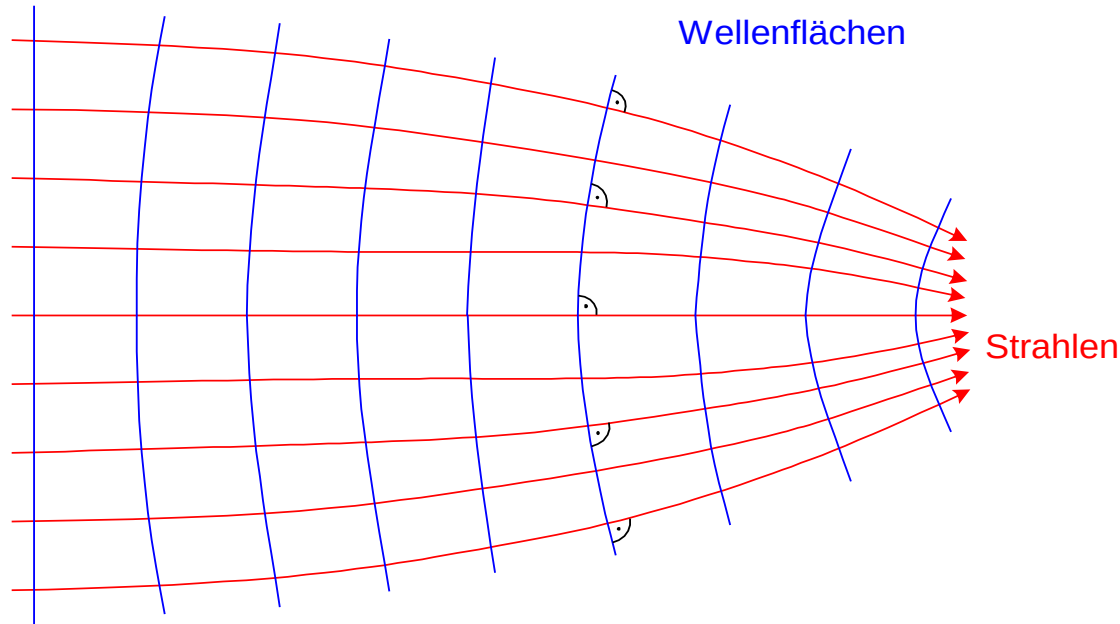


2. Geometrische Optik

2.1 Axiome und Gesetze der geom. Optik

2.2 Abbildungsgleichung

2.3 Weitere Gleichungen der Paraxialen Optik



Bei Vernachlässigung von Beugungseffekten (formal $\lambda \rightarrow 0$)
sind Strahlen und Wellenflächen equivalent.

- ➔ Beschreibung von Licht durch Strahlen
- ➔ Strahlenoptik / Geometrische Optik

2. Geometrische Optik

2.1 Axiome und Gesetze der geom. Optik

2.2 Abbildungsgleichung

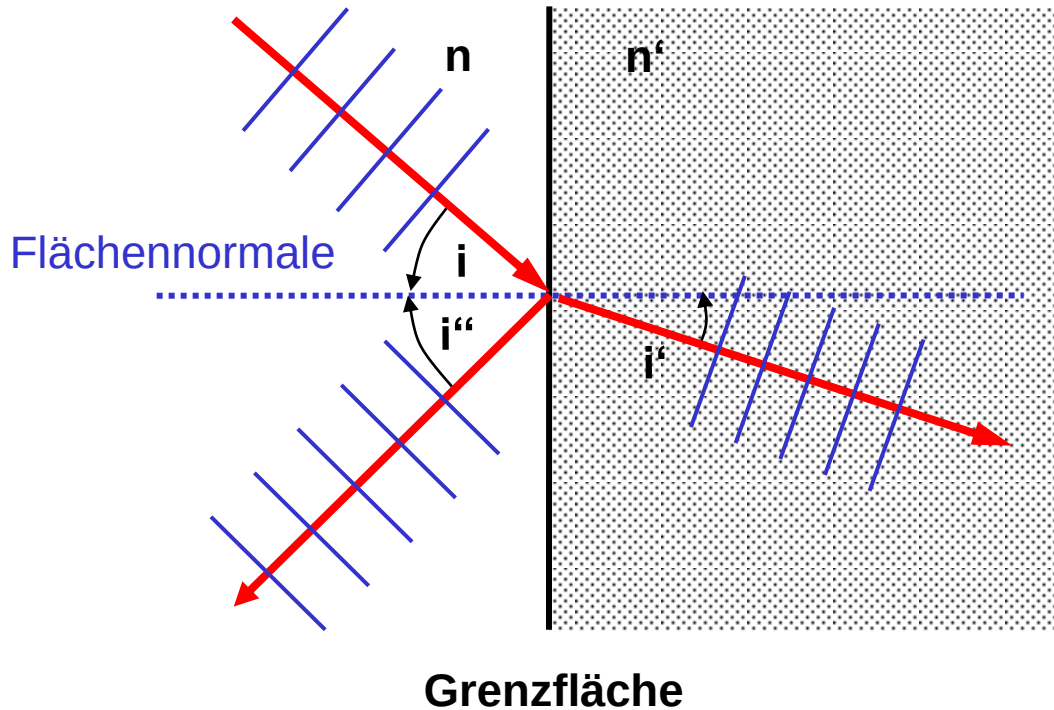
2.3 Weitere Gleichungen der Paraxialen Optik

Axiome der geometrischen Optik

- Licht wird durch Strahlen beschrieben
- Strahlen in homogenen Medien verlaufen auf Geraden
- Strahlen an Grenzflächen zwischen Medien werden gebrochen oder reflektiert (keine Beugung)
- Lichtstrahlen beeinflussen sich gegenseitig nicht (keine Interferenz)
- Strahlwege sind umkehrbar (Gleichungen gelten vorwärts und rückwärts)
(Aber: Es ist Konvention die Lichtrichtung von links nach rechts zu zeichnen !!)

Axiom: Empirisches Gesetz (ohne Beweis)

Snelliussches Gesetz



Reflexionsgesetz

$$i = -i''$$

Brechungsgesetz

$$n \sin i = n' \sin i'$$

(2.1)

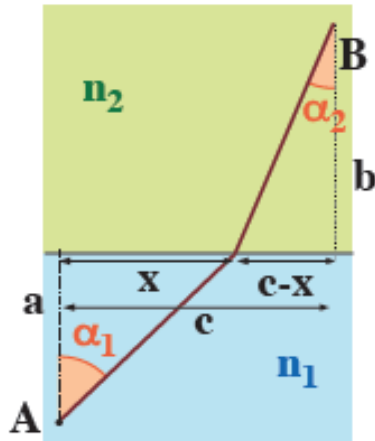
$$n = \frac{c_0}{c}$$

Wegen $c < c_0$ ist $n > 1$

In 3Dimensionen: Einfallsstrahl, Lot und Ausfallstrahl liegen in einer Ebene

- Aus:
- Elektrodynamik (Maxwell-Gleichungen) – Stetigkeitsbedingungen
 - Huygens-Prinzip (Kugel-Wellen)
 - Fermat Prinzip („Nichts ist schneller als Licht“)

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschw.}} = \frac{l}{c} = \frac{n \cdot l}{c_0} = \frac{\Delta}{c_0} = \frac{\text{Opt.Weg}}{c_0}$$



Fermat = Minimaler Optischer Weg

$$\Delta = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

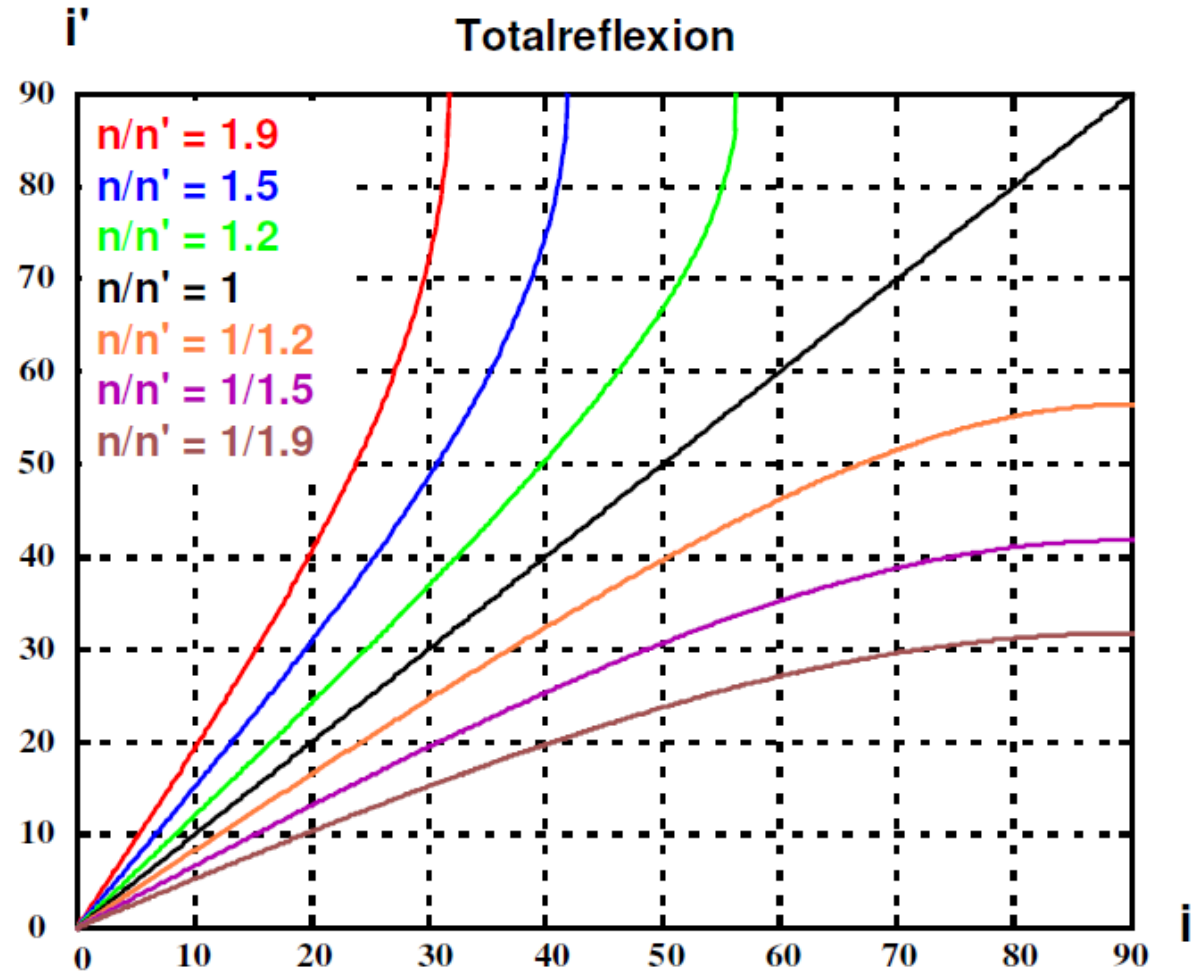
$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

