipiellen Einschränkung einen konzeptionellen Fortschritt dar.

4.5 Geräuschklassifikation

Die Geräuschenklassifikation ist eine aktuelle Fragestellung in der industriellen Akustik. Die Aufgabe der Geräuschklassifikation ist dabei neben der eigentlichen Klassifikationsaufgabe z.B. in der Qualitätssicherung auch als ein wichtiger Zwischenschritt in Richtung einer längerfristigen Zielvorstellung zu sehen, in der im Entwurfsprozeß neben der bereits möglichen Berechnung z.B. strukturelleigenschaften auch die Berechnung akustischer Produkteigenschaften erreicht werden soll. Da ein derartiges „Akustik-Design“ als die (Rück-)Abbildung des „Geräuschparameterraumes“ in den Raum der Entwurfsparameter verstanden werden kann, ist es zunächst ein zentraler Punkt zu klären, wie im Rahmen der Charakterisierung von Geräuschen ein solcher Raum von Geräuschparametern überhaupt gefunden und sinnvoll festgelegt werden kann.

Da für den Raum der Geräuschparameter derzeit noch keine umfassenden Theorievorstellung bekannt ist, wird in vielen industriellen Problemstellungen versucht, die akustischen Eigenschaften bereits vorhandener Konstruktionen bzw. deren Geräuschcharakterisierung empirisch zu ermitteln und mit sogenannten *psychoakustischen Parametern* zu bewerten. Die in der Klassifikationsaufgabe in Abbildung 55 verwendeten psychoakustischen Parameter stellen dabei einen für den jeweiligen Anwendungsfall spezifische Kriterienauswahl zur Geräuschcharakterisierung dar, die in der Regel nicht ohne weiteres auf andere Geräuschklassifikationsaufgaben übertragen werden können.

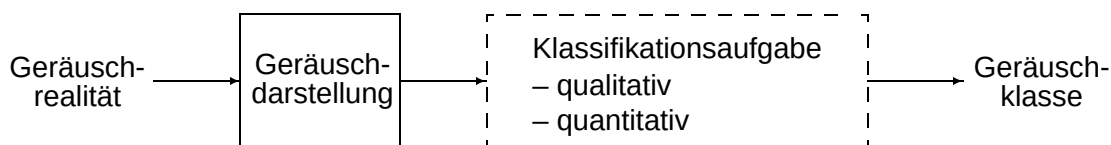


Abbildung 55: Klassifikationsaufgabe in der Geräuscherkennung

Die Ursache dieser mangelnden Allgemeingültigkeit psychoakustischer Parameter rührt u.a. auch daher, daß die Geräuschklassifikation durch das menschliche Ohr als Sinnesorgan mit von menschlichen Empfindungen abhängig und damit subjektiv ist.

Im aktuellen Stand der Akustikbewertung geben für die Klassifikation eines Geräusches mehrere Probanden in sogenannten Hörlabors Geräuschbewertungen auf Notenskalen ab, deren Gesamtergebnisse über die Anzahl der durchgeführten Hörproben statistisch gemittelt werden [245]. Dabei benoten Probanden die Geräusche in bezug auf verbal vordefinierte psychoakustische Parameter wie „Lautheit“, „Schärfe“, „Rauhigkeit“ usw. oder einer anderen geeignet vorgegebenen Merkmalsmenge [59, 232]. Die daraus ermittelten Resultate können aufgrund der nicht eliminierbaren subjektiven Einflüsse der Probanden schwanken und unterliegen daher einer mangelhaften Reproduzierbarkeit.

In der industriellen Akustik besteht daher der Wunsch nach *objektivierbaren* Verfahren, die anhand nachvollziehbarer Kriterien eine reproduzierbare Geräuschklassifikation ermöglichen. Die hier gezeigte Darstellung kann sich dabei natürlich nur auf den wesentlichen Querschnitt aller Vorgehensweisen konzentrieren, deshalb müssen z.B. Verfahren zur Filterung und Vorverarbeitung in Abbildung 55 im Hintergrund verbleiben. Darüber hinaus bestehen in der Geräuschklassifikation zahlreiche Gemeinsamkeiten mit der Mustererkennung in Abbildung 41, es wird daher nicht überraschen, wenn Techniken aus der Mustererkennung hier in modifizierter Form erneut zum Einsatz kommen.

4.5.1 Verarbeitungsschrittfolge

Für die algorithmische Implementierung der Geräuschklassifikation wird typischerweise die Folge der Verarbeitungsschritte in Abbildung 56 verwendet. Von zentraler Bedeutung ist die darin auftretende *Dimensionsreduktion* der Signaldarstellung der Zeitreihe mit ihrer ursprünglich unendlich feinen Auflösung, die im Zuge der Abbildung auf eine endliche Signaldarstellung (z.B. als n -Pixel Falschfarbenbild der transformierten Zeitreihe), der anschließenden Extraktion einer bestimmten Anzahl von m Merkmalen sowie in einem nachgeschalteten Klassifikator erfolgt, der eine Zuordnung des verarbeiteten Signals in eine Geräuschkategorie ermöglichen soll.

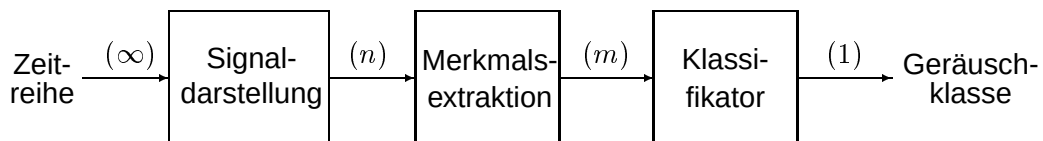


Abbildung 56: Dimensionsreduktion in der Klassifikation

Während in Abbildung 56 für den ersten Schritt der Digitalisierung des Geräusches mittels Mikrofon oder Kunstkopf eine Theorievorstellung existiert, ist für die folgenden Schritte der Signaldarstellung, der Merkmalsextraktion und Klassifikation noch keine umfassende Theorie bekannt, die befriedigende bzw. beweisbare Antworten auf die drei folgenden zentralen Fragen der Geräuschklassifikation geben könnte:

- ☐ Gibt es eine minimale Menge von (Geräusch-)Merkmalen und wie werden diese Merkmale konstruktiv gefunden?
- ☐ Gibt es eine Klassenzugehörigkeitsfunktion der Geräusche und wie kann diese gefunden werden?
- ☐ Gibt es Klassen „ähnlicher Geräusche“ und wie sind diese Klassenbegriffe qualitativ und quantitativ definiert?

Bereits die Formulierung der dritten Kernfrage zeigt, daß diese Fragen keinesfalls unabhängig voneinander zu stellen sind, insbesondere daß jede Unvollkommenheit in der Merkmalsbildung und Unsicherheit in der Merkmalsselektion natürlich auch die Präzision und Eindeutigkeit der im Klassifikator abgeleiteten Klassenaussage entscheidend beeinflusst. Die Frage nach „akustisch ähnlichen“ Geräuschen ist insbesondere deshalb von Bedeutung, da alle Geräusche deren Merkmale identisch übereinstimmen, von einem nachfolgenden Klassifikator nicht mehr unterschieden werden können und daher automatisch derselben Geräuschkategorie zugeordnet werden.

Wesentlich für das grundlegende Verständnis der drei Kernfragen in der Mustererkennung ist die aus den Dimensionsreduktionen $\infty \rightarrow n$, $n \rightarrow m$ und $m \rightarrow 1$ in Abbildung 56 wie in der Mustererkennung resultierende Erkenntnis, daß im mathematischen Sinne die Abbildung des Geräusches auf eine geeignete Analog- bzw. Digitaldarstellung möglichst *bijektiv*, während die anschließende Merkmalsextraktion aus dieser Darstellungsform sowie die Bildung eines Klassenbegriffes aus diesen Merkmalen dagegen *surjektiv* sein muß. Im folgenden wird daher mit der Einführung geeigneter Geräusch- bzw. Signaldarstellungen begonnen.

Geräusche in Form akustischer Zeitreihen enthalten zeitliche und spektrale Signalanteile, deren Gewichtung in der als eindimensionale Zeitreihe im Zeitbereich vorliegenden Darstellung in der unbekannten Signalstruktur versteckt ist. In den seltensten Fällen bestehen akustische Zeitreihen aus rein zeitlichen oder rein spektralen Signalanteilen, so daß eine rein zeitliche oder rein spektrale Zeitreihenanalyse besonders für die Charakterisierung dynamischer oder nichtlinearer Systeme bzw. deren Signale nicht ausreicht.

Zeitveränderliche spektrale Signaldarstellungen, die eine Zeitreihenanalyse in den Koordinaten von Zeit und Frequenz erlauben, haben sich bereits in einer Vielzahl von Anwendungen in der Akustik als sehr leistungsfähig erwiesen. Diese Zeit-Frequenztransformationen sind zweidimensionale Funktionen, die den zeitveränderlichen Frequenzanteil einer eindimensionalen Zeitreihe darstellen. Die Gewichtung des Zeit- und des Frequenzanteils kann dabei durch einen veränderlichen Integralkern in der Zeit-Frequenztransformation (ZFT) der Zeitreihe gesteuert werden.

Die Zeit-Frequenztransformation C_x eines Signals x heißt *kovariant* bezüglich Translationen in Zeit und Frequenz, falls sich nach Gleichung (112) die Zeit- und Frequenzverschiebungen von x als reine Verschiebung $t - t_0$ bzw. $\omega - \omega_0$ der einzelnen Koordinaten in C_x ausdrücken lassen:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & x(t - t_0)e^{-i\omega_0(t-t_0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_x(t, \omega) & \longrightarrow & C_x(t - t_0, \omega - \omega_0) \end{array} \quad (112)$$

Die Forderung an Zeit-Frequenztransformationen C_x eines Signals x , die bezüglich der Translation in Zeit und Frequenz kovariant sind, wird durch die bilineare Zeit-Frequenztransformationen der Cohen-Klasse in Gleichung (113) erfüllt [46]. Dabei seien zunächst nur analytisch definierte Signale betrachtet, für die $X(\omega) \equiv 0 \ \forall \ \omega < 0$ gilt, wobei X die Fouriertransformierte des Zeitsignals x ist, mit hier nun $x \in \mathbb{C}$ und x^* konjugiert komplex

$$C_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \Phi(\xi, \tau) e^{-i\xi t + i\xi u - \omega\tau} du \, d\tau \, d\xi \quad (113)$$

und $\Phi(\xi, \tau)$ als frei wählbaren parametrisierten zweidimensionalen Integralkern. Die Eigenschaften einer ZFT werden durch einfache Beschränkungen des Integralkerns festgelegt. Dadurch ist es möglich, durch die Wahl entsprechender Kerne Zeit-Frequenztransformationen mit genau definierten Eigenschaften zu erhalten [29].

Viele der in der industriellen Akustik derzeit zur Zeitreihenanalyse verwendeten Zeit-Frequenztransformationen gehören zur Cohen-Klasse [46], die kovariant unter Translationen der Zeitreihe in Zeit und Frequenz ist. Klassische Zeit-Frequenztransformationen wie das *Spektrogramm (SPEC)*, die *Wigner-Ville Darstellung (WVD)* oder die *Pseudo Wigner-Ville Darstellung (PWVD)* sind in der Literatur z.B. zur Zeitreihenanalyse von Erdbebensignalen [27], in der Spracherkennung [137], in der akustischen Qualitätskontrolle [92], in der Entdeckung mechanischen Versagens [230] sowie in der medizinischen Zeitreihenanalyse [28] eingesetzt worden. Die genannten Zeit-Frequenztransformationen gehören dabei alle zur Cohen-Klasse, die damit in der gezeigten parametrisierten Form von Gleichung (113) eine Oberklasse von Signaldarstellungen für die Verwendung in Abbildung 56 darstellt.

Die einfachste ZFT der Cohen-Klasse ist das *Spektrogramm (SPEC)* mit $S_x(t, \omega)$ nach Gleichung (114) als das Betragsquadrat der Kurzzeit-Fouriertransformierten des Signals. Hierbei gilt wieder für rein analytische Signale $X(\omega) \equiv 0 \forall \omega < 0$, mit X als der Fouriertransformierten der Zeitreihe x .

$$S_x(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (114)$$

Abbildung 57a zeigt das Spektrogramm zweier Chirps (d.h. zweier Pfeiftöne) mit über der Zeit veränderlicher Frequenz. Die dabei erfolgende Aufspreizung der an sich reinen Chirplinien in der Zeit-Frequenzebene ist deutlich erkennbar. Die schlechte Auflösung des Spektrogramms in den Koordinaten von Zeit und Frequenz, die durch das Fenster g in Gleichung (114) verursacht wird, hat zu der Entwicklung von ausgefeilten bilinearen Zeit-Frequenztransformationen der Cohen-Klasse geführt [46].

In der Cohen-Klasse ist die *Wigner-Ville Darstellung (WVD)* die ZFT mit dem besten Auflösungsvermögen. Sie kann mit $W_x(t, \omega)$ in Gleichung (115) als eine Kurzzeit-Fouriertransformierte interpretiert werden, bei der das Fenster mit dem Signal übereinstimmt.

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{i\nu t} d\nu \quad (115)$$

Abbildung 57b zeigt die verbesserte Auflösung der beiden Chirplinien, die ungedämpften Interferenzterme, die aus der bilinearen Natur der ZFT entstehen, gestalten jedoch eine Ergebnisinterpretation etwas schwierig.

Obwohl die Wigner-Ville Darstellung bereits einige wünschenswerte Eigenschaften besitzt, stellt das Auftreten dieser nichtlinearen Interferenzterme eine Begrenzung der Leistungsfähigkeit der WVD dar [46]. Die *Pseudo Wigner-Ville Darstellung (PWVD)* hebt durch die Einführung einer Fensterfunktion h in die WVD diese Beschränkung auf. Daraus ergibt sich für die PWVD [45]

$$\tilde{W}_x(t, \omega) = \int h(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (116)$$

Vereinfacht ausgedrückt entspricht die PWVD damit einer WVD mit einem zeitgefensterten Signal mit $x(\tau) \sqrt{h(2\tau - t)}$. Das Zeitfenster in Gleichung (116) wirkt damit als Glättungsfunktion im Frequenzbereich. Die PWVD unterdrückt damit Signalkomponenten, die in der Richtung der Frequenzkoordinate oszillieren.

Die Glättung in Richtung der Zeit kann durch Faltung der PWVD in Gleichung (117) mit einer Tiefpaßfilterfunktion q erfolgen.

$$\tilde{W}_x(t, \omega) = \int q(u - t) \int h(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau du. \quad (117)$$

Das Ergebnis ist die sogenannte *geglättete Pseudo Wigner-Ville Darstellung (gPWVD)*. Dabei werden in dieser Darstellung hier durch dasselbe Symbol $\tilde{W}_x$ alle Varianten der PWVD bezeichnet. Die gPWVD zeigt Abbildung 57c, die Glättung in Zeit und Frequenz

ermöglicht dabei einen Kompromiß zwischen der Reduktion der Interferenzterme und der erreichbaren Signalauflösung. Wie Abbildung 57 zeigt ist daher möglich, durch die Wahl entsprechend parametrisierter Kerne in der Cohen-Klasse eine ZFT mit genau definierten und erwünschten Eigenschaften zu erhalten.

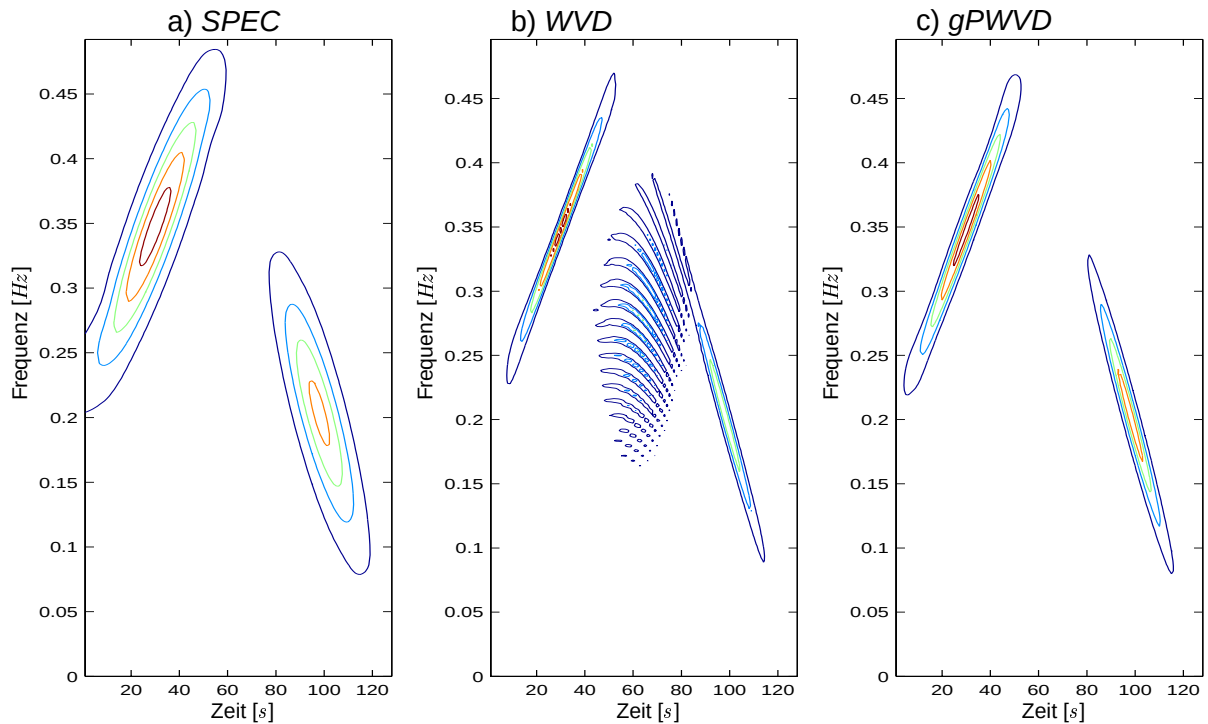


Abbildung 57: Interferenzeigenschaften von *SPEC*, *WVD* und *gPWVD* [222]

Neben den in Abbildung 57 dargestellten Interferenzeigenschaften sind für den Einsatz und die Interpretation der ZFT desweiteren Eigenschaften wie Reellwertigkeit, die Invertierbarkeit, eine reduzierte Interferenz, sowie die Interpretierbarkeit der Energie und der Marginale (d.h. spezieller Randbedingungen) von Bedeutung [29], die in Tabelle 11 zusammengestellt sind und die zusätzlich einem verbesserten Verständnis der transformierten Signaldarstellungen dienen.

ZFT	Reduzierte Interferenz	Reellwertigkeit	Nichtnegativität	Marginalität	Instantane Frequenz	Gruppenverzögerung	Invertierbarkeit
<i>SPEC</i>	✓	✓	✓				(✓)
<i>WVD</i>		✓		✓	✓	✓	✓
<i>gPWV</i>	✓	✓					(✓)

Tabelle 11: Eigenschaften verschiedener ZFT der Cohen-Klasse [29]

Im folgenden wird nun dargestellt, wie durch die Wahl des Kerns die bestmögliche Interpretation von spektral sehr schmalbandigen Störgeräuschen (z.B. Pfeiftönen) gelingen kann. Wichtig dabei ist, daß in der Vorgehensweise der Signalklassifikation in Abbildung 56 die verschiedenen ZFT nicht als einzelne bzw. gegensätzliche Alternativen, sondern lediglich als Sonderfälle spezieller Parameterwahlen ein- und desselben Kerns innerhalb der allgemeineren Formulierung der Cohen-Klasse verstanden werden.

4.5.2 Ähnlichkeitsbegriff

Im Anschluß an die Wahl einer Signaldarstellung in Abbildung 56 sind aus dieser Darstellung geeignete Merkmale zu extrahieren. Da in der Frage der Merkmalsextraktion und Klassifikation unübersehbare Gemeinsamkeiten mit der Mustererkennung in Abbildung 41 bestehen, ist es zunächst naheliegend, in der Merkmalsextraktion und Klassifikation auf die bekannten Techniken und Gleichungen aus der Mustererkennung zurückzugreifen. Hierzu definiert man entsprechend Gleichung (68) die *regulären akustischen Momente* r_{pq} der Cohen-Klasse mit den vektoriellen Zeitdimensionen $T_x^{p+1} T_y^{-q-1}$ zu

$$r_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \omega^q C_x(t, \omega) dt d\omega \quad (118)$$

Bezieht man auch diese regulären akustischen Momente auf die Schwerpunktskoordinaten $\bar{t} = r_{10}/r_{00}, \bar{\omega} = r_{01}/r_{00}$, so ergeben sich ganz entsprechend Gleichung (78) die *akustischen Zentralmomente* μ_{pq} mit den vektoriellen Zeitdimensionen $T_x^{p+1} T_y^{-q-1}$ zu

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^p (\omega - \bar{\omega})^q C_x(t, \omega) dt d\omega \quad (119)$$

In dieser Sichtweise lassen sich die ZFT-Darstellungen $C_x(t, \omega)$ der Cohen-Klasse als Bild interpretieren und mit gängigen Techniken der Bildmerkmalsextraktion behandeln. Zur Verdeutlichung dieser Übertragung sind hier absichtlich die in der Mustererkennung eingeführten Notationen r_{pq} und μ_{pq} für die regulären Momente und die Zentralmomente beibehalten. Auch die Verwendung vektorieller Zeitdimensionen T_x, T_y bedarf eines Hinweises auf ihre Motivation. Diese kommt daher, daß in der Mustererkennung mit unabhängigen Längendimensionen L_x, L_y gearbeitet wird. Kommt ein Verfahren der Mustererkennung mit unabhängigen Längendimensionen auf der Bilddarstellung einer ZFT wie in Abbildung 57 zum Einsatz, so folgt daraus die Arbeitshypothese, die Zeitdimension des Signals einer getrennten Skalierung in den Zeitdimensionen T_x, T_y zu unterwerfen. Diese aus einer Übertragung stammende Arbeitshypothese kann letztendlich nur durch die Kontrollen in Abschnitt 4.5.4 gerechtfertigt werden.

Diese Arbeitshypothese mag in der Tat zunächst überraschend erscheinen. Jedoch wird durch die ZFT der Cohen-Klasse unter Beibehaltung des Signalinhalts die Zeitreihe in eine Bilddarstellung umgesetzt. Diese Bilddarstellung ist dabei zunächst nicht unbedingt von anderen Bilddarstellungen, die aus irgend einem anderen bildgebenden Verfahren gewonnen wurden, zu unterscheiden. Aufgrund der unterstellten Austauschbarkeit des ursprünglich bildgebenden Phänomens ist es daher legitim, die in der Mustererkennung abgeleiteten Merkmalsextraktionsverfahren auch in der Akustik einzusetzen.

Zusätzlich kann man bei invertierbaren ZFT (siehe dazu die Eigenschaften in Tabelle 11) unter gewissen Genauigkeitseinschränkungen das Bild wieder in die akustische Zeitreihe zurücktransformieren. Es besteht daher analog zum aus der Mustererkennung bekannten Prinzip des „Merkmals-Editors“ in Abbildung 52 die Möglichkeit, mit dem Analogon eines „akustischen Merkmal-Editors“ die Leistungsfähigkeit und Konsistenz dieser unterstellten Arbeitshypothese experimentell zu untersuchen.

Die Wirkungsweise der akustischen Merkmalsextraktion mit akustischen Zentralmomenten in Gleichung (119) sei hier anhand des Beispiel eines als nichtlinearen Chirp realisierten einfachen Pfeiftons illustriert. Die mathematische Definition des Zeitsignals eines als Pfeifton bezeichneten Chirps zeigt hierzu Gleichung (120). Den Chirp charakterisiert die mit $\omega(t) = \gamma t$ linear zunehmende bzw. abfallende Frequenz.

$$x(t) = \sin[\omega(t)t], \quad \omega(t) = \gamma t, \quad \gamma = \text{const} \quad (120)$$

Menschen erkennen verschiedenste Chirps nach Gleichung (120) leicht als Pfeiftöne. In der Geräuschklassifikation sind Chirps jedoch aufgrund ihres nichtlinearen und instationären Signalverhaltens schwierig zu klassifizieren. Abbildung 58 zeigt einen Chirp mit sinusoidaler Oszillation und linear zunehmender Frequenz.

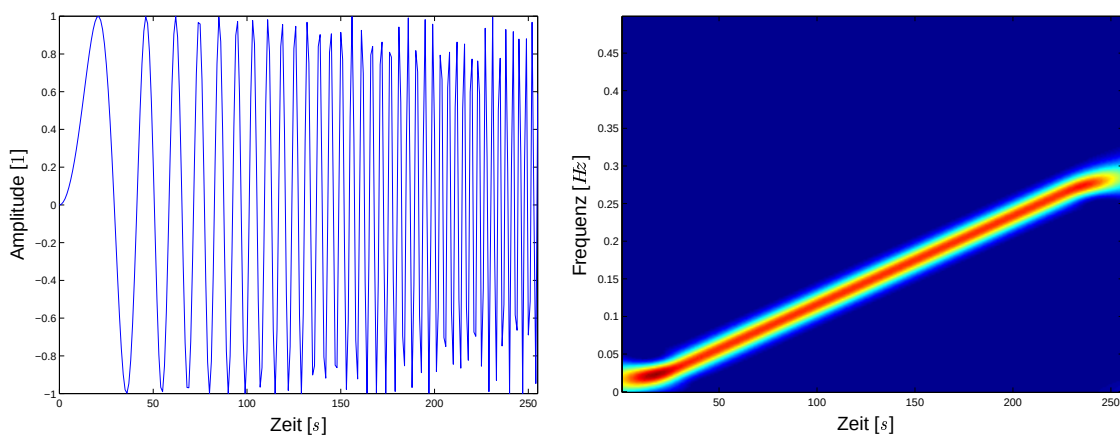


Abbildung 58: Chirp als Zeitsignal (links) und Spektrogramm (rechts) [222]

Wie mit etwas Erfahrung in der Anwendung von ZFT in Abbildung 58 erkennbar und in Abbildung 59 für mehrere Chirps symbolisiert gezeigt ist, werden durch die ZFT der Chirp auf Geraden mit der Steigung $\gamma = \text{konst}$ in der (ω, t) -Ebene dargestellt.

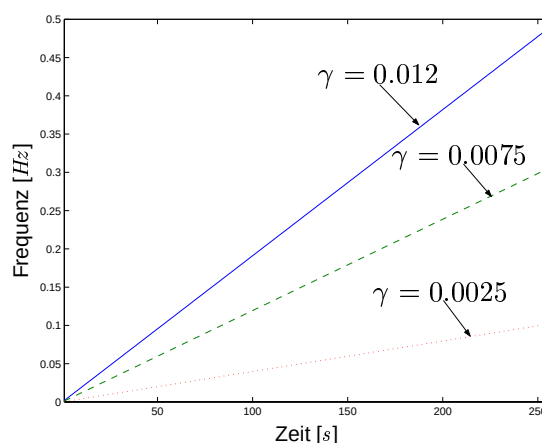


Abbildung 59: Spektrogramm dreier verschiedener Chirps [222]

Unterstellt man daher der gesuchten „akustischen Ähnlichkeit“ das aus der Mustererkennung bekannte Prinzip der geometrischen Ähnlichkeit, so muß der Abbildung 59 nachgeschaltete Klassifikator nur alle drei Geraden als der gleichen Klasse zugehörig klassifizieren um eine korrekte Klassifikation der drei Chirps zu gewährleisten.

Diese korrekte Klassifikation kann durch die Extraktion dimensionsloser (Bild-)Merkmale aus den akustischen Zentralmomenten in Gleichung (119) gezeigt werden. Hierzu folgt unter Verwendung der in der Mustererkennung bereits umfassend erfolgten Dimensionsbetrachtungen die Erstellung der Dimensionsmatrix in Tabelle 12, aus deren formalem

	T_x	T_y		T'_x	T'_y
μ_{20}	3	-1	$\Rightarrow$	1	0
μ_{02}	1	-3		0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
μ_{pq}	$p+1$	$-q-1$		$\frac{3p-q+2}{8}$	$\frac{-p+3q+2}{8}$

Tabelle 12: Dimensionsmatrix und Normalform

Aufbau die Form der dimensionslosen (Akustik-)Merkmale nach Gleichung (16) ablesbar sind. Dadurch ergeben sich die dimensionslosen akustischen Zentralmomente zu

$$\pi_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{02}^{\frac{-p+3q+2}{8}} \mu_{20}^{\frac{3p-q+2}{8}}} \quad (121)$$

Die Berechnung der aus der Mustererkennung bekannten und geometrisch interpretierbaren Invarianten bilden in der Anwendung auf akustische Zentralmomente auf diese Weise verschiedene Chirps und konstante Pfeiftöne auf ein- und diesselbe Klasse ab, da die dimensionslosen Merkmalsdarstellungen dieser Zeitsignale übereinstimmen und daher für jeden nachgeschalteten Klassifikator ununterscheidbar sind.

Dieses Beispiel zeigt, daß die geometrische Merkmalsextraktion und -interpretation von Chirps mit der subjektiven Klassifikation von Pfeifgeräuschen übereinstimmt. Dieses Resultat kann erzielt werden, indem durch die Translationsinvarianz der dimensionslosen akustischen Momente in Gleichung (121) diese weder vom zeitlichen Anfangspunkt, der zeitlichen Länge, der Höhe, oder vom linearen Frequenzverlauf des Pfeifens abhängig sind. Dies bedeutet, daß alle mit diesen aufgezählten Eigenschaften beschriebenen Pfeiftöne ununterscheidbar sind.

Es stellt sich daher die Frage inwieweit die Vorgehensweise, „akustische Ähnlichkeit auf die Frage geometrischer Ähnlichkeit zurückzuführen“ [221], auf komplexere Geräusche verallgemeinert werden kann. Dies würde z.B. bedeuten, Ähnlichkeitsmaße für „Pfeifen“ mit beliebigem Frequenzverlauf zu finden. Dies erfordert die Erstellung von Transformationsgleichungen, die die in der Definition des Pfeifens verwendeten Parameter eliminieren. Die Definition verschiedener Ähnlichkeitsklassen von Geräuschen unterscheidet sich dann dadurch, welche der Pfeifparameter in der Klassendarstellung durch die Dimensionsanalyse in der Merkmalsbildung nach Gleichung (121) eliminiert werden.

Die Dimensionsanalyse, die in der gezeigten derzeitigen Form zwei unabhängige Zeitdimensionen unterscheidet, kann daher zur Reduktion von bis zu zwei Geräuschparametern eingesetzt werden. Gelingt es, entsprechend der in der Bildverarbeitung in Gleichung (110) bei der Verallgemeinerung in höhere Dimensionen zusätzliche Eigenschaften der Geräuschfunktion zu identifizieren, so können noch weitergehende dimensionslose akustische Merkmale mit dieser Vorgehensweise abgeleitet werden. So lange dies jedoch nicht der Fall ist, muß jede weitergehende Klassifikation komplexer nichtlinearer Geräusche derzeit im nachgeschalteten Klassifikator erreicht werden.

4.5.3 Klassifikatordesign

Die Eigenschaften der ZFT und ihre Darstellungen in der (ω, t) -Ebene hängen sehr stark vom gewählten Kern $\Phi(\xi, \tau)$ in Gleichung (113) ab. Das Problem der Geräuschklassifikation besteht nun sehr oft darin, daß Signale unbekannter Struktur klassifiziert werden müssen, für die kein Vorwissen über deren spektrale und zeitliche Zusammensetzung bekannt ist. Die Frage, durch welche Strategie in so einem Fall der Kern bestmöglich an ein unbekanntes Signal angepaßt werden kann, ist theoretisch noch offen.

In der Praxis behilft man sich daher damit, den parametrisiert formulierten Kern $\Phi(\xi, \tau)$ bezüglich der am Ende der Verarbeitungskette für eine vorgegebene Signalmenge erreichbaren Klassifikationsrate zu maximieren. Das Suchproblem bzw. Bestimmungsproblem des Kerns $\Phi(\xi, \tau)$ mit hier gewählten zwei Parametern ξ_0, τ_0

$$\Phi_{\xi_0, \tau_0}(\xi, \tau) = k_{\xi_0}(\xi) k_{\tau_0}(\tau) \quad \text{mit} \quad k_{z_0}(z) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi} z_0}\right) e^{-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad z = \xi, \tau \quad (122)$$

wird durch diese Vorgehensweise als das in Abbildung 60 dargestellte Optimierungsproblem behandelt, da durch diese allgemeine Parametrisierung die Optimierung des Kerns auf ein vorhandenes Set an Geräuschen ermöglicht wird. Darin werden zunächst für bereits vorklassifizierte Zeitreihen $x_A(t), x_B(t)$ der Klassen A und B mit vorgegebenen Startwerten die Zeit-Frequenzdarstellungen $C_{x, \{A, B\}}(t, \omega; \xi_1 \dots, \xi_n)$ berechnet, aus denen dann über den Zwischenschritt der akustischen Momente $m_{pq, \{A, B\}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die dimensionslosen Merkmale $\pi_{pq, \{A, B\}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ bestimmt werden.

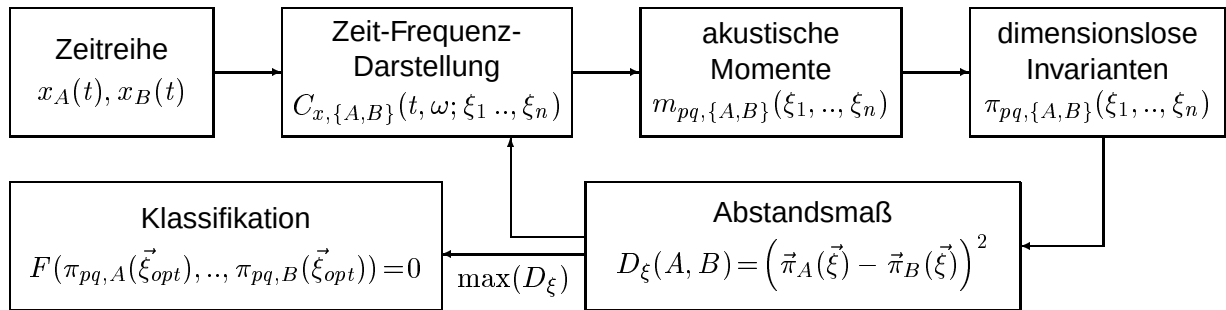


Abbildung 60: Optimierungsschleife für den Klassifikatorentwurf [223]

Mit der Bestimmung der dimensionslosen Merkmale $\pi_{pq, \{A, B\}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, die natürlich noch von der Wahl der Parameterwerte des Kerns abhängen, ist der erste Schritt des Optimierungsvorgangs in Abbildung 60 abgeschlossen. In einem zweiten Schritt wird nun für die beiden (Geräusch-)Klassen A und B ein Abstandsmaß $D_\xi(A, B)$ definiert [223]

$$D_\xi(A, B) = \frac{d_\xi(A, B)}{d_\xi(A, A) + d_\xi(B, B)}, \quad \text{mit} \quad d_\xi(A, B) = (\vec{\pi}_A(\xi_1, \dots, \xi_n) - \vec{\pi}_B(\xi_1, \dots, \xi_n))^2 \quad (123)$$

Das Abstandsmaß in Gleichung (123) wird dabei umso größer, je weiter die Zentren der Klassen auseinander liegen und je kleiner sich die Ausdehnung der Klasse um ihr Zentrum ergibt. Mit zunehmendem Abstandsmaß wächst damit auch die Trennbarkeit der Klassen, so daß sich aus der Maximierung des Abstandsmaßes $\max(D_\xi)$ ein Gütekriterium für die Parameterwahl von ξ in der Optimierungsschleife in Abbildung 60 ergibt.

Als Kontrolle für den Klassifikationsalgorithmus in Gleichung (123) bietet es sich an, die Konvergenz des Optimierungsalgorithmus anhand einiger vorgegebener „synthetischer“ Geräusche, deren Zusammensetzung bekannt bzw. speziell für die Validierungsaufgabe zusammengesetzt ist, zu überprüfen. Sinnvollerweise stellen diese Geräusche gleichzeitig auch bestimmte Grenzfälle der Kernparametrisierung dar, um eine genaue Kontrolle und Interpretation des Klassifikationsergebnisses zu ermöglichen.

Nachfolgend wird im Beispiel dargestellt, wie der Optimierungsalgorithmus zu den optimalen Kernparametern $\xi_{0,opt}$, $\tau_{0,opt}$ konvergiert, die sich hier aus der Kenntnis der Signalstruktur ergeben müssen. Dazu werden Simulationen mit $n = 256$ Samples und einer Klassengröße von je 100 Geräuschen bei einer Sampling Rate von $\Delta t = 1 [s]$ durchgeführt, der Frequenzbereich deckt daher das Intervall $\omega \in [-\pi, \pi] [Hz]$ ab.

Im ersten Beispiel sind die zwei Klassen A und B nur anhand ihrer zeitlichen Signalstruktur $f(t)$ und $g(t)$ zu unterscheiden, die in den Gleichungen (124) dargestellt ist.

$$\begin{aligned} \text{Klasse } A : \quad & f(t) = h(t) \sin(\omega t + \varphi_1) + 2h(t - \Delta t) \sin(\omega t + \varphi_2) + a\epsilon(t) \\ \text{Klasse } B : \quad & g(t) = 2h(t) \sin(\omega t + \varphi_3) + h(t - \Delta t) \sin(\omega t + \varphi_4) + a\epsilon(t) \end{aligned} \quad (124)$$

Darin ist $\Delta t = 32 [s]$ und $h(t)$ ein Hanning Fenster der Breite $30 [s]$. Die Phasen φ_i sind zufallsverteilt aus dem Intervall $[0, 2\pi]$. Die Frequenz der Wellenpakete ist $\omega/2\pi = 0.15 [Hz]$. Das Rauschen $\epsilon(t)$ ist normalverteiltes weißes Rauschen ($\epsilon(t) \sim N(0, 1)$). Die Amplitude des Rauschens wird durch den Parameter a festgelegt. In Abbildung 61a ist stellvertretend für jede Klasse ein Signal mit $a = 0.2$ dargestellt.

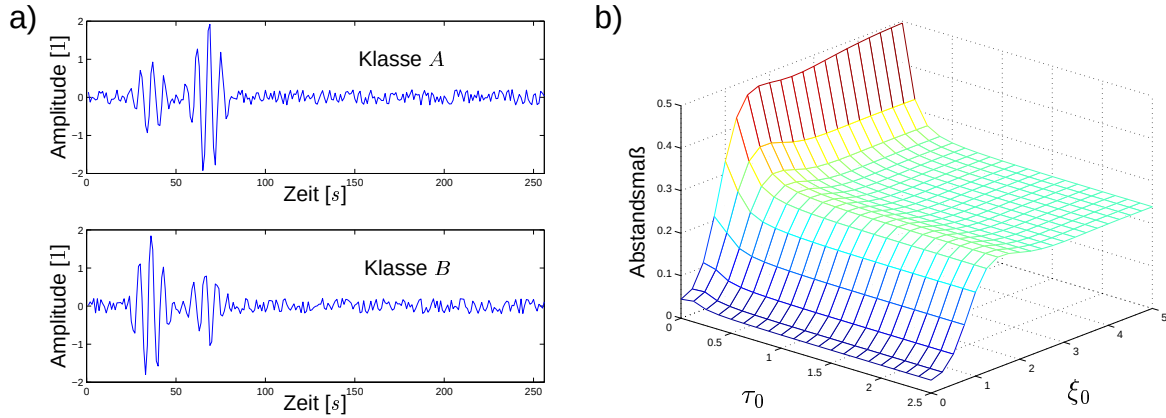


Abbildung 61: Zwei Signalklassen A, B nach Gleichung (124). a) Je eine Darstellung jeder Klasse, b) Abstandsmaß $D_{\xi}(A, B)$ der Klassen A, B über einem Wertebereich der Kernparameter τ_0, ξ_0 [223]

Den einzigen Unterschied zwischen den Klassen A und B stellt die zeitliche Struktur, d.h. der Unterschied in den Amplituden der Wellenpakete dar. Aus diesem Grund der Signalzusammensetzung ist die beste Trennbarkeit der Klassen mit $\tau_0 = 0$ zu erwarten. Die spektralen Signalanteile gehen deshalb nicht ein, ein $\tau_0 > 0$ würde der Trennbarkeit der Klassen keine zusätzliche Information hinzufügen können. In Abbildung 61b ist der Abstand beider Klassen über den Kernparametern τ_0, ξ_0 aufgetragen. Die Kernparameter, die den Klassenabstand maximieren sind $\tau_{0,opt} = 0$ und $\xi_{0,opt} = 5$. In diesem Grenzfall, in dem nur rein zeitliche Signalanteile die Klassentrennung bestimmen, wurden durch den Optimierungsalgorithmus die korrekten Kernparameter gefunden.

Im folgenden Fall wird zusätzlich eine Frequenzänderung in die Wellenpakete aus dem vorhergehenden Beispiel eingebracht und darüber hinaus wurde der Unterschied in den Amplituden mit $\omega_1/2\pi = 0.15$ und $\omega_2/2\pi = 0.075$ weiter verringert. In den Signalen

$$\begin{aligned} \text{Klasse A : } & f(t) = h(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + 1.2h(t - \Delta t) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + a\epsilon(t) \\ \text{Klasse B : } & g(t) = 1.2h(t) \sin(\omega_2 t + \varphi_3) + h(t - \Delta t) \sin(\omega_1 t + \varphi_4) + a\epsilon(t) \end{aligned} \quad (125)$$

ist die Amplitude des Rauschens weiterhin zu $a = 0.2$ gewählt, auch die anderen Simulationsparameter wurden unverändert beibehalten. Zwei exemplarische Signale sind wieder beispielhaft in Abbildung 62a dargestellt.

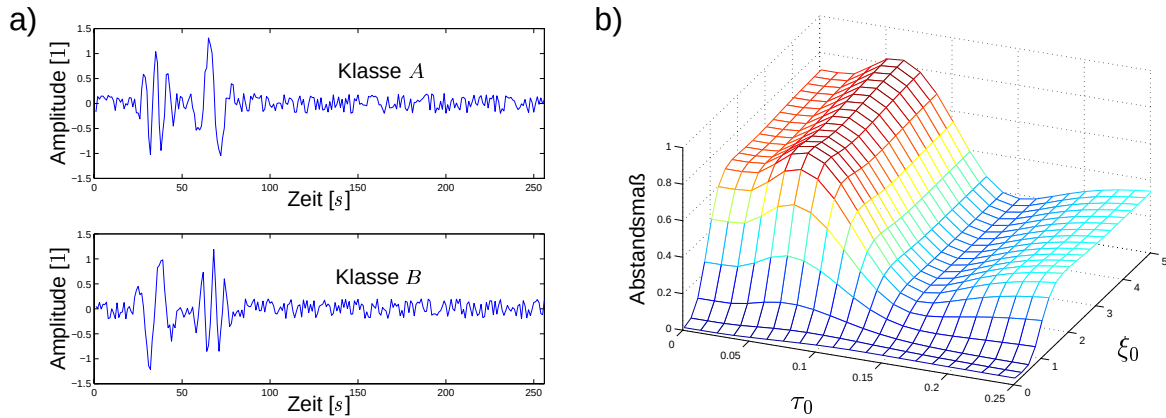


Abbildung 62: Zwei Signalklassen A, B nach Gleichung (125). a) Je eine Darstellung jeder Klasse, b) Abstandsmaß $D_\xi(A, B)$ der Klassen A, B über einem Wertebereich der Kernparameter τ_0, ξ_0 [223]

Die Maximierung des Abstandsmaßes $D_\xi(A, B)$ liefert wie in Abbildung 62b dargestellt in diesem Fall $\tau_{0,opt} = 0.06$, $\xi_{0,opt} = 5$. Ein Wert von $\tau_{0,opt} > 0$ bedeutet, daß nun die spektralen Signalanteile ebenfalls mit in die Klassentrennung eingehen. Aus Abbildung 62b folgt desweiteren, daß für $\xi_0 = 0$ keine Klassentrennung wegen $D_{\xi_0=0}(A, B) = 0$ möglich wäre, da dann nur spektrale Signalanteile zur Klassentrennung herangezogen würden, sich die Spektren von $g(t)$ und $h(t)$ jedoch nicht unterscheiden, da sie lediglich durch zeitliche Invertierung und Verschiebung auseinander hervorgehen.

Parameterwahl ξ_0, τ_0	Interpretation des Kerns $C_x(t, \omega; \Phi(\xi_0, \tau_0))$
$\xi_0 = \infty, \tau_0 = 0$	$ x(t) ^2$ (nur zeitliche Signalanteile)
$\xi_0 = 0, \tau_0 = \infty$	$ X(\omega) ^2$ (nur spektrale Signalanteile)
$\xi_0 = \infty, \tau_0 = \infty$	Wigner-Ville Darstellung (WVD)
$\xi_0 = \infty, 0 < \tau_0 < \infty$	Pseudo Wigner-Ville Darstellung (PWVD)
$0 < \xi_0 < \infty, 0 < \tau_0 < \infty$	geglättete Pseudo Wigner-Ville Darstellung (gPWVD)

Tabelle 13: Fünf Grenzfälle in Abhängigkeit der Kernparameter ξ_0, τ_0 [223]

Auf diese Weise kann der gezeigte Optimierungsalgorithmus mit mehreren Grenzfällen untersucht und validiert werden, die sich für bestimmte Parameterwahlen des Kerns $C_x(t, \omega; \Phi(\xi_0, \tau_0))$ ergeben und in Tabelle 13 dargestellt sind. Damit ist die Darstellung des Klassifikationsalgorithmus abgeschlossen.

4.5.4 Kontrollen

Zur Kontrolle, ob das auf Seite 85 diskutierte Vorgehen, *akustische Ähnlichkeit auf die Frage geometrischer Ähnlichkeit zurückzuführen*, Sinn machen kann, ist hier gezeigt, daß für bestimmte „Pfeiftöne“ der fragliche akustische Ähnlichkeitsbegriff analytisch in den geometrischen Ähnlichkeitsbegriff der Mustererkennung überführt werden kann.

Hierzu wird eine analytische Beschreibung des Pfeiftons angegeben. Pfeiftöne bestehen idealerweise aus einem Spektrum, das zu jedem Zeitpunkt einer Deltafunktion mit einem Peak bei $\omega(t)$ entspricht. Der Zeitverlauf der instantanen Frequenz kann dabei beliebig sein. Dies bedeutet, daß die dem Pfeifton $s(t) = \cos(\omega(t) \cdot t)$ zugrundeliegende Cosinusschwingung beliebig frequenzmoduliert sein kann. Zur weiteren Rechnung und Interpretation wird das reale Zeitsignal durch eine Hilberttransformation in seine komplexe analytische Form überführt [46]:

$$s(t) = H(\cos(\omega(t) \cdot t)) = \exp(i\omega(t)t) \quad (126)$$

Für eine explizite Charakterisierung des Frequenzverlaufs wird dieser in eine Taylorreihe mit $\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k t^k$ entwickelt, so daß das Pfeifen folgende Form annimmt

$$s(t) = \exp(i \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k t^{k+1}). \quad (127)$$

Die Anzahl der Koeffizienten ω_k in Gleichung (127) legt nun die Art des Pfeifens fest:

- ☐ Pfeifen mit konstanter instantaner Frequenz ω_0 (Sinusschwingung)
mit $\omega_0 = \text{const}$, $\omega_1 = \omega_2 = \dots = 0$
- ☐ Pfeifen mit linearem Frequenzverlauf $\omega_0 + \omega_1 t$ (Chirp)
mit $\omega_0 = \text{const}$, $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \omega_3 = \dots = 0$
- ☐ Pfeifen mit quadratischem Frequenzverlauf $\omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2$
mit $\omega_0 = \text{const}$, $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \text{const}$, $\omega_3 = \omega_4 = \dots = 0$

Zur Darstellung des Signals in der (ω, t) -Ebene wird hier aus Vereinfachungsgründen die Wigner-Ville-Darstellung (WVD) gewählt, da in dieser Darstellung die Ausdrücke z.T. analytisch geschlossen behandelt werden können. Die WVD eines Signals $s(t)$ ergibt für das Pfeifen $s(t)$ in Gleichung (127) durch Einsetzen

$$\begin{aligned} W(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t - \frac{\tau}{2}) s(t + \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\omega 2\tau + i \sum_{k=0}^{k_{max}=\infty} \omega_k t^{k+1} \sum_{n=0}^{k+1} \binom{k+1}{n} \left(\frac{\tau}{t}\right)^n [1 - (-1)^n]\right) d\tau \quad (128) \end{aligned}$$

Die Integration kann für diesen allgemeinen Ausdruck zunächst nicht geschlossen angegeben werden. Daher wird Gleichung (128) für die ersten Glieder der Taylorreihe einzeln untersucht. Die auftretenden Fälle stellen mit zunehmender Anzahl der Terme immer komplexere Geräusche (Sinus, Chirp, Pfeifen mit quadratischem Frequenzverlauf) dar.

Für den im folgenden betrachteten Fall des Chirp mit quadratischem Frequenzverlauf ist mit $k_{max} = 1$ die Taylorreihe auf die ersten beiden Glieder beschränkt. Damit ergibt sich für den nichtlinearen Signalverlauf $s(t)$ des Chirps

$$s(t) = \exp(i \sum_{k=0}^{k_{max}=1} \omega_k t^{k+1}) = \exp(i(\omega_0 t + \omega_1 t^2)) \quad (129)$$

Die Auswertung des allgemeinen Integrals aus Gleichung (128) ergibt

$$\begin{aligned} W(t, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega_0 + 2\omega_1 t - \omega)2\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \delta(\omega_0 + 2\omega_1 t - \omega) & \text{für } (t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t) \wedge (0 \leq \omega \leq \omega_{max}) \\ 0 & \text{für außerhalb} \end{cases} \end{aligned} \quad (130)$$

wobei bei realen Meßdaten der Wertebereich sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich immer endlich ist. Der Wertebereich wird durch den Anfangswert t_0 , der Zeitdauer Δt und der maximalen Frequenz ω_{max} begrenzt.

Zur Merkmalsgenerierung werden nun die höheren akustischen Zentralmomente nach Gleichung (119) durch Einsetzen der WVD in Gleichung (130) unter Einsatz der Schwerpunktskoordinaten $\bar{t} = \frac{1}{2}\Delta t$ und $\bar{\omega} = \omega_0 + \omega_1 \Delta t$ zu

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^p (\omega - \bar{\omega})^q W(t, \omega) dt d\omega \quad (131)$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{-p}}{p+q+1} \omega_1^q \Delta t^{p+q+1} & \text{für } (p+q+1) \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } (p+q+1) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (132)$$

bestimmt. Die Integration ergibt die noch von den Parametern Δt (d.h. der Länge des Signals) und ω_1 (d.h. der Steilheit des Frequenzanstiegs) abhängigen Zentralmomente.

Die Dimensionsmatrix für diese Zentralmomente μ_{pq} und den zur Bildung der dimensionslosen Potenzprodukte ausgewählten Zentralmomenten μ_{10} und μ_{01} zeigt Tabelle 14.

	T_x	T_y		T'_x	T'_y
μ_{10}	2	0	$\Rightarrow$	1	0
μ_{01}	1	-1		0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
μ_{pq}	$p+1$	$-q$		$\frac{p-q+2}{2}$	q

Tabelle 14: Dimensionsmatrix und Normalform

Aus der Normalform in Tabelle 14 sind die dimensionslosen (Akustik-)Merkmale wieder direkt ablesbar. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden dimensionslosen akustischen Zentralmomente zu:

$$\pi_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{10}^{\frac{p-q+2}{2}} \mu_{01}^q} \quad (133)$$

Trägt man diese Bildungsvorschrift der dimensionslosen akustischen Merkmale in einer Matrix auf, so ergibt sich die folgende Merkmalsmatrix in Gleichung (134) für die Weiterverarbeitung im nachfolgenden Klassifikator zu

$$\pi_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

Wie die Merkmalsmatrix in Gleichung (134) zeigt, sind die dimensionslosen Akustikmerkmale π_{pq} unabhängig von ω_1 und Δt in Gleichung (132). Sie bilden daher die betrachteten Pfeiftöne in Gleichung (129) auf ein- und dieselbe Klasse ab, da die dimensionslosen Merkmalsdarstellungen dieser Zeitsignale übereinstimmen. Diese Ununterscheidbarkeit gewährleistet die korrekte Klassifikation im nachgeschalteten Klassifikator.

Als Besonderheit ist noch zu vermerken, daß die Form der abgeleiteten dimensionslosen Merkmale je nach betrachteter Geräuschklasse und verwendeter Kernparametrisierung variieren kann. Diese einsehbare Tatsache ergibt sich aus dem Vergleich der Dimensionsmatrizen in Tabelle 12 und Tabelle 14, die sich jeweils aus der unterschiedlichen Kernparametrisierung der Zeit-Frequenztransformation für die vektoriellen Dimensionen zu $T_x^{p+1}T_y^{-q-1}$ und $T_x^{p+1}T_y^{-q}$ ergeben.

Neben diesen Möglichkeiten, das Ähnlichkeitspostulat einzelner Geräuschklassen analytisch zu untersuchen, bietet es sich für nicht mehr geschlossen integrierbare Geräuschklassen auch an, entsprechend dem aus der Mustererkennung als „Merkmalseditor“ bezeichneten Untersuchungswerkzeug auch in der Akustik z.B. die im Rahmen des Optimierungsverfahrens in Abbildung 60 erzeugten Klassengrenzen numerisch zu untersuchen. Den hierzu auftretenden Informationsfluß zeigt Abbildung 63.

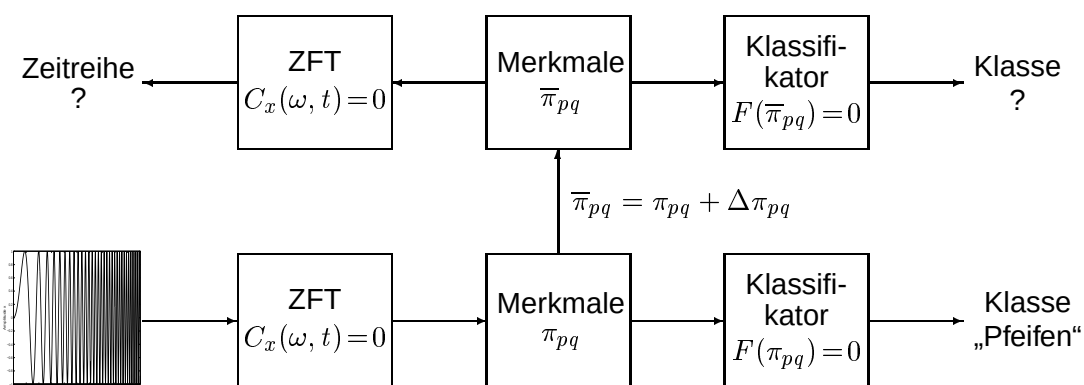


Abbildung 63: Informationsfluß im akustischen Merkmals-Editor

Die in Abbildung 63 zur Rekonstruktion der Zeitreihe aus den Merkmalen π_{pq} notwendigen beiden Rücktransformationen unterliegen jedoch einigen Einschränkungen. So ist die erste Rücktransformation der Bildmerkmale auf die ZFT immer möglich, während die Eigenschaft der Invertierbarkeit der ZFT zurück auf die Zeitreihe von der Wahl des parametrisierten Kerns nach Tabelle 11 abhängig ist.

4.6 Data Mining

Durch die computergestützte Erfassung und Steuerung von Produktions- und Geschäftsprozessen sowie durch die in zahlreichen Meßkampagnen und Simulationen gewonnenen Daten sind in der Industrie große Datensammlungen entstanden. Diese Datenbestände sind in Datenbanken oder auch in *Data Warehouses* [30, 66] abgelegt und stehen unternehmensweit für eine weitere Auswertung zur Verfügung. Daher hat sich in der neueren Zeit eine stürmische Entwicklung von Verfahren zur „Wissensentdeckung in Datenbanken“ (*knowledge discovery in databases*) ergeben.

Der verständliche Wunsch nach einer umfassenden Extraktion des in diesen Datenbanken implizit enthaltenen „Wissens“ in expliziter Form (z.B. eines mathematischen Modells oder auch nur die Kenntnis besonderer Zusammenhänge in den Daten, die auch als „Muster“ bezeichnet werden) ist für die Industrie im Sinne eines Reengineering zur Prozeßverbesserung und -optimierung nicht nur aus Kostengründen von Interesse, sondern verspricht auch die Gewinnung und Nutzung vorher nicht bekannten Wissens. Der Vorgang der Wissensextraktion aus den Daten wird als *Data Mining* [88] bezeichnet.

Die erhoffte Wissensextraktion gestaltet sich jedoch wegen der riesigen Datenmengen, der großen Anzahl von Einflußparametern und der meist unbekannten, oft nichtlinearen Natur der zugrundeliegenden Ereignisse als schwierig. Das Data Mining zur Wissensentdeckung in Datenbanken stellt daher die in Abbildung 64 dargestellte Suche nach geeigneten Algorithmen dar, mittels derer die Wissensextraktion aus Daten durch den Rechner systematisch unterstützt werden soll.

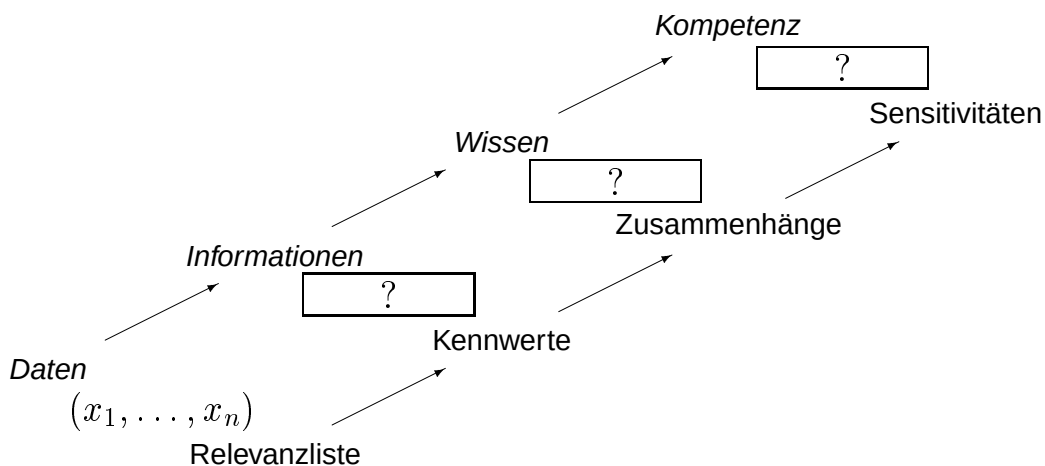


Abbildung 64: Gesuchte Algorithmen zur Wissensextraktion im Data Mining [195]

Für die Wissensextraktion sind wie Abbildung 64 zeigt, mehrere aufeinander folgende Abstraktionsschritte notwendig. Im ersten Schritt werden die in einer *Datenbank* vorgehaltenen erforderlichen Daten in eine Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ selektiert und dann zu aussagekräftigen *Informationen* verdichtet, die bestimmte wichtige Kennwerte darstellen. Im zweiten Schritt führt die Analyse der Kopplungen der Kennwerte untereinander zu einem umfassenden *Wissen*, unter dem die Kenntnis des (Gesamt-)Zusammenhangs der Kennwerte verstanden wird. Im dritten Schritt folgt aus der aktiven (Be-)Nutzung dieses Wissens die *Kompetenz*, aus der durch die Kenntnis der Sensitivitäten in einer gegebenen Situation ein systematisches Vorgehen abgeleitet werden kann.

4.6.1 Modellvorstellung

Technische und experimentelle Daten, die als Resultate aus aufwendigen Experimenten, teuren Prototypen oder numerischen Simulationen gewonnen wurden, weisen im Gegensatz zu beliebigen andersartigen Daten besondere zusätzliche Eigenschaften auf. So wirkt sich die

- Messung technischer Daten (neben der Quantifizierung des Meßwerts) durch die mit jeder Meßgröße verbundene(n) physikalische(n) Maßeinheit(en) und damit im Vorhandensein zusätzlicher Dimensionsinformationen aus. Auch wirkt sich die
- Annahme eines gesuchten funktionalen Zusammenhangs nach dem Prinzip der Dimensionshomogenität in Form einer dimensionshomogenen Funktion aus, die damit eine zentrale Grundlage für die funktionale Modellbildung darstellt.

Aufgrund dieser besonderen Dateneigenschaften kann zunächst die Kennzahlbildung aus der Dimensionsinformation erfolgen. Diese Ähnlichkeitstransformation eliminiert die mit den Daten verbundene Skaleninformation und faßt dabei physikalisch vollähnliche Daten zu identischen Kennzahlwerten zusammen. Durch die Kennzahlbildung wird die Anzahl der Problemparameter verkleinert als auch durch die damit einhergehende Ähnlichkeitsbetrachtung eine neue Sichtweise auf die Daten geschaffen. Aufgrund der Reduktion der Problemparameter können dann anschließend meist funktionale Zusammenhänge mit den bekannten Techniken der Datenanalyse einfacher entdeckt und umgekehrt durch Ähnlichkeitsbedingungen einfacher validiert oder verworfen werden.

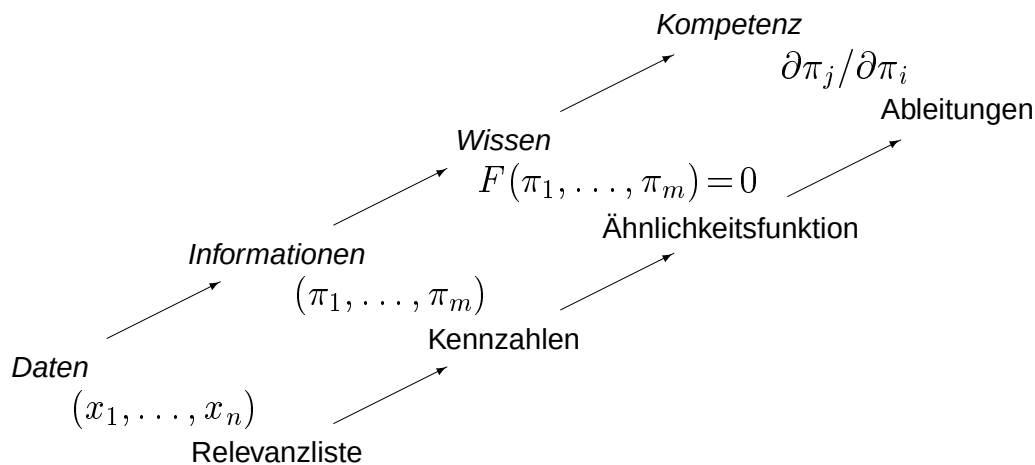


Abbildung 65: Algorithmen zur dimensionshomogenen Wissensextraktion [195]

Zur dimensionshomogenen Wissensextraktion sind mehrere aufeinander folgende Abstraktionsschritte notwendig. Nach Abbildung 65 werden im ersten Schritt die in einer Datenbank vorgehaltenen *Daten* in einer Relevanzliste selektiert und dann zu aussagekräftigen *Informationen* verdichtet, die Kennzahlen darstellen. In einem nächsten Schritt führt das Verständnis für die Kopplungen der Kennzahlen untereinander zu einem umfassenden *Wissen*, unter dem die Kenntnis der Ähnlichkeitsfunktion verstanden wird. Im letzten Schritt folgt aus der aktiven Nutzung dieses Wissens durch Rückeinsetzen der Kennzahlbeziehungen und Ableiten die *Kompetenz*, durch die Kenntnis der Ableitungen unter Berücksichtigung der jeweils gültigen Randbedingungen eine systematische Vorgehensweise zur weiteren Veränderung ableiten zu können.

4.6.2 Abstraktionsebenen

Wesentlich in Abbildung 65 sind die durch die Anwendung der Ähnlichkeitstheorie möglichen strengen Definitionen für die einzelnen Ebenen der Wissensabstraktion. Dies bedeutet, daß hier nicht nur die üblichen verbalen Einordnungen über generelle Vorgehensweisen im Abstraktionsprozeß der Wissensgewinnung vorgeschlagen werden, sondern mit den Methoden der Ähnlichkeitstheorie anerkannte formale und experimentell überprüfbare Vorgehensweisen für Daten mit physikalischen Dimensionsbegriffen zugrunde liegen, die theoretisch abgesichert sind.

Die Anwendung der Ähnlichkeitstheorie besitzt damit die folgenden Potentiale, die sich ausgehend von der Erstellung von Relevanzlisten wesentlicher Einflußgrößen, dem Studium von Ursache-Wirkungs-Ketten über die Erstellung von Sensitivitätsanalysen bis hin zur Modellbildung und Optimierung des Gesamtsystems einsetzen lassen:

- ☐ Durch die Bedingung der Dimensionshomogenität bestehen methodische Hinweise, ob die aus der Datenbank selektierte Relevanzliste $(x_1, \dots, x_n)$ für die Modellbildung und Beschreibung konsistent und vollständig ist.
- ☐ Durch die Erstellung der Dimensionsmatrix systematische Bestimmung geeigneter aussagekräftiger Kenngrößen $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ für die Klassifikation und Bewertung der in der Datenbank enthaltenen Ereignisse.
- ☐ Durch die Einbeziehung von Funktionsapproximationsmethoden Unterstützung in der systematischen Erkennung von Zusammenhängen $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$, die Verhaltensaspekte und deren Interaktion im Gesamtsystem bewerten können.
- ☐ Durch das Rückeinsetzen der Kennzahlbeziehungen ist in Abbildung 65 aus den $\partial\pi_j/\partial\pi_i$ die Gewinnung der Ableitungen $\partial x_j/\partial x_i$ möglich [22], mit denen eine Abschätzung von Parametervariationen bestimmt werden kann.

Ermöglicht wird dies durch die Wahl geeigneter physikalischer Abstraktionsbegriffe, die als (Ähnlichkeits-)Kennzahlen bezeichnet werden und die ganze Klasse aller vollähnlichen Objekte oder Vorgänge in identischen Kennzahlgrößen zusammenfassen. Abbildung 65 hat daher die Eigenschaft, die Bildung der einzelnen Abstraktionsebenen nach Definition 2 „Ähnlichkeit ist Gleichheit im Sinne einer Abstraktion“ vorzunehmen.

In Data Mining Anwendungen spielt es für die Auswahl der verwendeten Algorithmen natürlich auch eine entscheidende Rolle, aus welcher Problem- bzw. Systemklasse die Daten stammen. Im Ingenieurwesen hat sich hierfür die Klassifikation von Systemen z.B. in statische versus dynamische Systeme, lineare versus nichtlineare Systeme usw. eingebürgert. Während im Ingenieurwesen, in dem meist eine Systemmodellierung angestrebt wird, aus der Systemklasseneinteilung sofort Rückschlüsse auf die Anwendbarkeit bestimmter Modellierungs- und Lösungsverfahren gezogen werden kann, ist diese Einteilung im Data Mining meist nicht klar zu treffen, da im Data Mining die Auswahl der Algorithmen vom vorgegebenen Ziel der erhofften Aussagen abhängt.

Über die Verwendung dimensionsloser Größen als Zwischenschritt im Data Mining dimensionsbehafteter Daten [36] ergibt sich die Möglichkeit, daß sich die Betrachtungsweisen des Data Mining formal konsistent in die Betrachtungsweisen des Ingenieurwesens überführen lassen, da die dort gültige Zwangsbedingung der Dimensionshomogenität für beliebige Verknüpfungen dimensionsloser Größen automatisch erfüllt wird.

4.6.3 Data Mining

Theoretische Basis für diese Vorgehensweise ist die Tatsache, daß in der Physik die Beschreibungsgrößen x_i nicht nur einen numerischen Zahlenwert, sondern auch physikalische Dimensionen besitzen. Funktionen f dimensionsbehafteter Größen x_i dienen in der Physik als qualitative und quantitative Modelle realer Objekte, Zustände oder Vorgänge, die in der allgemeinen impliziten Notationsform $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ angegeben werden können und für die das Pi-Theorem gilt.

Neben der zentralen Bedeutung in der Erstellung einer funktionalen Modellvorstellung ergibt sich im Pi-Theorem durch die Reduktion von n dimensionsbehafteten Größen $(x_1, \dots, x_n)$ auf nur noch $m = n - r$ dimensionslose Größen $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ durch die Hintransformation π in Abbildung 66 eine Reduktion der freien Variablen in der Funktionsapproximation. Hierfür werden die Originaldaten $(x_1, \dots, x_n)$ des äußeren Koordinatensystems mit der Hintransformation π auf ihre dimensionslosen Darstellungen $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ im inneren Koordinatensystem abgebildet.

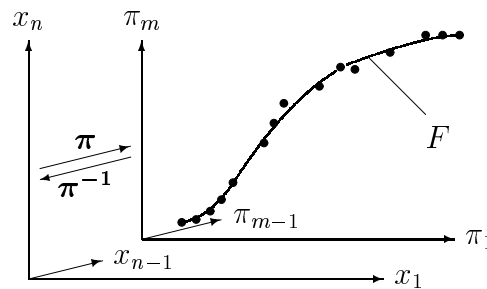


Abbildung 66: Approximation von f via Ähnlichkeitsfunktion F [196]

Das eigentliche Data Mining (d.h. in Abbildung 66 die Funktionsapproximation von F) kann dann z.B. mit klassischen Algorithmen erfolgen, durch den Umweg über die dimensionslosen Transformationsgruppen werden trotz des bei Abbildung 34 bereits erwähnten Fehlens eines allgemeingültigen Beweises in der Regel sowohl qualitativ als auch quantitativ bessere Ergebnisse erzielt [100, 101], da das gesuchte Modell F mit aus $r = n - m$ weniger freien Variablen aufgebaut ist und durch die Kennzahlbildung die Ergebnisinterpretation oft zusätzlich vereinfacht wird.

Nach erfolgter Transformation auf dimensionslose Größen kann nun entsprechend der im fallbasierten Schließen auf Seite 57 dargestellten Sichtweise ein Data Mining Algorithmus das vorhandene Datenmaterial auf Zusammenhänge untersuchen. Dies kann ausgehend von Einzelfällen $(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}) \rightarrow \pi_m$ auf die Gewinnung von Regeln F_i in der Form $F_i(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}) = \pi_m$ übergehen, die eine bestimmte und begrenzte Anzahl von Fällen zusammenfassen. Lassen sich alle Regeln F_i in einer einzigen Regel F zusammenfassen bzw. kann eine einzige Regel F die Gesamtheit aller Fälle abdecken und darüber hinaus die Regel noch in Form einer Funktion dargestellt werden, ist der stufenweise Übergang der Techniken des Data Mining in die bekannten Techniken der Funktionsapproximation formal dargestellt.

Die beschriebenen Eigenschaften der Ähnlichkeitstransformation führen insgesamt zu einer Vorgehensweise, die bei der Regelgewinnung/Modellbildung eine Reduktion des Suchraumes möglicher Modelle erlaubt und zudem eine systematische Methode zur Aufstellung und Verifikation von (Funktions-)Modellen darstellt.

Der Datenauf- und -vorverarbeitung kommt im Data Mining eine wichtige Rolle zu. Aus ähnlichkeitsmechanischer Sicht ist z.B. die Rolle der Datenselektion hinsichtlich der Erstellung der Relevanzliste zu nennen. Die sonstige Wahl der in der Vorverarbeitungsphase eingesetzten Algorithmen muß dabei auf die nachfolgende Informationsverarbeitung abgestimmt sein. Dabei kann es sich um Algorithmen zur Filterung und Rauschelimination, der Behandlung fehlender Datenfelder usw. handeln.

Eine besonders erwähnenswerte Menge leistungsfähiger Vorverarbeitungsalgorithmen stellt die Klasse der Integraltransformationen dar. In der Vorverarbeitung der akustischen Merkmalsdaten auf Seite 86 wurde z.B. eine frei parametrisierbare Integraltransformation eingesetzt, deren spezielle Parameterwahl nach dem Optimierungskriterium der bestmöglichen Klassentrennung im nachfolgenden Klassifikationsschritt bestimmt wurde.

Idealerweise dient die Wahl geeigneter Vorverarbeitungsalgorithmen dazu, bestimmte Eigenschaften der Daten besonders hervorzuheben. Neben der genannten Eigenschaft der Parametrisierbarkeit eines vorgegebenen Integralkerns kann mit der Wahl des Kerns an sich die Auswahl einer bestimmten Transformationsklasse erfolgen. Je nach Problemstellung kann auf diese Weise zwischen der Hervorhebung lokaler (z.B. mittels Wavelettransformation), globaler (z.B. mittels Momententransformation) oder periodischer (z.B. mittels Fouriertransformation) Dateneigenschaften gewählt werden.

Einige Integraltransformationen besitzen die Eigenschaft, z.B. in Zeitreihen vorliegende zeitvariante Daten in zeitinvariante Daten in Form der Koeffizientenentwicklungen der Integraltransformation zu überführen. Diese Eigenschaft kann die nachfolgende Informationsverarbeitung stark vereinfachen, da damit lernfähige Modelle (z.B. rückkopplungsfreie neuronale Netze zum Aufbau eines Klassifikators) zur Verarbeitung an sich zeitvarianter Daten ausreichen.

Da sich in den Integraltransformationen je nach ausgewähltem Kern dimensionsbehaftete Koeffizienten ergeben können, fügt sich deren Weiterbehandlung nahtlos in die ähnlichkeitsmechanische Behandlung dimensionsbehafteter Daten ein. Dabei resultieren bei der Wissensentdeckung in Datenbanken die folgende Vorteile [196]:

- *Experimenteller Vorteil*
Die Definition von Ähnlichkeit in Form von Transformationsgruppen, welche die Eigenschaft der Skaleninvarianz besitzen, beruht auf der Dimensionsinformation meßbarer Größen und kann experimentell verifiziert werden.
- *Konzeptioneller Vorteil*
Die Gültigkeit der Ähnlichkeitstransformation und die Definition der daraus ableitbaren Ähnlichkeitsmaße ist konsistent mit der Modellierung physikalischer Vorgänge als dimensionshomogene Funktionen.
- *Interpretationsvorteil*
Aufgrund der Eigenschaften der Transformationsgruppen als Bausteine der endgültigen Lösung führt jedes a priori Wissen ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu einer nützlichen Einengung des Lösungsraumes.

Bei mehreren Problemstellungen in Kooperationsprojekten mit der Industrie konnte die Methode der Ähnlichkeitstransformation von mit speziellen Integraltransformationen vorverarbeiteten Daten bei der Wissensentdeckung in Datenbanken technischer und experimenteller Daten erfolgreich eingesetzt werden.

4.6.4 Kontrollen

Die in Abbildung 67 als Expansion bezeichnete Rücktransformation π^{-1} besitzt keine eindeutigen Lösungen, sondern ergibt als Lösung eine ganze Hyperebene sogenannter vollähnlicher Punkte. Diese Eigenschaft der Rücktransformation kann zur Validierung der abgeleiteten Regeln oder Modellfunktionen bzw. als quantitativer Test auf ihre Verallgemeinerungsfähigkeit verwendet werden [100, 101].

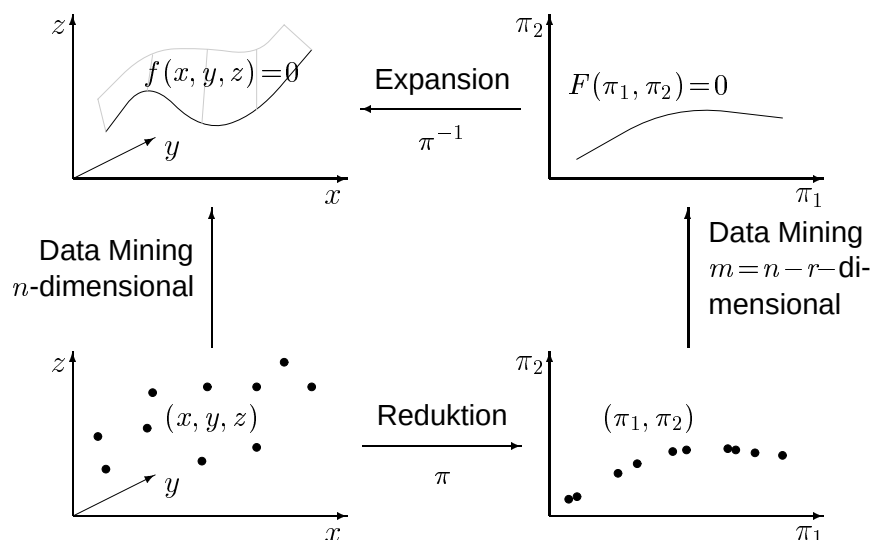


Abbildung 67: Konsistenzbedingung der dimensionshomogenen Wissensextraktion

Darüber hinaus ergibt sich über den Vergleich beider Rechenwege eine weitere Konsistenzbedingung für die Verträglichkeit der Ergebnisse. Damit sind die speziellen ähnlichkeitsmechanischen Überlegungen zur Validierung abgeschlossen.

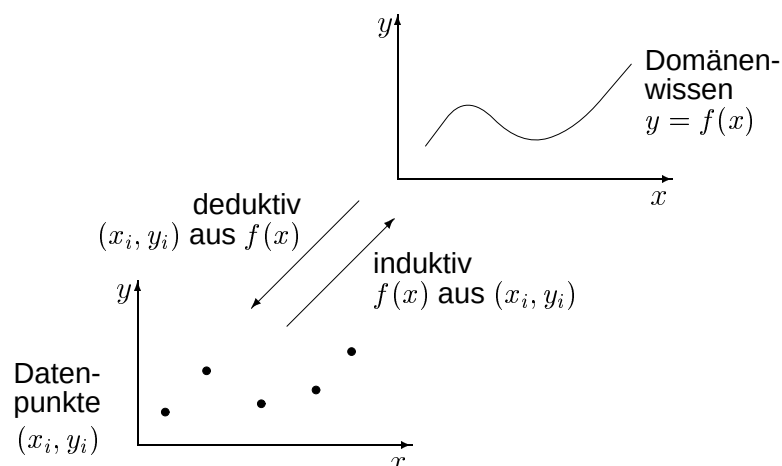


Abbildung 68: Induktion in der dimensionshomogenen Wissensextraktion

Neben diesen zwei Konsistenzbedingungen kann entsprechend Abbildung 68 das im Data Mining durch Induktion erstellte (Funktions-)Modell ganz generell durch Deduktion einer weiteren Ergebnisvalidierung unterzogen werden. Hierfür wird jedoch zusätzlich spezielles Domänenwissen zur Ergebnisabwägung und Interpretation benötigt.

4.7 Computerunterstützter Ingenieurentwurf

In frühen Phasen des Entwurfsprozesses müssen ständig Entscheidungen getroffen werden, die zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr oder nur unter hohem Aufwand an Zeit, Geld oder Material rückgängig gemacht werden können. Empirische Untersuchungen belegen, daß bis zu 80% der später anfallenden Produktions-, Betriebs- und Entsorgungskosten sowie der wesentlichen Leistungsmerkmale eines technischen Produkts in den Frühphasen des Entwurfs festgeschrieben werden [167, 217].

Aufgrund des Schlüsselcharakters des Entwurfs für den wirtschaftlichen Erfolg eines Produkts wird durch die Forschung auf dem Gebiet der Konstruktionsmethodik versucht, das theoretische Verständnis des Entwurfsprozesses zu verbessern und die Entscheidungsfindung des Ingenieurs durch die Entwicklung systematischer und automatisierbarer Vorgehensweisen zu unterstützen. Dabei würde eine simulationstechnische Unterstützung des Entwurfsprozesses die Möglichkeit bieten, die Folgen von Entscheidungen früher erkennen zu helfen, zu quantifizieren, einer Bewertung zugänglich zu machen und dadurch den Entwurfsprozeß insgesamt rationaler und transparenter zu gestalten.

Es ist bisher jedoch noch nicht gelungen, für die konzeptionelle Vorentwurfsphase eine umfassend praxistaugliche Vorgehensweise samt geeigneter Softwareumgebung zu entwickeln. Eine der zentralen Ursachen für das bisherige Scheitern der Erstellung einer für eine allgemeine Entwurfstheorie tauglichen konzeptionellen Modellvorstellung samt dazugehöriger „Entwurfssoftware“ liegt u.a. in der qualitativen und quantitativen Unterschiedlichkeit und formalen Unverträglichkeit der im Entwurf oft gleichzeitig auftretenden Modellbeschreibungen und -darstellungen. Diese hängen in enger Weise mit den verschiedenen, am Entwurf beteiligten Begriffsgebieten in Abbildung 69 zusammen.

Zur Charakterisierung der unterschiedlichen Begriffsgebiete wird in Abbildung 69 eine grobe Unterteilung in die drei Bereiche von *Glauben*, *Können* und *Wissen* vorgenommen, die dann zur qualitativen Unterscheidung der in den drei unterschiedlichen Gebieten benutzten Begründungsweisen für die dargestellten Entwurfs- und Bewertungsmethoden herangezogen wird.

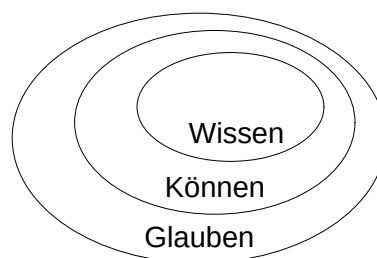


Abbildung 69: Einbettung von Glauben, Können und Wissen

Inspiziert wird die hierarchische Einbettung der drei Begründungsweisen in Abbildung 69 aus der philosophischen Weltanschauung des ARISTOTELES, der von einer Einbettung der *Logik* in die *Ästhetik* ausging, die selbst wiederum in die *Ethik* eingebettet ist [171]. Mit den drei Grundfragen der Philosophie: „*Was kann ich wissen? Was muß ich tun? Was darf ich hoffen?*“ findet sich auch bei IMMANUEL KANT (1724-1804) eine solche Dreigliederung [103, 115], die hier auf die rein ingenieurwissenschaftliche Argumentation hinsichtlich der Anforderungen im Entwurfsprozeß beschränkt und auf die Begriffsbildungen von Glauben, Können und Wissen zusammengefaßt wurde.

Der Grund für gerade diese Wortwahl sowie die klare Zuordnung, welches Entwurfs- oder Bewertungsverfahren nun welchem Begriffsgebiet zugeordnet wird, beruht auf der im folgenden dargestellten Klassifikation: In die Klasse „*Wissen*“ gehören diejenigen Begründungsweisen, deren Ergebnisse auf Theorien und Gesetzmäßigkeiten beruhen, die im naturwissenschaftlichen Sinne

- ☐ konsistent,
- ☐ beweisbar, oder deren Experimente
- ☐ meßbar und reproduzierbar

sind. Diese Eigenschaften sind in den gut verstandenen Gebieten der Physik und des Ingenieurwesens erfüllt, da die dort verwendete theoretisch untermauerte Begriffswelt und Hypothesenbildung einer ständigen Überprüfung durch das Experiment unterliegt.

In die Klasse des „*Könnens*“ gehören diejenigen Begründungsweisen, die sich im naturwissenschaftlichen Sinne zwar nicht mehr formal beweisen, aber als einfache, handhabbare Vorgehensweisen in realen Problemstellungen trotz des Fehlens eines umfassenden Theorieverständnisses durchaus verwenden und benutzen lassen.

Über die angenommene Existenz und die Eigenschaften dieser Begründungsweisen und Methoden kann darüber hinaus auch intersubjektiv kommuniziert werden, daher gehören diese Begriffsvorstellungen zu der Klasse der operationalisierbaren Methoden. Zur Erstellung und Tauglichkeitsprüfung von Entwürfen dienen die folgenden, besonders aus der anglo-amerikanischen Konstruktionsmethodik [129, 210, 217, 226] bekannten Richtlinien und Regeln in der Form „Design for X“, die als

- ☐ Design for Manufacturing,
- ☐ Design for Assembly / Disassembly und
- ☐ Design for Recycling

hier exemplarisch für verschiedene Entwurfsregeln aufgeführt sind. Alle Begründungsweisen sind letztlich in kulturelle und gesellschaftliche Wertvorstellungen eingebettet, deren Rechtfertigung nur philosophisch erfolgen kann und sich als Klasse des „*Glaubens*“ nur an der angenommenen Existenz und freiwilligen Maßgabe abstrakter philosophischer Ideen und Ideale (z.B. die Vorstellung von „Gut“ und „Böse“) festmachen läßt.

Es entspricht jedoch dem Primat der wissenschaftlichen Objektivität, gerade dort keine formale Strenge zu unterstellen, wo sie nicht auch nachgewiesen werden kann, zumal gerade in der Philosophie die Ursache und die Existenz derartiger Vorstellungen ständig hinterfragt wird. Auf dem pragmatischeren Gebiet der Ingenieurkonstruktionen wird die grundsätzliche Werthaltung für Entwurfslösungen durch Ideen in der Form folgender Ideale bereitgestellt die ausdrücken, inwieweit eine Entwurfsidee

- ☐ einfach,
- ☐ mächtig, angemessen
- ☐ elegant und schön

ist. Diese Ideale können zur Orientierung, Werthaltung und Wertbestimmung verwendet werden und werden in dieser Form zum Teil auch in den Natur- und Geisteswissenschaften zur Beurteilung mathematischer und physikalischer Theorien eingesetzt.