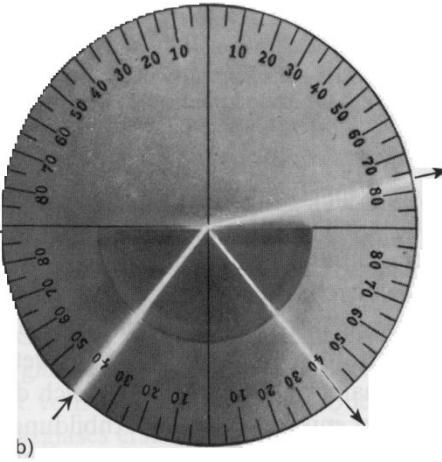
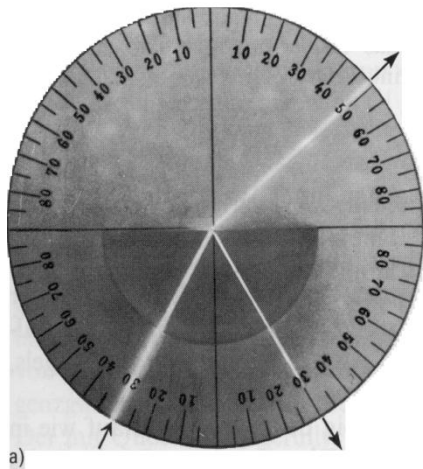
$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$$

→ Für kleine Winkel
linear

→ Paraxiale Optik



Brechung, Reflexion & Totalreflexion



Luft, $n'=1$

Glas, $n=1,55$

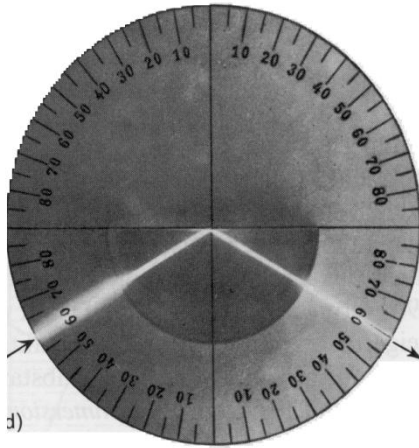
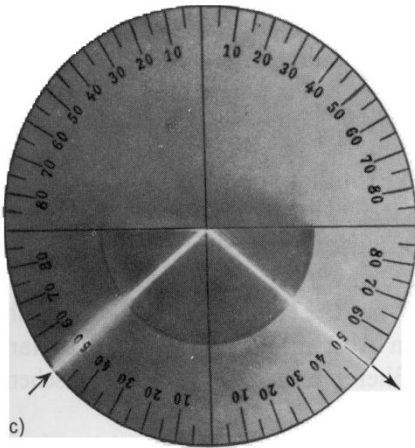


Abb. 1.23 Brechung und Reflexion von Strahlen beim Übergang von Glas in Luft; a, b) Einfallswinkel 30° bzw. 40° kleiner als Grenzwinkel $40,5^\circ$ ergeben Brechung und Reflexion; c, d) Einfallswinkel 50° bzw. 60° größer als Grenzwinkel $40,5^\circ$ ergeben Totalreflexion.

Fresnelsche Formeln

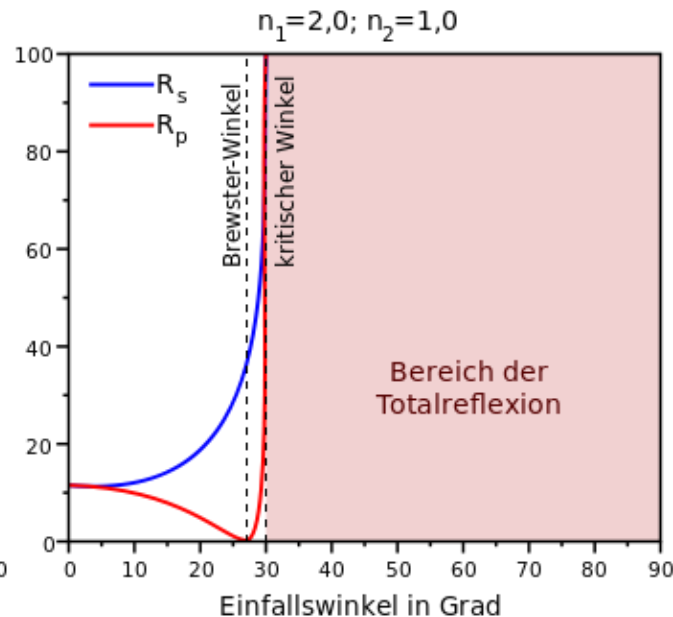
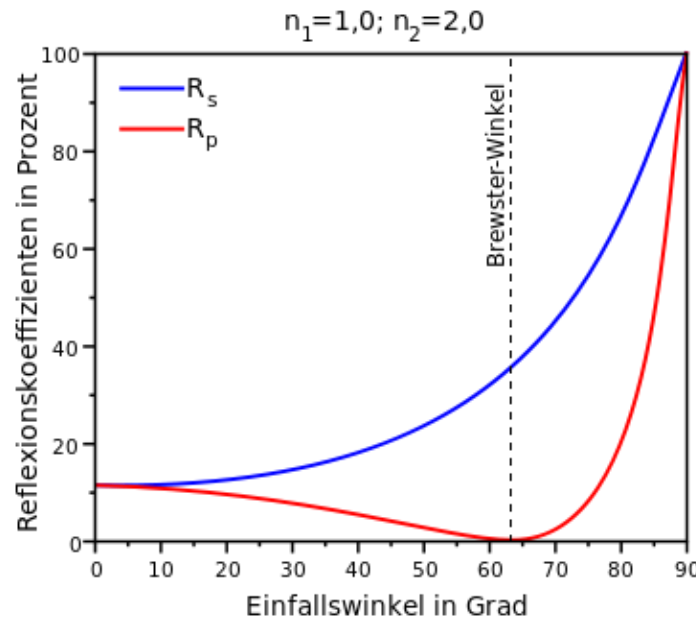
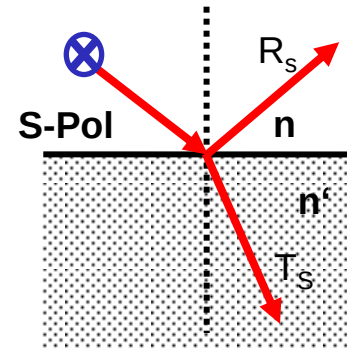
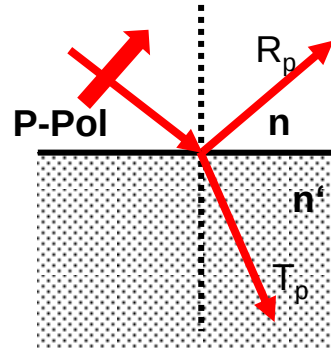
Wieviel Licht wird reflektiert / transmittiert ?