Wissenschaftlich offen und deshalb untersuchenswert sind durch die vorgenommene Unterteilung in Glauben, Können und Wissen natürlich zunächst auch die in den jeweiligen Begriffsgebieten benutzten Darstellungsweisen und Methoden selbst, als auch die an den Rändern der aneinander stoßender Gebiete zwangsläufig auftretenden Übergänge mit ihren Übergangsbedingungen. Dies ist im Entwurfsprozeß, der alle drei Gebiete überstreicht, von besonderem Bedeutung. Dazu ist der im rechteckigen Gebiet in Abbildung 70 angedeutete Entwurfsprozeß in Abbildung 71 nochmals herausvergrößert.

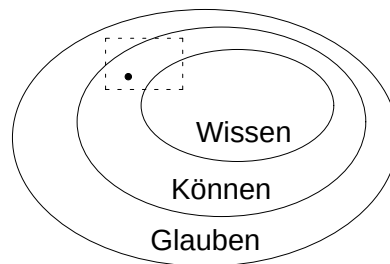


Abbildung 70: Der Entwurfsprozeß in den Begriffsgebieten

Wie Abbildung 71 schematisiert zeigt, überstreicht der Entwurfsprozeß von den ersten Phasen der Ideenfindung, der Gewinnung eines Lösungskonzepts, der Erarbeitung von Lösungsvarianten sowie der iterative Wiederholung dieser Entwurfssequenz von Synthese und Analyse alle drei Gebiete des Glaubens, Könnens und Wissens, bis schließlich ein akzeptabler Produktentwurf gefunden ist, der die gestellten Anforderungen erfüllt.

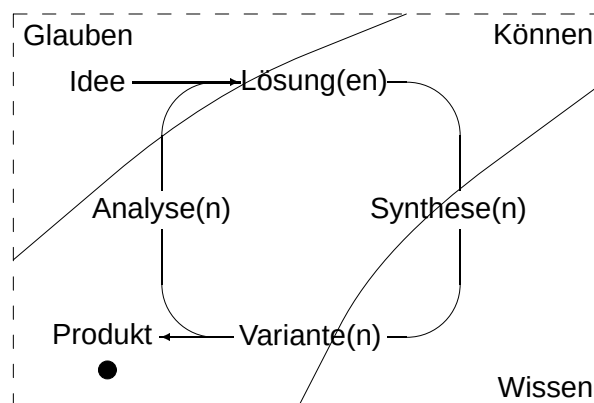


Abbildung 71: Aus Abbildung 70 herausvergrößerter Entwurfprozeß

Die Hauptursache für das bisherige Scheitern computergestützter Entwurfsverfahren liegt daher nicht auf einer noch detaillierteren Darstellung dieser auf den menschlichen Entwerfer zugeschnittenen und bekannten Entwurfssequenz wie sie z.B. in [167, 228] erläutert sind, sondern beruht auf der Tatsache, daß diese drei Gebiete, ganz entsprechend ihrer unterschiedlichen Charakterisierung in Glauben, Können und Wissen, von ihrer zugrundeliegenden Natur her sehr unterschiedlich sind und sich deshalb die in den jeweiligen Gebieten benutzten Darstellungs- und Vorgehensweisen auch stark unterscheiden. Für eine durchgehende Unterstützung des Entwurfsprozesses muß daher dieses Darstellungsproblem, als auch das Übergangsproblem an den Rändern zweier aneinander stoßenden Gebiete, sinnvoll und hinreichend umfassend gelöst werden.

In der Künstlichen Intelligenz (KI) ist diese Problematik der Entwicklung einer dafür geeigneten Problemrepräsentation unter dem Schlagwort der Erstellung eines sogenannten *Weltmodells* bekannt. Dabei sind die Durchgängigkeit des verwendeten Weltmodells und der darauf operierenden Algorithmen für die Leistungsfähigkeit des Gesamtsystems entscheidend. Auf diese Tatsache ist es letztendlich zurückzuführen, daß z.B. die bisherige Entwicklung von Schachcomputern und deren Softwareprogramme in der Spielleistung bereits Weltklassenniveau erreichen konnten, während die ursprünglich in der KI als „gleich schwer“ eingestufte Entwicklung von Sprach- und Übersetzungsprogrammen im direkten Vergleich zu den Fähigkeiten des Menschen noch zurückliegt [208].

Als Begründung für die herausragende Leistungsfähigkeit von Schachcomputern sei hier eine Einschätzung der heute erreichbaren Spielstärke genannt, mit der der im Jahr 1997 im Duell gegen „Deep Blue“ [108], eine für das Schachspiel optimierte Hard- und Softwarekombination, unterlegene Weltmeister Kasparov seine im Schachspiel durchlebten Gefühle mit den Worten charakterisierte: *„I felt an awful alien intelligence behind it“* [108].

Leider ist es bisher außer über den auf Seite 42 dargestellten engeren Bereich der Bewertungshypothese hinaus nicht gelungen, in der Erstellung einer allgemeinen Entwurfstheorie eine umfassende, beweisbare und allgemein anerkannte konzeptionelle Modellvorstellung samt Weltmodell des Entwurfsprozesses im Ingenieurwesen zu entwickeln, das konzeptionell über den in den Referenzwerken der Konstruktionsmethodik [31, 167, 210, 226], den Konstruktionskatalogen [181] und der VDI-Entwurfsrichtlinie [228] enthaltenen Stand des Wissens über den Ingenieurentwurf hinausgeht.

In der rechnerunterstützten Konstruktion sind in Forschung und Industrie im letzten Jahrzehnt unterschiedliche Entwicklungstendenzen verfolgt und vorangetrieben worden. Da seitens der Industrie zur Verkürzung der Entwicklungszeiten und Steigerung der Produktivität ein starkes wirtschaftliches Interesse an der Integration, Durchgängigkeit und Vernetzung bereits vorhandener Insellösungen (CAD-, FEM-, CNC-Programme, usw.) bestand, wurde seitens der Softwareanbieter der heute in der Praxis eingesetzten führenden Programmlösungen (Pro-Engineer, CATIA, I-DEAS) durch die sogenannte „Assoziativität“ zwischen CAD- und FEM-Programmmodulen die vollautomatische Nachführung konstruktiver Änderungen in der Geometrie in allen davon abgeleiteten Programmen bis hin zur CNC-Code-Generierung der Produktionsmaschinen erreicht.

In der Forschung wurde in Kenntnis der Problematik der Erstellung eines Weltmodells der Schwerpunkt auf zu den einzelnen Entwurfsphasen korrespondierenden Modellierungstechniken gelegt, die nach der klassischen Konstruktionsmethodik in die Anforderungs-, Funktions-, Prinzip- und Gestaltmodellierung unterschieden werden können und für die im Rahmen verschiedener Forschungsprojekte zum Thema „rechnerunterstützte Konstruktion“ bzw. „wissensbasierte Konstruktion“ verschiedenen Softwaresysteme entwickelt wurden (KALEIT [18], WISKON [61], DICAD [80]). Der Einsatz dieser Werkzeuge in der industriellen Praxis hat sich aus verschiedensten Gründen (größere Komplexität, mangelnde Durchschaubarkeit und Transparenz) jedoch noch nicht durchsetzen können.

Die genannten Entwicklungen sind bisher von ihrer softwaretechnischen und konstruktionsmethodischen Konzeption auf der Basis existierender Methoden oder klar begrenzter Anwendungsdomänen vorgenommen worden, wobei das Hauptaugenmerk auf der softwaretechnischen Integration lag und eine substantielle Weiterentwicklung und Innovation in der zugrundeliegenden klassischen Entwurfsauffassung dagegen nicht stattfand.

Die Hemmnisse bzw. Ursachen für das bisherige Scheitern der Erstellung einer für eine allgemeine Entwurfstheorie tauglichen konzeptionellen Modellvorstellung samt Weltmodell liegen in der Unterschiedlichkeit und Unverträglichkeit der im Ingenieurentwurf gleichzeitig anzutreffenden Modellbeschreibungen begründet. Diese sind in

- *topologisch* und *parametrisch* unterschiedliche Lösungsklassen einzuordnen, für die eine Einhüllende oder irgendein anderes alternatives Enthaltenseinkriterium im Allgemeinen unbekannt ist, sowie in
- *verbalen, symbolischen, analytischen* und *numerischen* Teildarstellungen der Entwurfsinformation begründet, die in verschiedenen, teilweise unverträglichen Modellen unterschiedlichen Detaillierungsgrades vorliegen.

In diesem scheinbar unauflösbaren Dilemma der verschiedenartigsten und widersprüchlich klingenden Anforderungen an ein für den Ingenieurentwurf taugliches Weltmodell gibt es in Form einer künstlichen „*Entwurfssprache*“ einen bisher eher unbeachteten „natürlichen“ Kandidaten für einen integrativen Lösungsansatz. Dies wird dadurch motiviert, daß es Menschen mit natürlichen Sprachen möglich ist, Dritten nahezu alle Empfindungen zu kommunizieren und dabei gleichzeitig Elemente und Argumentationsketten aus allen der genannten drei Begriffsgebiete des Glaubens, Könnens und Wissens gleichzeitig neben- und miteinander zu verwenden.

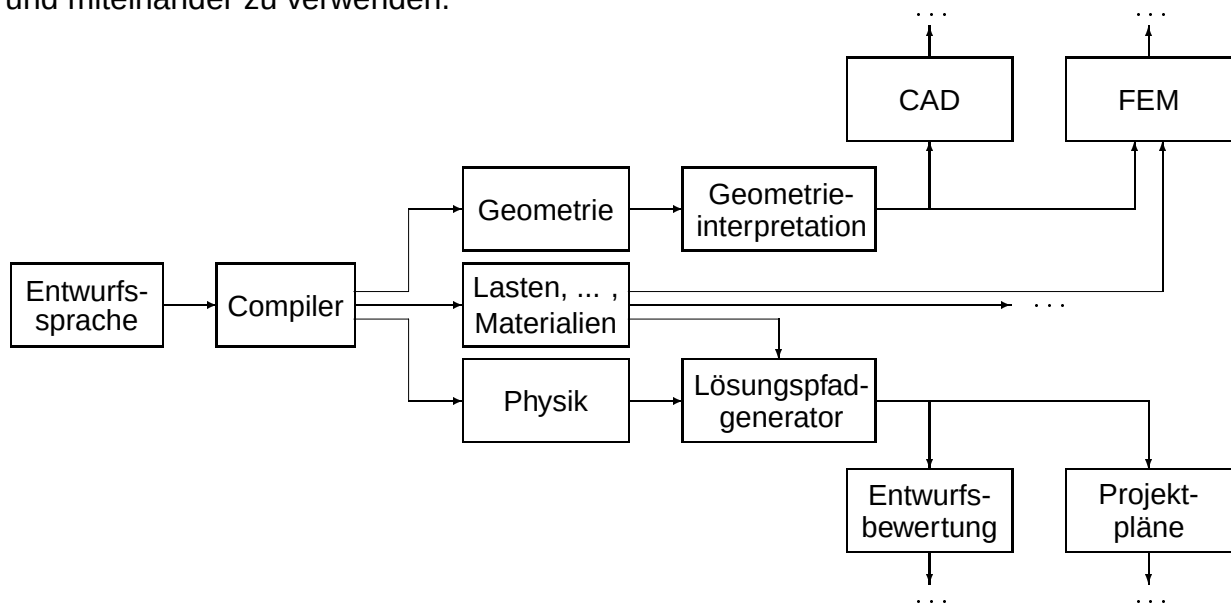


Abbildung 72: Informationsverarbeitung in einer Entwurfssprache

Abbildung 72 zeigt die Kette der Informationsverarbeitung in einer solchen künstlichen Entwurfssprache. Es ist ein wesentliches Leistungsmerkmal dieses Ansatzes, daß in der Entwurfssprache zum einen Geometrie und Physik in einem gemeinsamen Modell abgelegt sind. Dies führt zur Vorstellung „ganzheitlicher (Sprach-)Elemente“, die Kenntnis ihrer eigenen Geometrie und Physik sowie weiterer relevanter Wissensbausteine besitzen. Aufgrund der Gerichtetheit des Informationsflusses gibt es nur eine zentrale Stelle an der alle Daten gehalten werden, so daß bei Änderungen der Daten sofort wieder zueinander konsistente Modelle generiert werden können. In dieser Erzeugung können leistungsfähige Techniken aus dem Compilerbau eingesetzt werden, wie dies in mächtigen Beschreibungssprachen z.B. im digitalen Schaltungsentwurf bereits der Fall ist.

Die im Schaltungsentwurf und der Hardwaresimulation eingesetzten Beschreibungssprachen, die in ihrer Konzeption stark auf die Effizienz der daraus generierbaren numerischen Simulation ausgelegt sind, stellen in dieser Hinsicht repräsentative Vertreter der derzeit zur Systemsimulation verfügbaren Werkzeuge dar. Deren bekannteste Vertreter (SPICE [47], VHDL [11] sowie MODELICA [151], Matlab/SIMULINK [145] etc.) sind jedoch eher in die Beschreibungs- als in die der Entwurfssprachen einzuordnen, da sie noch keine umfassend vereinte Behandlung von Geometrie, Physik und weiteren Entwurfswissensbausteinen in einer heterogenen Modellwelt bieten, sondern zumeist auf die durchgängige Simulation aller Objekte in einer einzigen Modellebene abzielen.

Abbildung 73 verdeutlicht die unterschiedliche Behandlung der in einer derartigen Beschreibungssprache gegenüber der in Abbildung 72 dargestellten Entwurfssprache enthaltenen Modellierungsebenen. Während zur Systemsimulation in einer Beschreibungssprache alle Informationen auf die unterste Ebene der numerischen Simulation projiziert werden, sind in der Entwurfssprache alle Modellebenen gleichberechtigt nebeneinander benutzbar, um die im Entwurf z.T. anders gelagerten Fragestellungen sachgerecht und mit dem jeweils ädequaten Modell und Detaillierungsgrad analysieren zu können.

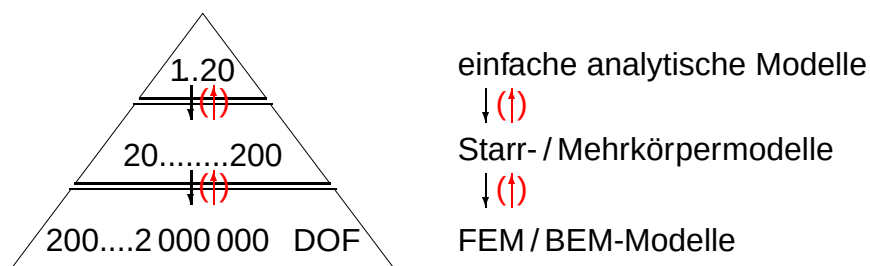


Abbildung 73: Freiheitsgrade (DOF) teilweise nicht umkehrbarer Modellwelten

Abbildung 73 zeigt noch eine weitere Besonderheit der unterschiedlichen Modellwelten. Diese lassen sich zwar von oben nach unten nahezu automatisch auseinander erzeugen, jedoch lassen sich die Ergebnisse aufgrund der unterschiedlichen Freiheitsgrade (*degrees of freedom*, DOF) und der damit verbundenen Inkompatibilität der Problemkoordinaten nicht ohne weiteres von der numerischen Ergebnisebene auf die höheren Bedeutungsebenen der analytischen Modellparameter zurückrechnen.

Ein weiteres wesentliches Alleinstellungs- und Leistungsmerkmal einer Entwurfssprache in Abbildung 72 kommt desweiteren aus der Möglichkeit, Sprachelemente deterministisch oder auch stochastisch zu modifizieren und dadurch analog zu biologischen Vorbildern eine evolutionäre Modifikation und Optimierung bestehender Entwürfe durchführen zu können. Mit Hilfe derartiger Verfahren könnte eine systematische „*computergestützte Exploration von Entwurfsräumen*“ im Ingenieurentwurf effizient erfolgen, wie dies für die evolutionäre Variation der Geometrie in Abbildung 88ff detailliert dargestellt ist.

Die Verwendung eines evolutionären Ansatzes hat neben der stochastischen Mutationskomponente, die in der Künstlichen Intelligenz gerne als „künstlicher Kreativitätsersatz“ eingesetzt wird den erwünschten Nebeneffekt, in Kombination mit der maschinellen Verarbeitungskette zur Modellerzeugung aus Abbildung 72 die in Abbildung 73 gezeigte und i.A. unerreichbare „Modellinversion“ zwar nicht qualitativ, so aber doch durch mehrfache (Vorwärts-)Variation der Ausgangsmodelle durch eine quantitative Abschätzung der erzielbaren Parametereinflüsse hinreichend handhab- und abschätzbar zu machen.

Zur Umsetzung dieses Vorhabens sind in der ursprünglichen Abbildung 72 für die im aktuellen Entwurf jeweils erzielte Geometrie und physikalische Funktion des Entwurfs die in Abbildung 74 dargestellten zwei Rückführschleifen hinzuzufügen, die dann eine der jeweiligen Entwurfsgüte entsprechende Bewertungsaussage für die erfolgten konstruktiven Änderungen in der Geometrie und der Physik des aktuellen Entwurfs als Maß für die erzielte Verbesserung oder Verschlechterung erbringen müssen.

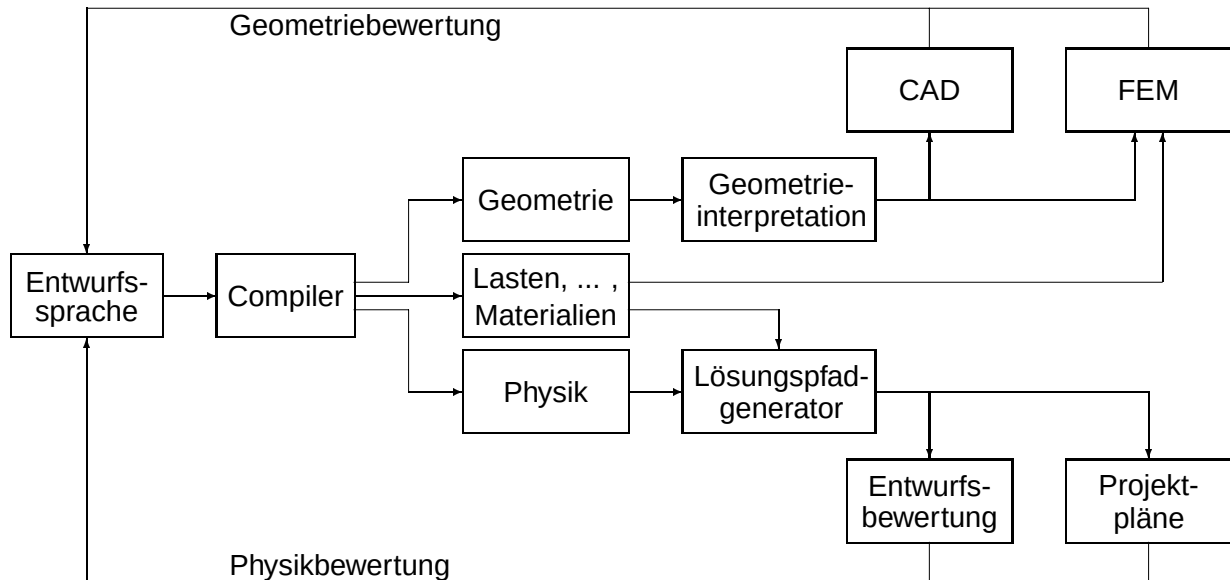


Abbildung 74: Bewertungsrückführung in einer Entwurfssprache

Da in Abbildung 74 der jeweilige Entwurf wegen der denkbaren evolutionären Entwurfsmodifikationen auch rein „zufällige“ Komponenten enthalten kann, muß die eingebaute Bewertungsmethodik auch alle derartig evolutionär erzeugten geometrischen und physikalischen Beschreibungen automatisch verarbeiten können, um einen reibungslosen Informationsrückfluß zu ermöglichen. Da die Bewertungshypothese auf Seite 42 die Erzeugung einer Bewertung (Fitness) aus einer vollständigen dimensionshomogenen Beschreibung garantiert, zeigt sich an dieser Stelle eine herausragende Anwendbarkeit der Entwurfsbewertung mit dimensionslosen Kennzahlen für die erfolgreiche Realisierung der computergestützten Exploration von Entwurfsräumen. Dies wird im folgenden für die beiden Rückführungsschleifen der Geometrie und der Physik genauer erläutert.

In der unteren Schleife in Abbildung 74 (Compiler → Physik → Lösungspfadgenerator → Entwurfsbewertung → Entwurfssprache → Compiler) entsteht durch Übersetzung der in der Entwurfssprache vorliegenden Entwurfsbeschreibung ein Gleichungssystem, das die physikalisch-funktionalen Eigenschaften des Entwurfs beschreibt. Dieses Gleichungssystem wird in einem Lösungspfadgenerator aufbereitet und symbolisch oder numerisch gelöst. Aus der Lösung der Entwurfsparameter werden dann zu Bewertungszwecken dimensionslose Kennzahlen und deren Ähnlichkeitsfunktionen bestimmt, die im Sinne der Bewertungshypothese quantitativ als deren (Bewertungs-)Maßzahlen und qualitativ als die Bewertungskriterien und deren Aggregationsfunktionen verwendet werden können. Diese Vorgehensweise stellt Abschnitt 4.7.3 *Lösungspfadgenerator* detailliert dar. Durch evolutionäre Entwurfsvariation können so die Bewertungsmaßzahlen maximiert bzw. minimiert werden und damit eine (Entwurfs-)Optimierung erfolgen.

In der oberen Schleife in Abbildung 74 (Compiler $\rightarrow$ Geometrie $\rightarrow$ Geometrieinterpretation $\rightarrow$ CAD $\rightarrow$ Geometriebewertung $\rightarrow$ Entwurfssprache $\rightarrow$ Compiler) entsteht durch die Übersetzung der in der Entwurfssprache vorliegenden Entwurfsbeschreibung eine Geometriedarstellung, die (eventuell über einen interpretativen Zwischenschritt, siehe dazu später Abbildung 83) in einem CAD-Programm zur geometrischen Definition des Entwurfs verwendet werden kann. Aus diesem Geometriemodell des Entwurfs werden dann zu Bewertungszwecken dimensionslose Kennzahlen bestimmt, die im Sinne der Mustererkennung qualitativ als geometrische (Bild-)Merkmale, sowie quantitativ als deren Maßzahlen zur Geometrieklassifikation verwendet werden können. Diese Vorgehensweise stellen die beiden Abschnitte 4.7.1 *Entwurfsgrammatiken* und 4.7.2 *Inverses Problem* detailliert dar. Durch evolutionäre Entwurfsvariationen könnte so eine Geometrieklassifikation erreicht werden und damit eine (Entwurfs-)Optimierung erfolgen. Die hierfür notwendigen Grundlagen werden im nächsten Abschnitt dargestellt.

4.7.1 Entwurfsgrammatiken

Sprachen gehorchen in ihrem Aufbau Regeln, die als Grammatik bezeichnet werden. Nach CHOMSKY [44] kann die Komplexität und Aussagenmächtigkeit einer Sprache an der in der zugehörigen Grammatik definierten Kontextabhängigkeit der Sprachelemente festgemacht werden. Unter Kontextabhängigkeit versteht man dabei die maximale Beeinflussungsbereichweite vorangegangener und nachfolgender Zeichen in der Interpretation des aktuell zur Übersetzung anstehenden Zeichens. Die Kontextabhängigkeit hat zur Erstellung einer Hierarchieordnung von Sprachen geführt, die insbesondere in der Erstellung von Programmiersprachen [9] von großer technischer Bedeutung ist. Sie hängt auf das Engste mit der Definition, der Übersetzung, der Erstellung von Sprachübersetzern (Compilern), sowie der Größe und Effizienz des daraus generierten ausführbaren Programmcodes der zugrundeliegenden (Sprach-)Grammatik zusammen.

Der Einsatz von formalen Sprachen zur Beschreibung von Objekten wurde nicht nur in der Informatik, sondern auch in der Biologie zur Modellierung von Pflanzen und Wachstumsvorgängen vorangetrieben. Die hierfür verwendeten formalen Sprachen heißen L-Systeme und erlauben die Erzeugung einer Vielfalt von Objekten hoher Komplexität in einer kompakten Sprache. Nach LINDENMAYER [175] besteht ein L-System aus der Definition einer Grammatik $G = \langle V, \omega, P \rangle$, die sich aus dem Alphabet V , dem Axiom ω und Produktionsregeln P zusammensetzt, wie dies Grammatikdefinition (135) zeigt.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Alphabet} & V = \{a, b\} \\ \text{Wortmenge} & V^* = \{a, b, aa, ab, \dots\} \\ \text{Axiom} & \omega = b \\ \text{Produktionsregeln} & P = \{p_1, p_2\} \\ & \quad p_1 : a \rightarrow ab \\ & \quad p_2 : b \rightarrow a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{L-System Grammatik} \\ G = \langle V, \omega, P \rangle \end{array} \quad (135)$$

Zweck der Grammatikdefinition (135) ist es festzulegen, wie ausgehend vom Axiom ω durch Einsatz der Produktionsregeln P Worte der Wortmenge V^* erzeugt werden, bis die vorgegebene Iterationstiefe $i = n$ erreicht ist oder die Zeichenkette nur noch aus terminalen, d.h. nicht weiter expandierbaren Symbolen besteht. Durch die in jedem Iterationsschritt $i = 1, \dots, n$ wiederholte Ersetzung von Zeichen in Produktionsregeln spricht man bei L-Systemen auch von der Klasse der Rewriting Systeme [163].

Der Grund für die Namensgebung Rewriting Systeme wird noch klarer, wenn man sich die Expansion des Axioms (d.h. des Startsymbols) im Zuge einiger Iterationen $i = 1, 2, \dots$ vergegenwärtigt, wie sie hier in der Expansionssequenz (136) dargestellt ist.

$$\begin{array}{ccccccccc} b & \rightarrow & a & \rightarrow & ab & \rightarrow & aba & \rightarrow & abaab & \rightarrow & \dots\dots\dots \\ (i=0) & & (i=1) & & (i=2) & & (i=3) & & (i=4) & & (i=\dots) \end{array} \quad (136)$$

L-Systeme können auf diese Weise immer noch längere Zeichenketten erzeugen, die alle nach der Definition in (135) syntaktisch korrekt sind. Um aus der Zeichenkette in (136) eine Geometriebeschreibung z.B. einer Pflanze zu gewinnen, ist aber noch eine geometrische Interpretation, d.h. eine Umsetzung der Zeichenkette in Geometrie erforderlich. Dies wird dadurch erreicht, daß z.B. durch eine Turtle-Graphik [2] eine geometrische Interpretation des Alphabets definiert wird. Für die dargestellten L-Systeme hat sich das Alphabet in Tabelle 15 mit $V = \{+, -, \$, /, ^, \&, [,], \{, \}, !, ', |, F, f\}$ etabliert.

Symbol	Geometrische Interpretation des Alphabets V
+, -	rotiere $\pm\beta^\circ \perp U$, mit globalem Winkelparameter β
\$/	rotiere $\pm\beta^\circ \perp H$
^,&	rotiere $\pm\beta^\circ \perp L$ (Definition von U, H und L in Abbildung 75)
[,]	lege / hole letzten Zustand auf / vom Stapelspeicher (Stack)
{, }	geklammerter Inhalt ist Berandung einer auszufüllenden Fläche
!, '	ändere Dicke und Farbe der zu malenden Linien
	kehre Orientierung um
F	zeichne Linie von P nach $P' = P + d \cdot H$, mit $d \in \mathbb{R}$
f	wie F , jedoch ohne eine Linie zu zeichnen

Tabelle 15: Geometrieinterpretation in einer Turtle Graphik [2]

Die zu Tabelle 15 gehörende Koordinatensystemdefinition zeigt Abbildung 75. Sie zeigt die Definition des Turtle-Zustandsvektors (P, H, L, U) mit orthonormierten Koordinatenachsen $H \times L = U$ und dem lokalen Koordinatenursprung an der aktuellen Position P .

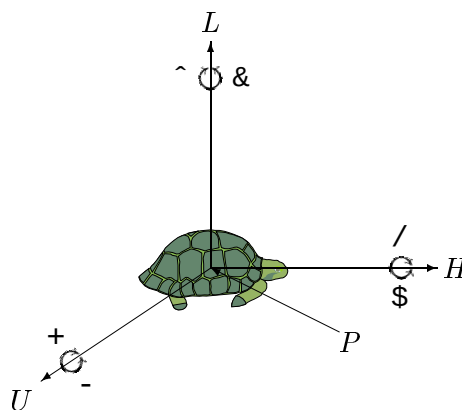


Abbildung 75: Definition des Turtle Zustandsvektors [2]

Mit dem Alphabet in Tabelle 15 besteht nun die Möglichkeit, analog zu der Definition eines L-Systems in (135) eigene Produktionsregeln zu definieren, deren expandierte Zeichenkette nach Erreichen einer vorgegebenen Iterationstiefe durch die Turtle-Graphik in Abbildung 75 als Geometriebeschreibung interpretiert wird.

In Definition (137) werden vier Produktionsregeln $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dazu verwendet, das Axiom ω zu expandieren. Produktionsregeln können auch mit eigenen Namen versehen werden und als weitere Zeichen in das Alphabet hinzukommen. Sie werden jedoch in der anschließenden Interpretation durch die Turtle ignoriert: A für Abzweigung, L für Blatt, S für Stiel. Auf diese Weise ist eine einfache Gliederung der Regeln möglich.

$$\begin{aligned}
 \omega &: A; \\
 p_1 &: A \rightarrow [\&FL!A]/////[\&FL!A]////////[FL!A]; \\
 p_2 &: F \rightarrow S/////F; \\
 p_3 &: S \rightarrow FL; \\
 p_4 &: L \rightarrow [''''^{\wedge}\{-f+f+f-|-f+f+f\}];
 \end{aligned}
 \tag{137}$$

Für die Parameterwahl einer Iterationstiefe von $i = 8$ und einem globalen Verzweigungswinkel von $\beta = 22.5^\circ$ ergibt sich die Geometrie eines Strauches mit Blättern in Abbildung 76. Dabei stehen für die Erzeugung und Visualisierung der 3-D Geometrie Simulationsumgebungen [200] zur Verfügung, mit denen die Abarbeitung der Regeln interaktiv verfolgt und gesteuert werden kann.



Abbildung 76: L-System „Strauch“ nach LINDENMAYER [175]

Eine Besonderheit der L-Systeme ist, daß nicht nur zum Endzeitpunkt $i = n$, sondern auch alle zu beliebigen Zeitpunkten $i = 0, 1, 2, \dots, n$ vorliegenden Zeichenketten zulässige biologische Objekte darstellen. L-Systeme sind daher bereits erfolgreich zur Wachstumssimulation biologischer Objekte eingesetzt worden, siehe Abbildung 77.

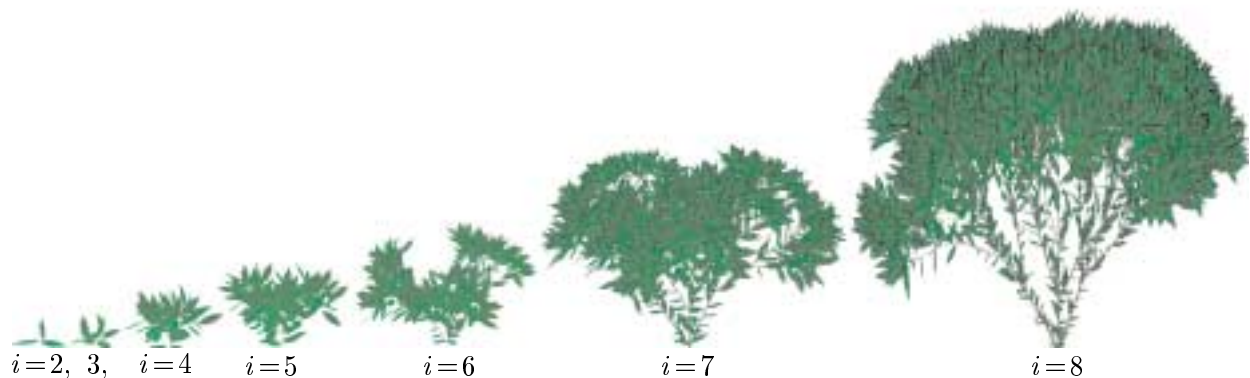


Abbildung 77: Wachstumssimulation „Strauch“ [175, 200]

Als Nebenprodukt der Wachstumssimulation ergibt sich die zusätzliche Bedeutung der mit $i = 1, \dots, n$ fortschreitenden Regelexpansion als schrittweise ablaufende natürliche Zusammenbauanleitung des Entwurfsobjekts aus der Regelbeschreibung. Da die automatische Ableitung von Zusammenbauplänen ein noch offenes Problem darstellt, werden derartige Ansätze zukünftig erhöhte Aufmerksamkeit erhalten.

Abbildung 78 zeigt einige weitere Grammatiken von L-Systemen, die zusammen mit der durch die globalen Parameter i (Iterationstiefe L-System) und β (Verzweigungswinkel) erzielbaren Gestaltsvariationen durch die Turtle dargestellt sind. Trotz der sichtbar erzielbaren Formenvielfalt bleibt die Kompaktheit der dargestellten Grammatiken erhalten und ist ein wesentliches Merkmal dieser formaler Sprachen.

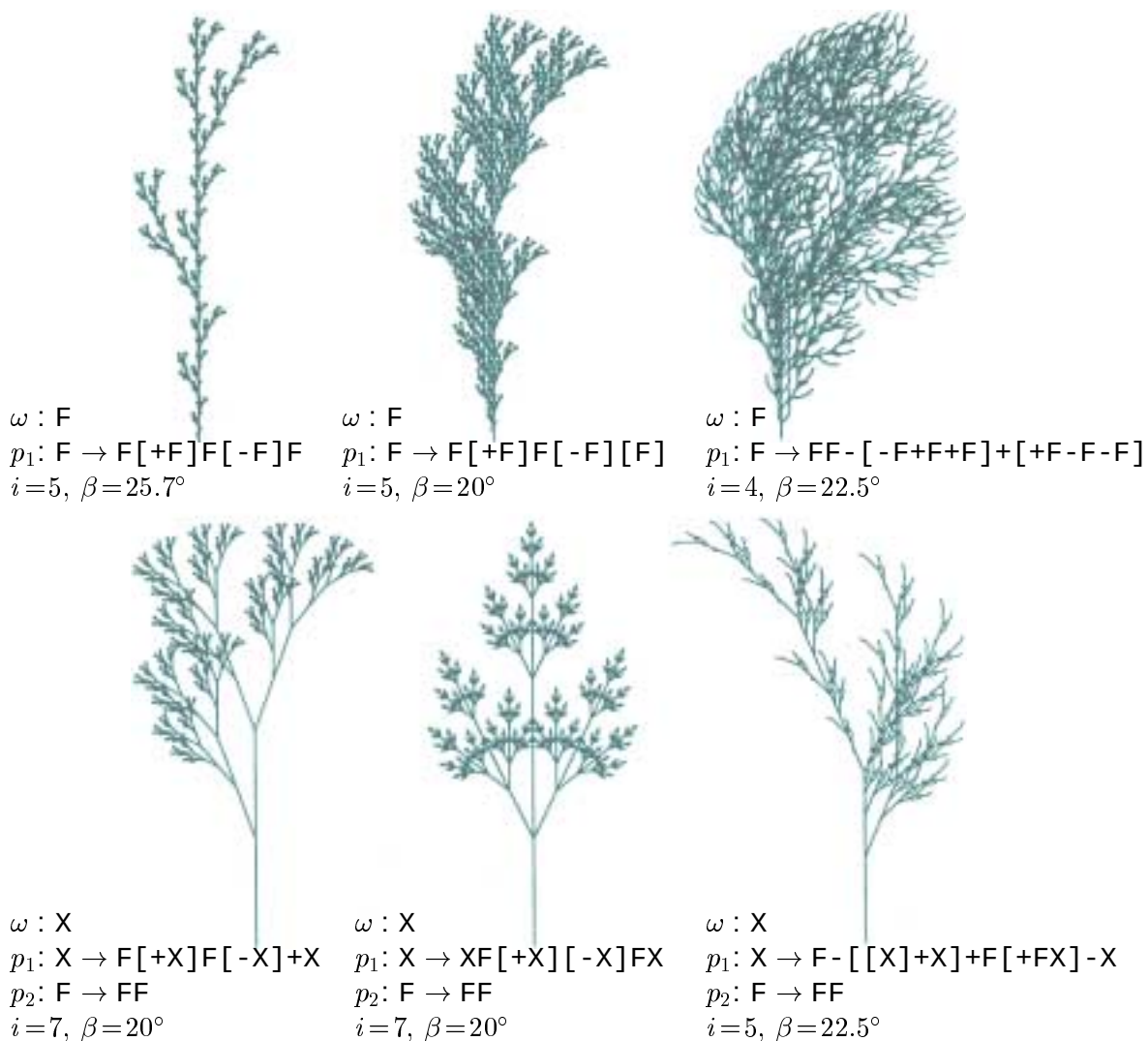


Abbildung 78: Verschiedene L-Systeme nach LINDENMAYER [136, 175]

Neben der Modellierung von Pflanzen und auch anderen Objekten der belebten und der unbelebten Natur [114] sind L-Systeme auch zur Bewegungssimulation der modellierten Objekte durch spezielle zeitabhängige L-Systeme [163] verwendbar. Desweiteren können L-Systeme durch strukturierte Dokumentationssprachen wie z.B. XML (Extended Markup Language) [237] einfach um Zusatzinformationen über die physikalischen Eigenschaften der Stengel, Zweige und Blätter etc. erweitert werden [164].

Für die Übertragbarkeit von L-Systemen als (Entwurfs-)Sprache auf die Modellierung technischer Objekte (Flugzeuge, Satelliten, etc.) hat eine detaillierte Analyse [4] gezeigt, daß L-Systeme nur für solche Objektstrukturen eine effiziente Repräsentationsform sind, die keine topologischen Ringe aufweisen und daher nur „baumartige“ Verzweigungen aufweisen. Für technische Objekte jedoch sind topologische Ringbildungen durchaus typische Konstruktionsmerkmale, insbesondere bei den in der Technik sehr häufig auftretenden Fachwerkkonstruktionen, zu denen z.B. auch die drei Hochspannungsmasten in Abbildung 79 gehören.



Abbildung 79: Typische Hochspannungsmasten [4]

Unter Beibehaltung der vorteilhaften Eigenschaften von L-Systemen (Produktionsregeln, Einfachheit, Effizienz, hohe Rekursivität, etc.) kann die Berücksichtigung topologischer Ringstrukturen durch den Übergang von einer zeichenkettenbasierten Grammatik (deren lineare Zeichenkettenstruktur sich über die Verwendung eines Stapelspeichers (Stack) sehr effizient in verzweigte Baumstrukturen umsetzen läßt) auf eine graphenbasierte Grammatik erfolgen [4], da Graphen auf einfachste Weise dazu geeignet sind, nahezu beliebige Beziehungen zwischen den als Knoten dargestellten Objekten abzubilden.

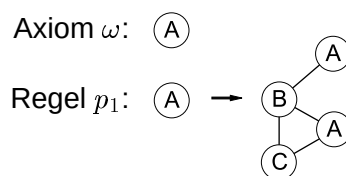


Abbildung 80: Axiom und Regeldefinition in graphenbasierter Grammatik (vereinfacht) [4]

Abbildung 80 illustriert vereinfacht den einem L-System entsprechenden Aufbau einer graphenbasierten Grammatik aus einem Axiom ω und zunächst einer Regel p_1 . Durch fortgesetztes Einsetzen der Regel wächst in jeder Iterationsstufe der Graph immer weiter an. Die Regelexpansion wird deshalb angehalten, wenn entweder nur noch terminale Knoten vorhanden sind, die nicht weiter expandiert werden oder die vorgegebene Iterationstiefe von $i = n$ erreicht wurde.

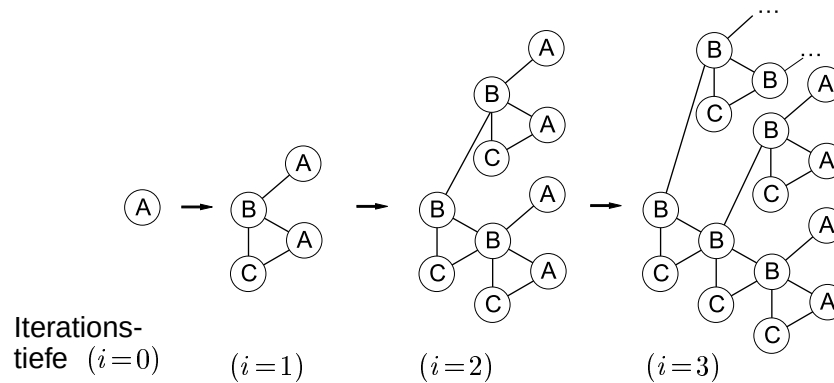


Abbildung 81: Regelexpansion in graphenbasierter Grammatik (vereinfacht) [4]

Abbildung 81 zeigt die Regelexpansion in einer graphenbasierten Grammatik ganz entsprechend der Stringexpansion in (136) durch die Regelexpansion in einem L-System. Es ist daher für die sinnigere Definition einer leistungsfähigen Grammatik einer zukünftigen Ingenieurentwurfssprache eine wichtige und zentrale Aufgabe, die Regeln für die Erzeugung von Entwurfsobjekten zu (er-)finden und festzulegen.

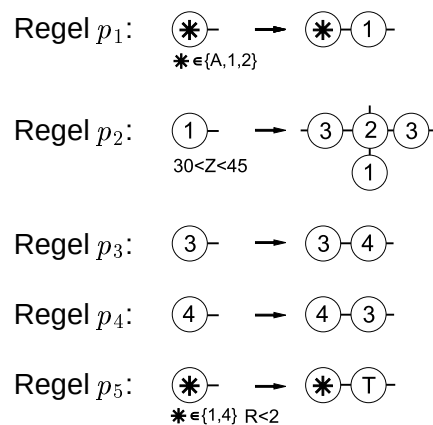


Abbildung 82: Produktionsregeln für Hochspannungsmasten [4]

Abbildung 82 stellt fünf Produktionsregeln einer Graphengrammatik für Hochspannungsmasten dar. Die Grammatik enthält als Besonderheit mit „*“ gekennzeichnete Platzhalterknoten (wildcards), wodurch die Regelexpansion an zusätzliche Bedingungen gebunden werden kann [4]. Dadurch kann die Produktionsregel nicht nur an topologisch, sondern auch an die Erfüllung von parametrisch formulierten Bedingungen (z.B. in Regel p_5 : $* \in \{1, 4\}$ und $R < 2$) geknüpft sein. Hierfür sind $R, Z \in \mathbb{R}$ in der Grammatik definierte Parameter, die vor, in oder nach der Regelexpansion ausgewertet werden können.