Intensität der Reflexion und Brechung abhängig von E-Vektor Richtung zur Grenzfläche

Fresnelsche Gleichungen
(von n , n' , i und Polarisation abhängig)

Zwei Fälle werden unterschieden

- E in Einfallsebene (p)
- E senkrecht zur Einfallsebene (s)



Strahlungsleistung $\propto$ Amplitude²

- Reflektivität und Transmission : Strahlleistung

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(i - i')}{\sin^2(i + i')} \quad R_{\parallel} = \frac{\tan^2(i - i')}{\tan^2(i + i')} \quad T_{\perp} = \frac{\sin 2i' \cdot \cos 2i}{\sin^2(i + i')} \quad T_{\parallel} = \frac{\cos 2i \cdot \sin 2i'}{\sin^2(i + i') \cdot \cos^2(i - i')}$$

- Energiesatz bei verschwindender Absorption $R + T = 1$

- Sonderfall senkrechte Inzidenz

$$R_{\perp} = \left(\frac{n - n'}{n + n'} \right)^2$$

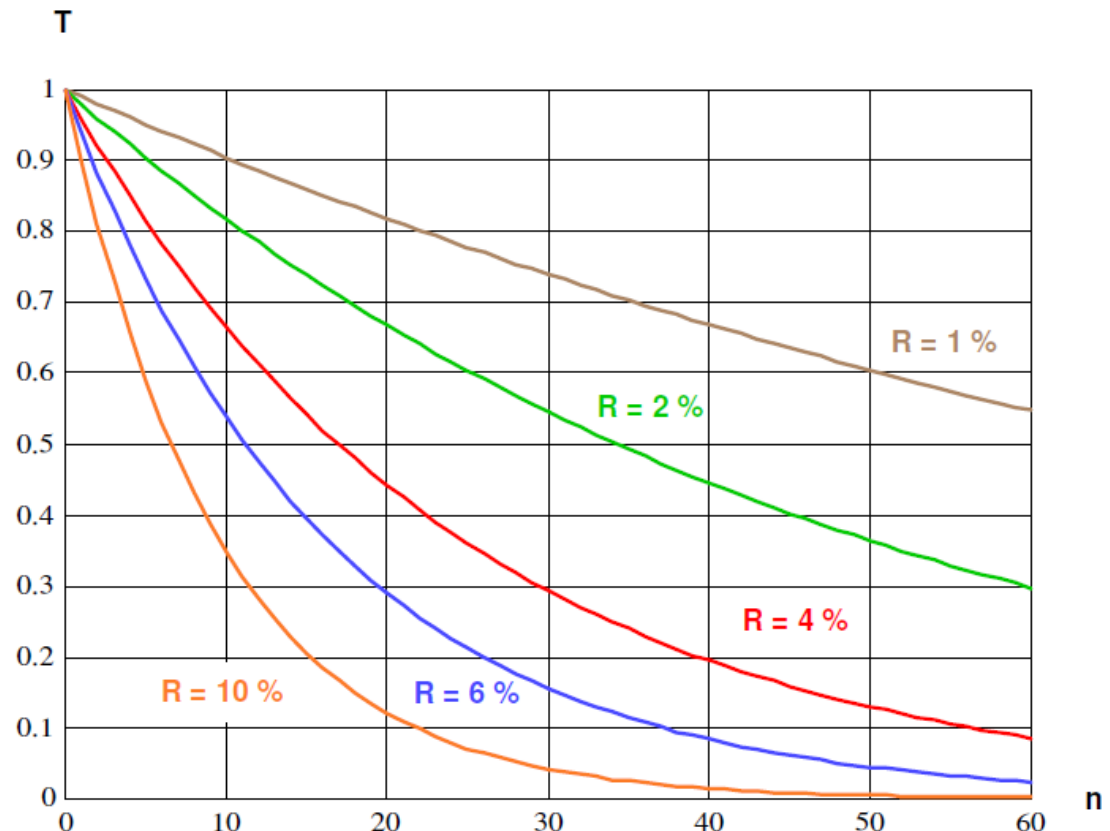
Speziell Übergang
Glas - Luft

n	R
1.4	2.778 %
1.5	4.0 %
1.8	8.16 %
2.4	16.96 %

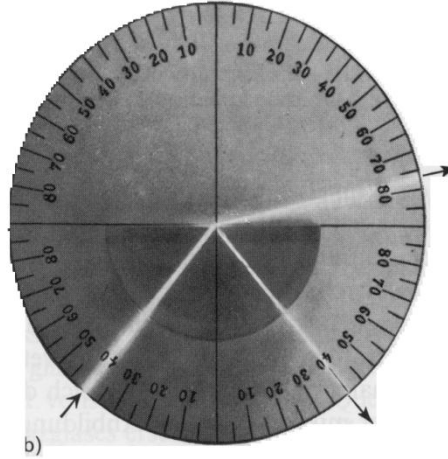
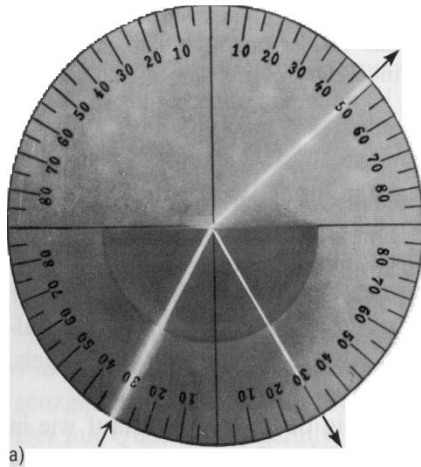
- Wirkung der Restreflektivität in einem optischen System aus n Flächen :
Transmission

$$T_{ges} = (1 - R)^n$$

- Extrem nichtlineare Wirkung
- Bei Restreflexionen :
Kontrastminderung durch Streulicht

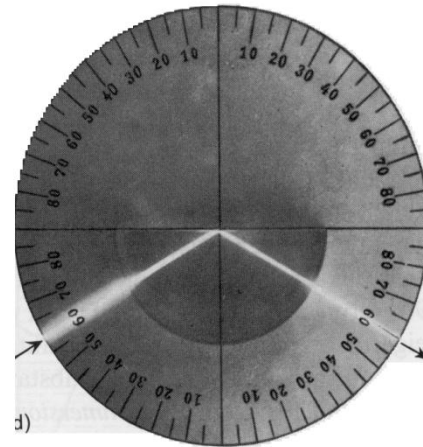
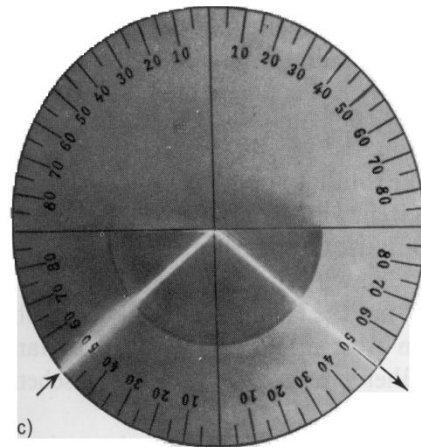


Totalreflexion



Luft, $n'=1$

Glas, $n=1,55$



Totalreflexion



Abb. 1.23 Brechung und Reflexion von Strahlen beim Übergang von Glas in Luft; a, b) Einfallswinkel 30° bzw. 40° kleiner als Grenzwinkel $40,5^\circ$ ergeben Brechung und Reflexion; c, d) Einfallswinkel 50° bzw. 60° größer als Grenzwinkel $40,5^\circ$ ergeben Totalreflexion.

Totalreflexion

Brechungsgesetz

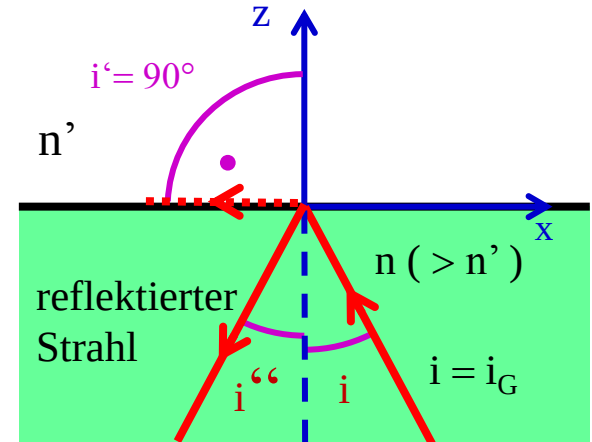
$$n \sin i = n' \cdot \sin i'$$

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \cdot \sin i$$

Es ist $(\sin i) < 1$ daher sind zwei Fälle möglich:

$n' > n$: Vom optisch dünneren in das optisch dickere Medium
→ Es gibt immer eine Lösung für Brechungs-Winkel i_2

$n' < n$: Vom optisch dickeren in das optisch dünnere Medium
→ Es gibt keine (reelle) Lösung für Brechungs-Winkel i_2
→ Alles Licht wird reflektiert ! (Totalreflexion)