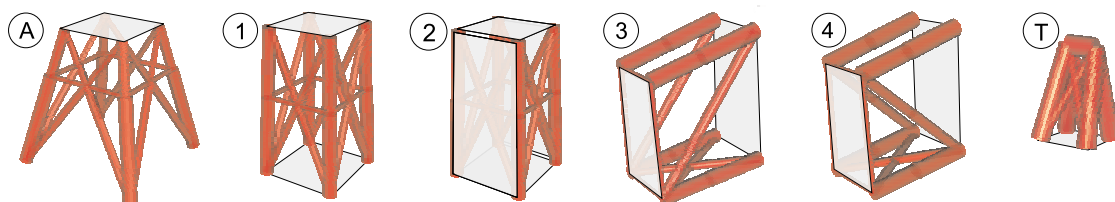


Abbildung 83: Geometrische Interpretation der Graphenknoten [4]

Iterationstiefe ($i = 0$)

Ⓐ



Iterationstiefe ($i = 1$)

Ⓐ-1



Iterationstiefe ($i = 4$)

Ⓐ-1-1-1-1



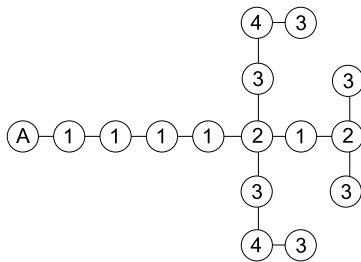
Iterationstiefe ($i = 5$)

Ⓐ-1-1-1-1-2-3-3

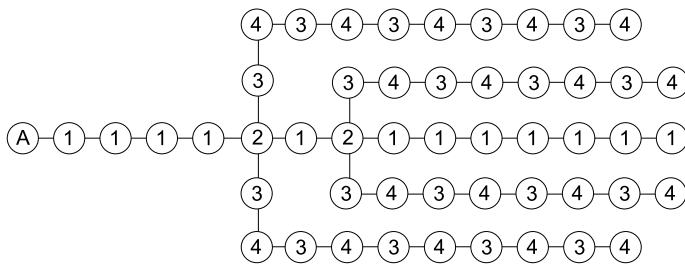


Abbildung 84: Regelbasierte Erstellung eines Hochspannungsmastens [4] (1 von 2)

Iterationstiefe ($i = 8$)



Iterationstiefe ($i = 18$)



Iterationstiefe ($i = 19$)

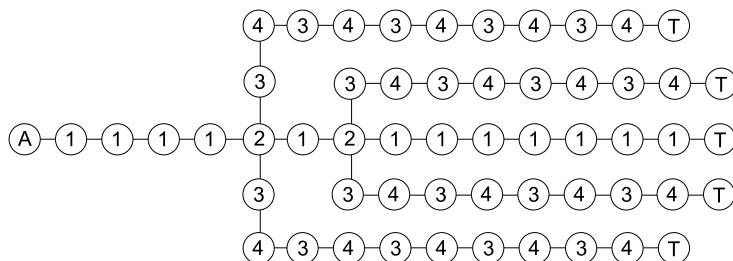


Abbildung 85: Regelbasierte Erstellung eines Hochspannungsmastens [4] (2 von 2)

Nachdem die Regelexpansion der Grammatik in Abbildung 82 nach Erreichen der vorgegebenen Iterationstiefe $i = n$ angehalten wurde, muß der dann existierende Graph (ganz entsprechend der Semantik einer Turtle-Graphik in Tabelle 15) noch geometrisch interpretiert werden. Die hier für den Fall einer Grammatik für Hochspannungsmasten festgelegte geometrische Interpretation der einzelnen Graphenknoten zeigt Abbildung 83. Die grau schattierten Flächen der geometrischen Interpretationen der Graphenknoten stellen dabei Andockflächen dar, die in der Grammatik besondere Funktionseigenschaften [4] zur Verschmelzung mit Nachbarknoten besitzen.

Die Knotenelemente in Abbildung 83 sind unter Zuhilfenahme moderner objektorientierter Programmiertechniken aus einer einzigen Knotenklasse „Würfel“ abgeleitet, die durch geeignet gewählte Attribute alle (und noch mehr als die) dargestellten Knotenelemente als unterschiedliche Instanzen ein- und derselben Objektklasse erzeugen können. Dies ist jedoch keine Einschränkung, sondern zeigt durch die leicht mögliche Hinzunahme von weiteren Klassen und Attributen die einfache, baukastenartige Erweiterungsfähigkeit der Grammatik mittels objektorientierter Softwaretechniken. Durch die so vorhandene geometrische Interpretation kann nun die schrittweise Erzeugung des Hochspannungsmastens in den Abbildungen 84 und 85 dargestellt werden.

Abbildungen 84 und 85 zeigen die Erzeugung eines Hochspannungsmastens zu den Iterationsschritten $i = 0, 1, 4, 5, 8, 18, 19$ und stellt dabei den durch die fortschreitende Regelexpansion wachsenden Graphen seiner mitgeführten geometrischen Interpretation gegenüber. Dabei können, je nach Definition der auszuführenden Regel, die genannten zusätzlichen Bedingungen topologischer oder parametrischer Art auf Erfüllung getestet werden. Desweiteren kann durch die manuelle Modifikation der Regeln [4] eine Vielzahl verschiedener Hochspannungsmasten erzeugt werden. Mehrere, durch manuelle Regelerstellung gewonnene Hochspannungsmasten zeigt Abbildung 86.



Abbildung 86: Nach Vorbild manuell generierte Hochspannungsmasten [4]

Die Abbildungen 82, 84 und 85 illustrieren die trotz Formenvielfalt vorhandene Kompaktheit der Entwurfsgrammatiken und damit deren Potential als zukünftige Ingenieurentwurfssprache zur Modellierung ganzer Produktfamilien und Baukastensysteme.

Über die Objektorientierung ist durch die einfache Hinzunahme weiterer Klassenattribute die zentrale Absicht für die Verwendung der Entwurfsgrammatiken, eine *einheitliche Behandlung von Geometrie und Physik* in einem konsistenten Datenmodell durchgängig zu realisieren, konsequent umsetzbar. Dabei würden sich auch im physikalisch-funktionalen Teil der Entwurfsgrammatik weitere Anwendungsmöglichkeiten der Ähnlichkeitstheorie ergeben, da diese bereits in der Ableitung von Modell- und Skalierungsregeln im klassischen Baureihenentwurf [168] erfolgreich eingesetzt wird.

Entwurfsgrammatiken lassen sich auch als Front-End bestehender CAD- bzw. FEM-Programme verwenden. Dies hat den Vorteil, daß die in diesen Programmen noch häufig manuell vorzunehmende Modellerstellung entfallen kann und durch die Festlegung von Regeln nach Abbildung 82 und deren geometrischen Interpretationen nach Abbildung 83 ersetzt wird. Der Aspekt der Wiederverwendung von Entwurfswissen, zusammen mit der in einer solchen Entwurfsgrammatik automatisch mitenthaltenen Dokumentation des gesamten Entwurfswissens unterstreicht die Bedeutung einer solchen Entwurfssprache für das Wissensmanagement und die erwünschte Verkürzung von Entwicklungszeiten.

Entsprechend der in Abbildung 72 bereits umfassend diskutierten Prozeßkette kann dabei die Geometrie über eine Schnittstelle in ein kommerzielles Softwarepaket (hier: MSC Nastran [157]) zur Berechnung der Kräfte und Verformungen nach der Methode der Enden Elemente (FEM) automatisch konvertiert werden. Abbildung 87 zeigt dazu überhöht dargestellte Verformungen eines der Hochspannungsmasten in Abbildung 86 aufgrund einer angenommenen Punktlast in der Mastspitze als Ergebnis einer FEM-Berechnung.

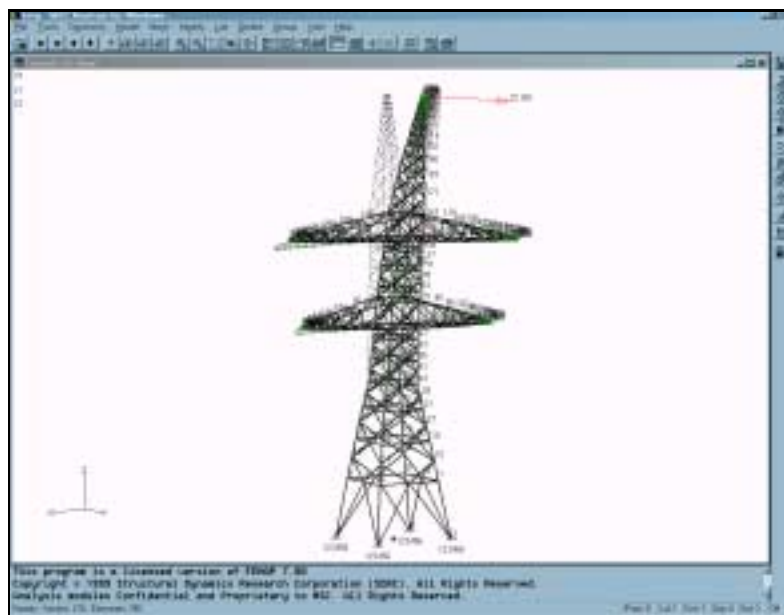


Abbildung 87: FE-Berechnung in MSC Nastran [157]

Mittels der automatischen Geometrieerzeugung durch die in Abbildung 83 definierten „Makroelemente“ entfällt die Notwendigkeit einer aufwendigen, manuellen Modellerstellung und Vernetzung mit Hilfe eines CAD-Modellers. Auch kann im Falle von Änderungen die gesamte Prozeßkette beliebig oft durchlaufen werden. Damit lassen sich Änderungen auf einfache Weise in die vollautomatische Prozeßkette einbringen und alle daraus abgeleiteten Berechnungen und Bewertungen konsistent und effizient neu erzeugen.

Nachdem die Grundlagen und die Bedeutung graphenbasierter Grammatiken für den Einsatz im oberen Teil von Abbildung 72 (Compiler → Geometrie → Geometrieinterpretation → CAD/FEM) dargestellt wurden, steht nun die Bedeutung der Ähnlichkeitstheorie im Aufbau der Rückkopplungsschleife in Abbildung 74 (CAD/FEM → Geometriebewertung → Entwurfsbeschreibung → Compiler) im Blickpunkt. Dazu zeigt Abbildung 88 verschiedene Objekte, die durch Mutation in einem evolutionären Algorithmus [4] aus der Grammatik der Hochspannungsmasten in Abbildung 82 erzeugt wurden.



Abbildung 88: Computergestützte Exploration von Entwurfsräumen [4]

Abbildung 88 illustriert die Mächtigkeit und Formenvielfalt der Graphengrammatik, es stellt sich in der Praxis jedoch nicht nur die Frage, welche Objekte wie in Abbildungen 86 bzw. 88 aus einer manuell oder evolutionär erstellten Grammatik hervorgehen, sondern wie die zu bereits vorhandenen Objekten passende Grammatik gefunden werden könnte. Dieses *inverse Problem* behandelt der folgende Abschnitt 4.7.2, in dem es als Suchproblem formuliert und mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie gelöst wird.

4.7.2 Inverses Entwurfsgrammatikproblem

Abbildung 88 stellt nur einen kleinen Ausschnitt der Formenvielfalt dar, die durch Änderungen in einer graphenbasierten Grammatik erzielt werden können. Desweiteren zeigt Abbildung 86, wie durch manuelle Regelerstellung die Gestaltsmodellierung existierender Hochspannungsmasten gelingt. Da dafür jedoch ein mit der Erstellung von Grammatiken vertrauter Ingenieur erforderlich ist und keine formalen Beweise bekannt sind, die die „Einhüllende“ einer Grammatik bestimmen und ableiten, welche Objekte in welcher Grammatik enthalten sind, ist es wünschenswert, auch die Grammatik selbst und nicht nur die aus ihr hervorgehenden Objekte computergestützt erzeugen zu können.

In der Fragestellung des *inversen Problems* kann dies, zusammen mit der in der Praxis ebenfalls relevanten Aufgabe, Grammatiken für vorhandene Produkte und Baureihen zu bestimmen, gemeinsam untersucht und gelöst werden. Dabei ist die Frage zu klären, inwieweit aus der Kenntnis der Geometrie eines Produkts die zugehörige Grammatik gewonnen werden kann. Da in den Grammatiken aufgrund des möglichen Vorhandenseins redundanter Elementanordnungen sofort auf eine unendliche Lösungsvielfalt geschlossen werden kann, ist es möglich, als zusätzliches Kriterium die kompakteste „Minimalform“ aller als Lösung in Frage kommenden Grammatiken auszuwählen.

Zur Lösung der Kernfrage, welche Grammatik zu welcher Objektklasse gehört bzw. diese erzeugt, ist ein Bewertungsmaß für die Unterschiedlichkeit von Geometrien erforderlich, das den Unterschied bzw. die Gemeinsamkeiten von Geometrien sinnvoll und einfach quantifiziert. Diese Anforderungen werden durch die im Abschnitt 4.4 *Mustererkennung* abgeleiteten dimensionslosen Bildmerkmale π_{pqr} erfüllt, die über den Zwischenschritt der höheren Zentralmomente κ_{pqr} nach Gleichung (106) (dort als μ_{pqr} bezeichnet) mit

$$\kappa_{pqr} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q (z - \bar{z})^r h(x, y, z) dx dy dz \quad (138)$$

aus der Gestaltsgeometrie $h(x, y, z)$ des Objekts berechnet werden und dann als dimensionslose Gestaltsmerkmale für 3 Raumdimensionen nach Gleichung (107) skaleninvariante Größen π_{pqr} für die Objektgestalt sind, für die gilt:

$$\pi_{pqr} = \frac{\kappa_{pqr}}{\kappa_{200}^{\frac{4p-q-r+2}{10}} \kappa_{020}^{\frac{-p+4q-r+2}{10}} \kappa_{002}^{\frac{-p-q+4r+2}{10}}} \quad (139)$$

Die Vorgehensweise zur Lösung des Suchproblems einer korrekten Grammatik für ein vorgegebenes Objekt erfolgt über die obere Schleife in Abbildung 74 (Entwurfsgrammatik → Compiler → Geometrie → Geometrieinterpretation → CAD → Geometriebewertung → Entwurfsgrammatik), wozu die dimensionslosen Kennzahlen der Gestalt des Zielobjekts $\pi_{pqr,ref}$ nach Gleichung (139) vorab bestimmt werden.

Ein evolutionärer Algorithmus [63, 178] beginnt den Suchprozeß mit einer Ausgangspopulation von μ zufallserzeugten (Eltern-)Grammatiken und erzeugt durch Mutation für jedes Elter in einer neuen Generation λ neue (Nachkommen-)Grammatiken. In einem Selektionsschritt werden dann mit einer Fitnessfunktion die besten μ Grammatiken als neue (Eltern-)Grammatiken ausgewählt und der Algorithmus startet erneut, indem er in

einer nächsten Generation λ Nachkommen für jeden der μ Eltern erzeugt. Als dimensionsloser Fitnesswert wird der quadratische Fehler d nach Gleichung (140) verwendet, der möglichst klein werden sollte, da dann die Objekte einander ähnlicher werden.

$$d = \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^k \sum_{r=0}^k (\pi_{pqr} - \pi_{pqr,ref})^2 \quad (140)$$

Das Vorgehen des evolutionären Algorithmus wird als (μ, λ) -Strategie [178] bezeichnet und ist als Struktogramm in Abbildung 89 dargestellt. Dazu ist anzumerken, daß die in der älteren Literatur aufgrund unterschiedlicher interner Datenrepräsentationen strikte Trennung zwischen evolutionären Algorithmen (EA) und genetischen Algorithmen (GA) (siehe zu GA die Erläuterungen ab Seite 156) durch die Mischung binärer und reellwertiger Datentypen immer weiter aufgeweicht wurde und dieses Gebiet daher heute unter dem übergeordneten Begriff des *Evolutionary Computing (EC)* zusammengefaßt wird.

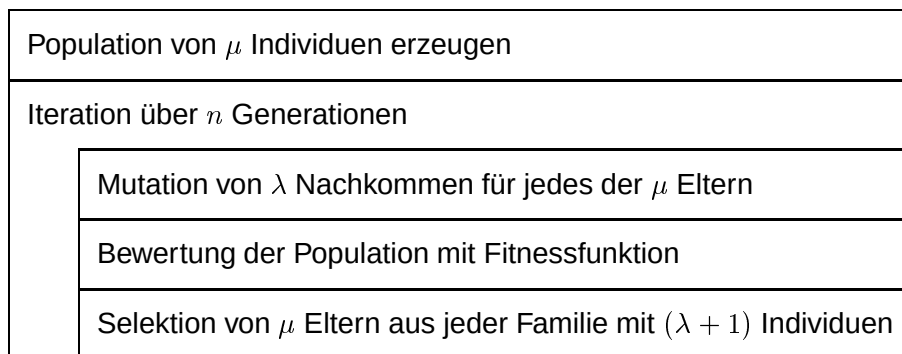


Abbildung 89: Evolutionärer Algorithmus (EA) mit (μ, λ) -Strategie [178]

Da an den EA in der Simulation mit einer $(\mu = 20, \lambda = 10)$ -Strategie keine besonderen Anforderungen gestellt wurden, genügt zum Ergebnisvergleich die in der Mitte von Abbildung 90 gezeigte Zielvorgabe als auch mehrere der ringsum dargestellten Lösungen.

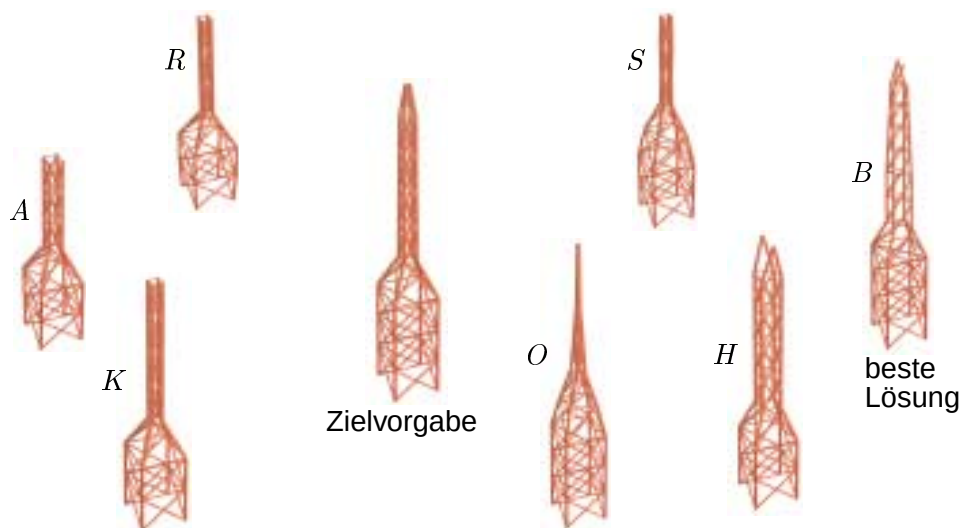


Abbildung 90: Ausgewählte Lösungsfamilien A, B, H, K, O, R und S des EA [4]

Abbildung 90 zeigt, daß die Lösung des inversen Problems als Suchprozeß durch einen evolutionären Algorithmus erfolgreich gelingen kann. Weitere Details zum inneren Aufbau und der Ablaufsteuerung evolutionärer Algorithmen, die hier der Kürze wegen entfallen müssen, enthält die umfangreiche Spezialliteratur [63, 178].

Der zentrale Punkt für den erfolgreichen Einsatz evolutionärer Algorithmen ist jedoch die gewählte Fitnessfunktion. Hier zeigt Abbildung 91 durch Berechnung der Rücktransformation nach Gleichung (104), wieviel der evolutionäre Algorithmus über die Fitnessfunktion vom Objekt wirklich „sieht“, d.h. welche Informationen ihm zur Bewertung der Individuen über die dimensionslosen Potenzprodukte π_{pqr} zur Verfügung stehen.

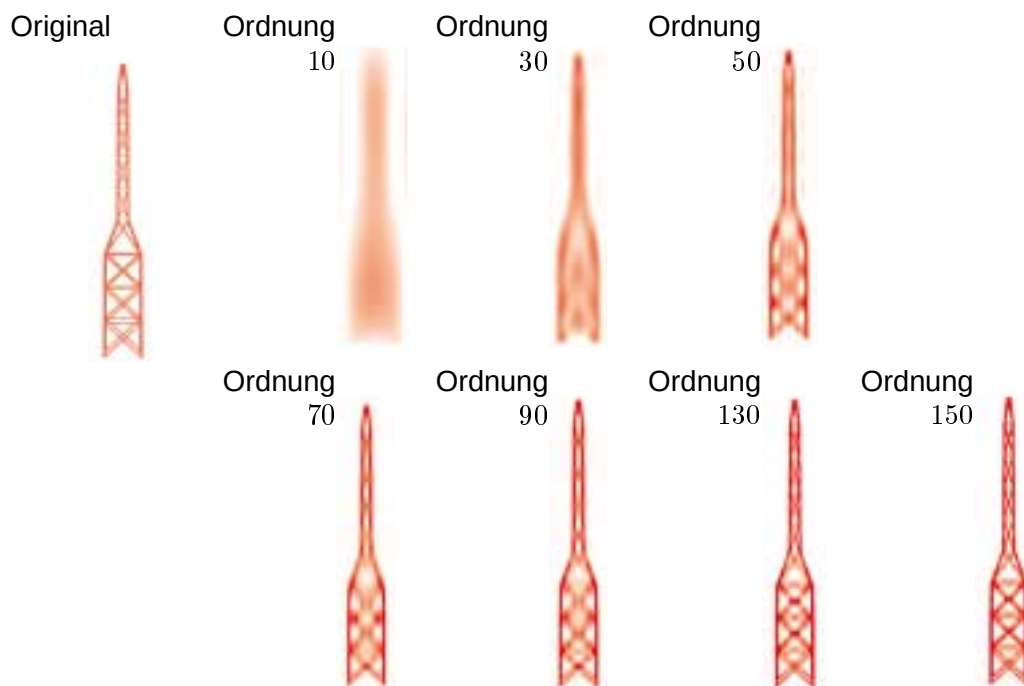


Abbildung 91: Visualisierung der Fitnessfunktion durch Rücktransformation

In Abbildung 91 bedeutet die Angabe der Ordnung die Summe der Potenzen ($p + q + r$) der in der Rücktransformation noch berücksichtigten dimensionslosen Momente. Dabei spielt die für die Rücktransformation an Abbildung 54 diskutierte Genauigkeitsfrage hier keine Rolle, da für den Vergleich von Individuen über die Fitnessfunktion die numerische Rücktransformation mit Legendrepolynomen überhaupt nicht erforderlich ist.

Abbildung 92 illustriert kurz den typischen Verlauf einer evolutionären Suche. Darin ist zu erkennen, daß die Fitnessfunktion sich immer mehr dem Wert Null annähert, und die Grammatik daher das vorgegebene Zielobjekt immer exakter beschreibt.

Mit diesen Ausführungen ist die Verwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Bestimmung dimensionsloser Kennzahlen, die im Sinne der Mustererkennung qualitativ als geometrische (Bild-)Merkmale, sowie quantitativ als deren Maßzahlen zur Geometrieklassifikation verwendet werden können, abgeschlossen. Es wurde damit ein prinzipieller Weg aufgezeigt, wie über die evolutionäre Mutation einer Entwurfsgrammatik erstmalig eine Geometrieklassifikation von Individuen erreicht wird, die neben einer (Gestalts-)Optimierung im Rahmen eines Suchprozesses auch zur Bestimmung der zugehörigen Entwurfsgrammatik eines vorgegebenen Objekts verwendet werden kann [5].

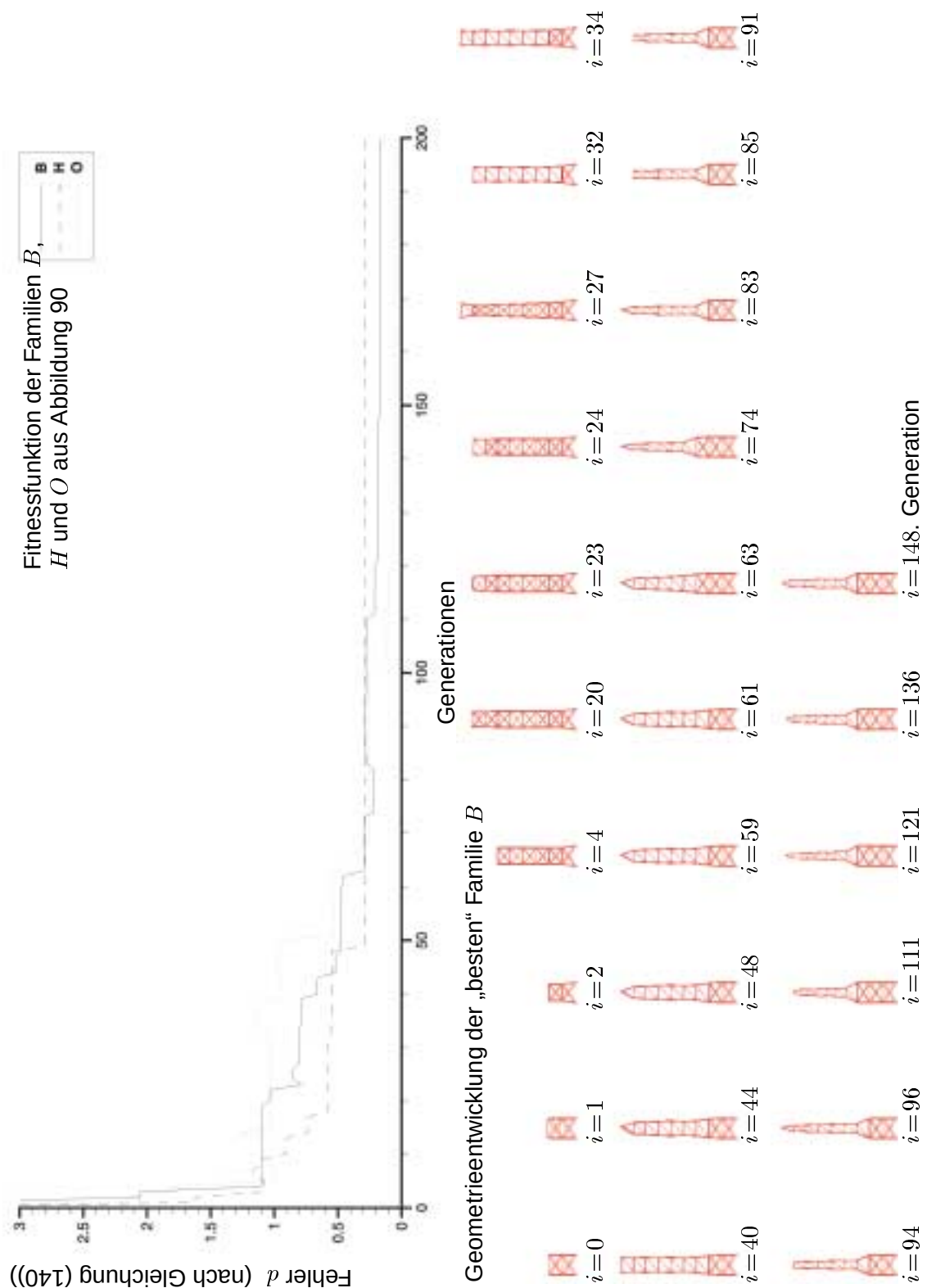


Abbildung 92: Evolution einer Hochspannungsmastengrammatik [4]

Im folgenden Abschnitt wird nun dargestellt, wie der in der Entwurfsgrammatik ebenfalls enthaltene physikalisch-funktionale Teil der Entwurfsinformation verarbeitet und in Form dimensionsloser Kennzahlen zur (Entwurfsfunktions-)Bewertung herangezogen wird.

4.7.3 Lösungspfadgenerator

In Abbildung 74 wurde zur Erläuterung der unteren Rückführschleife (Compiler $\rightarrow$ Physik $\rightarrow$ Lösungspfadgenerator $\rightarrow$ Entwurfsbewertung $\rightarrow$ Entwurfssprache $\rightarrow$ Compiler) bereits erwähnt, daß während der Übersetzung der in der Entwurfssprache vorliegenden Entwurfsbeschreibung ein Gleichungssystem entsteht, das die physikalisch-funktionalen Eigenschaften des Entwurfs beschreibt. Wie Gleichungssysteme in einem Lösungspfadgenerator aufbereitet und symbolisch gelöst werden, sowie zur automatisierten Ableitung von Bewertungsgrößen benutzt werden können, zeigt dieser Abschnitt.

Die Vorgehensweise eines Lösungspfadgenerators zeigt Abbildung 93. Wird in einer entwurfssprachlichen Beschreibung ein Gesamtmodell aus mehreren Teilmodellen definiert, so entsteht durch den maschinellen Übersetzungsprozeß ein Gleichungssystem mit n Gleichungen $F_1, \dots, F_n$ für bis zu m Variablen $x_1, \dots, x_m$ wie in Abbildung 93. Dieses Gleichungssystem wird mittels Graphenalgorithmien analysiert, ein, mehrere oder auch alle Lösungspfade ermittelt und durch ein symbolisches Computeralgebraprogramm wie z.B. Maple V [42] analytisch gelöst. Unter einem Lösungspfad wird dabei eine bestimmte Abfolge von Einzelschritten verstanden, die zur Lösung eines Gleichungssystems führen. Die analytische Lösung kann für den nachfolgenden Einsatz in einem Optimierer noch in Quellcode z.B. der Computersprache „C“ [117, 182] umgesetzt werden.

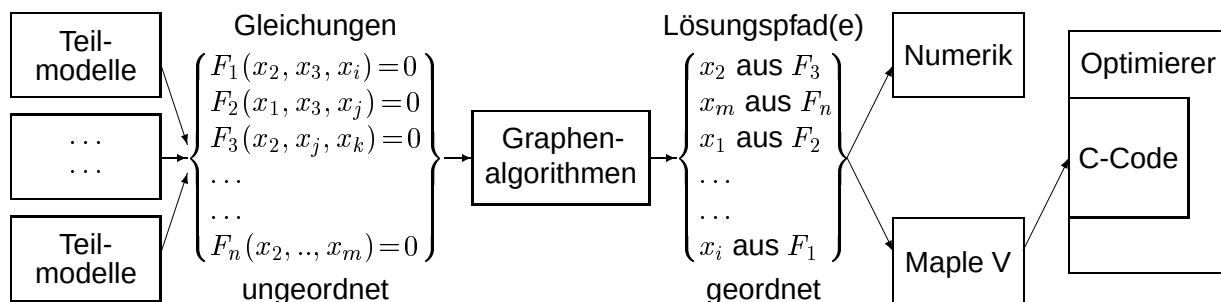


Abbildung 93: Verarbeitungsschritte im Lösungspfadgenerator [238]

Es ist natürlich von der Natur des entstehenden Gleichungssystems und der Leistungsfähigkeit des verwendeten Computeralgebraprogramms abhängig, ob eine geschlossene analytische Lösung für das Gleichungssystem gefunden werden kann. Ist dies nicht möglich, kann die Gleichungslösung nur noch unter Einsatz der Numerik versucht werden. Meist sind die im Vorentwurf verwendeten Gleichungsbeziehungen jedoch von einfacherer Gestalt, so daß wie im Beispiel der Gasturbinengleichungen (190) häufig nichtlineare Entwurfsgleichungssysteme in vorwiegend algebraischer Form entstehen, für die meist eine Lösung gefunden werden kann. Es sei hier jedoch keinesfalls unterstellt, daß die analytische Lösung immer gelingen muß, im Sinne der sinnvollen Koexistenz der verschiedenen Entwurfsmodelle wird dieser Weg nur automatisch mitverfolgt.

Aus einer analytischen Lösung der Entwurfsgleichungen werden dann zu Bewertungszwecken aus deren Parameter dimensionslose Kennzahlen und deren Ähnlichkeitsfunktionen bestimmt. Diese können dann im Sinne der Bewertungshypothese quantitativ als deren (Bewertungs-)Maßzahlen und qualitativ als die Bewertungskriterien und deren Aggregationsfunktionen verwendet werden. Aus den Ableitungen der Entwurfsparameter können darüber hinaus Sensitivitätsanalysen der Entwurfsvariablen erfolgen.

Um die Funktionsweise des Lösungspfadgenerators darzustellen, sei hier beispielhaft unterstellt, daß es sich bei dem aus mehreren Teilmodellen links in Abbildung 93 zusammengesetzten Gleichungssystem um das für die Gasturbine aus den verschiedenen Teilmodellen Verdichter C , Brennkammer B und Turbine T nebst Kopplungen abgeleitete Gleichungssystem (190) und (191) auf Seite 149 handelt. Für dieses Gleichungssystem kann sofort die in Tabelle 16 gezeigte Adjazenzmatrix erstellt werden.

	$\dot{W}_n$	$\dot{W}_t$	$\dot{W}_c$	$\dot{m}$	c_p	T_2	T_1	$\dot{Q}_b$	T_3	T_4	$\dot{Q}_a$	P_1	ρ	R	P_2	k	P_4	P_3	c
F_1	1	1	1																
F_2			1	1	1	1	1												
F_3				1	1	1		1	1										
F_4		1		1	1				1	1									
F_5	1							1			1								
F_6							1					1	1	1					
F_7						1	1					1			1	1			
F_8									1	1						1	1	1	
F_9												1			1				1
F_{10}															1		1		
F_{11}												1					1		

Tabelle 16: Adjazenzmatrix der Gleichungen (190) und (191)

Die Adjazenzmatrix in Tabelle 16 hat n Zeilen für die Gleichungen F_i und m Spalten für die in den Gleichungen auftretenden Variablen x_j . Ein Elementeintrag „1“ bedeutet, daß die entsprechende Variable x_j in der Gleichung F_i auftritt. Dagegen bedeutet eine „0“ bzw. kein Eintrag, daß die Variable x_j in der Gleichung F_i nicht vorkommt.

Im ersten Schritt wird aus der Adjazenzmatrix in Tabelle 16 der bipartite Graph in Abbildung 94a erstellt. Im bipartiten Graphen sind die Entwurfsvariablen x_j als runde Knoten und die Gleichungen F_i als eckige Knoten gezeichnet. Die Knotenverbindungen dienen zur Visualisierung der Adjazenzmatrixeinträge. Für jede eingetragene „1“ in der Adjazenzmatrix existiert eine Verbindungslinie im bipartiten Graphen. Zusätzlich sind die runden Knoten der Variablen farbig unterlegt, falls es sich um bekannte Größen handelt, denen in Gleichungen (191) bereits ein fester Zahlenwert zugeordnet ist.

Im zweiten Schritt wird das Zuordnungsproblem (Maximum Cardinality Matching on Bipartite Graphs [146]) gelöst, um eine Zuordnung der Unbekannten zu den Gleichungen zu finden. Sie legt fest, welche Gleichung nach welcher unbekannten Variablen aufgelöst wird. Der Zuordnungsalgorithmus ist daher ein zentraler Baustein in der automatisierten Gleichungslösung. Die gefundene Zuordnung ist in Abbildung 94b durch die dickeren Linien zwischen den Gleichungen und den Variablen hervorgehoben. Da für die Zuordnung mehrere Lösungen möglich sind, ist das Ergebnis nicht eindeutig, der Algorithmus terminiert daher seine interne Tiefensuche bei der ersten gefundenen Zuordnung.

Entsprechend der Vielfalt möglicher Gleichungssysteme kann natürlich eine Vielzahl von Situationen auftreten: unter- und überbestimmte Gleichungssysteme, sowie solche, die in mehrere unabhängige Gleichungssysteme zerfallen usw.. Diese Fälle sind samt ihren Verfahrensweisen in der Literatur zur automatischen Gleichungslösung [62, 79, 81, 159, 207, 238] dokumentiert. Im vorliegenden Beispiel sind mit Gleichungen (190) gerade so viele Variablen gegeben, daß 11 Unbekannte aus 11 Gleichungen zu bestimmen sind.

Im dritten Schritt wird durch die Einführung gerichteter Verbindungen aus dem Ergebnis der Zuordnung ein gerichteter Abhängigkeitsgraph (Directed Graph of Dependencies) [146] in Abbildung 94c erzeugt. Ist als Zuordnungsergebnis z.B. die Variable $\dot{Q}_b$ aus Gleichung F_3 mit $F_3(\dot{Q}_b, \dot{m}, c_p, T_2, T_3) = 0$ zu berechnen, so heißt $\dot{Q}_b$ „abhängig“ von $\dot{m}, c_p, T_2$ und T_3 . In diesem Fall werden unter Elimination des eckigen Knotens F_3 genau vier Pfeile von $\dot{Q}_b$ auf $\dot{m}, c_p, T_2$ und T_3 als Verbindungen erzeugt.

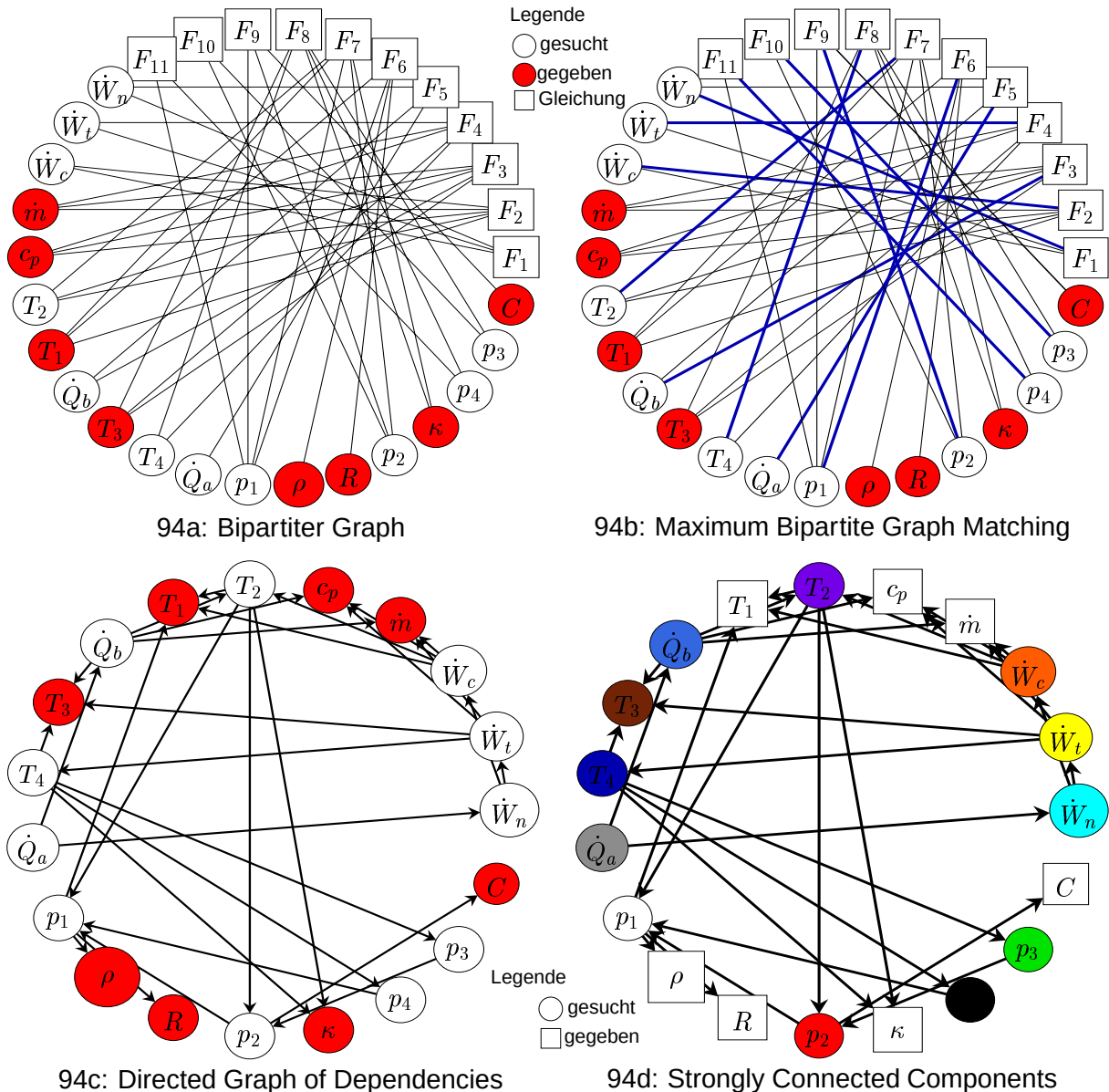
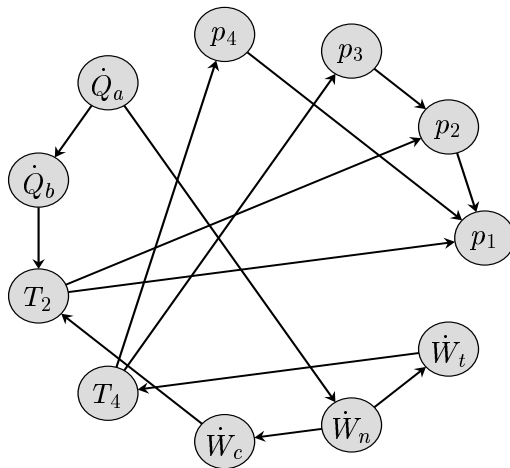


Abbildung 94: Abfolge (a)–(d) von Graphenalgorithmen im Lösungspfadgenerator [238]

Idealerweise führt der gerichtete Abhängigkeitsgraph in Abbildung 94c dann auf einen baumartigen, zyklenfreien Graphen, der im Fall streng baumartig gerichteter Verbindungen über das Verfahren des **Umgekehrten Topologischen Sortierens** [205] (Reverse Topological Sorting) in eine Sequenz nacheinander ausführbarer Lösungsschritte umgesetzt werden kann. Diese Sequenz wird als Lösungspfad (Solution Path) bezeichnet und hat damit zur Namensgebung des Lösungspfadgenerators (Solution Path Generator) für die gezeigte Abfolge von Graphenalgorithmen in Abbildung 94a–d und 95 geführt.

Treten in Abbildung 94d jedoch durch Zyklen gekoppelte Knoten (**Strongly Connected Components**) [205] auf, d.h. gerichtete Verbindungen, die über Verkettung auf denselben Knoten zurückführen, so bedeutet dies das Auftreten gekoppelter Gleichungen, die simultan gelöst werden müssen. Zur Elimination von Zyklen kann jeder dieser Zyklen in einem Superknoten (**Super Node**) zusammengefaßt werden. Der Superknoten repräsentiert damit die simultane Lösung der gekoppelten Gleichungen. Hierfür werden alle Knoten eines Zyklus mit der gleichen Farbe eingefärbt und dann alle gleichfarbigen Knoten in einem Superknoten zusammengefaßt. Der daraus resultierende Graph mit einer eindeutigen Farbzusordnung für jeden Knoten in Abbildung 94d ist damit zyklensfrei und wird als gerichteter zyklensfreier Graph (Directed Acyclic Graph) [205] bezeichnet.

Im vierten Schritt kann dann der gerichtete zyklensfreie Graph über das Verfahren des Umgekehrten Topologischen Sortierens [205] (**Reverse Topological Sorting**) abschließend in eine Sequenz einzeln nacheinander ausführbarer Lösungsschritte umgesetzt werden, die in Abbildung 95 dargestellt sind und den gesuchten Lösungspfad darstellen.



Schritt	Anweisung	Maple V Syntax
1.	P_1 aus F_6	$P1 := \text{solve}(F6);$
2.	P_4 aus F_{11}	$P4 := \text{solve}(F11);$
3.	P_2 aus F_9	$P2 := \text{solve}(F9);$
4.	P_3 aus F_{10}	$P3 := \text{solve}(F10);$
5.	T_4 aus F_8	$T4 := \text{solve}(F8);$
6.	$\dot{W}_t$ aus F_4	$Wt := \text{solve}(F4);$
7.	T_2 aus F_7	$T2 := \text{solve}(F7);$
8.	$\dot{W}_c$ aus F_2	$Wc := \text{solve}(F2);$
9.	$\dot{W}_n$ aus F_1	$Wn := \text{solve}(F1);$
10.	$\dot{Q}_b$ aus F_3	$Qb := \text{solve}(F3);$
11.	$\dot{Q}_a$ aus F_5	$Qa := \text{solve}(F5);$

Abbildung 95: Lösungspfadgenerierung durch Umgekehrtes Topologisches Sortieren

Zur Erzeugung des Lösungspfades wird das Verfahren des Umgekehrten Topologischen Sortierens an einem Knoten (in Abbildung 95 bei p_1) begonnen, der selbst von keinem anderen Knoten abhängt und deshalb keine ausgehende Verbindung auf eine unbekannte Variable im Graphen besitzt. Verfolgt man die gerichteten Verbindungen von diesem Endknoten aus entgegen den vorhandenen Pfeilrichtungen und gibt die derart erhaltene Sequenz besuchter Knoten im Graphen anschließend in dieser Reihenfolge aus, erhält man den Lösungspfad in Abbildung 95. Dieser ist somit nur noch in syntaxgerechte Anweisungen für das Computeralgebraprogramm Maple V [42] umzusetzen.

Die automatische analytische Lösung des Gleichungssystems gelingt im vorliegenden Beispielfall mit Hilfe des symbolischen Computeralgebraprogramms Maple V in Abbildung 93. Dies zeigt Tabelle 17, in der die Gleichungen (190) und (191) sowie der Lösungspfad in gültigen Maple V Anweisungen als sogenanntes Arbeitsblatt (Maple Worksheet) zusammengefaßt und ausführbar sind. Tabelle 17 zeigt desweiteren den eigentlichen Funktionskern des automatisch generierten Quellcodes in der Computersprache C, der damit z.B. als compilierbarer Funktionskern für einen nachgeschalteten Optimierer entsprechend Abbildung 93 zur Verfügung steht. Damit ist die Darstellung der internen Funktionsweise des Lösungspfadgenerators zunächst abgeschlossen.

Maple V Worksheet	
$\begin{aligned} F1 &:= Wn - Wt - Wc = 0: \\ F2 &:= Wc - m \cdot cp \cdot (T2 - T1) = 0: \\ F3 &:= Qb - m \cdot cp \cdot (T3 - T2) = 0: \\ F4 &:= Wt - m \cdot cp \cdot (T4 - T3) = 0: \\ F5 &:= Qa + Qb + Wn = 0: \\ F6 &:= P1 - Rho \cdot R \cdot T1 = 0: \\ F7 &:= T2/T1 - (P2/P1)^{((k-1)/k)} = 0: \\ F8 &:= T4/T3 - (P4/P3)^{((k-1)/k)} = 0: \\ F9 &:= P2 - P1 \cdot c = 0: \\ F10 &:= P3 - P2 = 0: \\ F11 &:= P4 - P1 = 0: \\ T1 &:= 298.: \\ k &:= 1.402: \\ C &:= 4.: \\ m &:= 1.4: \\ cp &:= 1008.: \\ T3 &:= 1280.: \\ Rho &:= 1.3002: \\ R &:= 287.04: \\ P1 &:= \text{solve}(F6); \\ P4 &:= \text{solve}(F11); \\ P2 &:= \text{solve}(F9); \\ P3 &:= \text{solve}(F10); \\ T4 &:= \text{solve}(F8); \\ Wt &:= \text{solve}(F4); \\ T2 &:= \text{solve}(F7); \\ Wc &:= \text{solve}(F2); \\ Wn &:= \text{solve}(F1); \\ Qb &:= \text{solve}(F3); \\ Qa &:= \text{solve}(F5); \end{aligned}$	aus Gleichungen (190) aus Gleichungen (191) aus Abbildung 95
Generierter C-Code (Auszug)	
<pre> P1 = Rho*R*T1; P4 = Rho*R*T1; P2 = Rho*R*T1*c; P3 = Rho*R*T1*c; T4 = pow(1/c, (k-1)/k)*T3; Wt = m*cp*pow(1/c, (k-1)/k)*T3-m*cp*T3; T2 = pow(c, (k-1)/k)*T1; Wc = m*cp*pow(c, (k-1)/k)*T1-m*cp*T1; Wn = -m*cp*T1+m*cp*pow(1/c, (k-1)/k)*T3 -m*cp*T3+m*cp*pow(c, (k-1)/k)*T1; Qb = m*cp*T3-m*cp*pow(c, (k-1)/k)*T1; Qa = m*cp*T1-m*cp*pow(1/c, (k-1)/k)*T3; </pre>	

Tabelle 17: Maple V Worksheet und generierter C-Code [26, 238]

Die im Lösungspfadgenerator in Tabelle 17 verarbeiteten Gleichungen haben zwar eine rein algebraische Form, können aber auf sogenannte gemischt differentiell-algebraische Gleichungssysteme [41] (differential algebraic equations, DAEs) erweitert werden. Die Darstellung der hierfür erforderlichen Lösungsverfahren [41] muß hier jedoch entfallen.

Steht ein Lösungspfadgenerator mit der dargestellten internen Funktionalität zur Verfügung, so kann nicht nur wie in Abbildung 93 gezeigt, das aus den Teilkomponentenbeschreibungen aufgebaute Gleichungssystem automatisiert gelöst, sondern der Lösungspfadgenerator auch noch in einer ganzen Reihe weiterer Anwendungen vorteilhaft eingesetzt werden. Aus Platzgründen kann dies aber im folgenden nur kurz dargestellt werden, da der Schwerpunkt auf der ähnlichkeitsmechanischen Anwendung liegt.

Beginnt man mit der ersten wesentlichen Eigenschaft des Lösungspfadgenerators, mit Hilfe der genannten Sequenz von Graphenalgorithmen eine topologische Reihenfolge der Lösungsschritte zu bestimmen, so folgt aus der Verwendung der Adjazenzmatrix in Tabelle 16 als Eingangsgröße für die Graphenalgorithmen, daß zur Ermittlung eines oder mehrerer Lösungspfade zunächst nur die in den Gleichungen vorhandenen Variablennamen (Bezeichner), und noch nicht die spezielle Form der analytischen Gleichungen in die Graphenalgorithmen eingehen.

Wie bei der Lösung des Zuordnungsproblems (Maximum Cardinality Matching on Bipartite Graphs [146]) in der automatisierten Gleichungslösung bereits angemerkt wurde, ist die Lösung nicht unbedingt eindeutig. Der Algorithmus terminiert deshalb die Tiefensuche bei der ersten gefundenen Zuordnung. Läßt man den Algorithmus (die Laufzeitproblematik kann durch intelligente Algorithmen abgemildert werden [147]) weiterlaufen, können weitere zulässige Zuordnungen gefunden werden. Dies kann soweit gehen, bis alle möglichen Zuordnungen ermittelt sind. Durch die Permutation der möglichen Lösungsschritte können dann alle Lösungspfade bestimmt werden.

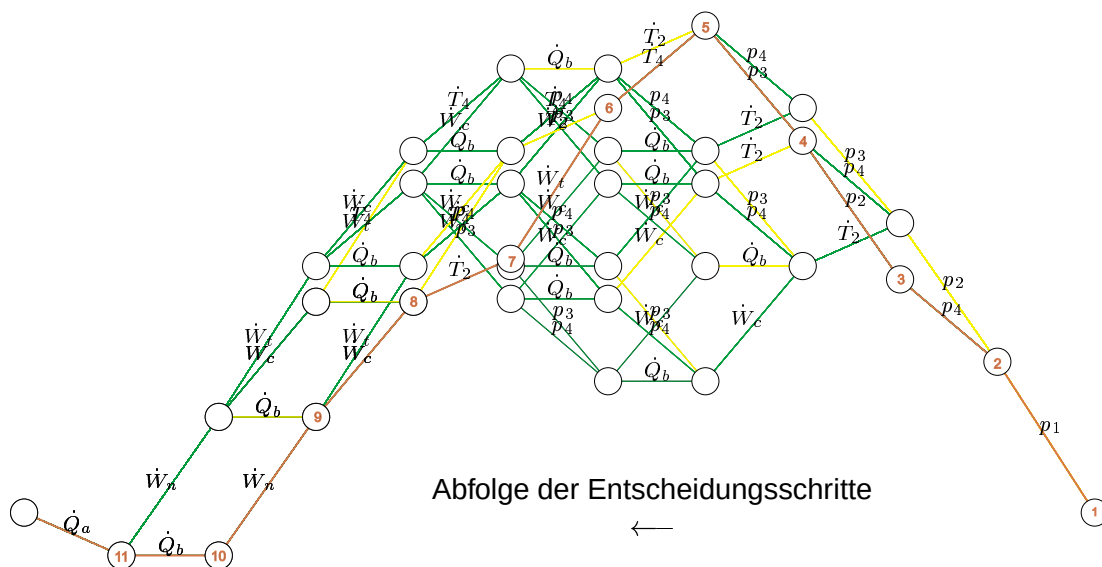


Abbildung 96: Visualisierung aller möglichen Lösungspfade [26]

Abbildung 96 zeigt alle 220 möglichen Lösungspfade der 11 Gasturbinengleichungen in (190). Der Pfad aus Abbildung 95 ist besonders hervorgehoben. Durch diese Darstellung wird offensichtlich, welche Alternativen in der Entscheidungsabfolge zu jedem Entwurfszeitpunkt noch vorhanden sind. Engpässe (Bottlenecks), in denen sich alle Lösungspfade auf wenige Knoten kontrahieren, können so entdeckt, als auch die von verschiedenen Ingenieuren gewählten oder in Firmenkulturen üblichen Lösungswege bezüglich ihrer strukturell-topologischen Abfolge miteinander verglichen werden.

Ist es darüber hinaus möglich, den an jeder Stelle der Entscheidungsfindung erforderlichen Zeit- und Kostenaufwand etc. entsprechend zu quantifizieren, so können verschiedene Lösungspfade mittels derartig künstlich gewählter Metriken [194] gegeneinander abgewogen werden. Dies erscheint im Entwurfsprozeß, der in der Praxis wegen der zu verschiedensten Zeitpunkten wiederholt auftretenden Nichterfüllbarkeit von Zwangsbedingungen meist mehrmals iterativ durchlaufen werden muß, neue Perspektiven für Kosteneinsparungen und die Problemreorganisation aufzuzeigen, die allerdings hier in diesem Zusammenhang nur kurz gestreift werden können.

Als zweite Eigenschaft des Lösungspfadgenerators ist es für die Graphenalgorithmen zur Ermittlung der Lösungspfade unerheblich, ob die Bezeichner in analytischer Form x_j oder verbaler Form v_j vorliegen, solange die $j = 1, \dots, m$ Bezeichner nur eindeutig sind. Diese Erkenntnis kann zu der im Grenzübergang (141) dargestellten Aussage verdichtet werden, daß die Lösungspfade verbaler Beschreibungen exakt in die Lösungspfade analytischer Beschreibungen übergehen [194] wenn gezeigt werden kann, daß im Grenzübergang der verbale Kontext exakt in den analytischen Kontext übergeht.

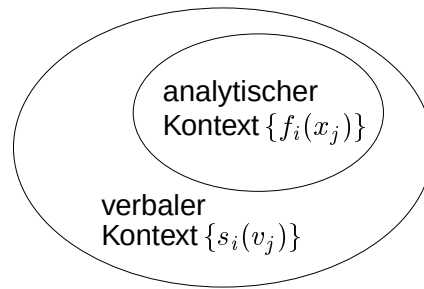


Abbildung 97: Einbettung analytischer Kontext $\{f_i(x_j)\}$ in verbalen Kontext $\{s_i(v_j)\}$ [194]

Dabei wird hier in Abbildung 97 unter einem Kontext $\{s_i(v_j)\}$ bzw. $\{f_i(x_j)\}$ die vorhandene Gesamtmenge an bekannten verbalen bzw. analytischen Beschränkungen mit $i = 1, \dots, n$ verstanden. Der verbale Kontext $\{s_i(v_j)\}$ bettet dabei nach Abbildung 97 den analytischen Kontext $\{f_i(x_j)\}$ ein, da zwar prinzipiell alle analytischen Ausdrücke auch verbal formuliert werden können, das Umgekehrte aber nicht gilt.

Im Lösungspfadgenerator ist es daher möglich, eine Adjazenzmatrix auch aus rein verbal vorliegenden (Problem-)Beschreibungen aufzubauen. Der Beweis [194] für die Gleichheit der durch den Lösungspfadgenerator bestimmten Lösungspfade ist genau dann gegeben, wenn im Grenzübergang

$$\lim_{s_i(v_j) \rightarrow f_i(x_j)} \text{Lösungspfade}(\{s_i(v_j)\}) = \text{Lösungspfade}(\{f_i(x_j)\}) \quad (141)$$

der verbale Kontext $\{s_i(v_j)\}$ exakt in den analytischen Kontext $\{f_i(x_j)\}$ übergeht und damit die Gleichheit der aus den Bezeichnern v_j bzw. x_j und den Beschränkungen s_i bzw. f_i erstellten Adjazenzmatrizen gegeben ist [194].

Durch diesen Grenzübergang (141) steht ein formal konsistentes Modell zur Verarbeitung von (Gleichungs-)Beschränkungen zur Verfügung, das in einer Frühphase des Entwurfs von den ersten verbalen Begriffsbildungen $\{s_i(v_j)\}$ bis hin zu den fertigen analytischen Gleichungen $\{f_i(x_j)\}$ alle verschiedenen Beschränkungen ohne Modellwechsel verarbeiten kann. Diese Durchgängigkeit in der Formalisierung der Modellbildung macht die Graphenalgorithmen zu einem sehr nützlichen Werkzeug im Entwurf.

Die nachweisbare Gleichheit der Lösungspfade [194] bietet den Vorteil, daß Projektpläne die unter Abschätzung des dafür erforderlichen Zeit- und Arbeitsaufwands etc. vor Projektbeginn erstellt werden müssen, zunächst auf verbalem Niveau erstellt und im Zuge des zunehmenden formalen analytischen Wissens laufend überprüft und eventuell angepaßt werden können. Über entsprechende Programmierung lassen sich die aus dem Lösungspfadgenerator erzeugten Daten um die Aufwandsschätzungen in Tabelle 18 ergänzen (hier: pro forma 1 Tag, siehe dazu auch die künstlichen Metriken in [194]).

Nr	Name	Dauer	Vorgänger	...	Nr	Name	Dauer	Vorgänger	...
1	C	1 Tag			10	P2	1 Tag	"1;9"	
2	R	1 Tag			11	P3	1 Tag	"10"	
3	T1	1 Tag			12	P4	1 Tag	"9"	
4	T3	1 Tag			13	Qa	1 Tag	"14;18"	
5	cp	1 Tag			14	Qb	1 Tag	"4;5;7;15"	
6	kappa	1 Tag			15	T2	1 Tag	"3;6;9;10"	
7	mp	1 Tag			16	T4	1 Tag	"4;6;11;12"	
8	roh	1 Tag			17	Wc	1 Tag	"3;5;7;15"	
9	P1	1 Tag	"2;3;8"		18	Wn	1 Tag	"17;19"	
					19	Wt	1 Tag	"4;5;7;16"	

Tabelle 18: Eingabedaten für Microsoft Project [26]

Tabelle 18 dient als Schnittstelle der (hier hypothetischen) Zeitangaben für das Softwarewerkzeug Microsoft Project [126], das zum Projektmanagement und zur Projektverfolgung eingesetzt wird. Dabei sind in Abbildung 98 die Vorgangsnamen 1-8 die gegebenen Größen c , R , T_1 , T_3 , c_p , κ , $\dot{m}$ und ρ , während die Vorgangsnamen 9-19 die eigentliche Aufgabenstellung der Festlegung der gesuchten Entwurfsgrößen darstellen.

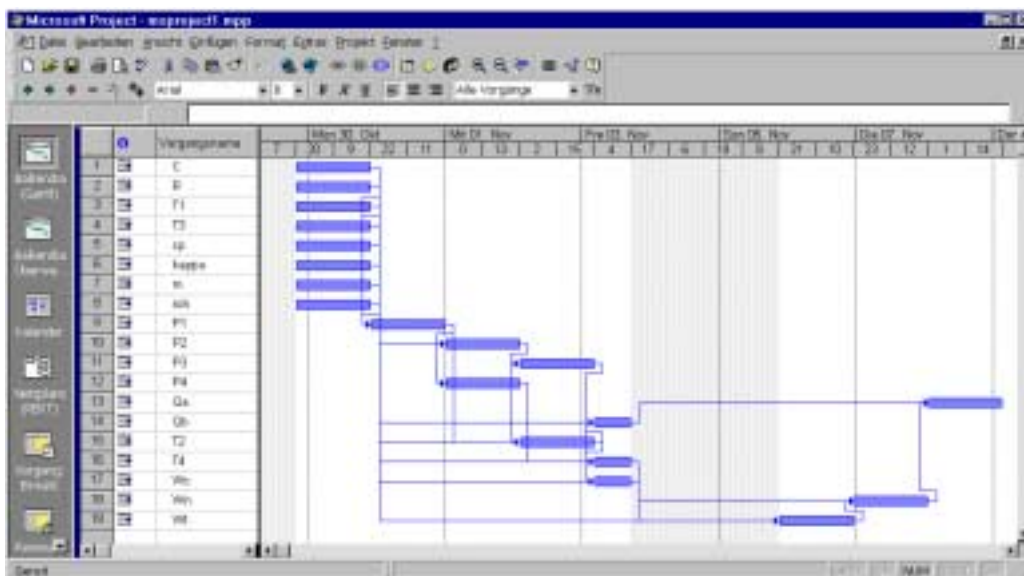


Abbildung 98: Ressourcenplanung eines Lösungspfades in Microsoft Project [26]

Gegenüber der streng sequentiellen Reihenfolge des Lösungspfads in Abbildung 95 ist der in Abbildung 98 dargestellte Lösungspfad um die parallelisierbaren, d.h. gleichzeitig bearbeitbaren Entwurfsaufgaben verkürzt. Mit derartigen Softwarewerkzeugen lassen sich z.B. daraus *kritische Pfade* ermitteln [126], bei denen eine Terminüberschreitung zur Überziehung der prognostizierten Gesamtzeit des Projekts führen würde.

Da sich bei wachsendem Wissen über das Entwurfsobjekt der verbale Kontext $\{s_i(v_j)\}$ im Sinne des Grenzübergangs (141) in den exakten analytischen Kontext $\{f_i(x_j)\}$ verschiebt, sind eventuell auftretende Diskrepanzen [194] zwischen verbaler Planung und physikalischer Realität an den Veränderungen in der Adjazenzmatrix lokalisierbar. Da aber alle Pläne, deren analytischer Kontext verbal nicht richtig getroffen bzw. abgebildet wurde, im physikalischen Sinne nicht wirklich so ablauffähig sind, ergibt sich hier eine Möglichkeit, physikalische Zwangsbedingungen in der Erstellung oder der Änderungsplanung von Projektplänen [128] korrekt mit zu berücksichtigen.

Geht man zur dritten wesentlichen Eigenschaft des Lösungspfadgenerators über, mittels der genannten Sequenz von Graphenalgorithmien einen Lösungspfad für die symbolische Gleichungslösung in einem Computeralgebraprogramm zu erstellen, so können, wenn die symbolische Gleichungslösung geschlossen gelingt, Sensitivitätsanalysen der Form von $x_j(x_i)$ und $\partial x_j / \partial x_i$ in Abbildungen 99 und 100 automatisiert erzeugt werden.

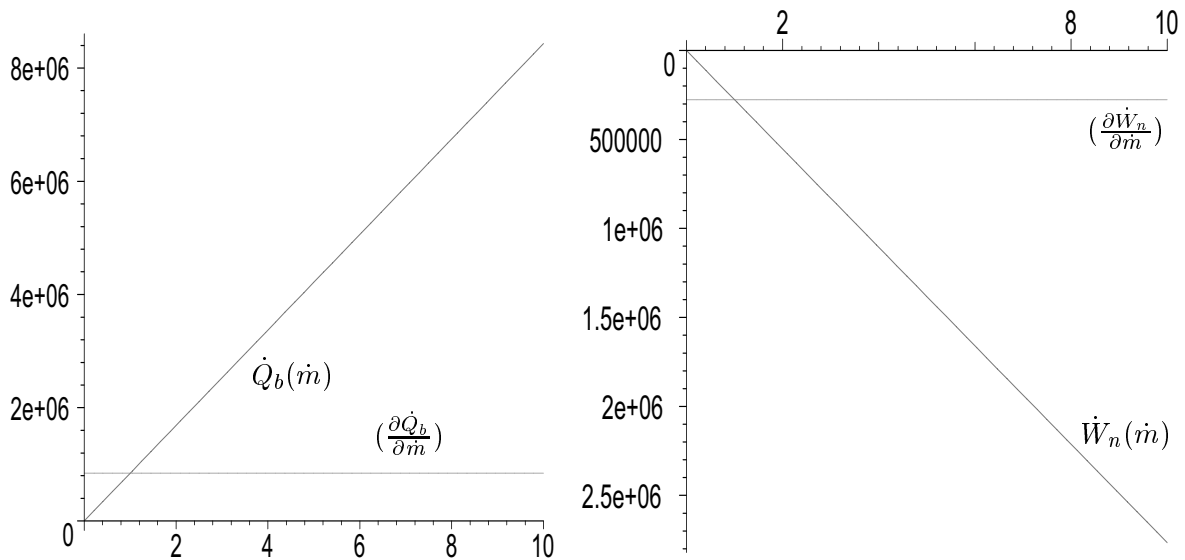


Abbildung 99: Automatisch generierte Sensitivitätsanalysen $\partial \dot{Q}_b / \partial \dot{m}$ und $\partial \dot{W}_n / \partial \dot{m}$ [26]

Im Sinne der Bewertungshypothese geht der rein formale Unterschied in den verschiedenen Sensitivitätsanalysen in Abbildung 99 mit $\partial x_j / \partial x_i$ gegenüber den Sensitivitätsanalysen in Abbildung 100 mit $\partial \pi_j / \partial \pi_i$ bzw. $\partial \pi_j / \partial x_i$ in der Bedeutungsinterpretation noch sehr viel tiefer. Dies beruht darauf, daß in Abbildung 99 die Ableitungen $\partial x_j / \partial x_i$ nach konventioneller Vorgehensweise dimensionsbehaftet sind, während in Abbildung 100 rein dimensionslose Bewertungskriterien $\partial \pi_j / \partial \pi_i$ oder auch gemischt dimensionslose und dimensionsbehaftete Variablen $\partial \pi_j / \partial x_i$ gegeneinander abgeleitet werden.

Aus der Bewertungshypothese folgt, daß dimensionsbehaftete Größen *Beschreibungsgrößen* sind, während dimensionslose Größen *Bewertungsgrößen* darstellen. Dimensionslose Bewertungsgrößen tragen daher immer Klassenaussagen in sich, die für eine ganze Klasse von vollähnlichen Objekten zutreffen. Eine dimensionsbehaftete Zahl definiert dagegen lediglich den Wert einer einzigen physikalischen Größe. Abbildung 100 mit den Ableitungen der dimensionslosen Bewertungskriterien $\partial \pi_j / \partial \pi_i$ oder der Ableitung $\partial \pi_j / \partial x_i$ einer dimensionslosen Bewertungsgröße nach einer dimensionsbehafteten Beschreibungsgröße stellt damit die Abhängigkeit des Klassenbewertungskriteriums π_j von dem Klassenbewertungskriterium π_i bzw. von der Beschreibungsgröße x_i dar.

Bezüglich einer ganz konkreten Bedeutungsinterpretation der Abbildungen 99 und 100 als Sensitivitätsstudie einer Gasturbine heißt das, daß in Abbildung 100 mit $\partial\eta/\partial c$ der Einfluß des Teilbewertungskriteriums $c = p_2/p_1$ (Verdichtungsverhältnis) auf die Gesamtbewertung $\eta = \dot{W}_n/\dot{Q}_b$ (Wirkungsgrad) dargestellt wird und dieser Einfluß für alle Gasturbinen mit den unterschiedlichsten Beschreibungsgrößen p_1 und p_2 gilt, da diese Beschreibungsgrößen bereits in den Klassenbegriff c zusammengefaßt wurden. Entsprechend stellt $\partial\eta/\partial\dot{m}$ den Einfluß des Massenflusses $\dot{m}$ auf die Gesamtbewertung η dar.

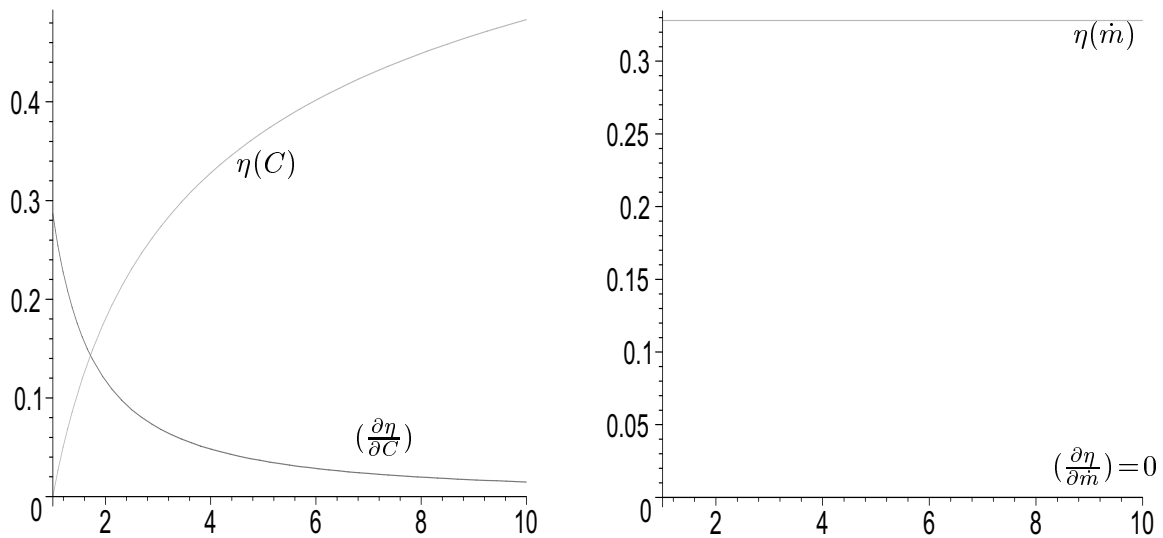


Abbildung 100: Automatisch generierte Sensitivitätsanalysen $\partial\eta/\partial c$ und $\partial\eta/\partial\dot{m}$ [26]

Die hier streng unterschiedene Trennung in Beschreibung und Bewertung mag zunächst etwas kleinlich oder gar dogmatisch erscheinen, zur Erstellung einer softwaregestützten Entwurfsbewertungslösung ist die systematische Umsetzung einer Bewertungstheorie jedoch unabdingbare Voraussetzung für den Erfolg. Bisherige „Bewertungsverfahren“ (siehe dazu auch Abbildung 25), die diese saubere Trennung in Bewertung und Beschreibung nicht aufweisen, können keine gültigen Klassenaussagen erzeugen, die zur vorhandenen physikalischen Eigenschaftbeschreibung konsistent sind. Dies gelingt nur durch Transformation in den dimensionslosen Raum, der durch das Pi-Theorem mit der Bewertungshypothese bereits für diesen Zweck genutzt wird.

Es mag das Bewußtsein und der derzeitige Ausbildungsstand der Ingenieure diese formale Trennung von Beschreibung und Bewertung nicht widerspiegeln und viele Ingenieure an das „Bewerten“ mit dimensionsbehafteten Größen gewöhnt sein, dies ficht jedoch die durch die Bewertungshypothese [183] untermauerte Existenz dimensionsloser Bewertungsgrößen nicht an. In Fällen, in denen noch dimensionsbehaftet „bewertet“ wird, kann dem Bewerter durch beliebige Einheitentransformation den von ihm unausgesprochen durchgeführten Bezug auf Erfahrungsgrößen bewußt gemacht und so die Bewertung in eine formal korrekte dimensionslose Bewertungsgröße überführt werden.

Erfolgreicher Ingenieurentwurf bedeutet Erzielung hervorragender Entwurfsgüte (und damit der Entwurfsbewertung) unter vorgegebenen Randbedingungen (und damit unter dimensionsbehafteten Beschreibungsgrößen). Entwurfsbewertungsverfahren müssen diese Bedingungen notwendigerweise physikalisch korrekt abbilden, um zu hervorragenden Ergebnissen kommen zu können. Die Ähnlichkeitstheorie sieht deshalb in dieser Hinsicht zukünftig neuen wissenschaftlichen Anwendungen in der Bewertung entgegen.

4.7.4 Ausblick Entwurfssprachen

Wie in der Analyse des derzeitigen Standes der Entwurfsmethodik auf Seite 98 aufgezeigt wurde, stellt die ganzheitliche Erfassung des Ingenieurentwurfs für eine erfolgreiche softwaretechnische Unterstützung die Anforderung, daß das Darstellungsproblem in den drei verschiedenen Begriffsgebieten des Glaubens, Könnens und Wissens, als auch das Übergangsproblem an den Rändern zweier aneinander anstoßenden Begriffsgebiete sinngerecht gelöst wird. Diese Problematik wird als die Erstellung eines Weltmodells bezeichnet und stellt in jeder zukünftigen erfolgreichen Entwicklung von Softwarelösungen zur „computergestützten Exploration von Entwurfsräumen“ einen der Kernpunkte dar.

Die in den Entwicklungs- und Konstruktionsabteilungen bekannten und derzeit eingesetzten Entwurfssyntheseverfahren sowie die für die Entwurfsanalyse und die daran anschließende Variantenselektion verwendeten Entwurfsbewertungsverfahren reichen für die hierfür erforderliche Weiterentwicklung der Konstruktionsmethodik bei weitem nicht aus. So wurde dazu auf Seite 102 begründet, wie mit Hilfe einer evolutionär gesteuerten (Vorwärts-)Variation der Entwurfsbeschreibung in einer nach der Theorie der formalen Sprachen konzipierten Entwurfssprache die fehlende Kompatibilität und Umkehrbarkeit von Ingenieurmodellen durch die quantitative Abschätzung der erzielbaren Topologie- und Parametereinflüsse hinreichend handhabbar gemacht werden kann.

Zu der dieser Problematik zugrundeliegenden Ursache der teilweisen Unverträglichkeit und Einteilung der im Entwurfsprozeß gleichzeitig anzutreffenden Modellbeschreibungen in topologisch und parametrisch getrennte Lösungsklassen und deren unterschiedlichen verbalen, symbolischen, analytischen und numerischen Teildarstellungen kommt noch ein weiteres, bisher noch nicht behandeltes Darstellungsproblem hinzu. Der ebenfalls grundlegende Charakter dieses Darstellungsproblems kann damit begründet werden, daß bisher in der klassischen Entwurfsmethodik die Funktionalität eines Entwurfs in die drei Flüsse von *Stoff*, *Energie* und *Information* unterschieden wurde [167].

Während nun im Ingenieurwesen für Stoff und Energie bereits bewährte Modellvorstellungen zur Verfügung stehen, für die algorithmische Berechnungsverfahren der verschiedensten Detaillierungsklassen bekannt sind, hat sich für einen weiter gefaßten Informationsbegriff noch keine allgemein anerkannte Modellvorstellung durchgesetzt. Bei modernen Produkten gewinnt jedoch gerade der Informationsfluß zunehmend an Bedeutung, da wesentliche Teile bisher rein mechanisch realisierter Produktfunktionen zunehmend häufiger durch Software- und Mikroelektronikkomponenten gelöst werden.

Durch diesen technologischen Wandel stehen die Konstrukteure in der Entwurfsaufgabe im Maschinenbau und in der Luft- und Raumfahrt einer ständig wachsenden Komplexität von Anforderungen gegenüber, da sich die Funktionalität des Produkts aus einer Kombination von Hardware- und Softwarekomponenten ergibt, derzeit jedoch weder eine den Informationsbegriff umfassende Entwurfstheorie (Synthese), noch eine beweisbare Konstruktionsbewertung (Analyse) für die gemeinsame Behandlung von Hardware- und Softwarekomponenten bekannt oder verfügbar ist.

Aus dieser unbefriedigenden Situation heraus ergibt sich die dringende Notwendigkeit, materielle, energetische und informationstechnische Aspekte in der Konstruktionsbewertung einheitlich zu behandeln. Dies kann nur gelingen, wenn in einer Entwurfssprache ganzheitliche Objektbeschreibungen zur Verfügung stehen, die über die Kenntnis ihrer

eigenen physikalischen, geometrischen und informationstechnischen Eigenschaften verfügen und damit zur schnellen Erzeugung von Simulationsmodellen mit anschließender automatisierter Bewertung des Gesamtsystems verwendet werden können.

Gelingt die Erstellung eines dimensionshomogen formulierten Informationsbegriffs für die Zwecke und Anforderungen des Ingenieurentwurfs, so kann vom theoretischen Standpunkt her bereits heute sicher vorhergesagt werden, daß dann die Ableitung entsprechender dimensionsloser (Informations-)Kennzahlen zu Bewertungszwecken gelingen wird. Da in den Naturwissenschaften desweiteren davon ausgegangen wird, daß nicht dimensionshomogene Modellvorstellungen prinzipiell nicht richtig sein können [76], sind von dieser Seite her keine unliebsamen Überraschungen zu erwarten.

Die in der Physik und der Elektrotechnik bisher für die Information [70] auf dem Begriff der Entropie beruhenden und verwendeten Ersatzmodelle sind dimensionshomogen. Auch die in der Regelungstechnik verwendeten Verfahren, bei denen in Rückführschleifen (Feedback Loops) zur Regelung aus physikalischen Größen zusammengesetzte Ausdrücke verwendet werden, denen man durchaus einen gewissen „Informationsgehalt“ unterstellen könnte, erfüllen die Bedingung der Dimensionshomogenität.

Die zukünftige Entwicklung wird daher zeigen, inwieweit es gelingen wird, die in einer Entwurfssprache für den Ingenieurentwurf relevanten Teilbeschreibungen in einem einheitlichen Datenformat zusammenzufassen. Da menschliche Entwerfer ihre Entwurfsideen und andere wichtigen Überlegungen in Form von Sprache formulieren und kommunizieren können, erscheint die Entwicklung einer derartigen Entwurfssprache als plausibler und gangbarer Weg. Die auf der Basis einer Graphengrammatik gezeigte Entwicklung einer solchen Entwurfssprache hat jedenfalls bis jetzt keine unüberwindbaren theoretischen Grenzen dieses Ansatzes erbracht oder erkennen lassen.

Die Entwicklung einer solchen Entwurfssprache beruht auf der Definition einer Entwurfsgrammatik und eines dafür geeigneten Übersetzers, für dessen Bau erprobte Techniken aus dem Compilerbau eingesetzt werden können. Zu den zentralen Eigenschaften einer solchen zukünftigen Entwurfssprache zählen: Die

- ☐ *Syntax* der Entwurfssprache zur Erstellung der Sprachübersetzer zur Entwurfserzeugung (*design assembler*) aus einer Entwurfsbeschreibung, dadurch werden auch zulässige von unzulässigen Entwurfsbeschreibungen unterschieden, die
- ☐ *Semantik* der Sprachelemente, die die geometrische, physikalische und alle für den Entwurf relevanten Beschreibungselemente, generische Bedeutung, Begründung (*design disassembler*) und Dokumentation des Entwurfs beinhalten, und die
- ☐ *Pragmatik* der Sprache, mit der die generisch formulierten Ingenieurmodelle in einem konkreten Entwurfskontext zur Bewertung (*design projector*) der Entwurfsvarianten herangezogen werden können und damit einer Optimierung zugänglich sind.

Trotz der Betonung formaler Sprachkonzepte ist zu beachten, daß die Entwurfssprache nur eine Schale darstellt, deren Inhalte aus der multidisziplinären Physik der Entwurfsbeschreibungen bestehen und die durch dimensionslose Kennzahlen bewertet werden können. Die Ähnlichkeitstheorie nimmt daher in der Entwurfsbewertung einen zentralen Platz in Entwurfssprachen ein und wird diesbezüglich z.B. auch mit den klassischen Anwendungen der Ähnlichkeitstheorie in der Baureihenentwicklung verschmelzen, die die Entwurfssprachen bereits auf natürliche Art und Weise unterstützen.

5 Zusammenfassung

In zahlreichen Gebieten der Wissenschaft werden ständig neue Methoden und Verfahren entwickelt, um drängende neue Probleme zu lösen oder existierende Lösungen weiter zu verbessern. Ist man sich der Leistungsfähigkeit der Ähnlichkeitstheorie bewußt, so kann in allen Fällen, in denen eine reellwertige und dimensionsbehaftete Beschreibung vorliegt, die Ähnlichkeitstheorie mit in die Lösung einbezogen werden.

Für die Problemlösung bedeutet dies, daß in der Suche nach neuen Lösungsverfahren die Klasse aller reellwertigen und dimensionsbehafteten Problembeschreibungen immer einer ähnlichkeitsmechanischen Betrachtung zugänglich ist und sich in dieser Hinsicht prinzipiell von vielen anderen Problembeschreibungen unterscheidet. Auch in den Fällen reellwertiger, vorgeblich „dimensionsloser Probleme“, wie dies traditionell in der Mustererkennung in Kapitel 4.4 angenommen wird, muß dies nicht unbedingt daher rühren, daß dieses Gebiet keine Dimensionsbegriffe besäße. Dies bedeutet lediglich, daß dort bisher keine Dimensionsbegriffe bekannt oder benutzt worden sind.

Da die Bemühungen der Wissenschaft bisher nur auf die Kenntnis der 7 klassischen physikalischen Dimensionsbegriffe des SI-Systems geführt haben, könnte man versucht sein, der Ähnlichkeitstheorie nur eine Nebenrolle in der zukünftigen Entwicklung der Wissenschaft zuzubilligen. Da jedoch der Begriff der Dimension über seine korrespondierenden Maßeinheiten direkt an den Vorgang des Messens und damit auch mit der Existenz von Sensoren einhergeht, ergeben sich Dimensionsbetrachtungen ganz zwangsläufig auch in der Meßwertverarbeitung in jedweder Art von sensorgestützten Systemen.

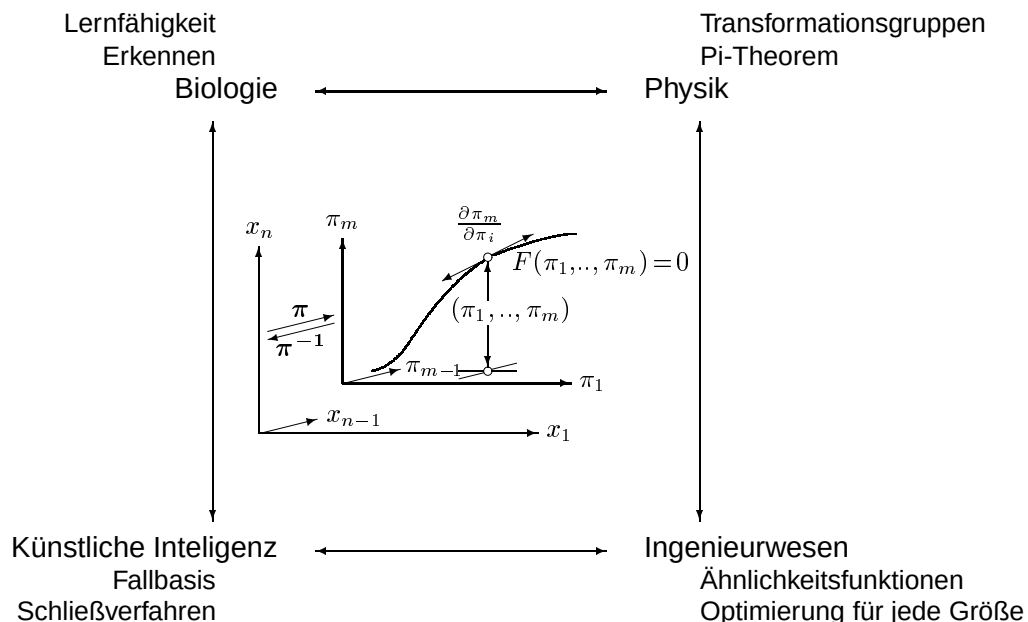


Abbildung 101: Interdisziplinäre Interpretation formaler Ähnlichkeitsbeziehungen

Nach Abbildung 101 bedeutet dies, daß sich für die Modellerstellung in den verschiedenen Gebieten der Biologie, der Künstlichen Intelligenz, des Ingenieurwesens und der Physik über die mit Sensorsignalen automatisch einhergehenden Maßeinheiten und deren zugehörigen bzw. äquivalenten vektoriellen Dimensionsbegriffen eine interdisziplinäre Modellbildungschance auf der Basis dimensionsloser Gruppen ergibt.