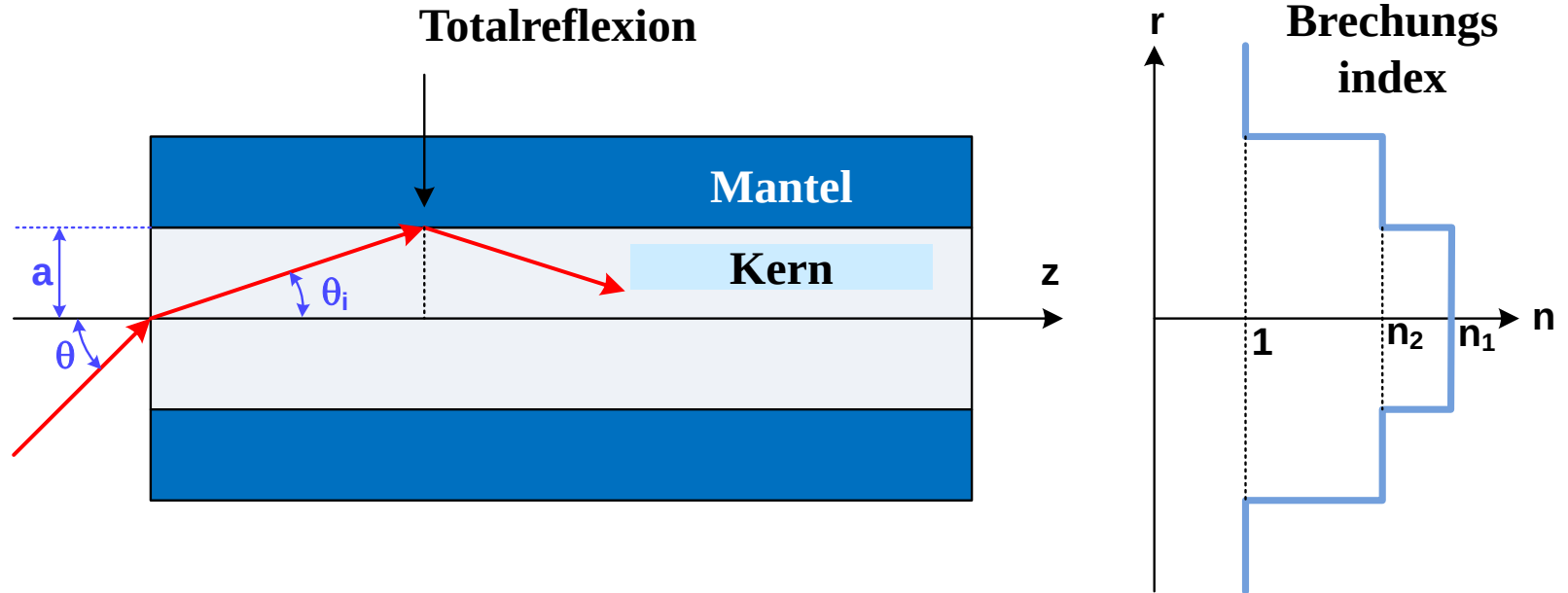
Grenzwinkel

$$\sin i' = 1$$

$$\sin i_G = \frac{n'}{n}$$

(2.2)

Totalreflexion: Stufen-Index -Faser



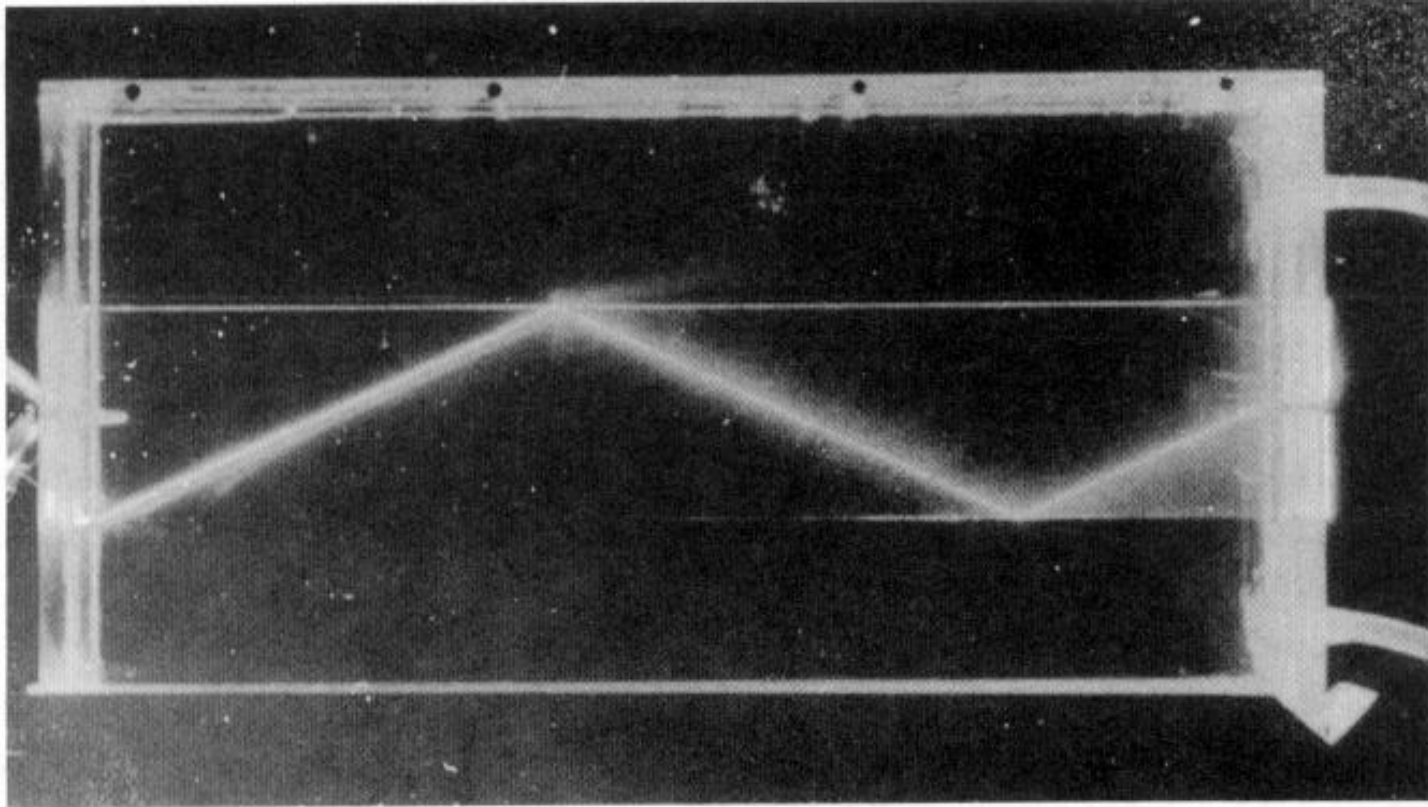
Parameter :

Brechungsindex Kern: n_1

Brechungsindex Mantel: n_2

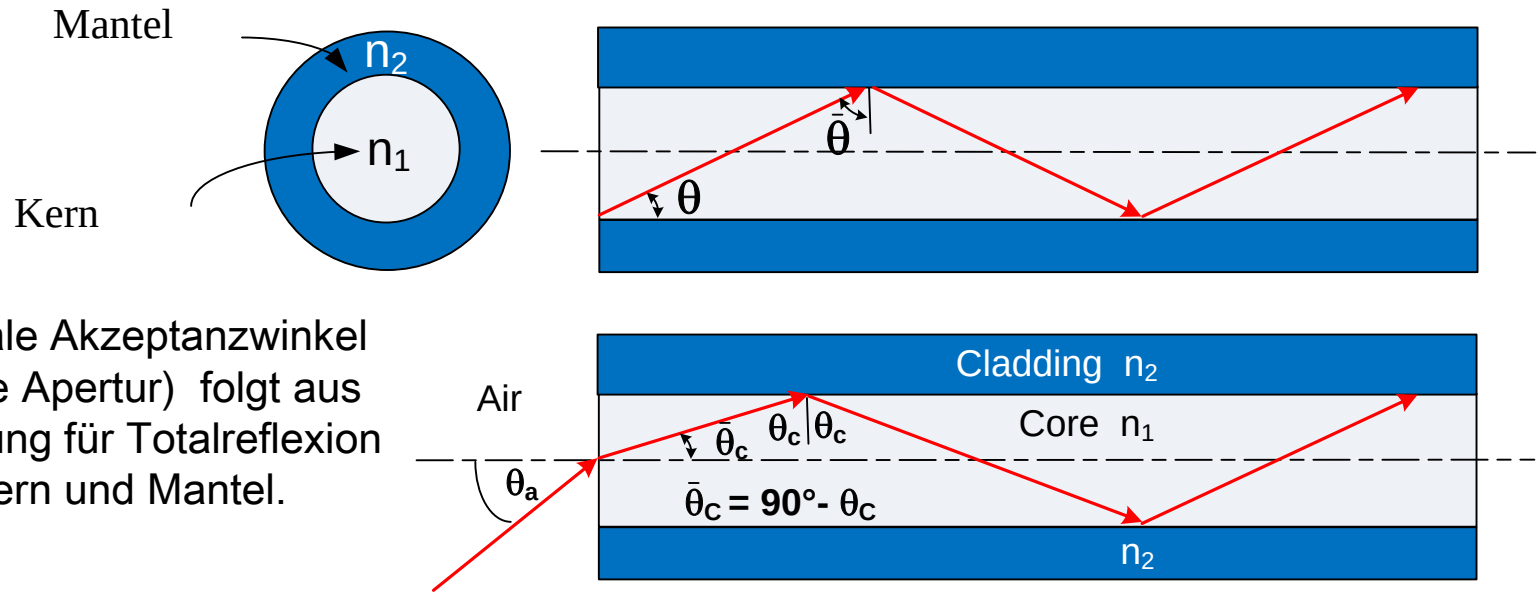
Core radius: a

Stufen-Index -Faser



Totalreflexion zwischen Kern und Mantel

Stufen Index Faser



Der maximale Akzeptanzwinkel (numerische Apertur) folgt aus der Bedingung für Totalreflexion zwischen Kern und Mantel.

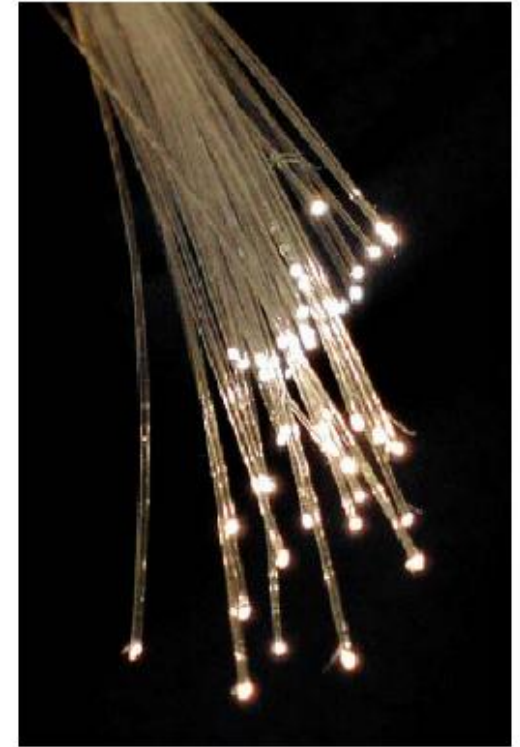
$$\sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} \quad \sin(\theta_a) = \frac{n_1}{1} \cdot \sin(\bar{\theta}_c)$$

$$NA = \sin(\theta_a) = n_1 \cdot \cos(\theta_c) = n_1 \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\theta_c)} = n_1 \cdot \sqrt{1 - n_2^2 / n_1^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Akzeptanzapertur Faser: $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (2.3)

Typische Werte $n_1 = 1.475$ $n_2 = 1.460$ $NA = 0.2098$ $\theta_a = 12^\circ$

Lichtleitfaser:

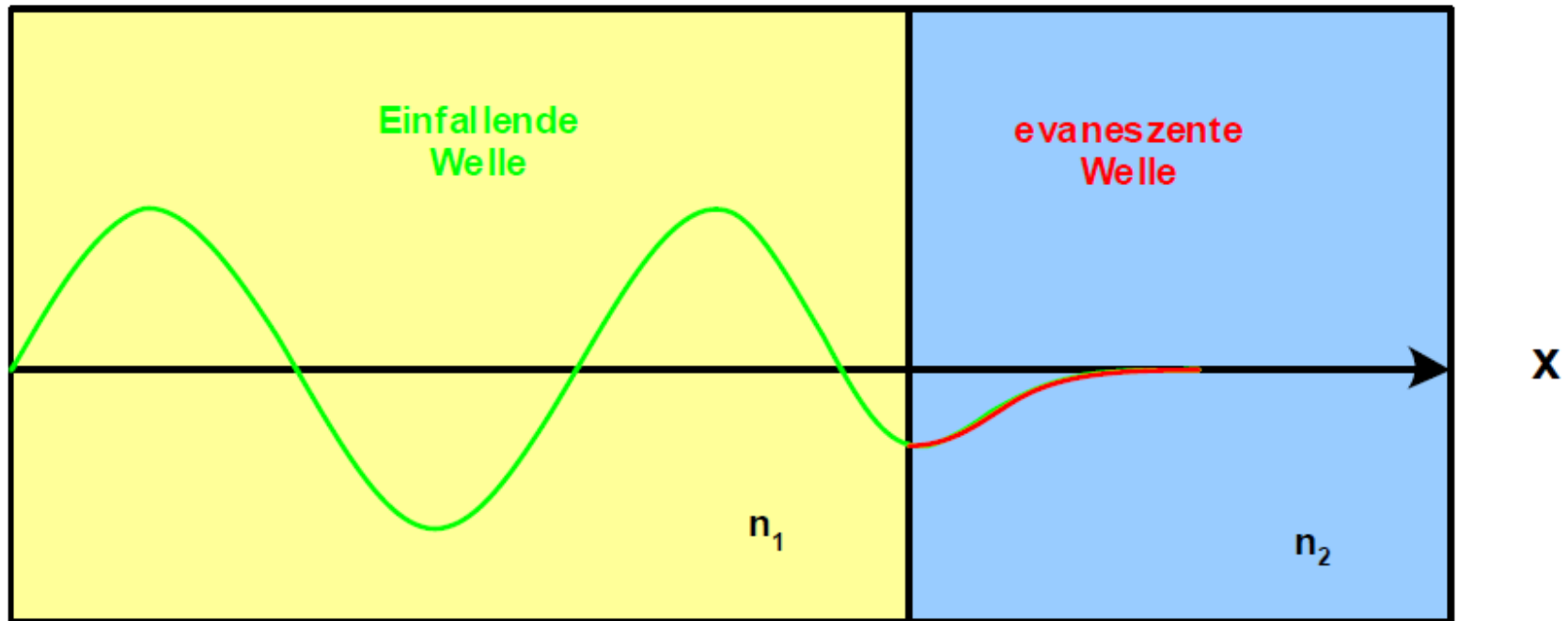


© http://en.wikipedia.org/wiki/Optical_fiber

- Totalreflexion :
Das Licht hat eine endliche Eindringtiefe
und fällt exponentiell ab

$$\delta = \frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 i - n'^2}}$$

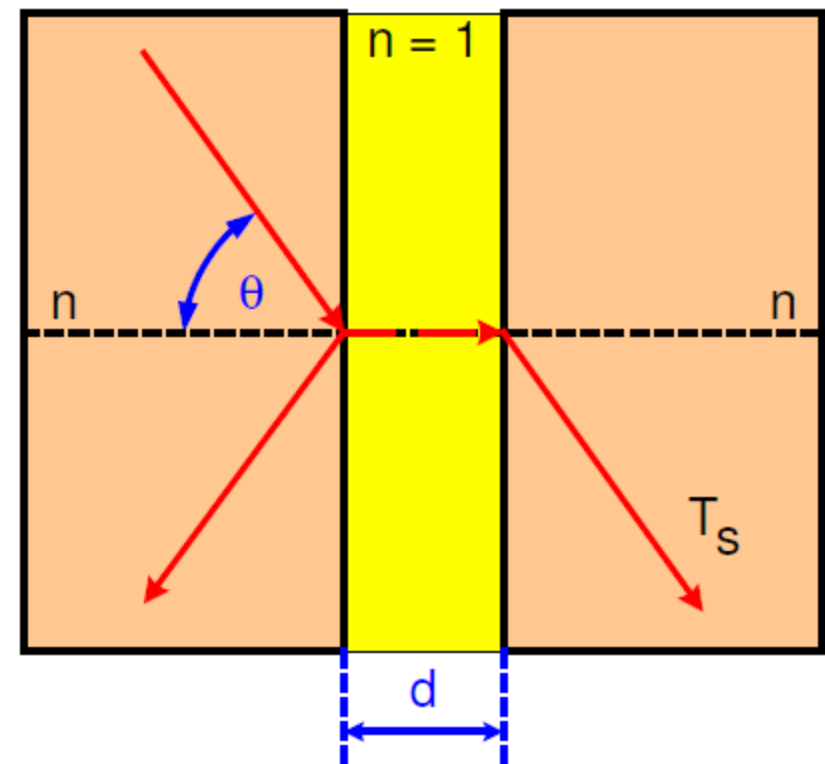
$$E_t(z) = E_e(z) \cdot e^{-\gamma \cdot z} = E_e(z) \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$$



- Gestörte Totalreflexion (FTIR) :
Schmaler Luftspalt zwischen Gläsern :
ein Teil der evaneszenten Welle transmittiert über das Gap (Tunneleffekt)

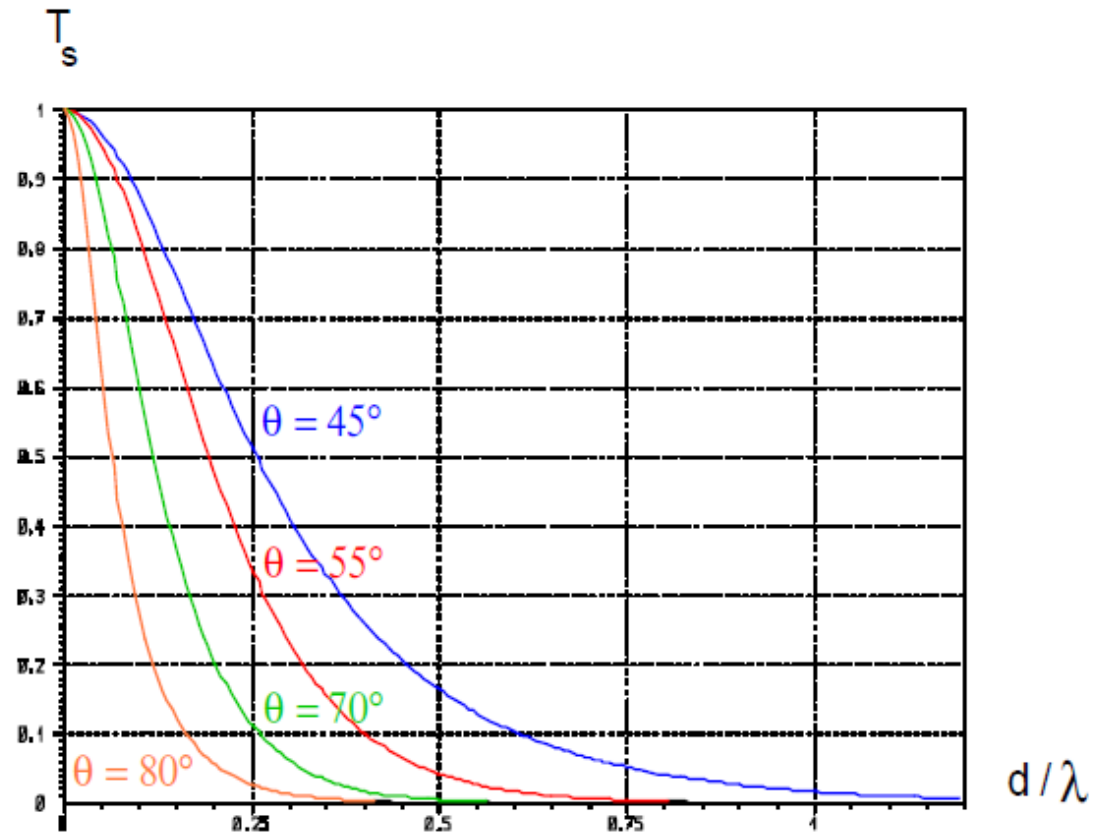
- Eindringtiefe

$$d = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 i - n'^2}}$$



- Transmission als Funktion von Polarisation, Einfallswinkel und Schichtdicke
- Anwendung : Messung von Abständen im Photon Tunnel Microscope (PTM)

$$T_{\perp}(0) = 2 \cdot (1 - \cos 2\delta_{\perp}) \cdot e^{-\frac{2d}{\lambda} \cdot 2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 i - n^2}}$$