In Abbildung 101 eröffnen dimensionslose Betrachtungen somit Chancen hinsichtlich einer interdisziplinären Modellbildung für Prozesse, die in der Biologie, der Künstlichen Intelligenz, dem Ingenieurwesen und der Physik von großem Interesse sind. So sind die Eigenschaften der Lernfähigkeit, die Wiederverwendung von Erfahrungswissen, sowie die Optimierung auf jede Größe usw. für die Entwicklung zukünftiger intelligenter Lösungen und Systeme wichtige und wünschenswerte Eigenschaften.

Im Ingenieurwesen bietet in Kapitel 4.1 die Betrachtung von Vorgängen in Form von Ähnlichkeitsfunktionen die Möglichkeit, Prozesse (z.B. der Energieumwandlung) und deren Einflußgrößen größenunabhängig darzustellen und durch die Rücktransformation der dimensionslosen Kennzahlen in dimensionsbehaftete Größen die dimensionslose (Bewertungs-)Aussage (z.B. den Wirkungsgrad $\eta = \dot{W}_n / \dot{Q}_b = \text{const}$ in Abbildung 100) beizubehalten und damit eine Optimierung auf jede Größenausprägung $\dot{W}_n$ zu erzielen.

So kann die Lernfähigkeit in neuronalen Netzen in Kapitel 4.2 nach Vorbildern aus der Biologie in der formalen Abstraktion als Funktionsapproximationsproblem der Sensorsignale dargestellt werden. Da physikalische Sensorsignale immanent dimensionsbehaftet sind, ergeben sich im Aufbau der inneren Knotenstruktur neuronaler Netze dimensionslose Kennzahlen, deren Verschaltung und interne Gewichtung nach abgeschlossenem Lernvorgang eine beweisbare Generalisierung und verbesserte Interpretation des zugrundeliegenden Vorgangs als dimensionslose Ähnlichkeitsfunktion ermöglichen.

Für die Wiederverwendung von Erfahrungswissen bietet in der Künstlichen Intelligenz in Kapitel 4.3 der Aufbau eines fallbasierten Expertensystems durch die Darstellung des Fallwissens als vollständige Prämissen-Konklusionsbeziehung beim Vorliegen von reellwertigen und dimensionsbehafteten Fallattributen die Möglichkeit der Verallgemeinerung in dimensionslose Prämissen-Konklusionsbeziehungen. Dadurch können aufgrund des verwendeten Ähnlichkeitsbegriffs innerhalb der Modellvorstellung konsistente fallbasierte Aussagen für die ganze Ähnlichkeitsklasse erzeugt werden [222].

Die Physik stellt hierfür durch das Pi-Theorem für physikalische Dimensionen und dazu äquivalenten vektoriellen Dimensionsbegriffen die Beweisgrundlagen und mathematischen Methoden zur Verfügung. Es wird dabei natürlich nicht möglich sein, alle Probleme allein mit Ähnlichkeitstheorie zu lösen. Die Ähnlichkeitstheorie kann jedoch im Sinne oft gesuchter Modellbildungsgleichungen in Form von Gleichung (142) immer dazu eingesetzt werden, die Anzahl der betrachteten Variablen auf $m = n - r$ zu reduzieren und dabei alle unendlich vielen vollähnlichen Fälle auf eine einzige Punktprobe der entsprechenden Ähnlichkeitsfunktion F in Gleichung (143) zusammenzufassen.

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (142)$$

$$= \underbrace{\prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_{mi}}}_{\text{aus } \pi_m^{-1}} F \left(\underbrace{x_{r+1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{1i}}}_{\text{für } \pi_1}, \dots, \underbrace{x_{n-1} \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{(m-1)i}}}_{\text{für } \pi_{m-1}} \right) \quad (143)$$

Die Ähnlichkeitstheorie ist daher ein hervorragendes Werkzeug zur weiteren Verschärfung von Aussagen, da z.B. die Kenntnis von weiteren Zusatzbedingungen bei gleichzeitiger Reduktion der freien Variablen die Anzahl der dann noch verbleibenden Freiheitsgrade weiter einschränkt. Zusätzlich ergeben sich durch die Kennzahlen in Gleichung (143) z.B. mit $\pi_j = \text{const}$ nützliche Validierungskriterien.

5.1 Ergebnisse

Als Vorgehensweise lassen sich in der Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen mehrere aufeinander aufbauende thematische Teilschritte festhalten, aus denen sich dann die dimensionslosen Variablen $\pi_1, \dots, \pi_m$ aus dem Pi-Theorem von Buckingham ergeben. So besteht der erste Schritt aus der Festlegung der sogenannten Relevanzliste, die einen wesentlichen Schritt in der Festlegung des dem unbekannten Objekt oder Vorgang unterstellten Verhaltens bedeutet. Im zweiten Schritt ist dann die Dimensionsmatrix aus den zugehörigen Dimensionsexponenten der Dimensionsdarstellungen zu erstellen, wobei die genaue Analyse der dem Problem eventuell zugrundeliegenden weiteren Zwangsbedingungen die Benutzung vektorieller Dimensionsbegriffe ermöglichen kann.

Ergänzend zu diesen beiden Schritten der klassischen Ähnlichkeitstheorie stellt der ab Seite 34 dargestellte Einbettungssatz den formalen Rahmen dar, der bei einer Übertragung der Ähnlichkeitstheorie auf neue Anwendungsgebiete beachtet werden muß. Darüber hinaus stellt der Einbettungssatz eine generelle Vorgehensweise für die Übertragung des physikalischen Ähnlichkeitsbegriffs dar, für den die Übertragungsergebnisse hier nochmals aufgezählt sind, die aber auch als Ausgangsbasis für zukünftige Übertragungen verwendet werden können.

Im folgenden sind die Ergebnisse der Ähnlichkeitsbetrachtungen dargestellt, die sich durch die Übertragung in die einzelnen Gebiete des Ingenieurwesens, der Informatik und der Künstlichen Intelligenz erzielen lassen:

- *Entwurfsbewertungsverfahren* (siehe Kapitel 4.1). Aus der Bewertungshypothese „Jede im Sinne des Pi-Theorems minimale Beschreibung ist eine Bewertung“ folgt ein Bewertungsverfahren, das als Bewertungsgrößen stets objektive physikalische Kennzahlen verwendet. Aus diesem Grund kann die für eine „gerechte Bewertung“ zentrale Frage nach der Menge aller gleich bewerteten Objekte mit der Menge aller vollähnlichen Objekte beantwortet werden.

Im Sinne der Bewertungshypothese ergibt sich damit die Gewinnung der dimensionslosen Bewertungskriterien (d.h. der Kennzahlenbegriffe $\pi_1, \dots, \pi_m$) samt deren Quantifizierung (d.h. die Gewinnung numerischer Zahlenwerte für die Bewertungsmaßstäbe $\pi_1, \dots, \pi_m$) sowie die Erstellung einer Aggregationsfunktion F zur Aggregation der Teilbewertungen $\pi_1, \dots, \pi_{m-1}$ zur Gesamtbewertung π_m als für jede dimensionsbehaftete Beschreibung mögliche dimensionslose Bewertung, die stets konsistent zur Beschreibung ist.

Durch die Bewertungshypothese wird daher im Gegensatz zu anderen Bewertungsverfahren nicht eine von außen durch den Menschen erdachte bzw. vorgegebene Menge an Bewertungskriterien über eine sich möglicherweise im Rahmen des Entwurfs noch ändernde Entwurfsbeschreibung gestülpt, sondern die Entwurfsbewertung ergibt sich zu jedem Zeitpunkt durch die dimensionslosen Gruppen, d.h. die dimensionslosen „Eigenmaßstäbe“ der Beschreibung.

- *Neuronale Netze* (siehe Kapitel 4.2). Durch die Verwendung der Dimensionsinformation der Eingangs- und Ausgangsgrößen in neuronalen Netzen ergibt sich eine Reduktion aller kombinatorisch möglichen inneren Netzverbindungen, da in Kenntnis des Prinzips der Dimensionshomogenität das neuronale Netz nur dimensionshomogene Beziehungen darstellen sollte. Dies wird durch die Transformation auf dimensionslose Kennzahlen gewährleistet.

Durch Trainingsdaten wird das neuronale Netz dann im Sinne des Pi-Theorems an die noch verbleibende unbekannte Ähnlichkeitsfunktion adaptiert. Dies stellt ein Topologieinterpretationsschema für neuronale Netze dar, das auch im allgemeinen Fall nicht-linearer Funktionen gilt und das Verständnis der Netztopologie erleichtert. Durch die Verwendung vollähnlich vervielfältigter Daten im Lernprozeß können desweiteren während des Lernverfahrens diejenigen neuronalen Netztopologien ausgewählt werden, die besonders gut generalisieren und damit ein zu den Daten passendes Skalierungsverhalten aufweisen.

- *Fallbasiertes Schließen* (siehe Kapitel 4.3). Die mathematische Unterlegung des fallbasierten Schließens mit Hilfe dimensionsloser Kennzahlen in reellwertigen und dimensionsbehafteten Domänen zeigt die Gültigkeit der Denkweise des fallbasierten Schließens und ermöglicht erstmalig eine exakte Definition des Vorgehens, des zu verwendenden Ähnlichkeitsbegriffs, sowie darauf aufbauend die Ableitung eines Beweises für korrektes fallbasiertes Schließen.

Der Vergleich des neu eingeführten physikalischen Ähnlichkeitsbegriffs mit den bisher im fallbasierten Schließen häufig eingesetzten sonstigen „Ähnlichkeitsmaßen“ zeigt, daß die Wahl des Ähnlichkeitsbegriffs nie willkürlich von außen, sondern in allen reellwertigen und dimensionsbehafteten Domänen auf den physikalischen Ähnlichkeitsbegriff beschränkt ist und daher mit den ansonsten verwendeten klassischen Distanzmaßen nicht richtig approximiert werden kann.

- *Mustererkennung* (siehe Kapitel 4.4). Die Berücksichtigung der Bildausdehnung in x -, y - und z -Richtung bzw. von Helligkeits- und Farbwerten usw. als vektorielle Dimensionen führen über die Verwendung höherer Momente als Bildrepräsentation auf dimensionslose Bildmerkmale π_{pqr} , die über $\pi_{pqr} = \text{const}$ sofort als Ähnlichkeitspostulat in der Bildklassifikation verwendet werden können. Dies garantiert auch, daß alle vollähnlichen Bilder gleich klassifiziert werden, da deren dimensionslose Bildmerkmale für den nachgeschalteten Klassifikator ununterscheidbar sind.

Neben den analytisch beweisbaren Eigenschaften der dimensionslosen Bildmerkmale ergibt sich eine beliebige Verallgemeinerungsfähigkeit der Merkmalsgewinnung auf n physikalische Dimensionen, sowie durch die prinzipiell mögliche Rücktransformation eine Visualisierungsmöglichkeit für die sich im Klassifikator im Rahmen eines beispielbasierten Lernverfahrens einstellenden Klassengrenzen.

- *Geräuschklassifikation* (siehe Kapitel 4.5). Die Geräuschklassifikation hat mit der bereits besprochenen Mustererkennung zahlreiche Verfahrensgemeinsamkeiten, da das Geräusch (d.h. die Zeitreihe als Ursignal) mittels einer parametrisierten Integraltransformation in ein Falschfarbenbild umgesetzt wird und dadurch direkt im Anschluß die gesamte bereits bekannte Verfahrensweise der Merkmalsgewinnung, -extraktion und Klassifikation aus der Mustererkennung angewendet werden kann. Die Parametrisierung der Integraltransformation erlaubt hierbei eine Adaptierung der Vorverarbeitung an die spezielle Geräuschart.

Der Ursprung des Farbbilds als eine Zeitreihe ist für diese Vorgehensweise in der Klassifikation nur insofern von Bedeutung, als daß ein geometrisch motivierter Ähnlichkeitsbegriff über eine Integraltransformation in die Akustik übertragen wird und somit dort ein objektiver Ähnlichkeitsbegriff zur Klassifikation zur Verfügung steht. Dadurch konnte die Vorstellung „akustischer Ähnlichkeit“ erstmals formal anhand zweier Geräuschklassen analytisch validiert werden.

- *Data Mining* (siehe Kapitel 4.6). Der Einbau der Ähnlichkeitstheorie in den Prozeß der Wissensentdeckung ermöglicht es, eine bewährte Modellvorstellung zur Verdichtung der Daten anzuwenden, d.h. zu einer Reduktion der Rohdaten auf dimensionslose Kennzahlen bzw. „Informationsbegriffen“ zu kommen, deren verbleibender funktionaler Zusammenhang in Form einer Ähnlichkeitsfunktion dann als „Wissen“ über das Objekt oder den Vorgang bezeichnet werden kann.

Die Übertragung, die auf der Anwendbarkeit des Pi-Theorems beruht, zeigt die Bedeutung des Ursache-Wirkung-Prinzips der jeweiligen Problemdomäne sowie weiterer inherenter Domäneneigenschaften auf, die die erforderliche Rohdatenvorverarbeitung wesentlich beeinflussen und für eine problemangepaßte Auswahl der einzelnen Datenvorverarbeitungsschritte wichtig sind.

- *Computergestützter Ingenieurentwurf* (siehe Kapitel 4.7). Zur computergestützten Exploration von Suchräumen im Ingenieurentwurf werden Entwurfssprachen zur automatisierten Generierung von Physik und Geometrie, sowie weiterer erforderlicher Eigenschaften eines Entwurfsobjekts verwendet. Durch evolutionäre Mutation dieser Entwurfssprache ist es dann möglich, eine Vielzahl von Entwürfen zu generieren, die dann im Hinblick auf die Zielvorgaben bewertet werden müssen. Aufgrund der hier sehr großen Anzahl an Entwürfen muß die Bewertung vollständig in ein Softwareprogramm abgebildet werden, daher können nur automatisierbare Bewertungsverfahren zum Einsatz kommen.

In der Erstellung derartiger automatisierbarer Bewertungsmodelle muß es deshalb möglich sein, sowohl die Physik als auch die Geometrie (sowie evt. weitere vorhandene Entwurfseigenschaften) zu bewerten, was durch die gezeigten Verfahren zur Mustererkennung für die Bewertung der Geometrie, sowie für die Bewertung der Physik durch die Bewertungshypothese erfolgreich gezeigt wurde. Für den Ausbau der Bewertungsmethode auf zukünftige Entwurfseigenschaften sind damit lediglich dimensionshomogene Beschreibungen erforderlich.

Die (Entwurfs-)Bewertung mit dimensionslosen Kennzahlen erfüllt die Forderung, Gütekriterien in Form von dimensionslosen Kennzahlen aus den sich während der Generierung erst bildenden Beschreibungen durch Transformation automatisch zu ermitteln und damit einer objektiven Bewertung zugänglich zu machen. Durch die Eigenschaften dimensionsloser Kennzahlen kann damit leicht gezeigt werden, daß die abgeleiteten Gütekriterien für die Entwurfsoptimierung skaleninvariant sind und daher alle vollähnlichen Objekte gleich bewertet werden.

Die Ähnlichkeitstheorie nimmt somit durch die Formulierung dimensionsloser Gütekriterien in der Optimierung von Physik und Geometrie zukünftiger Entwurfsobjekte in der Informationsverarbeitung von Entwurfssprachen eine zentrale Rolle ein, deren Wichtigkeit im Rahmen einer ersten Anwendung auf Hochspannungsmasten exemplarisch aufgezeigt werden konnte.

Durch die gezeigten Übertragungen der Ähnlichkeitstheorie in den Kapiteln 4.1 bis 4.7 in zahlreiche Gebiete des Ingenieurwesens, der Informatik und der Künstlichen Intelligenz ergibt sich über diese Ergebnisse erstmals die Perspektive, über eine einheitliche mathematische Basis die Algorithmen der Künstlichen Intelligenz mit bewährten ähnlichkeitsmechanischen Methoden des Ingenieurwesens konsistent miteinander zu verbinden. Daraus ergibt sich ein neuer Forschungsansatz, der aufgrund seiner breiten mathematischen Grundlagen sehr trag- und ausbaufähig ist.

5.2 Ausblick

Unter Verwendung der bildlichen Darstellung in Abbildung 11 kann der formale Rahmen zur Definition einer beweisbaren Analogie noch erweitert werden. Die Definition von Analogie ist insofern von besonderem Interesse, da die Analogiebeziehung formal abgeleitet werden kann. Grundsätzlich ergibt sich daraus die hier noch kurz dargestellte interessante Möglichkeit der systematischen mathematischen Suche nach neuen, bislang unbekannten Analogiebeziehungen.

Die Existenz einer Analogie beruht darauf, daß die in den Domänen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ verwendeten Gleichungen in dimensionsloser Form zusammenfallen, d.h. durch die neutrale Transformation $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{I}$ trivialerweise aufeinander abgebildet werden. Entsprechend Abbildung 102 ist es daher möglich, die Abbildung $\mathcal{T}$ z.B. durch die weit weniger strenge Voraussetzung $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}$ auf die Klasse der umkehrbaren Transformationen zu erweitern. Dies kann in Abbildung 102 auf die Existenz weiterer Analogien führen, die auch als erweiterte Analogie bezeichnet werden.

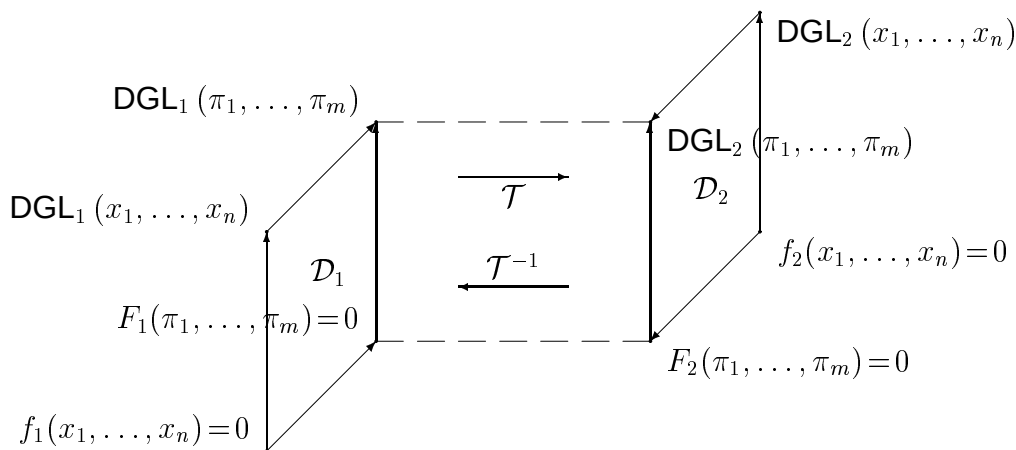


Abbildung 102: Erweiterte Analogie

In der Mathematik werden die sich je nach Gleichungsart von f bzw. der $\text{DGL}(x)$ aus der Frage nach der Existenz und Konstruktion solcher Transformationen $\mathcal{T}$ ergebenden und noch offenen mathematischen Grundlagenfragen entsprechend Abbildung 102 bzw. nach Gleichung (1) mit der Theorie der LIE-Gruppen untersucht [54, 107, 179].

In der Künstlichen Intelligenz kommt das Interesse an Analogien von der Vorstellung, daß z.B. vom Standpunkt des fallbasierten Schließens aus mittels solcher erweiterter Transformationen $\mathcal{T}$ ein auf einer Domäne $\mathcal{D}_1$ erprobter Schlußfolgerungsmechanismus formal auf eine weitere Domäne $\mathcal{D}_2$ übertragen werden kann [94, 121]. Daraus könnte sich die Möglichkeit ergeben, „universell gültige“ Schlußfolgerungsmechanismen auf einer Meta-Ebene abstrakt zu formulieren und durch lernfähige Transformationen $\mathcal{T}$ an die jeweilige konkrete Anwendungsdomäne anzupassen.

Im Ingenieurwesen könnte neben derartigen Analogiebetrachtungen und weiteren Übertragungen von Ähnlichkeitsbegriffen auch die klassische Ähnlichkeit in Modellversuchen durch den Einsatz von Rapid-Prototyping-Verfahren [48, 234], in denen z.B. durch Auftragen von Material virtuelle Prototypen reale Gestalt annehmen, noch wichtiger werden. Gelänge es, durch neue Werkstoffentwicklungen in Rapid-Prototyping-Verfahren hinrei-

chend vollähnliche Material- und Modelleigenschaften mit der Originalausführung zu erreichen, könnten im Rechner konzipierte virtuelle Prototypen aus dem CAD-System entsprechend ähnlichkeitsmechanisch skaliert und anschließend vollautomatisch hergestellt werden. Die Problematik der bisher noch weitgehend manuellen und deshalb sehr teuren und zeitaufwendigen Herstellung detailgetreuer (Modell-)Versuchsmodelle wäre mit einem derartigen Rapid-Prototyping-Verfahren durch die bereits vorhandene Anbindung an die existierende CAD/CAE-Prozeßkette elegant gelöst.

Gelänge es darüber hinaus, in das Rapid-Prototyping-Verfahren die für die elektronische Datenerfassung der Modellversuche notwendige Meßtechnik (Sensoren, Signalverstärker, A/D-Wandler, Funkübertragung, etc.) bereits während des Herstellungsprozesses in den Schichtaufbau des Modellwerkstoffs mit zu integrieren, würde dies die praktische Handhabbarkeit der Meßtechnik zusätzlich erleichtern.

Desweiteren kann die Ähnlichkeitstheorie die Übertragung bewährter Prinziplösungen auf miniaturisierte Systeme, die durch die Entwicklung moderner Fertigungsmöglichkeiten in der Mikro- und Nanotechnologie ermöglicht werden, sinnvoll unterstützen. Dieses Potential der Ähnlichkeitstheorie im Entwurf solcher nano- und mikromechanischer Systeme zeigen bereits mehrere Arbeiten [69, 96] auf.

Da nicht nur in der Luft- und Raumfahrtindustrie (z.B. im Windkanal [93, 211]), sondern auch in der Automobilindustrie (z.B. im Crash [12, 50]), der verfahrenstechnischen Industrie (z.B. beim Rühren [170, 241, 242, 243, 244]) bis hin zur Biologie [19, 87, 201] komplexe physikalische Vorgänge neben der Rechnersimulation ergänzend in Modellversuchen experimentell untersucht werden, ergibt sich hier ein weites zukünftiges und fruchtbares Betätigungsfeld für die Ähnlichkeitstheorie.

Die aufgezeigten und zukünftigen Möglichkeiten der theoretischen Weiterentwicklungen und praktischen Anwendungen der Ähnlichkeitstheorie stellen sicher, daß heute, rund 100 Jahre nach den ersten Veröffentlichungen und Beweisversuchen des Pi-Theorems für dimensionshomogene Funktionen durch VASCHY (1899) und BUCKINGHAM (1914), das Potential der Ähnlichkeitstheorie mit dem bisher bekannten Wissen und erprobten Vorgehensweisen noch in keinster Weise erschöpft ist, sondern eine Vielzahl weiterer und faszinierender Forschungsthemen in sich birgt, aus deren Umsetzung für die Zukunft des Ingenieurwesens wichtige Innovationsimpulse gewonnen werden können.

A Anhang

A.1 Herleitung Produkt-Theorem

Beweisgedanke [22, 33, 39]. Unter der Voraussetzung der Invarianzeigenschaft von Verhältnissen der Basisgrößen unter Skalentransformationen leitet man einen allgemeinen Funktionsansatz nach diesen Größen ab und führt dies auf eine Funktionalgleichung zurück, deren einzige Lösungen Beziehungen der zu beweisenden Form darstellen.

Herleitung. Physikalischen Größen werden in die zwei Klassen der primären und der sekundären Größen unterschieden. Die primären Größen $x_1, \dots, x_n$ sind dabei nach BRIDGMAN durch ihre „grundsätzliche und nicht weiter zu vervollkommnende Einfachheit“ (*fundamental and of irreducible simplicity* [33]) gekennzeichnet.

Die primäre Größen sind somit durch Änderung des Einheitenmaßstabs skalierbar, daher gilt für die zwei Zahlenwerte x_i und y_i einer Primärgröße bei Änderung des i -ten Einheitenmaßstabes von 1 auf $1/\lambda_i$ mit $\lambda_i \neq 0$

$$x'_i = \lambda_i x_i \quad (144)$$

$$y'_i = \lambda_i y_i \quad (145)$$

und der daraus gebildete Quotient ist damit invariant unter Einheitentransformationen

$$\frac{x'_i}{y'_i} = \frac{x_i}{y_i} \quad (146)$$

Die Eigenschaft (146) wird nach BRIDGMAN auch als „die absolute Bedeutung relativer Größen“ (*absolute significance of relative magnitude* [33]) bezeichnet. Sekundäre Größen sind von den primären Größen über Beziehungen der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (147)$$

abgeleitet. Unter Voraussetzung der Invarianz unter Skalentransformationen gilt auch für Verhältnisse sekundärer Größen

$$\frac{f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)}{f(\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \dots, \lambda_n y_n)} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (148)$$

für alle $\lambda_i \neq 0$. Umstellen der Faktoren liefert

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = f(y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (149)$$

Partielles Ableiten nach λ_1 liefert

$$x_1 \frac{\partial f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial x'_1} = y_1 \frac{\partial f(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)}{\partial y'_1} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (150)$$

und anschließende Wahl von $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \equiv 1$ führt auf

$$\frac{x_1}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{y_1}{f(y_1, y_2, \dots, y_n)} \frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1} \quad (151)$$

und, wenn man die rechte Seite konstant hält und nur x_1 auf der linken Seite variiert, zu

$$\frac{x_1}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \text{const} \quad (152)$$

was auch als

$$\frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \text{const} \quad (153)$$

geschrieben werden kann. Dies kann auf die CAUCHY'sche Funktionalgleichung zurückgeführt werden, deren einzige Lösung die Form ($\text{const} \neq 0, \text{const} \neq -1$)

$$f = C_1 x_1^{\text{const}} \quad (154)$$

besitzt. Die Erfüllung dieser Behauptung kann durch Ableiten der Gleichung zumindest kontrolliert werden, in dem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \text{const} \cdot \frac{f}{x_1} \quad (155)$$

ebenfalls auf die Form (154) gebracht wird. Dabei kann die Konstante C_1 noch eine Funktion der restlichen $x_2, x_3, \dots, x_n$ sein. Die Wiederholung des gesamten Beweisgangs ab Gleichung (150) bis (154) für diese noch verbleibenden x_i führt damit auf die zu zeigende Form

$$f = C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (156)$$

wobei für festes $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ ist und $C, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ reelle Konstanten sind.

A.2 Herleitung Pi-Theorem

Beweisgedanke [57]. In Analogie zur Rangbestimmung von Matrizen mit dem Algorithmus nach GAUSS wird durch sukzessives Pivotieren und Eliminieren diese Grundidee der Beweisführung auf eine beliebige vollständige dimensionshomogene Beziehung zwischen n physikalischen Größen angewandt und dann unter Zuhilfenahme des Produkt-Theorems die Reduktion auf eine Beziehung von genau $m = n - r$ dimensionslosen Potenzprodukten bewiesen.

Herleitung. Zunächst wird aus den in der Beziehung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ enthaltenen x_i die in Abbildung 103 links dargestellte Dimensionsmatrix gebildet. Diese Dimensionsmatrix ist rechteckig und besitzt n Zeilen zur Aufnahme der x_1 bis x_n und hat bis zu k Spalten, die die physikalische Dimension des verwendeten Einheitensystems darstellen.

Die Matrixelemente a_{ij} sind in der Darstellung eines x_i in Abbildung 103 links die Exponenten in der j -ten Dimension. Anschließend werden alle Nullspalten gestrichen und die Dimensionsmatrix durch rangerhaltende Spaltenumformungen auf eine obere Dia-

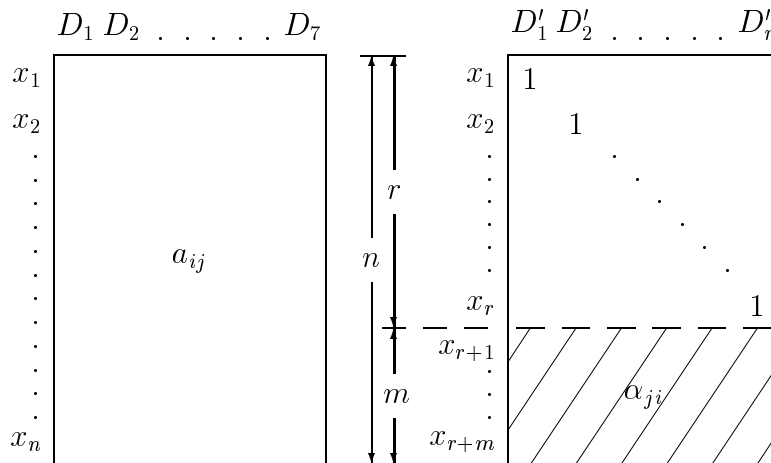


Abbildung 103: Dimensionsmatrix mit rangerhaltenden Umformungen

gonalform gebracht, siehe Abbildung 103 rechts. Dies bedeutet, daß die Menge der physikalischen Größen $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ in der Relevanzliste der Beziehung

$$f(X_n) = 0 \quad n \geq 2 \quad (157)$$

in die zwei Mengen $X_i = \{x_1, \dots, x_r\}$ der primären und damit linear unabhängigen Basisgrößen und in die Menge $X_j = \{x_{r+1}, \dots, x_m\}$ der sekundären und damit abhängigen physikalischen Größen in der Beziehung

$$f(X_i, X_j) = 0 \quad \begin{cases} m = n - r \\ i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (158)$$

aufgeteilt werden kann. Die Indizierung von X_j wurde von $r + 1, \dots, n$ auf $1, \dots, m$ geändert, siehe Abbildung 103 rechts. Jede der beiden Mengen X_i und X_j hat dabei mindestens ein Element, da die Menge X_n aufgrund der Dimensionshomogenität von Gleichung (157) garantiert, daß weder die Menge X_i noch die Menge X_j eine leere Menge sein kann.

Skaliert man die Einheiten λ_i aller primären Größen $x_i \in X_i$ entsprechend der Skalierungseigenschaft physikalischer Größen nach Gleichung (144) von x_i auf $\lambda_i x_i$, so werden wegen des Produkt-Theorems alle sekundären Größen $x_j \in X_j$ entsprechend ihrer Exponentendarstellung in der Dimensionsmatrix mitskaliert, was für jede einzelne Größe auf Transformationen der Form

$$f(\lambda_i x_i, x_j \prod_{i=1}^r \lambda_i^{\alpha_{ji}}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (159)$$

führt. Wählt man die Skalierungsfaktoren so, daß $\lambda_i x_i = 1$ gilt, führt umformen mit $\lambda_i = 1/x_i$ schließlich auf

$$\begin{aligned} f(1, x_j \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}}) &= 0 & \text{bzw.} \\ f(\Pi_m) &= 0 & m = n - r \end{aligned} \quad (160)$$

wobei mit $\Pi_m = \{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ die Menge aller dimensionslosen Variablen der Form

$$\pi_j = x_j \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}} \quad j = 1, \dots, m \quad (161)$$

mit $m = n - r$ erklärt ist.

Hinweis: In der Formulierung der $m = n - r$ dimensionslosen Variablen des Pi-Theorems ist zu betonen, daß sich r aus dem Rang und nicht der Dimension der Dimensionsmatrix berechnet. Es kann in Aufgabenstellungen der Dimensionsanalyse, wie z.B. in der Dimensionsmatrix in Tabelle 23 auf Seite 153 durchaus zu Rangabfällen kommen. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein kleineres Basisgrößensystem als das SI-System zur Beschreibung der in der problemabhängigen Relevanzliste enthaltenen physikalischen Größen ausreichend wäre.

Ältere Herleitung des Pi-Theorems

Diskussion. Die nachfolgende Darstellung eines funktionentheoretischen Beweises des Pi-Theorems nach BRIDGMAN [33] wurde in der geschichtlichen Entwicklung von dem in Abschnitt A.2 bereits dargestellten moderneren, rein algebraischen Beweis abgelöst, der ohne die Voraussetzung der C^1 -Stetigkeit der Funktion f auskommt [76] und sich in der gezeigten Darstellung stark an der Beweisführung in [57] orientiert.

Beweisgedanke [33, 22]. Die Exponenten der Einheitendarstellungen physikalischer Größen bilden in der Dimensionsmatrix wegen der Dimensionshomogenität physikalischer Gleichungen ein homogenes lineares Gleichungssystem. Für lineare homogene Gleichungssysteme bewiesenen Eigenschaften über Lösbarkeit, Austauschbarkeit von Basen usw., können mithilfe des Produkt-Theorems zur Herleitung einer Beziehung von genau $m = n - r$ dimensionslosen Potenzprodukten verwendet werden.

Herleitung. Sekundäre Größen skalieren sich bei Änderungen der Maßeinheiten λ_i gemäß dem Produkt-Theorem zu

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j \lambda_1^{\alpha_{j1}} \lambda_2^{\alpha_{j2}} \dots \lambda_r^{\alpha_{jr}} \\ &= x_j \prod_{i=1}^r \lambda_i^{\alpha_{ji}} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (162)$$

und damit folgt für die später noch notwendigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x'_j}{\partial \lambda_1} = \frac{\alpha_{j1}}{\lambda_1} x'_j \quad (163)$$

Die Beziehung $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ soll auch für nach Gleichung (162) einheitentransformierte Größen gelten, daraus folgt der Ansatz

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= 0 \quad \text{bzw.} \\ f(x_1 \lambda_1^{\alpha_{11}} \lambda_2^{\alpha_{12}} \dots, x_2 \lambda_1^{\alpha_{21}} \lambda_2^{\alpha_{22}} \dots, \dots, x_n \lambda_1^{\alpha_{n1}} \lambda_2^{\alpha_{n2}} \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

Nach dem Maßstabsfaktor λ_1 abgeleitet und wegen der vorausgesetzten Invarianz erhält man sofort $\partial f / \partial \lambda_1 = 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial f}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial \lambda_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_1} \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial \lambda_1} \right) \end{aligned} \quad (165)$$

was nach dem Einsetzen der Ableitungen (163) und der Wahl von $\lambda_1 = 1$ auf

$$0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x'_j} \alpha_{j1} x'_j \right) \quad (166)$$

führt. Eine zweite Variablentransformation mit $x'_j, \alpha_{j1} \neq 0$ für den „Pivotschritt“ mit

$$x''_j = x'_j{}^{1/\alpha_{j1}} \quad (167)$$

und den daraus folgenden später ebenfalls benötigten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x''_j}{\partial x'_j} = \frac{x''_j}{\alpha_{j1} x'_j} \quad (168)$$

ergibt dann für die Darstellung in Gleichung (165) und der Wahl von $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x''_j} \frac{\partial x''_j}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial \lambda_1} \right) \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x''_j} x''_j \end{aligned} \quad (169)$$

Mit der dritten Variablensubstitution mit $x_n'' \neq 0$ für den „Eliminationsschritt“ mit

$$\begin{aligned}\xi_i &= x_i''/x_n'' & \text{und damit} \\ \xi_n &= 1\end{aligned}\tag{170}$$

und den daraus folgenden ebenfalls wichtigen Ableitungen

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j''} = \begin{cases} 1/x_n'' & \text{für } j \neq n \\ 0 & \text{für } j = n \end{cases}\tag{171}$$

kann für die erneut umgeschriebene Identität $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\xi_1 x_n, \xi_2 x_n, \dots, x_n)$ durch Ableiten und Verwendung von Beziehung (165) gezeigt werden, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_n''} = 0\tag{172}$$

ist und f somit nur eine Funktion von $n - 1$ Variablen darstellt, was auch als

$$g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = 0\tag{173}$$

geschrieben werden kann. Die ξ_i sind dabei in der ersten Dimension dimensionslos, was durch Einsetzen aller Variablen zur Rücksubstitution bestätigt wird:

$$\begin{aligned}\xi_j &= \frac{x_j''}{x_n''} = \frac{x_j'^{1/\alpha_{j1}}}{x_n'^{1/\alpha_{n1}}} \\ &= \frac{(x_j \lambda_1^{\alpha_{j1}} \lambda_2^{\alpha_{j2}} \dots \lambda_r^{\alpha_{jr}})^{1/\alpha_{j1}}}{(x_n \lambda_1^{\alpha_{n1}} \lambda_2^{\alpha_{n2}} \dots \lambda_r^{\alpha_{nr}})^{1/\alpha_{n1}}} \\ &= \frac{(x_j \lambda_2^{\alpha_{j2}} \dots \lambda_r^{\alpha_{jr}})^{1/\alpha_{j1}}}{(x_n \lambda_2^{\alpha_{n2}} \dots \lambda_r^{\alpha_{nr}})^{1/\alpha_{n1}}}\end{aligned}\tag{174}$$

Beginnend mit Gleichung (173) kann der Beweisgang von Gleichung (164) bis (173) solange wiederholt werden, wie noch $r - 1$ (linear unabhängige) Dimensionen in den ξ vorhanden sind. Dies führt damit auf die zu zeigende Form

$$F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0\tag{175}$$

mit $m = n - r$, wobei r den Rang der durch die x_j gebildeten Dimensionsmatrix darstellt und die ξ_j nach Gleichung (174) damit jeweils dimensionslose Potenzprodukte π_j in der Form

$$\pi_j = x_j \prod_{i=1}^r x_i^{-\alpha_{ji}}\tag{176}$$

ergeben. Die Funktion $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ heißt Ähnlichkeitsfunktion oder auch charakteristische Kennzahlenfunktion. Sie wird in der Regel aus experimentellen Daten als Approximationsfunktion bestimmt.

A.3 Entwurfsbewertungsbeispiel Gasturbine

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen der thermodynamischen Modellbildung einer idealisierten Gasturbine bereitgestellt. Die Modellierung erfolgt dabei nacheinander auf zwei unterschiedlichen Verfeinerungsstufen, der globalen Systemsichtweise und der in die einzelnen Systemkomponenten aufgelösten Komponentensichtweise.

Die Gleichungen der Gasturbine werden dann an mehreren verschiedenen Stellen wie z.B. in Abschnitt 4.1.3 zur Illustration der Bewertungsmethode nach dem Pi-Theorem, in Abschnitt 4.3.4 zur Berechnung von physikalisch beweisbaren Ähnlichkeitsmaßen im fallbasierten Schließen und in Abschnitt 4.7.3 zur Darstellung der Leistungsfähigkeit des Lösungspfadgenerators verwendet.

Systemsichtweise. Die Modellierung der Gasturbine [65] als Gesamtsystem erfolgt gemäß dem Blockschema in Abbildung 104. Dazu sind nach der Theorie der Erhaltungssätze alle thermodynamischen Größen zu erfassen, die die in der Modellierung festgelegten Systemgrenzen überschreiten. Dies sind die in Form von Treibstoff zugeführte (Wärme-)Leistung $\dot{Q}_b$, die (Wellen-)Leistung $\dot{W}_n$ und die (Abwärme-)Leistung $\dot{Q}_a$.

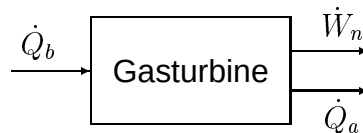


Abbildung 104: Systemschema Gasturbine [65]

In der Gasturbine wird im Sinne der klassischen Thermodynamik die Wärme $\dot{Q}_b$ teils in die Leistung $\dot{W}_n$ gewandelt und teils auch als die Wärme $\dot{Q}_a$ abgegeben. Mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik [65] in der Form $\sum_i (W_i + Q_i) = 0$ ergibt sich

$$\dot{W}_n = \dot{Q}_b - \dot{Q}_a \quad (177)$$

Gleichung (177) reicht zur Beschreibung einer Gasturbine auf Systemebene durchaus aus, da sich die drei beteiligten Größen $\dot{W}_n$, $\dot{Q}_b$ und $\dot{Q}_a$ ohne weitere Kenntnis der Prozeßführung experimentell bestimmen lassen und daher einfach zu ermitteln sind. Mehr muß für eine erste Beschreibung des Gesamtsystems Gasturbine nicht bekannt sein, die damit zunächst abgeschlossen ist.

Bewertung. Zur Bewertung des Gesamtsystems kann nach der Bewertungshypothese in Abschnitt 4.1.3 vorgegangen werden. Dazu ist aus der Relevanzliste $(\dot{W}_n, \dot{Q}_b, \dot{Q}_a)$ der Systembeschreibung die Dimensionsmatrix links in Tabelle 19 zu erstellen.

Variable	D_1	D_2	D_3		D'
$\dot{Q}_b$	1	2	-3	$\Rightarrow$	1
$\dot{Q}_a$	1	2	-3		1
$\dot{W}_n$	1	2	-3		1

Tabelle 19: Dimensionsmatrix der Gasturbine

Durch rangerhaltende Spaltenumformungen kann daraus die Normalform der Dimensionsmatrix rechts in Tabelle 19 mit Dimension $n=3$ und Rang $r=1$ gewonnen werden.

Entsprechend Abbildung 8 mit $m = n - r$ lassen sich die Bildungsgesetze für zwei dimensionslose Potenzprodukte $\pi_{1,G}$ und $\pi_{2,G}$ in Gleichungen (178) und (179) ablesen:

$$\pi_{1,G} = \dot{Q}_a / \dot{Q}_b \quad (178)$$

$$\pi_{2,G} = \dot{W}_n / \dot{Q}_b \quad (179)$$

Aus der Beschreibungsgleichung (177) des Gesamtsystems Gasturbine folgt durch einfaches Umformen und Einsetzen der Bewertungskriterien $\pi_{1,G}$ und $\pi_{2,G}$ die dimensionslose Bewertungsfunktion (180) des Gesamtsystems Gasturbine zu

$$\pi_{2,G} = 1 - \pi_{1,G} \quad (180)$$

Für eine Bewertung der Gasturbine reicht daher die Messung von $\dot{W}_n$ und $\dot{Q}_b$ aus, um die Maßzahl $\pi_{2,G}$ zur Bewertung der Leistungsumsetzung $\eta = \dot{W}_n / \dot{Q}_b$ zu erhalten. Der Wirkungsgrad η , dessen klassische Wirkungsgraddefinition als „Ergebnis durch Aufwand“ auf eine lange Tradition im Ingenieurwesen verweisen kann, stellt sich hier als dimensionsloses Potenzprodukt heraus, das sich ganz zwanglos aus der systematischen Vorgehensweise der Bewertungshypothese ergibt.