2. Geometrische Optik

2.1 Axiome und Gesetze der geom. Optik

2.2 Abbildungsgleichung

2.3 Weitere Gleichungen der Paraxialen Optik

Annahmen:

- Winkel zwischen Strahl und optischer Achse sind klein (nahe der Achse – paraxial)
- Taylor-Entwicklung in 1.Ordnung:
 - $\sin i \sim \tan i \sim i, \quad \cos i \sim 1, \quad (1 + x)^{1/2} \sim 1 + x / 2$

Brechungsgesetz

exakt

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$$

paraxial

$$n \cdot i = n' \cdot i'$$

Bedeutung der paraxialen Optik

- Paraxiale Optik liefert einfache Abbildungsgleichungen

Gaußsche Optik, Paraxiale Optik, (First order optics)

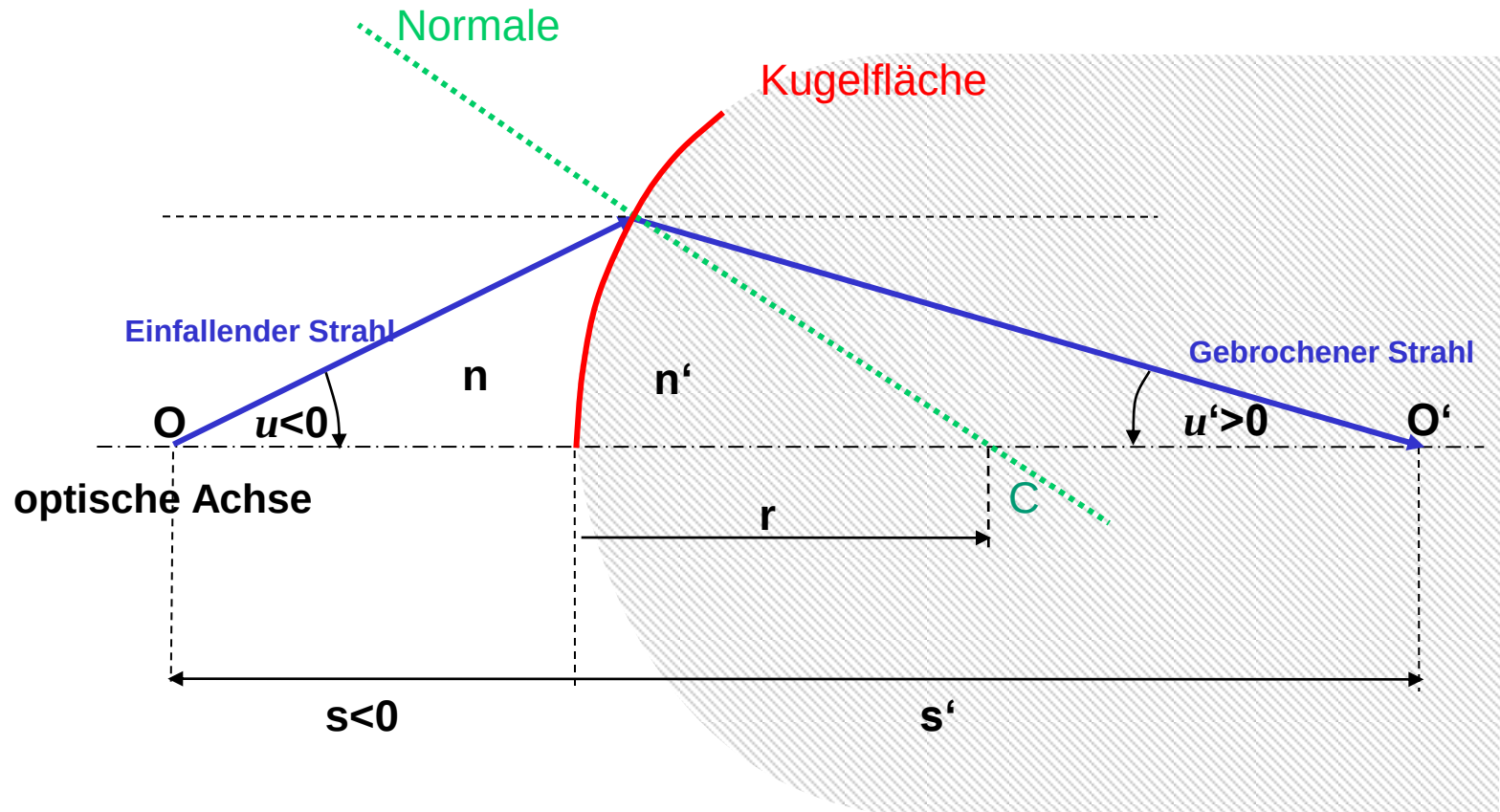
Lineare Beziehungen zwischen Schnittweiten, Winkeln, Höhen, Objekt- und Bildlage, ... → **Abbildungsgleichung**

Perfekte geometrische Abbildung ohne Abbildungsfehler:

alle von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen schneiden sich in einem Bildpunkt

- Paraxiale Optik beschreibt das Verhalten von Strahlen ‚in der Nähe‘ der optischen Achse, d.h. Winkel und Krümmungen sind klein
- Paraxiale Optik ist eine Näherung für Strahlen mit endlichen Höhen und Winkeln. Durch paraxiale Strahlen definierte Größen haben auch für diese Strahlen eine Bedeutung
- Paraxiale Größen sind für Systeme ohne Symmetrieachse nur mit Vorsicht zu gebrauchen, wenn überhaupt

Einzelne sphärische Grenzfläche



Vorzeichenkonvention ist wichtig (...und hängt vom Lehrbuch ab) !!

Konvention: Lichtrichtung von links nach rechts !!

Vorzeichen !

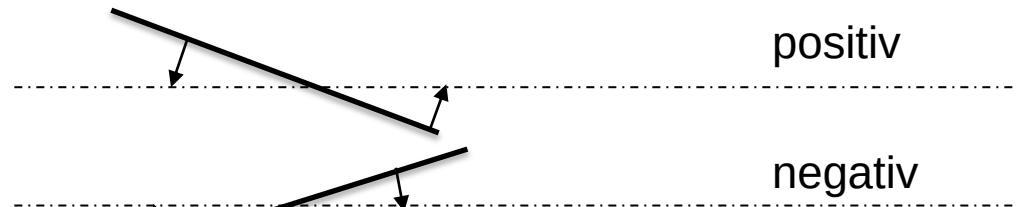
Vorzeichen-vereinbarung:

Achtung, variiert
mit dem Autor,
für Vorlesung:
siehe rechts

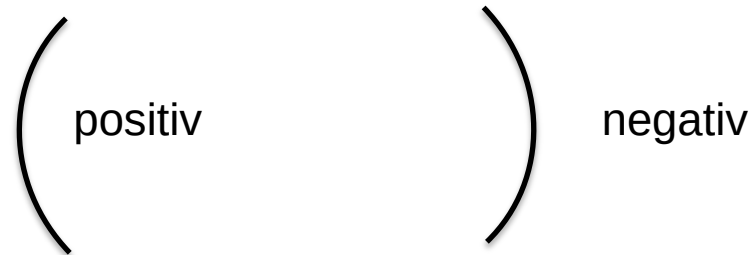
Lichtrichtung: **von links nach rechts**

Strecken:	<u>in</u> Lichtrichtung	positiv
	<u>gegen</u> Lichtrichtung	negativ
	nach <u>oben</u>	positiv
	nach <u>unten</u>	negativ

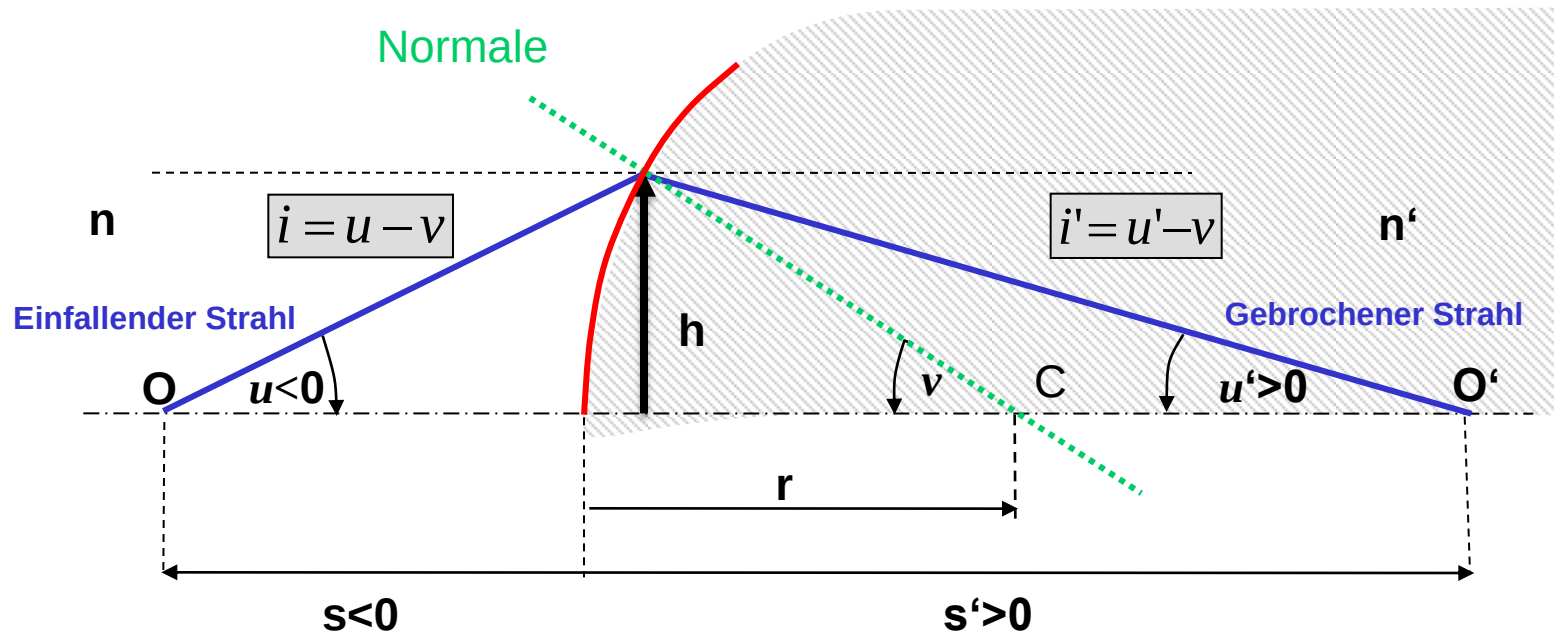
Winkel: werden als Quotienten aus Höhen und
Schnittweiten betrachtet und zeigen von Strahl zu Achse



Radien:







Paraxiales Brechungsgesetz $n i = n' i'$ $n(u - v) = n'(u' - v)$

Paraxial gilt: $u = \frac{h}{s}$, $u' = \frac{h}{s'}$, $v = \frac{h}{r}$ (für kleine Winkel)

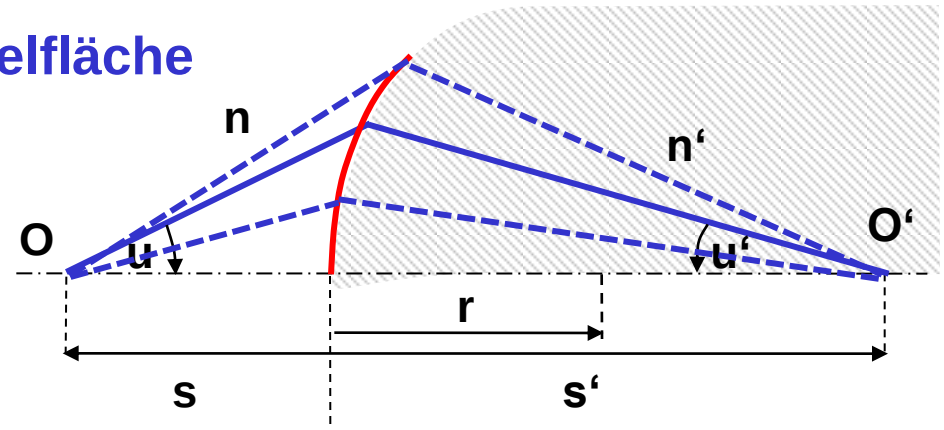
$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{r}$$

(2.4)

$$n' \cdot u' = n \cdot u + h \cdot \frac{(n' - n)}{r}$$

Abbildungsgleichung für Einzelfläche

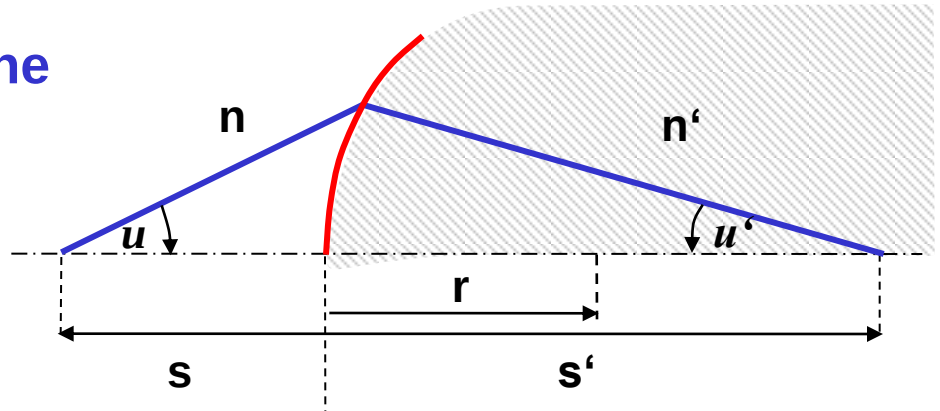
$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{r}$$



- Bildlage ist unabhängig von u
- Alle paraxialen Strahlen aus einem Objektpunkt O (Abstand s) werden „perfekt“ auf einen Bildpunkt O' abgebildet (Abstand s')

Abbildungsgleichung Einzelfläche

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{r}$$

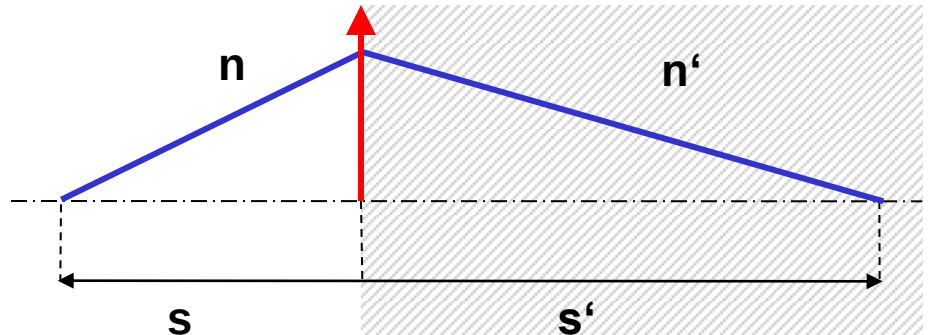


Brechkraft einer Einzelfläche:
(Einheit **Dioptrie 1dpt = 1m⁻¹**)

$$\varphi = \frac{(n' - n)}{r} \quad (2.5)$$

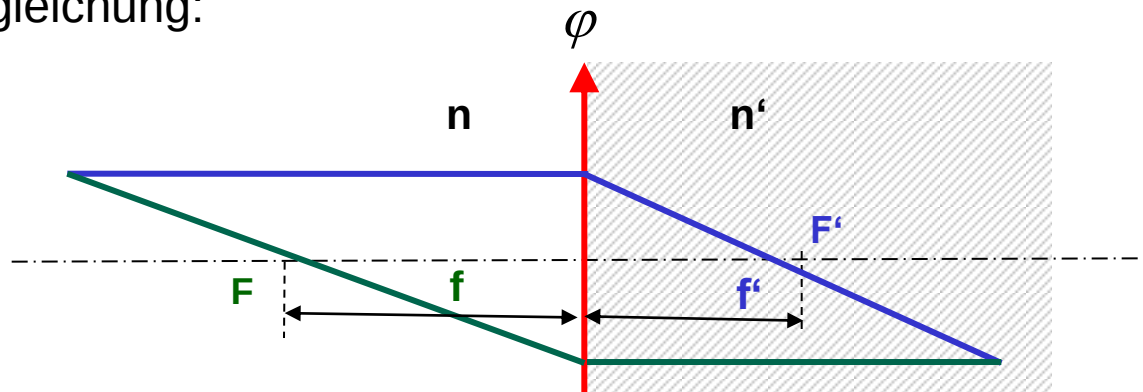
Allgemeine Abbildungsgleichung für Einzelbrechkraft

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \varphi \quad (2.6)$$



Allgemeine Abbildungsgleichung:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \varphi$$



➔ Einfallender Strahl parallel zur Achse:

$$s = \infty \Rightarrow \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s' = \frac{n'}{\varphi} =: f'$$

Bildseitige Brennweite f'
Bildseitiger Brennpunkt F'

➔ Gebeugter Strahl parallel zur Achse:

$$s' = \infty \Rightarrow \frac{1}{s'} = 0 \Rightarrow s = -\frac{n}{\varphi} =: f$$