Hinweis: Gleichung (180) ist im linken Teil von Abbildung 38 eingefärbt dargestellt, um alle entsprechenden Punkte mit $\pi_{1,G} = \text{const}$ und $\pi_{2,G} = \text{const}$ auf der Zustandsfläche im rechten Teil von Abbildung 38 als gleichfarbig zu kennzeichnen.

Komponentensichtweise. In einer detaillierteren Beschreibung der Gasturbine [65] ergibt sich deren Modellierung entsprechend Abbildung 105 in die Einzelkomponenten Verdichter C , Brennkammer B und Turbine T . Da für die Bilanzierung die Gasturbine an den Schnittstellen 1, 2, 3 und 4 aufgeschnitten wird, rücken jetzt die thermodynamischen Einzelprozesse der Komponenten in den Blickpunkt der Modellierung.

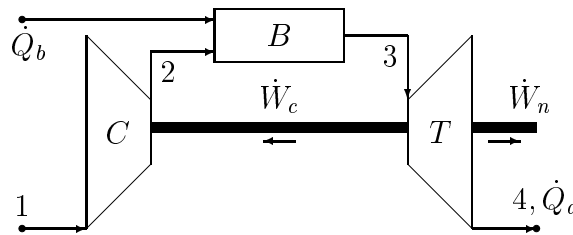
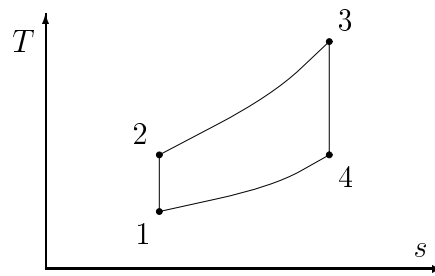


Abbildung 105: Komponentenschema Gasturbine [65]

Die angesaugte Luft (Zustand 1) wird im Verdichter C komprimiert (Zustand 2), danach in der Brennkammer B erhitzt (Zustand 3) und schließlich in der Turbine T entspannt (Zustand 4). Die Prozeßführung als thermodynamischer Kreisprozeß wird dabei idealisiert als adiabat-reversible Kompression (1→2), isobare Erwärmung (2→3), adiabat-reversible Expansion (3→4) sowie isobare Abkühlung (4→1) angenommen.

Den resultierenden thermodynamischen Kreisprozeß zeigt Abbildung 106 in Form eines (T, s) -Diagramms. Durch die Modellvorstellung des Kreisprozesses können die Komponenten der Gasturbine einzeln getrennt beschrieben und bewertet werden. Die Gesamtbewertung wird dann anschließend aus den Ähnlichkeitsfunktionen im Sinne einer hierarchischen Aggregation der einzelnen Teilbewertungen ermittelt. Daher folgen hier zunächst die einzelnen verfeinerten Beschreibungen der Komponenten:

Abbildung 106: Idealisierter Kreisprozeß der Gasturbine im (T, s) -Diagramm [65]

- **Verdichter.** Für den Verdichter C in Abbildung 105 genügen zur Modellierung der Massenstrom $\dot{m}$, die spezifische Wärmekapazität c_p , die Eintrittstemperatur T_1 , die Wellenleistung $\dot{W}_c$ und die Austrittstemperatur T_2 . Mit $T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$ als Beziehung für die reversible Adiabate [65] sowie den Definitionen der zwei thermodynamischen Identitäten $R = c_p - c_v$ und $\gamma = c_p/c_v$ ergibt sich die Verdichterwellenarbeit $\dot{W}_c$ unter Annahme idealen Gases [65] zu

$$\dot{W}_c = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \dot{m} R T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \dot{m} c_p T_1 \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1 \right) \quad (181)$$

- **Brennkammer.** Für die Brennkammer B in Abbildung 105 reichen zur Modellierung als idealer Wärmetauscher (unter Vernachlässigung der zugeführten Brennstoffmasse $\dot{m}_B$ wegen $\dot{m}_B \ll \dot{m}$) der Massenstrom $\dot{m}$, die spezifische Wärmekapazität c_p , die Eintrittstemperatur T_2 , die zugeführte Wärmeleistung $\dot{Q}_b$ und die Austrittstemperatur T_3 aus. Dabei ergibt sich die Temperaturerhöhung im isobaren Verbrennungsprozeß unter Annahme idealen Gases [65] aus

$$\dot{Q}_b = \dot{m} c_p (T_3 - T_2) \quad (182)$$

- **Turbine.** Für die Turbine T in Abbildung 105 genügen zur Modellierung der Massenstrom $\dot{m}$, die spezifische Wärmekapazität c_p , die Eintrittstemperatur T_3 , die Austrittstemperatur T_4 und die Wellenarbeit $\dot{W}_t$. Unter Verwendung der Beziehung $T_4/T_3 = (p_4/p_3)^{(\gamma-1)/\gamma}$ für die reversible Adiabate ergibt sich die abgegebene Wellenarbeit $\dot{W}_t$ unter Annahme idealen Gases [65] zu

$$\dot{W}_t = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \dot{m} R T_3 \left(\left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \dot{m} c_p T_3 \left(\left(\frac{T_4}{T_3} \right) - 1 \right) \quad (183)$$

- **Kopplungen.** Für die sonstigen Kopplungen zwischen den Komponenten und zur Berechnung des thermodynamischen Kreisprozesses gelten die folgenden Grundgleichungen und Annahmen sonstiger vorgegebenen Größen:

$$\dot{W}_n = \dot{W}_t - \dot{W}_c \quad (184) \quad P_2 = C \cdot P_1 \quad (187)$$

$$\dot{W}_n = \dot{Q}_b - \dot{Q}_a \quad (185) \quad P_3 = P_2 \quad (188)$$

$$P_1 = \rho \cdot R \cdot T_1 \quad (186) \quad P_4 = P_1 \quad (189)$$

Zur Kreisprozeßberechnung sind damit nur noch die Umwelt (ρ_1, T_1) , die thermodynamischen Größen (R, c_p, κ) und das Verdichtungsverhältnis C anzugeben.

Für die Komponenten in Abbildung 105 ergibt sich auf diese Weise das Gleichungssystem (190), das den thermodynamischen Kreisprozeß in Abbildung 106 beschreibt. Die Gleichungen sind der Systematik der automatisierten Verarbeitung im Lösungspfadgenerator in Kapitel 4.7.3 wegen von F_1 bis F_{11} durchnummeriert und in impliziter Form angegeben, da die implizite Gleichungsdarstellung wegen ihrer Allgemeinheit für die maschinelle Gleichungsmanipulation gut geeignet ist.

$$\begin{aligned}
 (F_1 \equiv) \quad & \dot{W}_n - \dot{W}_t - \dot{W}_c = 0 \\
 (F_2 \equiv) \quad & \dot{W}_c - \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) = 0 \\
 (F_3 \equiv) \quad & \dot{Q}_b - \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_3 - T_2) = 0 \\
 (F_4 \equiv) \quad & \dot{W}_t - \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3) = 0 \\
 (F_5 \equiv) \quad & \dot{Q}_a + \dot{Q}_b + \dot{W}_n = 0 \\
 (F_6 \equiv) \quad & P_1 - \rho \cdot R \cdot T_1 = 0 \\
 (F_7 \equiv) \quad & (T_2/T_1) - (P_2/P_1)^{(\frac{\kappa-1}{\kappa})} = 0 \\
 (F_8 \equiv) \quad & (T_4/T_3) - (P_4/P_3)^{(\frac{\kappa-1}{\kappa})} = 0 \\
 (F_9 \equiv) \quad & P_2 - P_1 \cdot C = 0 \\
 (F_{10} \equiv) \quad & P_3 - P_2 = 0 \\
 (F_{11} \equiv) \quad & P_4 - P_1 = 0
 \end{aligned} \tag{190}$$

Zu Gleichungen (190) kommen in einem konkreten Berechnungsfall des Kreisprozesses die folgenden Zahlenangaben in Gleichungen (191) hinzu, die hier jedoch nur in Hinblick auf die maschinelle Verarbeitung als vorgegebene Zahlenwerte anzunehmen sind. Sie können im Bedarfsfall einfach an veränderte Gegebenheiten angepaßt werden.

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 298 \text{ [K]} \\
 \kappa &= 1.402 \text{ [1]} \\
 C &= 4.0 \text{ [1]} \\
 \dot{m} &= 1.4 \text{ [kg/s]} \\
 c_p &= 1008.0 \text{ [J/kg K]} \\
 T_3 &= 1280.0 \text{ [K]} \\
 \rho &= 1.3002 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\
 R &= 287.04 \text{ [J/kg K]}
 \end{aligned} \tag{191}$$

Hinweis: Die beiden Gleichungssysteme (191) und (190) werden in Tabelle 17 im Abschnitt 4.7.3 Entwurfsbewertung zur Darstellung der maschinellen Informationsverarbeitung durch den Lösungspfadgenerator verwendet und gelöst.

Im folgenden wird von der jetzt abgeschlossenen Beschreibung zur noch offenen Bewertung der Komponenten (Verdichter C , Brennkammer B und Turbine T) übergegangen. Dabei sollen die bisher ab Seite 43 lediglich theoretisch dargestellten Eigenschaften der systematischen Bewertungsmethodik nach dem Pi-Theorem wie z.B. der Hierarchie, der Modularität und der Konsistenz im Zuge der dargestellten Bewertungen der einzelnen Komponenten der Gasturbine deutlich werden. Zusätzliche Erläuterungen und weitere Detaillierungsebenen der Beschreibung und Bewertung finden sich in [183].

Bewertung. Zur Bewertung der Komponenten Verdichter C , Brennkammer B und Turbine T wird systematisch nach der Bewertungshypothese vorgegangen. Dabei kann für jede Komponente getrennt bewertet werden, die erhaltenen Einzelbewertungen werden dann über die Komponentenkopplungen zu einer Gesamtbewertung aggregiert.

- **Verdichter.** Aus der Relevanzliste $(\dot{m}, c_p, T_1, \dot{W}_c, T_2)$ der in der Beschreibungsgleichung (181) enthaltenen Größen wird die Dimensionsmatrix in Tabelle 20 erstellt.

Variable	Einheit	D_1	D_2	D_3	D_4		D'_1	D'_2	D'_3
$\dot{m}$	$[kg / s]$	1		-1		$\Rightarrow$	1		
c_p	$[J / kg K]$		2	-2	-1			1	
T_1	$[K]$				1				1
T_2	$[K]$				1				1
$\dot{W}_c$	$[W]$	1	2	-3			1	1	1

Tabelle 20: Dimensionsmatrix des Verdichters C

Mit Dimension $n = 5$ und einem Rang von $r = 3$ folgt damit sofort wegen $m = n - r$ die Bestimmung von $m = 2$ dimensionslosen Potenzprodukten $\pi_{1,C}$ und $\pi_{2,C}$ zu

$$\pi_{1,C} = \frac{T_2}{T_1}; \quad \pi_{2,C} = \frac{\dot{W}_c}{\dot{m} c_p T_1} \quad (192)$$

Damit ergibt sich mit den zwei dimensionslosen Potenzprodukten die gesuchte Bewertungsfunktion $F_C(\pi_{1,C}, \pi_{2,C}) = 0$ durch Umformung von Gleichung (181) zu

$$\pi_{2,C} = \pi_{1,C} - 1 \quad (193)$$

- **Brennkammer.** Aus der Relevanzliste $(\dot{m}, c_p, T_2, \dot{Q}_b, T_3)$ der Beschreibungsgleichung (182) wird die Dimensionsmatrix in Tabelle 21 gebildet.

Variable	Einheit	D_1	D_2	D_3	D_4		D'_1	D'_2	D'_3
$\dot{m}$	$[kg / s]$	1		-1		$\Rightarrow$	1		
c_p	$[J / kg K]$		2	-2	-1			1	
T_2	$[K]$				1				1
T_3	$[K]$				1				1
$\dot{Q}_b$	$[W]$	1	2	-3			1	1	1

Tabelle 21: Dimensionsmatrix der Brennkammer B

Mit Dimension $n = 5$ und Rang $r = 3$ folgt mit $m = n - r$ die Bestimmung von $m = 2$ dimensionslosen Potenzprodukten $\pi_{1,B}$ und $\pi_{2,B}$ zu

$$\pi_{1,B} = \frac{T_3}{T_2}; \quad \pi_{2,B} = \frac{\dot{Q}_b}{\dot{m} c_p T_2} \quad (194)$$

Damit ergibt sich eine dimensionslose Bewertungsfunktion $F_B(\pi_{1,B}, \pi_{2,B}) = 0$ mit zwei dimensionslosen Potenzprodukten unter Umformen von Gleichung (182) zu

$$\pi_{2,B} = \pi_{1,B} - 1 \quad (195)$$

- **Turbine.** Aus der Relevanzliste $(\dot{m}, c_p, T_3, \dot{W}_t, T_4)$ der Beschreibungsfunktion (183) wird die Dimensionsmatrix in Tabelle 22 erstellt.

Variable	Einheit	D_1	D_2	D_3	D_4		D'_1	D'_2	D'_3
$\dot{m}$	$[kg / s]$	1		-1		$\Rightarrow$	1		
c_p	$[J / kg K]$		2	-2	-1			1	
T_3	$[K]$				1				1
T_4	$[K]$				1				1
$\dot{W}_t$	$[W]$	1	2	-3			1	1	1

Tabelle 22: Dimensionsmatrix der Turbine T

Mit Dimension $n=5$ und Rang $r=3$ folgen wegen $m=n-r$ wieder $m=2$ dimensionslose Potenzprodukte $\pi_{1,T}$ und $\pi_{2,T}$ zu

$$\pi_{1,T} = \frac{T_4}{T_3}; \quad \pi_{2,T} = \frac{\dot{W}_t}{\dot{m} c_p T_3} \quad (196)$$

Damit ergibt sich die in den dimensionslosen Potenzprodukten umgeschriebene Bewertungsfunktion $F_T(\pi_{1,T}, \pi_{2,T}) = 0$ unter Umformen von Gleichung (183) zu

$$\pi_{2,T} = \pi_{1,T} - 1 \quad (197)$$

- **Aggregation.** Für die Aggregation der einzelnen Bewertungsfunktionen der Teilsysteme wird die für das Gesamtsystem Gasturbine ermittelte Bewertungsfunktion aus Gleichung (180) herangezogen und unter Verwendung des Kreisprozesses in Abbildung 106 unter Annahme idealen Gases [65] umgeformt:

$$\begin{aligned} \pi_{2,G} &= 1 - \pi_{1,G} \\ &= 1 - \left(\frac{Q_A}{Q_Z} \right) = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_1} \right) - 1}{\left(\frac{T_3}{T_2} \right) - 1} \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_3} \right) \left(\frac{T_3}{T_2} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1}{\left(\frac{T_3}{T_2} \right) - 1} = 1 - \frac{\pi_{1,T} \pi_{1,B} \pi_{1,C} - 1}{\pi_{1,B} - 1} \end{aligned} \quad (198)$$

Die mit Gleichung (198) festgelegte Aggregationsfunktion der Teilbewertungen $\pi_{1,T}$, $\pi_{1,B}$ und $\pi_{1,C}$ in eine Gesamtbewertung $\pi_{2,G}$ ist damit konsistent zur bereits in der Systemsichtweise bestimmten Gesamtbewertung $\pi_{2,G}$ in Gleichung (180). Neben der Konsistenz sind auch die Eigenschaften der Modularität und der Hierarchie der Bewertungssystematik sichtbar, da die modular gewonnenen Einzelbewertungen hierarchisch zu einer Gesamtbewertung aggregiert werden können.

Erwähnenswert ist noch in diesem Zusammenhang, daß sich die Form des aus den Bewertungskriterien gebildeten Bewertungsgraphen bereits aus der Relevanzliste der Einflußgrößen ergibt [183]. Die genaue Kenntnis der Beschreibungsfunktion f ist dafür nicht notwendig, sie muß erst für die Lösung des Aggregationsproblems F bekannt sein. Darüber hinaus lassen sich die Einzelkriterien im Experiment meist ohne Kenntnis der funktionalen Zusammenhänge bestimmen. Diese Eigenschaft macht die Bewertungsmethode zu einem sehr flexiblen Werkzeug im Entwurfsprozeß, in dem vollständiges Wissen in Form von analytischen Gleichungen nicht immer gegeben ist, Relevanzlisten der Einflußgrößen jedoch immer den ersten Erkenntnissschritt darstellen.

A.4 Dimensionsanalyse in Neuronalen Netzen

Es sei ein Biegebalken betrachtet, der an einer Seite fest eingespannt ist und am anderen Ende unter einer Last P die Auslenkung u aufweist. Der Balken in Abbildung 107 besitze die Länge l , ein Material mit dem Elastizitätsmodul E und habe das Trägheitsmoment I .

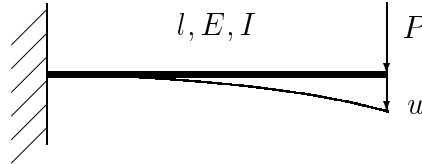


Abbildung 107: Auslenkung eines Balkens

Da die lineare Biegetheorie für diesen und weitere Standardfälle [17] geschlossene analytische Lösungen kennt, ist die im Sinne dieser linearen Theorie korrekte Lösung [142, 224] mit $f(l, E, P, I, u) = 0$ hier für Kontrollzwecke in expliziter Form angegeben:

$$u = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E I} \quad (199)$$

Multipliziert man die Lösung in Gleichung (199) mit einem Faktor in der Form $(1/l)$, so kann die Lösung in Gleichung (199) durch Umordnen der einzelnen Faktoren auch als Gleichung (200) geschrieben werden, was noch von Bedeutung sein wird.

$$\frac{u}{l} = \frac{1}{3} \left(\frac{P}{E l^2} \right) \left(\frac{l^4}{I} \right) \quad (200)$$

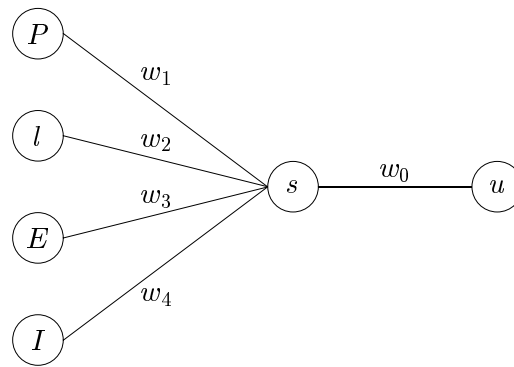
Da hier in diesem Beispiel die analytische Lösung die sehr einfache Gestalt einer Produktfunktion¹¹ hat, ist die Berechnungssequenz innerhalb eines neuronalen Netzes in Abbildung 108 sofort einsichtig. Das zur Berechnungssequenz von g sich ergebende

$$\begin{pmatrix} P \\ l \\ E \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow w_0 P^{w_1} l^{w_2} E^{w_3} I^{w_4} \longrightarrow (u)$$

Abbildung 108: Berechnungssequenz von g

kleinstmögliche neuronale Netz in Abbildung 109 besitzt fünf Gewichte w_0, w_1, w_2, w_3 und w_4 . Darin werden in der Eingangsschicht die logarithmierten Eingangsgrößen P, l, E, I mit w_1, w_2, w_3, w_4 gewichtet in s aufsummiert und durch die Transferfunktion $h(s) = e^s$ mit w_0 gewichtet auf den Ausgang u gegeben. Die korrekte Lösung des Approximationsproblems ergibt sich durch Ablesen der Exponenten in Gleichung (199) zu den Gewichten $w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = -1, w_4 = -1$ und $w_0 = 1/3$.

¹¹Diese Beschränkung wurde gewählt, um die beispielbezogene Vorgehensweise ohne umfangreichere Mathematik durchschaubar zu machen. Die zugrundeliegende Eigenschaft der Dimensionshomogenität hängt jedoch nicht am Charakter von f oder g als Produktfunktion, sondern ist o.B.d.A. gültig.

Abbildung 109: Neuronale Netztopologie für g

Wird das neuronale Netz in Abbildung 109 zur Funktionsapproximation eingesetzt, so wird dem Netz die Aufgabe gestellt, mit Hilfe eines noch geeignet zu wählenden Lernverfahrens eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ mit $n = 5$ bestmöglich zu approximieren. Hierzu werden in Ermangelung weiteren Wissens über die unbekannte Funktion g die Gewichte w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 mit Zufallszahlen initialisiert und im Zuge des benutzten Lernverfahrens iterativ nach einem bestimmten numerischen Fehlerkriterium verändert.

Durch diese zufällige Initialisierung und die iterative Veränderung der inneren Netzgewichte werden durch das in seiner Berechnungsstruktur, d.h. seiner vorliegenden Netztopologie, an sich bereits „richtige“ neuronale Netz meist jedoch noch nicht-dimensionshomogene Funktionen $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ repräsentiert. Um diesen entscheidenden Umstand aufzuzeigen, ist im Vergleich dazu die Verwendung eines dimensionshomogenen Ähnlichkeitsnetzes $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ dargestellt.

Aus der Dimensionsinformation der physikalischen Größen l, E, P, I, u in der Relevanzliste der gesuchten Lösungsfunktion $f(l, E, P, I, u) = 0$ in Gleichung (199) kann sofort die Dimensionsmatrix in Tabelle 23 links erstellt werden. Darin sind die Dimensionsexponenten der beteiligten Größen im SI-System dargestellt. Durch rangerhaltende Spaltenoperationen wird die obere Diagonalform in Tabelle 23 rechts erreicht.

Variable	SI-Einheit	D_1	D_2	D_3		D'_1	D'_2
P	$[kg\ m/s^2]$	1	1	-2	$\Rightarrow$	1	0
l	$[m]$	0	1	0		0	1
E	$[kg/m\ s^2]$	1	-1	-2		1	-2
I	$[m^4]$	0	4	0		0	4
u	$[m]$	0	1	0		0	1

Tabelle 23: Dimensionsmatrix und rangerhaltende Umformungen

Da der Rang der Dimensionsmatrix $r = 2$ ist, können aus $n = 5$ dimensionsbehafteten Größen $m = n - r = 3$ dimensionslose Potenzprodukte

$$\pi_1 = E P^{-1} l^2 \quad (201)$$

$$\pi_2 = I l^{-4} \quad (202)$$

$$\pi_3 = u l^{-1} \quad (203)$$

gebildet werden. Aus dem Vergleich mit der analytischen Lösung in Gleichung (200) ist zu erkennen, daß die dimensionslose Lösungsfunktion $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ unter Verwendung der Transformationsgruppen in Gleichung (201), (202) und (203) durch Einsetzen zu

$$\pi_3 = \frac{1}{3} \pi_1^{-1} \pi_2^{-1} \quad (204)$$

bestimmt werden kann. Die Transformationsgruppen π_j sind daher die notwendigen „Bildungselemente“ der richtigen Lösung f . Dies ist in allgemeingültiger Form durch das Pi-Theorem in Form der Gleichungen (14), (15) und (16) gewährleistet.

Aus der analytischen Lösung in Form der dimensionslosen Gleichung (204) folgt, daß das solcherart modifizierte Approximationsproblem des neuronalen Netzes während der Trainingsphase darin besteht, die $(m-1)$ -dimensionale Hyperfläche $F(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$ mit nur noch $m = 3$ dimensionslosen Variablen korrekt zu approximieren. Dies ist in Abbildung 110 dargestellt, das die modifizierte Berechnungssequenz innerhalb eines neuronalen Netzes mit nur drei Gewichten v_0, v_1 und v_2 zeigt.

$$\begin{pmatrix} P \\ l \\ E \\ I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow v_0 \pi_1^{v_1} \pi_2^{v_2} \longrightarrow (\pi_3) \rightarrow (u)$$

Abbildung 110: Modifizierte Berechnung von f über F

Entsprechend den ablesbaren Exponenten in Gleichung (204) ist die korrekte Lösung nach der Trainingsphase $v_1 = -1, v_2 = -1$ und $v_0 = 1/3$. Nur dann kann das neuronale Netz im gesamten Definitionsbereich aller möglichen Muster richtig generalisieren, da nur dann die richtige Funktion f bzw. F im neuronalen Netz repräsentiert wird.

Die entsprechende Topologie zur Erfüllung der Berechnungssequenz in Abbildung 110 in einem dimensionshomogenen neuronalen Netz ist in Abbildung 111 dargestellt.

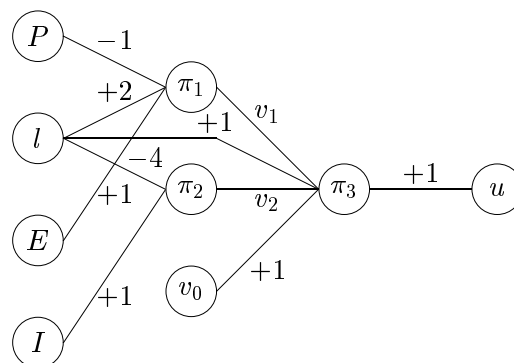


Abbildung 111: Modifizierte Netztopologie von f über F

In diesem neuronalen Netz werden entsprechend der Definition von Gleichung (53) durch die gewichtete Summation der logarithmierten Eingänge die dimensionslosen Potenzprodukte π_1 und π_2 in logarithmierter Form berechnet. Diese werden wieder gewichtet zur

Summe π_3 aufsummiert, die dann durch eine Exponentialfunktion $h(s) = e^s$ propagiert und als Ausgang des neuronalen Netzes ausgegeben wird.

Soll demgegenüber ein klassisches neuronales Netz die (Lösungs-)Funktion g erlernen, ist hierfür eine bestimmte Menge von Trainingsdaten bereitzustellen, wie sie exemplarisch in Tabelle 24 dargestellt sind. Typischerweise enthält die Tabelle p Punktproben $(x_1, \dots, x_n)_p$ der unbekannten Funktion $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, hier mit $n = 5$ in der Form $g(P, l, E, I, u) = 0$.

Punktprobe p	P	l	E	I	u
1	3000	0.50	125000.000	2	0.5000e-3
2	2875	0.75	96643.525	42	0.0996e-3
3	2750	1.00	68287.050	82	0.1637e-3
4	2625	1.25	39930.575	122	0.3508e-3
5	2500	1.50	11574.100	162	1.5000e-3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$x_{1,p}$	$x_{2,p}$	$x_{3,p}$	$x_{4,p}$	$x_{5,p}$

Tabelle 24: Ursprüngliche Trainingsdaten

In bezug auf das ursprüngliche Approximationsproblem der Funktion g bedeutet dies, daß die ursprünglichen Punktproben in Tabelle 24 nach der Ermittlung der dimensionslosen Transformationsgruppen in die Tabelle 25 umgerechnet werden. Dies bedeutet zunächst nichts anderes, als daß jedem Punkt $(x_1, \dots, x_n)_p$ in Tabelle 25 sein Bildpunkt $(\pi_1, \dots, \pi_m)_p$ zugeordnet wird.

Punktprobe p	π_1	π_2	π_3
1	10.4167	32.0000	0.100e-2
2	18.9085	132.7407	0.133e-3
3	24.8317	82.0000	0.164e-3
4	23.7682	49.9712	0.281e-3
5	10.4167	32.0000	0.100e-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$\pi_{1,p}$	$\pi_{2,p}$	$\pi_{3,p}$

Tabelle 25: Transformierte Trainingsdaten

Tabelle 25 zeigt auch die Generalisierungseigenschaft der dimensionshomogenen Ähnlichkeitsnetze auf: Hat das Ähnlichkeitsnetz den Datenpunkt $p=1$ richtig gelernt (d.h. korrekt approximiert), so ist auch damit automatisch die Menge aller dazu vollähnlichen Datenpunkte wie z.B. $p=5$ richtig gelernt (d.h. korrekt approximiert), da die Menge aller vollähnlichen Punkte in ihrer dimensionslosen Repräsentation identisch zusammenfallen.

Diese beispielhaften Betrachtungen stellen nur exemplarisch dar, welche Konsequenzen der allgemein formulierten Sichtweise dimensionshomogener Ähnlichkeitsnetze in den Abbildungen 29 und 30 sich in konkreten Anwendungen ergeben.

A.5 Topologieentwurf mit Genetischen Algorithmen

Der Einsatz von genetischen Algorithmen in der Generierung neuronaler Netze wurde bereits von mehreren Autoren untersucht [202, 236]. In diesen Arbeiten wurden z.B. Fitneßfunktionen für genetische Algorithmen zur Verbesserung der Approximationsergebnisse neuronaler Netze eingesetzt, oder z.B. durch Bestrafung einer vordefinierten Komplexität von Aktivierungsfunktionen versucht, kleinstmögliche neuronale Netztopologien zu erzielen [239]. Diese Arbeiten stellen jedoch durchweg praxisorientierte numerische Untersuchungen dar, da sie keine theoretische Erklärungen für die physikalische Interpretation der sich einstellenden neuronalen Netzen entwickeln.

Dagegen liegt der dieser Arbeit zugrundeliegende Gedanke für den Einsatz genetischer Algorithmen in der Topologiegenerierung neuronaler Netze darin begründet, daß sich die Konstruktion neuronaler Ähnlichkeitsnetze nach dem Pi-Theorem in einer stochastischen Suche in der zugrundeliegenden Modellvorstellung eigentlich zwangsläufig als die bestgeneralisierenden neuronalen Netzindividuen ergeben müßten.

Um eine rein stochastische Suche zu ermöglichen, muß die Topologiebeschränkung fest vorgegebener neuronaler Netztopologien aufgehoben werden und die Topologien mehrerer, in einer sogenannten Generation zusammengefaßten Menge von neuronalen Netzen in jeder Generation nach den im folgenden angegebenen Kriterien automatisch erzeugt, verändert und selektiert werden.

Die hier verwendete programmtechnische Implementierung eines genetischen Algorithmus [82] verfügt über ein Topologiegenerierungsmodul für neuronale Netze, in dem die maximale Anzahl der Schichten und Knoten wie in Abbildung 112 auf einem Gitter mit den vorab fixierten Maximalabmessungen $a, b \in \mathbb{N}^+$ festgelegt ist. Die Größe der maximalen Schichtanzahl a wurde in Simulationen entsprechend den zu Abbildung 30 gültigen

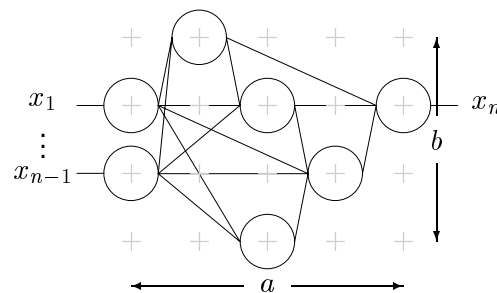


Abbildung 112: Maximalgitter der Netztopologien [82]

Überlegungen auf $a \leq 5$ begrenzt. Die Größe der maximalen Knotenanzahl pro Schicht b wurde in den Simulationen nicht größer als die doppelte Anzahl der in einem physikalischen Prozeß beteiligten n dimensionsbehafteten Größen $(x_1, \dots, x_n)$ gewählt. Auf jedem Gitterpunkt kann sich höchstens ein Knoten mit einer der Aktivierungsfunktionen $h_i(s)$ mit gewichtet aufsummierten Eingänge nach Gleichung (205) befinden.

Innerhalb des Netzgitters können die einzelnen Netzknoten auch gewichtete Verbindungen über mehrere Schichten hinweg (*information shortcuts*) besitzen, solange die gewichteten Verbindungen nur von links nach rechts gehen und somit das neuronale Netz insgesamt rückkopplungsfrei bleibt. Für die Aktivierungsfunktionen der Neuronen steht die folgende Auswahl von 10 verschiedenen Aktivierungsfunktionen $h_1(s), \dots, h_{10}(s)$ nach

Gleichung (205) durch den genetischen Algorithmus zur Verfügung, die bei Bedarf auch softwaretechnisch an andere Anforderungen angepaßt werden können [185].

$$\begin{aligned}
 h_1(s) &= s \\
 h_2(s) &= e^s \\
 h_3(s) &= \ln |s| \\
 h_4(s) &= 1/(1 + e^{-s}) \\
 h_5(s) &= (1 + e^{-s})/2(1 + e^{-s}) \\
 h_6(s) &= \tanh s \\
 h_7(s) &= \sin s \\
 h_8(s) &= \cos s \\
 h_9(s) &= e^{-s^2} \\
 h_{10}(s) &= 1
 \end{aligned} \tag{205}$$

Die Aktivierungsfunktionen $h_4(s)$ und $h_5(s)$ repräsentieren die sigmoidalen Aktivierungsfunktionen klassischer neuronaler Netze, während $h_1(s)$ in Form der Identität eine Art Neutralelement darstellt und $h_{10}(s)$ die Kodierung eines Offsets w_0 nach Gleichung (53) ermöglicht. Die anderen Operatoren h_2, h_3 sowie $h_6, \dots, h_9$ sind durch die in funktionalen Zusammenhängen physikalischer Formeln häufig auftretenden Beziehungen bestimmt, um damit im Rahmen der stochastischen Mutation zu möglichst kompakten, d.h. kleinen neuronalen Netzen mit wenigen Gewichten zu kommen [82].

Der interne Ablauf des genetischen Algorithmus ist so gesteuert, daß in jeder Generation nach Abschluß der Topologieerzeugung bzw. der Topologiemodifikationen eine Population von 100 neuronalen Netzen mit Standardlernverfahren trainiert wird. Von den bekannten Lernverfahren sind hierfür der sogenannte *Backpropagation*- [180] und der *Threshold-Accepting-Algorithmus* [82] implementiert. Dies ist im Inneren der Abbildung 113 dargestellt und entspricht genau der bisherigen Approximationsaufgabe neuronaler Netze in Abbildung 28 ohne Berücksichtigung der Dimensionshomogenität.

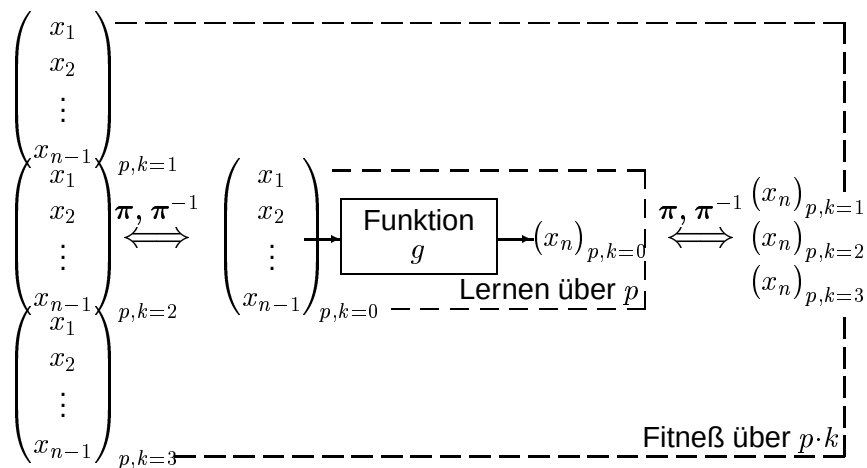


Abbildung 113: $(p \cdot k)$ Fitneßmuster versus p Lernmuster

Nach jedem Generationsschritt von Topologiemodifikation und Training wird der Approximationsfehler jeden Individuums mit einer Fitneßfunktion bewertet. Dann werden die besten Individuen durch die Mutationsoperatoren teilweise mutiert und neu rekombiniert. Während der genetische Algorithmus in seinem Aufbau seinen klassischen Vorgängern

folgt [63, 178], ist die in Abbildung 113 verwendete Fitneßfunktion konzeptionell andersartig aufgebaut und genau so gewählt, daß die korrekte Skalierung der unbekannten, als dimensionshomogen unterstellte Funktionsklasse f als Gütekriterium formuliert wird. Dies bedeutet, daß jede der p vorhandenen Punktproben entsprechend Abbildung 114

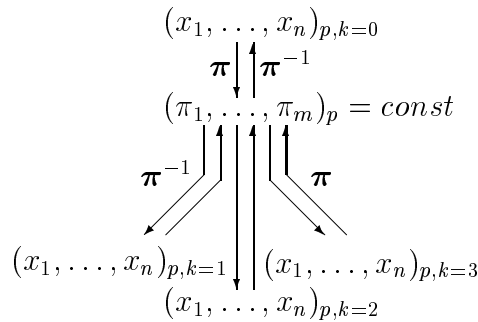


Abbildung 114: Datenvervielfältigung mit k vollähnlichen Punkten [185]

mit vollähnlichen Datensätzen k -fach vervielfältigt wird. Dazu hält man die Transformationsgruppen π_j in der inversen Ähnlichkeitstransformation in Gleichung (64) konstant und wählt die Werte der r Basisvariablen x_i mit einem Zufallszahlengenerator aus $x_i \in \mathbb{R}^+$. Diese Vorgehensweise beruht auf einer prinzipiellen Eigenschaft aller dimensionshomogenen Funktionen f und kann ohne jegliche Kenntnis von f punktweise vorgenommen werden. Der Faktor k zur Erzeugung vollähnlicher Datensätze wurde für die nachfolgend gezeigten Simulationen hier zu $k=3$ gewählt.

Die Fitneßfunktion bildet wie gewohnt die Summe aller relativen Fehler E_{kp} über die $p \cdot k$ Musterpaare entsprechend Gleichung (206). Damit ergibt sich die Bewertung der Netztopologien in jedem Selektionszyklus einer Generation aus der Beziehung für den relativen Fehler als die Differenz zwischen dem exakten Wert t_n (von *target*) und dem tatsächlichen Ausgangswert des neuronalen Netzes o_n (von *output*) bezogen auf den tatsächlichen Wert in Prozent zu

$$E_{kp} = \frac{1}{k \cdot p} \sum_{n=1}^{k \cdot p} \left| \frac{t_n - o_n}{t_n} \right| \cdot 100 [\%] \quad (206)$$

Die an sich identische numerische Form der Fehlerdefinition E_{kp} zeigt deutlich die unterschiedliche Theorieauffassung sowie deren andersartige Ergebnisqualität im Vergleich zu anderen Arbeiten. Dies wird im folgenden Beispiel dargestellt.

Simulationsbeispiel Wäremeleitungsproblem [185]. Als Grundlage für die Simulation des genetischen Algorithmus diene das Modell des Wärmeflusses $\dot{q}$ normal zur Rohrwand mit Innerradius r_i und Außenradius r_a , deren Material eine Wärmeleitzahl λ besitzt und in der zwischen der Innenseite und der Außenseite der Rohrwand die Temperaturdifferenz $\vartheta = T_a - T_i$ herrscht.

Für den auf die Rohrlänge bezogenen Wärmestrom $\dot{q} = \dot{Q}/L$ der für das neuronale Netz zunächst unbekannten Funktion $f(\lambda, \vartheta, r_a, r_i, \dot{q}) = 0$ existiert eine geschlossene analytische Lösung, die hier als Referenzlösung angegeben wird [104].

$$\dot{q} = 2\pi \frac{\lambda \vartheta}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} \quad (207)$$

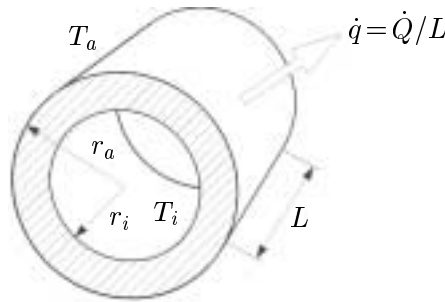


Abbildung 115: Wärmefluß durch Rohrwand [82, 185]

Aus der physikalischen Dimensionsinformation der Relevanzliste $(\dot{q}, \vartheta, \lambda, r_a, r_i)$ der Funktion kann die Dimensionsmatrix in Abbildung 26 aufgestellt werden. Der Rang der Di-

Variable	Einheiten	D_1	D_2	D_3	D_4		D'_1	D'_2	D'_3
λ	W/m K	1	1	-3	-1	$\Rightarrow$	1		
r_i	m		1					1	
ϑ	K				1				1
r_a	m		1					1	
$\dot{q}$	W/m	1	1	-3			1		1

Tabelle 26: Dimensionsmatrix und Spaltenumformungen

mensionsmatrix ist $r=3$, damit können für $n=5$ dimensionsbehafteten Größen durch die Überführung der Dimensionsmatrix in Tabelle 26 in die Normalform rechts $m = n - r = 2$ dimensionslose Potenzprodukte gebildet werden.

$$\pi_1 = \frac{r_a}{r_i} \quad (208)$$

$$\pi_2 = \frac{\dot{q}}{\lambda \vartheta} \quad (209)$$

Unter Verwendung dieser dimensionslosen Transformationsgruppen in Gleichung (208) und (209) folgt nach dem Pi-Theorem damit eine dimensionslose Ähnlichkeitsfunktion $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ für den späteren Ergebnisvergleich mit der Simulation in der Form

$$\pi_2 = 2\pi / \ln \pi_1. \quad (210)$$

Für die hier dargestellte Simulation wurde mit den folgenden Annahmen über die einzelnen numerischen Wertebereiche der Variablen

$$\vartheta = T_a - T_i = [1, \dots, 100] \cdot 10^{-2} \quad (211)$$

$$\lambda = [1, \dots, 50] \cdot 50^{-1} \quad (212)$$

$$r_a, r_i = [0.1, \dots, 1.1] \cdot 1.1^{-1}$$

mit der Nebenbedingung $r_a > r_i$ folgt

$$\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = [1.6, \dots, 9] \quad (213)$$

ein Trainingsdatenset von $p = 20$ Datenpunkten für den genetischen Algorithmus generiert, für die über Gleichung (207) die korrekte Lösung $\dot{q}_p$ bestimmt wurde. Natürlich könnten diese p Musterstichproben des physikalischen Phänomens aber auch aus Experimenten gewonnen sein.

Aus der Vielzahl der in zahlreichen Läufen des genetischen Algorithmus gefundenen Lösungstopologien sind zwei typische Lösungen in Abbildungen 31 und 32 exemplarisch herausgegriffen und in Abschnitt 4.2.4 zusammenfassend diskutiert.

Dimensionshomogene neuronale Netze lassen sich über die gezeigten Anwendungen in der Approximation zeitinvarianter Funktionen hinaus auch in regelungstechnischen Aufgabenstellungen einsetzen. Dort können sie insbesondere Aufgaben der Systemidentifikation und adaptiven Regelung wahrnehmen [37, 38, 74, 86].

A.6 Winkeldefinitionen

Für den in Gleichung (77) eingeführten Drehwinkel φ für die Drehung eines Objektes in die x_b -Achse seines Hauptachsensystems gelten mit der Abkürzung $\epsilon = \frac{2\mu_{11}}{\mu_{20}-\mu_{02}}$ die folgenden Vorzeichenregeln nach Tabelle 27 entsprechend der in Abbildung 43 festgelegten Drehrichtung der Hauptachsen x_b, y_b , siehe [58].

$\mu_{20} - \mu_{02}$	μ_{11}	φ
Null	Null	0
Null	Positiv	$+45^\circ$
Null	Negativ	-45°
Positiv	Null	0
Negativ	Null	-90°
Positiv	Positiv	$1/2 \tan^{-1} \epsilon \quad (0 < \varphi < 45^\circ)$
Positiv	Negativ	$1/2 \tan^{-1} \epsilon \quad (-45^\circ < \varphi < 0)$
Negativ	Positiv	$1/2 \tan^{-1} \epsilon + 90^\circ \quad (45^\circ < \varphi < 90^\circ)$
Negativ	Negativ	$1/2 \tan^{-1} \epsilon - 90^\circ \quad (-90^\circ < \varphi < -45^\circ)$

Tabelle 27: Berechnung des Drehwinkels eines Hauptachsensystem (aus [58])

Literatur

- [1] AAMODT, A. und PLAZA, E.: *Case-Based-Reasoning: Foundational Issues, Methodological Variations and System Approaches*. AI Communications 7, 1, 39-59, 1994.
- [2] ABELSON, H. and diSESSA, A.: *Turtle Geometry*. MIT Press, Cambridge, 1984.
- [3] AIRBUS, <http://www.airbus.com>. Abbildung 2 mit freundlicher Genehmigung.
- [4] ALBER, R.: *Synthese und Evolution einer technischen Entwurfsgrammatik nach dem Vorbild biologischer Wachstums- und Entwicklungsprinzipien*. Diplomarbeit, Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Januar 2001.
- [5] ALBER, R. and RUDOLPH, S.: *On a compact graph grammar-based design language that supports design generation and creativity*. Submitted for: Artificial Intelligence in Design Conference AID'2002, Cambridge, UK, July 8-11th, 2002.
- [6] ALTHOFF, K.-D., AURIOL, E., BARLETTA, R. und MANAGO, M.: *A Review of Industrial Case-Based Reasoning Tools*. AI Intelligence, Oxford, 1995.
- [7] ALTHOFF, K.-D. und AAMODT, A.: *Zur Analyse fallbasierter Problemlöse- und Lernmethoden in Abhängigkeit von Charakteristika gegebener Aufgabenstellungen und Anwendungsdomänen*. KI Künstliche Intelligenz, 1, 10-15, 1996.
- [8] ALGERMISSEN, J.: *Grundlagen des Wärmeaustausches*. Vorlesungsmanuskript Universität Stuttgart, 1985.
- [9] ALTO, A., SELTI, R. and ULLMANN, J.: *Compilerbau*. Addison-Wesley, Bonn, 1992.
- [10] AMES, W.: *Lie-Groups for Engineers*. Vorlesungsmanuskript Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, November 2000.
- [11] ARMSTRONG, J.: *Chip-Level Modeling with VHDL*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [12] BAKER, W., WESTINE, P. and DODGE, F.: *Similarity Methods in Engineering Dynamics. Theory and Practice of Scale Modeling*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [13] BARENBLATT, G.: *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [14] BARRON, A.: *Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function*. IEEE Transactions on Information Theory, 39, 3, 930-945, 1993.
- [15] BARROW, J.: *Theories of Everything. Laws of Nature*. In: CORNWELL, J.: *Nature's Imagination*. Oxford University Press, 45-63, Oxford, 1995.
- [16] BAYER, M.; HERBIG, B. und WEß, S.: *Ähnlichkeit und Ähnlichkeitsmaße*. In WEß, S.; ALTHOFF, K.-D.; MAURER, F.; PAULOKAT, J.; PRAEGER, R. und WENDEL, O. (Hrsg.): *Fallbasiertes Schließen - Ein Überblick. Band 1: Grundlagen*. 2. Auflage SEKI-Working Paper SWP-92-08, Arbeitsgruppe Künstliche Intelligenz, Fachbereich Informatik, Universität Kaiserslautern, 135-153, 1992.
- [17] BEITZ, W. und KÜTTNER, K. (Hrsg.): *Dubbel. Handbuch für den Maschinenbau*. 15. Auflage, Springer, Berlin, 1983.
- [18] BEITZ, W. und KUTTIG, D.: *Rechnerunterstützung beim Konzipieren*. VDI-Bericht 953, VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, VDI-Verlag, 1992.
- [19] BEJAN, A.: *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [20] BERGMANN, R.: *Effizientes Problemlösen durch flexible Wiederverwendung von Fällen auf verschiedenen Abstraktionsebenen*. Dissertation Universität Kaiserslautern, 1996.
- [21] BERGMANN, R., BREEN, S., GÖKER, M., MANAGO, M., and WESS, S.: *Developing Industrial Case-Based Reasoning Applications: The INRECA Methodology*. Lecture Notes in Artificial Intelligence, LNAI 1612, Springer Verlag, 1999.

- [22] BHASKAR, R. and NIGAM, A.: *Qualitative Physics Using Dimensional Analysis*. Artificial Intelligence, 45, 73-111, 1990.
- [23] BLUM, E. and LI, L.: *Approximation theory and neural networks*. Neural Networks, 4, 4, 511-515, 1991.
- [24] BLUMAN, G. und COLE, J.: *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer, New York, 1974.
- [25] BLUMAN, G. und KUMEL, S.: *Symmetries and Differential Equations*. Springer, New York, 1989.
- [26] BÖLLING, M.: *Computergestützter Systementwurf von Luftschiffen*. Studienarbeit, Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Dezember 2001.
- [27] BOLES, P. and BOASHASH, B.: *Application of the cross Wigner-Ville distribution to seismic data processing*. In: *Time-Frequency Signal Analysis: Methods and Applications*, BOASHASH, B. (ed), 445-446, 1992.
- [28] BONATO, G. and KNAFLITZ, M.: "Time-frequency analysis of surface myoelectric signals recorded during dynamic contraction," *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 1996.
- [29] BONATO, G., CERAVOLO, R. and KNAFLITZ, M.: "Bilinear time-frequency transformations in the analysis of damaged structures," *Mechanical Systems and Signal Processing* 11, 4, 509-527, 1997.
- [30] BONTEMPO, C. and ZAGELOW, G.: *The IBM Data Warehouse Architecture*. Communications of the ACM, Special Issue on Data Warehousing, Volume 41, Number 9, 38-48, September 1998.
- [31] BREIING, A. und FLEMING, M.: *Theorie und Methoden des Konstruierens*. Springer, Berlin, 1993.
- [32] BREIING, A. und KNOSALA, R.: *Bewerten technischer Systeme*. Springer, Berlin, 1997.
- [33] BRIDGMAN, P.: *Dimensional Analysis*. Yale University Press, New Haven, 1922.
- [34] BROCKHAUS. Der große Brockhaus in 12 Bänden, 16. Auflage, Eberhard Brockhaus Verlag, Wiesbaden, 1953.
- [35] BRONSTEIN, I. und SEMENDJAJEW, K.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1981.
- [36] BRÜCKNER, S. and RUDOLPH, S.: *Knowledge discovery in scientific data using hierarchical modeling in dimensional analysis*. Proceedings SPIE Aerosense 2001 Conference On Data Mining and Knowledge Discovery III, Orlando, Florida, April 16-20th, 2001.
- [37] BRÜCKNER, S. and RUDOLPH, S.: *Neural Control and System Identification Using a Similarity Approach*. Proceedings SPIE 7th International Symposium on Smart Structures and Materials, Newport Beach, California, March 5-9th, 2000.
- [38] BRÜCKNER, S. and RUDOLPH, S.: *Neural Networks Applied to Smart Structure Control*. Proceedings SPIE Aerosense 2000 Conference On Applications and Science of Computational Intelligence III, Orlando, Florida, April 24-28th, 2000.
- [39] BUCKINGHAM, E.: *On Physically Similar Systems: Illustration of the Use of Dimensional Equations*. Phys. Review 4, 345-376, 1914.
- [40] BUNGE, M.: *Causality. The place of the causal principle in modern science*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1957.
- [41] BYRNE, G. (ed): *Recent developments in numerical methods and software for ODEs/DAEs /PDEs*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [42] CHAR, B., GEDDES, K., GONNET, G., LEONG, B., MONAGAN, M. and WATT, S.: *Maple V Language Reference Manual*. Springer, New York, 1991.
- [43] CHATTERJEE, N. and CAMPBELL, J.: *Interpolation as a means of fast adaptation in case-based problem solving*. Proceedings of 5th German Workshop on Case-Based Reasoning, 4.-5. März 1997, Bad Honnef, 65-75, 1997.

- [44] CHOMSKY *The architecture of language*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [45] CLAASEN, T. and MECKLENBRÄUKER, W.: "The wigner ditribution - a tool for time-frequency signal analysis - part I: Continuous-time signals," *Philips Journal of Research* 35, 3, 217-250, 1980.
- [46] COHEN, L.: *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, 1995.
- [47] CONNELLY, J. and CHOI, P.: *Macromodeling with SPICE*. Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [48] COOPER, K.: *Rapid prototyping technology: selection and application*. Marcel Dekker, New York, 2001.
- [49] COURANT, R. und HILBERT, H.: *Methoden der mathematischen Physik*. Springer Verlag, 4. Auflage, 1993.
- [50] CURRAN, D., GRAN, J. and COLTON, J.: *Guidelines for Performing Scale Model Experiments*. In: Proceedings 2nd International Workshop on Similarity Methods, University of Stuttgart, Stuttgart, November 25-26th, 31-65, 1999.
- [51] CYBENKO, G.: *Approximations by superpositions of a sigmoidal function*. Math. Control, Signals, Systems, 2, 303-314, 1989.
- [52] DAVIES, E. *Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities*. Academic Press, 1990.
- [53] DIN 1301 Teil 1, 2 und 3: *Einheiten, Einheitenennamen und Einheitenzeichen*. Beuth, Berlin, 1993. Ebenfalls: DIN 1313: *Größen*. Beuth, Berlin, 1998.
- [54] DRESNEY, L.: *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*. Institute of Physics, 1999.
- [55] DUNCAN, W.: *Physical Similarity and Dimensional Analysis*. Arnold, London, 1953.
- [56] EBERLE, M. *Ein Datentyp beliebiger Genauigkeit für Bildverarbeitungsanwendungen in MatLab*. Studienarbeit, Arbeitsgruppe Ähnlichkeitsmechanik, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Februar 2001.
- [57] ELVERS, B.; HAWKINS, S. and SCHULZ G. (Eds): *Ullmanns Encyclopedia of Industrial Chemistry. Volume B1: Fundamentals of Chemical Engineering*. Stichwort Dimensionsanalyse. Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1990.
- [58] EMRICH, G.: *Zur Mustererkennung auf der Grundlage vektorieller Dimensionen*. Dissertation Institut für Statik und Dynamik der Luft und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, 1998.
- [59] ESSER, U. und WERKMANN, M.: *Subjektive Geräuscherkennung und Versuch der Objektivierung am Beispiel von Verbrennungsmotoren*. In: Vo, Q.: *Sound Engineering: Kundenbezogene Akustikentwicklung in der Fahrzeugtechnik*. Expert Verlag, 1994.
- [60] EUKLID: *Die Elemente*. Nach J. Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thar. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1937.
- [61] EULENBACH, D.: *Konstruktionssystem WISKON: Ein Beitrag zur Weiterentwicklung von CAD-Systemen*. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 20, Nr. 32, Düsseldorf, 1990.
- [62] FERTIG, K. W. and REDDY, Y. S.: *Constraint Management Methodology for Conceptual Design Tradeoff Studies*. Proceedings of the 1996 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference, August 18-22, Irvine, California, USA, 1996.
- [63] FOGEL, D. (ED): *Evolutionary computation*. IEEE Press, New York, 1998.
- [64] FOURIER, J.: *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1822.
- [65] FROHN, A.: *Einführung in die technische Thermodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1977.
- [66] GARDNER, S.: *Building the Data Warehouse*. Communications of the ACM, Special Issue on Data Warehousing, Volume 41, Number 9, 52-60, September 1998.
- [67] GERHARD, E.: *Baureihenentwicklung – Konstruktionsmethode Ähnlichkeit*. Expert Verlag, 1984.
- [68] GERTHSEN, C.; KNESER, H. und VOGEL, H.: *Physik*. 12. Auflage, Springer, Berlin, 1974.

- [69] GEIGER, M., MESSNER, A. and ENGEL, U.: *Production of micrparts - size effects in bulk metal forming, similarity theory* - Production Engineering Vol IV/1, 55-58, 1997.
- [70] GERSHENFELD, N.: *The Physics of Information Technology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [71] GERSTEN, K. und HERWIG, H.: *Strömungsmechanik. Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Vieweg, Braunschweig, 1992.
- [72] GESETZ über Einheiten im Meßwesen vom 2. Juli 1969 (BGBl. I S. 709) in der Fassung der Bekanntmachung vom 22. Februar 1985 (BGBl. I S. 408). Desweiteren: Ausführungsverordnungen zum Gesetz über Einheiten im Meßwesen vom 13. Dezember 1985 (BGBl. I S. 2272) und Änderungsverordnung vom 22. März 1991.
- [73] GILGE, M.: *Region-Oriented Texture Coding*. In: TORRES, L. and KUNT, M. (Eds): *Video Coding, The Second Generation Approach*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- [74] GLÄSSEL, H. and RUDOLPH, S.: *Neural Control of Helicopter Blade-Vortex Interaction Noise*. Proceedings SPIE 8th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, Newport Beach, California, March 4-8th, 2001.
- [75] GÖBEL, E. und KOCHSIEK, M. (Eds): *Darf's ein bißchen genauer sein? Präzisionsmeßtechnik, wo und wozu?* PTB-Texte Band 11, Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig und Berlin, 2000.
- [76] GÖRTLER, H.: *Dimensionsanalyse. Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen*. Springer, Berlin, 1975.
- [77] GÖRTLER, H.: *Zur Geschichte des Pi-Theorems*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 55, 3-8, 1975.
- [78] GOLDEN, B., WASIL, E. and HARKER, P. (Eds): *The Analytic Hierarchy Process*. Springer, Berlin, 1989.
- [79] GOSLING, J.: *Algebraic Constraints*. Tech Report, Carnegie Melon University, 1983.
- [80] GRABOWSKI, H.; LOSSACK, R.-S. and WEIS, C.: *A design process model based on design working spaces*. In: IFIP WG 5.2 Workshop on Knowledge Intensive CAD, Espoo, Finland, 1995.
- [81] GROSS, M.D.: *Design as Exploring Constraints*. MIT, Februray, 1986.
- [82] GRÜNINGER, T.: *Optimierung rückkopplungsfreier Neuronaler Netze mittels Genetischer Algorithmen*. Unveröffentlichte Studienarbeit, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, 1995.
- [83] GUNARATNAM, D. and GERO, J.: *Effect of Representation on the Performance of Neural Networks in Structural Engineering Applications*. Microcomputers in Civil Engineering 9, 97-108, 1994.
- [84] HABERÄCKER, P.: *Digitale Bildverarbeitung. Grundlagen und Anwendungen*. 3. Auflage, Hanser, München, 1989.
- [85] HACKESCHMIDT, M.: *Strömungstechnik. Ähnlichkeit – Analogie – Modell*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1972..
- [86] HÄCKER, J. and RUDOLPH, S.: *On Neural Network Topology Design for Nonlinear Control*. Proceedings SPIE Aerosense 2001 Conference On Applications and Science of Computational Intelligence IV, Orlando, Florida, April 16-20th, 2001.
- [87] HÄCKER, J. and LEHMANN, F.: *Scaling laws for biomometric flapping wing robot experiments in fluids*. In: Proceedings 4th International Workshop on Similarity Methods, University of Stuttgart, Stuttgart, November 5-6th, 153-165, 2001.
- [88] HAND, D., MANNILA, H. and SMYTH, P.: *Principles of Data Mining*. MIT Press, Cambridge, 2001.
- [89] HAINZL, J.: *Verallgemeinerung des II-Theorems mit Hilfe spezieller Koordinaten in Lieschen Transformationsgruppen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 30, 321-344, 1968.

- [90] HART, G.: *Multidimensional Analysis. Algebras and Systems for Science and Engineering*. Springer, New York, 1995.
- [91] HAWKING, S. and PENROSE, R.: *Raum und Zeit*. Rowohlt Verlag, Reinbek, 1998.
- [92] HEITZ, C.: *Optimierte Zeit-Frequenz-Darstellungen zur Klassifikation von Zeitreihen*. Dissertation, Universität Freiburg i.B., 1996.
- [93] HELLER, H., BUCHHOLZ, H., SCHULTZ, K., AHMED, S. and SPLETTSTOESSER, W.: *Helicopter Rotor Blade Aeroacoustics: A Comparison of Model-Scale Wind Tunnel and Full-Scale Flight Test Results*. 20th ICAS Congress, September 8-13, Sorrento, Italy, 1996.
- [94] HELMAN, D. (ed): *Analogical Reasoning*. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [95] VON HELMHOLTZ, H.: *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*. In: *Schriften zur Erkenntnistheorie*, 70-108, Berlin, 1921. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [96] HERWIG, H.: *Flow and Heat Transfer in Micro Systems: Is Everything Different or Just Smaller?* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM (in press), 2001.
- [97] HEUSER, H. und WOLF, H.: *Algebra, Funktionalanalysis und Codierung*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [98] HU, M-K.: *Visual Pattern Recognition by Moment Invariants*. IRE Transactions on Information Theory, February 1962.
- [99] HILLER, (Ed): *Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Teubner, Leipzig, 1878. Übersetztes Zitat aus [77].
- [100] HERTKORN, P. and RUDOLPH, S.: *Dimensional Analysis in Case-Based Reasoning*. Proceedings International Workshop on Similarity Methods, University of Stuttgart, Germany, November 26-27th, 163-178, 1998.
- [101] HERTKORN, P. and RUDOLPH, S.: *Exploiting Similarity Theory for Case-Based Reasoning in Real-Valued Engineering Design Problems*. Proceedings of Artificial Intelligence in Design '98 (AID'98), Lisbon, Portugal, 20-23rd July, 1998.
- [102] HILFINGER, P.: *An Ada Package for Dimensional Analysis*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems, 10, 2, 189-203, April 1988.
- [103] HOGREBE, W.: *Mündliche Mitteilungen*. Präsident der deutschen Philosophischen Gesellschaft e.V., Universität Bonn, November 2001.
- [104] HOLMAN, J.: *Heat Transfer*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [105] HORNIK, K., STINCHCOMBE, M. and WHITE, H.: *Multilayer feedforward networks are universal approximators*. Neural Networks, 2, 5, 359-366, 1989.
- [106] HUNTLEY, H.: *Dimensional Analysis*. MacDonald, London, 1952.
- [107] HYDON, P.: *Symmetry methods for differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [108] IBM, <http://www.research.ibm.com/deepblue/>
- [109] ISO 1000: *SI Units and Recommendations for the Use of their Multiples and Certain Other Units*. Beuth, Berlin, 1992. Ebenfalls: ISO 31: *Quantities and Units*. Beuth, Berlin, 1992.
- [110] JÄHNE, B.: *Digitale Bildverarbeitung*. Springer, Heidelberg, 1989.
- [111] JAHNKE, EMDE, LÖSCH: *Tafeln höherer Funktionen*. Teubner, Stuttgart, 1966.
- [112] DE JONG, F.: *Die Dimensionsanalyse und ihre Anwendung in der Wirtschaftstheorie*. Basler Wirtschaftswissenschaftliche Vorträge 5, Polygraphischer Verlag, Zürich, 1971.
- [113] JPL, Jet Propulsion Laboratory and NASA Headquarters, Washington, DC. Press release: 99-134, November 10th, 1999. <http://mars.jpl.nasa.gov/msp98/news/mco991110.html>
- [114] KAANDORP, J.: *Fractal Modelling, Growth and Form in Biology*. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [115] KANT, I.: *Kritik der reinen Vernunft*. Werke in 9 Bänden und 2 Anmerkungsbande zur KrV (2. Auflage 1787), Akademie Textausgabe, deGruyter, Berlin, 1968.

- [116] KAUNZNER, E.: *Über eine Entwicklung in der Dimensionsrechnung*. Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Denkschriften, 166. Band, 9. Abhandlung, Springer, Wien, 1979.
- [117] KERNIGHAN, B. and RITCHIE, D.: *The C Programming Language*. Prentice Hall, 1977.
- [118] KIENLE, L.: *Größen, Größenkalkül, Dimensionsanalyse*. 8 Aufsätze. Franzbecker, Hildesheim, 1994.
- [119] KINZEL, W.: *Präattentive und attentive Bildverarbeitungsschritte zur visuellen Erkennung von Fußgängern*. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 10, Nummer 329, VDI Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [120] KOLODNER, J.: *Case-Based Reasoning*. Morgan Kaufmann, San Mateo, 1993.
- [121] KLEIBER, L.: *Analoge Repräsentationen in der „Artificial Intelligence“*. Dissertation, Universität Zürich, 1994.
- [122] KLINE, S.: *Similitude and Approximation Theory*. Springer, Berlin, 1986.
- [123] KRÖPLIN, B.: *DFG Forschungsprojekt „Neuronale Netze in dimensionshomogenen technischen Ingenieur Anwendungen“*. Aktenzeichen Kr 668/37-1, Deutsche Forschungsgemeinschaft, Bonn, 1995.
- [124] KRÖPLIN, B.: *FOGIB Ergebnisbericht Band 2, Teilprojekt Bewertung und Systematik*. DFG-Forschergruppe im Bauwesen (FOGIB) „Ingenieurbauten-Wege zu einer ganzheitlichen Betrachtung“, Universität Stuttgart, 1996.
- [125] KUNZMANN, P.: *Dimensionen von Analogie*. Universität Würzburg, Habilitationsschrift, 1997, Parega Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [126] KUPPINGER, M. und REINKE, H.: *Microsoft Project 98 - Das Handbuch*. Microsoft Press Deutschland, 1998.
- [127] KURZWEIL, P.: *Das Vieweg Einheiten-Lexikon. Begriffe, Formeln und Konstanten aus Naturwissenschaft, Technik und Medizin*. 2. erweiterte Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2000.
- [128] KUSIAK, A. (Ed): *Concurrent Engineering. Automation, Tools and Techniques*. John Wiley, New York, 1993.
- [129] KUSIAK, A.: *Engineering Design*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [130] LANGHAAR, H.: *Dimensional analysis and theory of models*. John Wiley, New York, 1951.
- [131] LENA, siehe <http://www.dip.ee.uct.za/imageproc/stdimages>, also <http://www.lenna.org>
- [132] LENGNINK, K.: *Formalisierungen von Ähnlichkeit aus der Sicht der Formalen Begriffsanalyse*. Dissertation Technische Hochschule Darmstadt, Shaker, Aachen, 1996.
- [133] LENK, E.: *Zur Problematik der technischen Bewertung*. Carl Hanser Verlag, München, 1994. Zugleich: Dissertation, Fakultät Maschinenwesen, Technische Universität München, Reihe Konstruktionstechnik Band 13, 1993.
- [134] LEXIKON DER MATHEMATIK in 6 Bänden, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2001.
- [135] LI, C. and LEE, Y.: *A statistical procedure for model building in dimensional analysis*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 33, 7, 1566-1567, 1990.
- [136] LINDENMAYER, A.: *Mathematical Models for cellular interaction in development. Part 1 and 2*. Journal of Theoretical Biology, 18, 280-315, 1968.
- [137] LOUGHLIN, P., ATLAS, L. and PITTON, J.: *Signal analysis with cone kernel time-frequency distributions and their application to speech*, in *Time-Frequency Signal Analysis: Methods and Applications*, BOASHASH, B. (ed), 375-388, 1992.
- [138] LYKODIS, P.: *Non-Dimensional Numbers as Ratios of Characteristic Times*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 33, 1568-1570, 1990.
- [139] MACH, E.: *Die Ähnlichkeit und die Analogie als Leitmotiv der Forschung*. In: MACH, E.: *Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung*. Barth, Leipzig, 1917.
- [140] MAHER, M.-L., BALACHANDRAN, B. and ZHANG, D.: *Case-Based Reasoning in Design*. Erlbaum Associates, 1995.

- [141] MAINZER, K.: *Thinking in Complexity. The Complex Dynamics of Matter, Mind, and Man-kind*. 2. Auflage, Springer, Berlin, 1996.
- [142] MALVERN, L.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, London, 1969.
- [143] MASIERO, A.: *Grand Unification with and without Supersymmetry and Cosmological Implications*. World Scientific, Singapur, 1984; ROSS, G.: *Grand Unified Theories*. Cummings, Menlo Park, 1985.
- [144] MASTERS, T.: *Practical Neural Network Recipes in C++*. Chapter 6: Multilayer Feedforward Networks, 85-90, Academic Press, Boston, 1993.
- [145] MATLAB/SIMULINK, siehe <http://www.mathworks.com/>
- [146] MEHLHORN, K., ALT, H., and BLUM, N.: *Computing a maximum cardinality matching in a bipartite graph in time $O(\cdot)$* , Information Processing Letters 37, Number 4, 237-240, 1991.
- [147] MEHLHORN, K. and NÄHER, S.: *LEDA. A platform for combinatorial and geometrical computing*. Cambridge University Press, 1999.
- [148] MELAN, A. and RUDOLPH, S.: *Contrast-Invariant Dimensionless Features*. Proceedings SPIE Aerosense 2001 Conference On Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition X, Orlando, Florida, April 16-20th, 2001.
- [149] MELAN, A. and RUDOLPH, S.: *An analytical approach to classification by object reconstruction from features*. Proceedings SPIE Aerosense 2000 Conference On Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition IX, Orlando, Florida, April 24-28th, 2000.
- [150] MEYERS ENZYKLOPÄDISCHES LEXIKON in 25 Bänden. Bibliographisches Institut Mannheim, Mannheim, 1978.
- [151] MODELICA: *Modelica - A unified Object-Oriented Language for Physical Systems Modeling*. Language Specification, Tutorial and Rationale, <http://www.modelica.org>, 1999.
- [152] MÖLLER, K. and PAASS, G. (eds): *Künstliche Neuronale Netze: Eine Bestandsaufnahme*, Künstliche Intelligenz KI, 8, 4, 37-61, 1994.
- [153] MOOG, W.: *Ähnlichkeits- und Analogielehre*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1985.
- [154] MOST, E.: *Mathematische Verfahren und Hilfsmittel bei der Anwendung von Kostenwachstumsgesetzen für ähnliche Konstruktionen*. Dissertation Universität Darmstadt. VDI Fortschrittsberichte Reihe 1, Nummer 177, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1989.
- [155] MINSKY, M. and PAPERT, S.: *Perceptron: An Introduction to Computational Geometry*. MIT Press, Cambridge, MA, 1969.
- [156] MITTELSTRASS, J.: (Hrsg.) *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. 4 Bände, Metzler, Stuttgart, 1995.
- [157] MSC Nastran, <http://www.mscsoftware.com/>
- [158] MYSKIS, A.: *Advanced Mathematics for Engineers*. MIR, Moskau, 1975.
- [159] NAVINCHANDRA, D., KRISHNAN, V., RANE, P. and RINDERLE, R.: *Constraint Reasoning and Planning in Concurrent Design*. Tech Report CMU-RI-TR-90-03, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1990.
- [160] NIEMANN, H.: *Pattern Analysis and Understanding*. Springer, Berlin, 1990.
- [161] NIEMANN, H. und BUNKE, H.: *Künstliche Intelligenz in Bild- und Sprachanalyse*. Teubner, Stuttgart, 1987.
- [162] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik. Band 2 Analytische Mechanik*. 4. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [163] NOSER, H.: *A Behavioral Animation System based on L-Systems and Synthetic Sensors for Actots*. PhD Thesis, EPFL Lausanne, Switzerland, 1997.
- [164] NOSER, H. and RUDOLPH, S.: *On Engineering Design Generation with XML-based Knowledge-enhanced Grammars*. Proceedings IFIP WG5.2 Workshop on Knowledge Intensive CAD (KIC-4), Parma, Italy, May 22-24, 2000.

- [165] OELSNER, R.: Geschichte des Konstruierens in Deutschland. Vom künstlerischen Handeln zum formalisierten Wissen. Konstruktion, 44, 387-390, 1992.
- [166] PAASS, G. *Assessing and improving neural network predictions by the bootstrap algorithm*, in: J. Cowan S. Hanson and C. Giles, eds., Advances in Neural Information Processing Systems 5 (NIPS 5), Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 196-203, 1993.
- [167] PAHL, G. and BEITZ, W.: *Engineering Design*. Springer, London, 1996. Ursprünglich in deutscher Sprache erschienen: PAHL, G. und BEITZ, W.: *Konstruktionslehre*. Springer, Heidelberg, 1993.
- [168] PAHL, G. and RIEG, F.: *Kostenwachstumsgesetze für Baureihen*. Carl Hanser Verlag, München, 1984.
- [169] PAO, Y.-H.: *Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison-Wesley, Reading MA, 1989.
- [170] PAWLOWSKI, J.: *Die Ähnlichkeitstheorie in der physikalisch-technischen Forschung. Grundlagen und Anwendungen*. Springer, Berlin, 1971.
- [171] PEIRCE, C.: *Minute Logic, Lectures on Pragmatism*. Harvard Lecture, Harvard University, Spring 1903. Citation courtesy of Manfred Zippel, Institute of Aeroengines, University of Stuttgart, 1998.
- [172] PTB, (<http://www.ptb.de>), Physikalisch-Technische Bundesanstalt (Hrsg.): *Die gesetzlichen Einheiten in Deutschland*. Physikalische-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1998. Ebenso: BIPM, (<http://www.bipm.fr>), Bureau International des Poids et Mesures, *Système International d'Unités (SI)*. Sevres, Frankreich, 1998.
- [173] PRANDTL, L., WIESELSBERGER, C. und BETZ, A.: *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*, Oldenbourg, Berlin, 1923.
- [174] PRATT, W.: *Digital Image Processing*. John Wiley, New York, 1978.
- [175] PRUSINKIEWICZ, P. and LINDENMAYER, A.: *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [176] RAVEENDRAN, P., JEGANNATHAN S. and OMATU, S. : *Classification of elongated and contracted images using new regular moments*, IEEE World Congress on Computation, Orlando, Florida, June 26-July 2, 1994.
- [177] RAVEENDRAN, P., OMATU, S. and BAKAR, W.: *Neuro-Pattern Classification of Elongated and Contracted Images*, Information Sciences, 80, 209-221, 1995.
- [178] RECHENBERG, I.: *Evolutionsstrategie*. Fromman, Holzboog, 1973.
- [179] RODGERS, C and AMES, W.: *Nonlinear boundary value problems in science and engineering*. Academic Press, Boston, 1989.
- [180] ROJAS, R: *Theorie der neuronalen Netze. Eine systematische Einführung*. Springer, Berlin, 1996.
- [181] ROTH, K.: *Konstruieren mit Konstruktionskatalogen. Band 1: Konstruktionslehre, Band 2: Kataloge*. Springer, Heidelberg, 1994.
- [182] RUDOLPH, S. und RUDOLPH, G.: *Der „C-Crash-Kurs“*. McGraw Hill Book Company, Hamburg, 1990.
- [183] RUDOLPH, S.: *Eine Methodik zur systematischen Bewertung von Konstruktionen*. Dissertation Universität Stuttgart. VDI Fortschrittsberichte Reihe 1, Nummer 251, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995. Ebenso: RUDOLPH, S.: *A Methodology for the Systematic Evaluation of Engineering Design Objects*, PhD Thesis, Institute of Statics and Dynamics of Aerospace Structures (ISD), Number 02-94, Stuttgart University, Germany.
- [184] RUDOLPH, S.: *Entwurf, Anwendung und Interpretation Neuronaler Netze im Ingenieurwesen*. In: BERKHAN, V.; EGLY, H. und OLBRICH, M. (Hrsg.): Forum Bauinformatik, Junge Wissenschaftler forschen, Hannover'95. VDI Fortschrittsberichte Reihe 20, Nummer 173, VDI-Verlag, Düsseldorf, 124-130, 1995.

- [185] RUDOLPH, S.: *On A Genetic Algorithm for the Selection of Optimally Generalizing Neural Network Topologies*. In: I.C.PARMEE (ed), *Second International Conference on Adaptive Computing in Engineering Design and Control'96*, University of Plymouth, March 26-28, 79-86, 1996.
- [186] RUDOLPH, S.: *On A Data-Driven Model Identification Technique Using Artificial Neural Networks*. Proceedings of EUROMECH 373 Colloquium on Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures, Magdeburg, Germany, March 11-13th, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nummer 268, 341-350, 1998.
- [187] RUDOLPH, S.: *On Topology, Size and Generalization in Non-Linear Feed-Forward Neural Networks*. *Neurocomputing*, Vol. 16, 1, 1-22, July 1997.
- [188] RUDOLPH, S.: *On a Symbolic CAD-Front-End for Design Evaluation Based on the Pi-Theorem*. In: GERO, J. and SUDWEEKS, F. (eds): *Proceedings of the IFIP WG5.2 Workshop on Formal Design Methods for Computer-Aided Design*, June 13-16th, 1995, Mexico City, Mexico. Chapman and Hall, London, 165-179, 1996.
- [189] RUDOLPH, S.: *On foundations and applications of similarity measures in case-based and rule-based reasoning*. See also: *Über Grundlagen und Anwendungen anisotroper Distanzmaße im fall- und regelbasierten Schließen*. ISD Research Report, Verlag des Instituts für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Stuttgart, August 1996.
- [190] RUDOLPH, S.: *Isotrope versus anisotrope Ähnlichkeit im fallbasierten Schließen*. Proceedings of 5th German Workshop on Case-Based Reasoning, 4.-5. März 1997, Bad Honnef, 189-199, 1997.
- [191] RUDOLPH, S.: *On Theoretically Hard Limitations in Holistic Design Evaluation*. Proceedings of the IASS Symposium on Conceptual Design of Structures, Volume I Methodology, October 6-11, 1996, Stuttgart, Germany, 136-143.
- [192] RUDOLPH, S.: *On "Automatic" Design Evaluation*. First German-American Frontiers of Engineering Symposium (GAFOE), National Academy of Engineering (NAE) and German American Academic Council (GAAC), University of Dresden, Germany, May 13-16, 1998,
- [193] RUDOLPH, S.: *On the Context of Dimensional Analysis in Artificial Intelligence*. Proceedings of International Workshop on Similarity Methods, University of Stuttgart, Germany, November 26th and 27th, 147-161, 1998.
- [194] RUDOLPH, S.: *Visualization and Comparison of Solution Paths with Artificial Metrics*. Proceedings 2000 ASME Design Engineering Technical Conferences, Paper DETC00/DAC-14487, September 10-13, Baltimore, Maryland, 2000.
- [195] RUDOLPH, S.: *Knowledge Discovery in Scientific Data*. Proceedings SPIE Aerosense 2000 Conference On Data Mining and Knowledge Discovery II, Orlando, Florida, April 24-28th, 2000.
- [196] RUDOLPH, S., HERTKORN, P., und KRÖPLIN, B.: *Wissensentdeckung in Datenbanken experimenteller technischer Daten*. Proceedings Fachtagung Computational Intelligence und Industrielle Anwendungen, 167-172, Kongresshaus Baden-Baden, 11./12. Mai 2000.
- [197] RUMELHART, D. and MCCLELLAND, J.: *Parallel Distributed Processing*. Volume I and II MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [198] RYCHLEWSKI, J.: *On the Mathematical Description of Dimensions and Similarity ab ovo*. Proceedings 1st International Workshop on Similarity Methods, 59-98, University of Stuttgart, Institute for Statics and Dynamics of Aerospace Structures, Stuttgart, Germany, November 1998. (Zitat im Vortrag und Diskussion)
- [199] SANCHEZ-SINENCIO, E. and LAU, C. (eds): *Artificial Neural Networks*, IEEE Press, New York, 1992.
- [200] SABATZUS, P.: *Mathlab95 Version 1.0*, 1996.
<http://www.math.tuwien.ac.at/~sleska/html/w95html/mathlb95/mathlb95.htm>

- [201] SCHMIDT-NIELSEN, K.: *Scaling. Why is animal size so important?* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [202] SCHÖNEBURG, E., HEINZMANN, F. und FEDDERSEN, S.: *Genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien*. Addison Wesley, 1994.
- [203] SCHULZ, S.: *CBR-Works - A State-of-the-Art Shell for Case-Based Application Building*. Proceedings of the 7 th German Workshop on Case-Based Reasoning, GWCBR'99, Würzburg, Germany, March 3-5, 1999
- [204] SCHWINGER, J.: *Einstein's Legacy. The Unity of Space and Time*. Scientific American Books, New York, 1986.
- [205] SEDGEWICK, R.: *Algorithms in C*. Chapter 32, 479-483, Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [206] SEDOV, L.: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
- [207] SERRANO, D.: *Constraint Management in Conceptual Design*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT, 1987.
- [208] SHAPIRO, S. (Ed): *Encyclopedia of Artificial Intelligence. Volume 1 and 2*. John Wiley, New York, 1987.
- [209] SLADE, S.: *Case-Based Reasoning: A Research Paradigm*. AI Magazine 1, 42-55, 1991.
- [210] SLOCUM, A.: *Precision machine design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [211] SPLETTSTOESSER, W., SCHULTZ, K., BOXWELL, D. and SCHMITZ, F.: *Helicopter Model Rotor-Blade Vortex Interaction Impulsive Noise: Scalability and Parametric Variations*. 10th European Rotorcraft Forum, August 28-31, The Hague, Netherlands, 1984.
- [212] SPURK, J.: *Dimensionsanalyse in der Störungsmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [213] STEPHAN, K. und MAYINGER, F.: *Thermodynamik. Band 1 Einstoffsysteme*. 14. Auflage, Springer, Berlin, 1992.
- [214] STICHLMAIR, J.: *Kennzahlen und Ähnlichkeitsgesetze im Ingenieurwesen*. Altos Verlag, Essen, 1990.
- [215] STONE, M.: *An asymptotic equivalence of choice of model by cross-validation and Akaike's criterion*. Journal of the Royal Statistical Society, Ser B, 39, 1, 44-47, 1977.
- [216] STROUSTRUP, B.: *The C++ Programming Language*. Addison Wesley, New York, 2nd edition, 1991.
- [217] SUH, N.: *The Principles of Design*. Oxford Press, New York, 1990.
- [218] SZIRTES, T.: *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [219] TAUBIN, G. and COOPER, D.: *2D and 3D Object Recognition and Positioning with Algebraic Invariants and Covariants*, 147-181. In: DONALD, B.; KAPUR, D. and MUNDY, J. (Eds): *Symbolic and Numerical Computation for Artificial Intelligence*. Academic Press, London, 1992.
- [220] TEH, C. and CHIN, R.: *On Image Analysis by the Methods of Moments*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 10, 2, Juli 1988.
- [221] TILL, M. and RUDOLPH, S.: *A discussion of similarity concepts for acoustics based upon dimensional analysis*. Proceedings 2nd International Workshop on Similarity Methods, 181-196, University of Stuttgart, Institute for Statics and Dynamics of Aerospace Structures, Stuttgart, Germany, November 1999.
- [222] TILL, M. and RUDOLPH, S.: *Optimized time-frequency distributions for signal classification with feed-forward neural networks*. Proceedings SPIE Aerosense 2000 Conference On Applications and Science of Computational Intelligence III, Orlando, USA, April 24-28th, 2000.
- [223] TILL, M. and RUDOLPH, S.: *Optimized time-frequency distributions for signal classification*. Proceedings SPIE Aerosense 2001 Conference On Wavelet Applications VIII, Orlando, Florida, April 16-20th, 2001.
- [224] TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, London, 1987.

- [225] TRIANTAPHYLLOU, E. and MANN, S.: *An Examination of the Effectiveness of Multi-Dimensional Decision-Making Methods: A Decision-Making Paradox*. Decision Support Systems 5, 303-312, 1989.
- [226] ULLMAN, D.: *The Mechanical Design Process*. 2nd Edition. McGraw-Hill, 1997.
- [227] UMRIGAR, Z.: *Fully Static Dimensional Analysis with C++*. Sigplan Notices 29, 9, 135-139, September 1994.
- [228] VDI-Richtlinie 2221: *Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1986.
- [229] VIGNAUX, T.: *Dimensional Analysis in Economics and Operations Research*. In: Proceedings 4th International Workshop on Similarity Methods, University of Stuttgart, Stuttgart, November 5-6th, 247-265, 2001.
- [230] WANG, W. and MCFADDEN, P.: *Early detection of gear failure by vibration analysis- i. calculation of time-frequency distribution*. Mechanical Systems and Signal Processing, 7, 193-203, 1993.
- [231] WEBER, M.: *Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft*. In: Jahrbuch der Schiffsbau technischen Gesellschaft, Band 31, Berlin, 1930.
- [232] WEBER, R.: *Interior car sound quality assessment of acceleration noises*. Journal of the Acoustic Society of America, 105, 1999.
- [233] WEß, S.: *Fallbasiertes Problemlösen in wissensbasierten Systemen zur Entscheidungsunterstützung und Diagnostik*. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1995.
- [234] WILKENING, C.: *Lasersintern als Rapid Prototyping Verfahren: Möglichkeiten und Grenzen*. Dissertation Technische Universität München, München, 1997.
- [235] WINSTON, P.: *Künstliche Intelligenz*. Addison Wesley, Bonn, 1987.
- [236] WONG, F. and TAN, P.: *Neural networks and genetic algorithms for economic forecasting*. Technical report, Institute of Systems Science, National University of Singapore, 1992.
- [237] XML, <http://www.xml.org/>
- [238] YUSAN, H. and RUDOLPH, S.: *A Study of Constraint Management Integration into the Conceptual Design Phase*. Proceedings 25th Design Automation Conference, Las Vegas, NV, September 12-15, 1999.
- [239] ZHANG, B. and MÜHLENBEIN, H.: *Genetic programming of minimal neural nets using oc-cam's razor*. First Conference on Genetic Algorithms (1CGA93), 342-349, 1993.
- [240] ZIEGLER, H.: *Vorlesungen über Mechanik*. Birkhäuser, Basel, 1977.
- [241] ZLOKARNIK, M.: *Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [242] ZLOKARNIK, M.: *Rührtechnik. Theorie und Praxis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [243] ZLOKARNIK, M.: *Scale-up. Modellübertragung in der Verfahrenstechnik*. Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2000.
- [244] ZLOKARNIK, M.: *Scale-up in Chemical Engineering*. Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2001.
- [245] ZWICKER, E. and FASTL, H.: *Psychoacoustics: Facts and Models*. Springer Verlag, Berlin, 1998.