Objektseitige Brennweite f
Objektseitiger Brennpunkt F

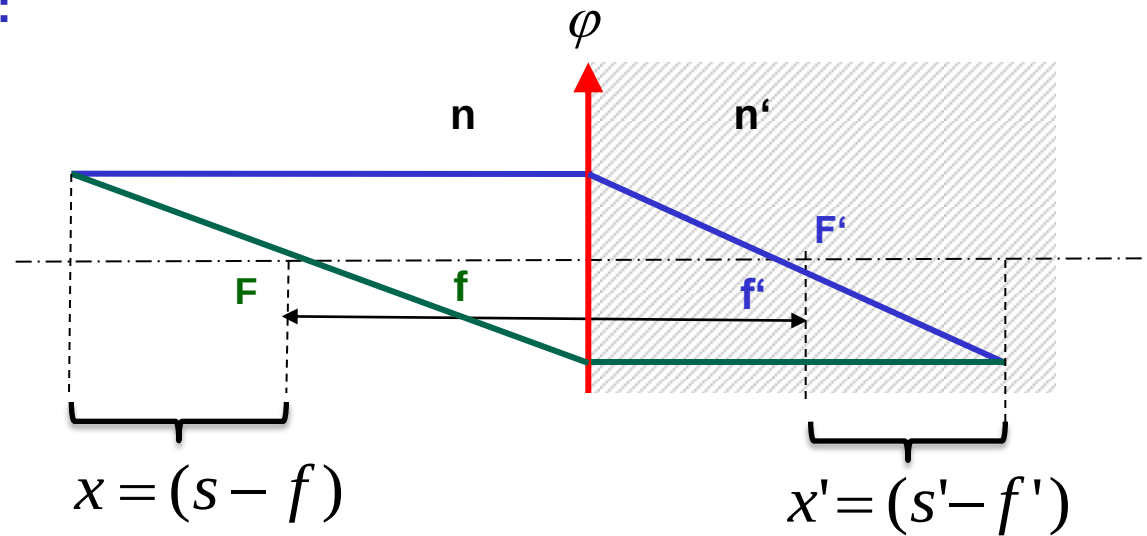
(2.7)

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Abbildungsgleichung:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

(2.8)

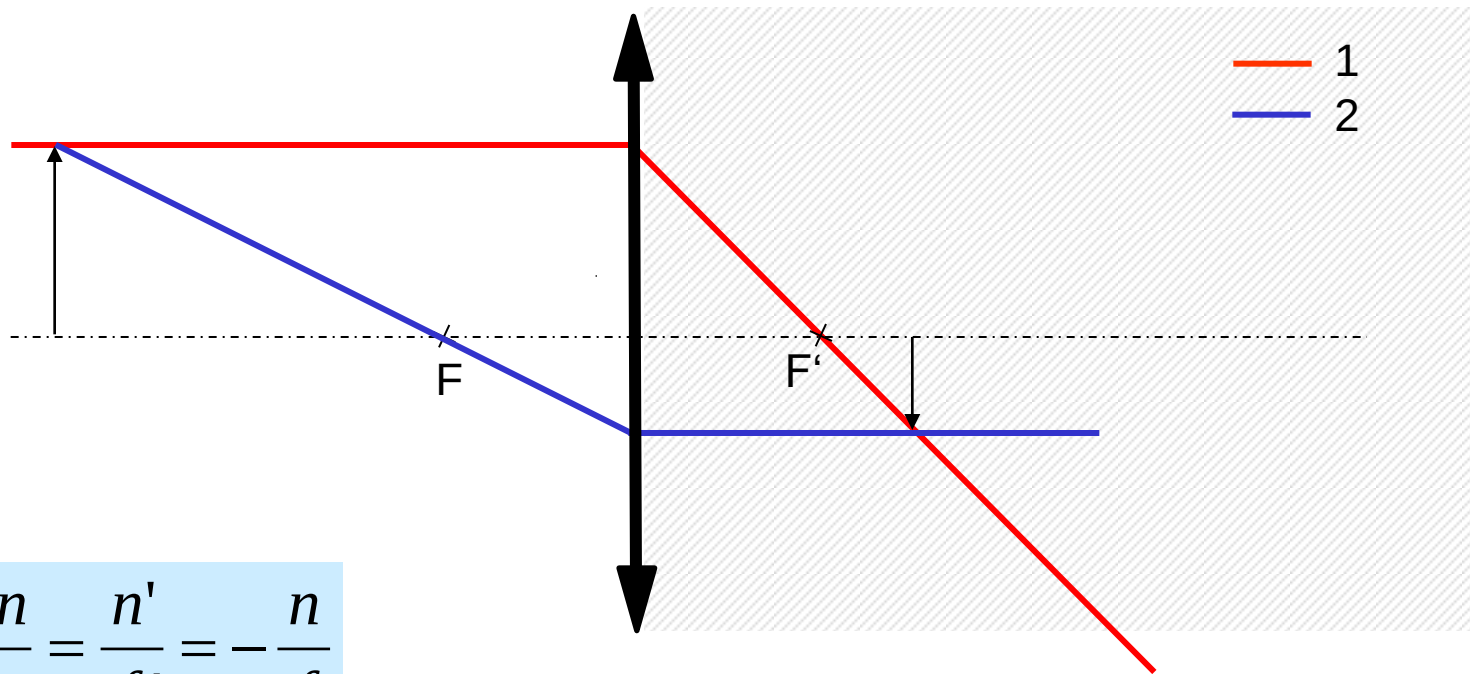


→ Abstand zu den Brennpunkten: x und x' :

$$x \cdot x' = f \cdot f' \quad (2.9)$$

Newtonsche Abbildungsgleichung
(gut wenn Brennebenen bekannt sind)

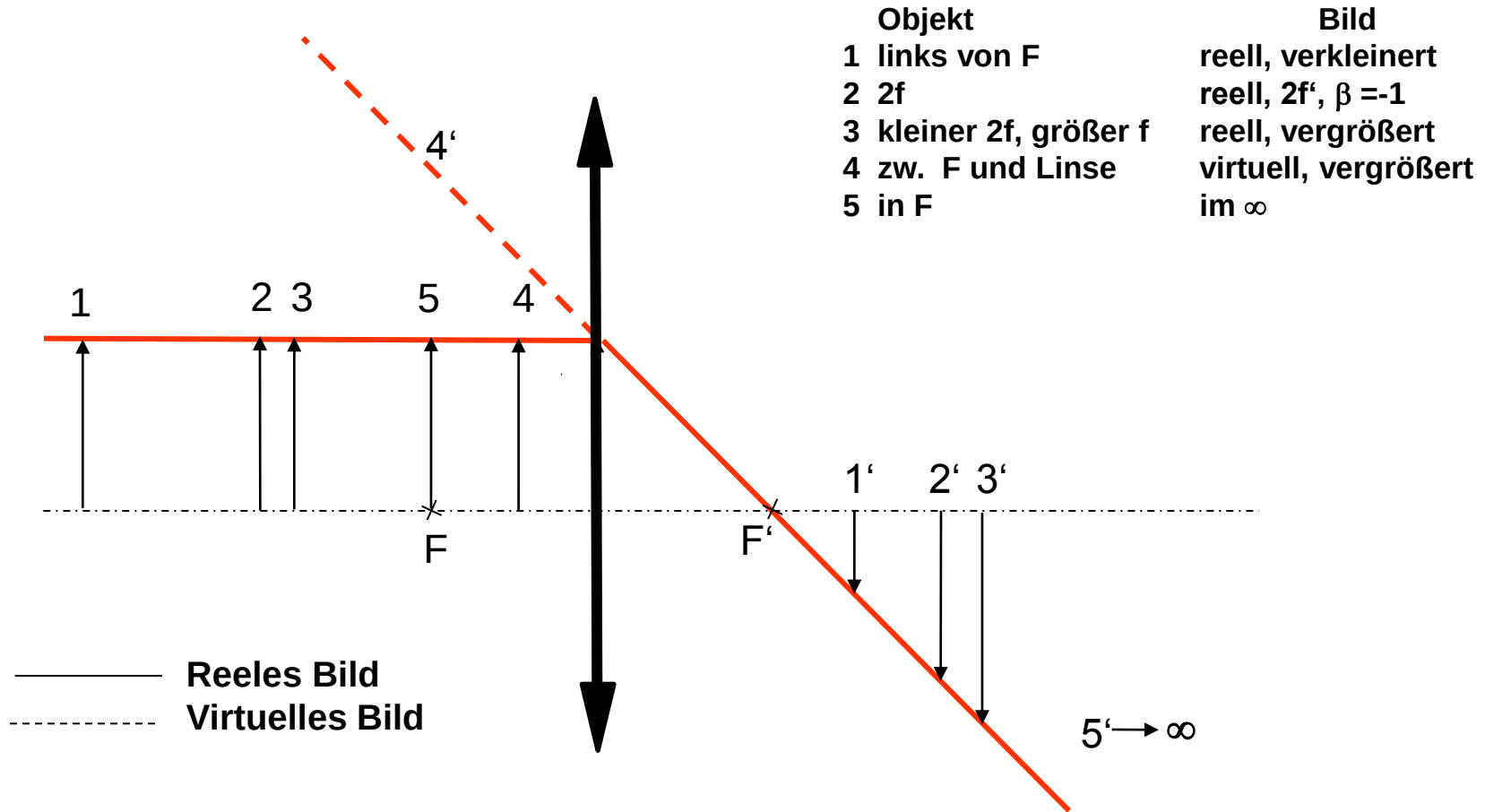
Listing Konstruktion – Positive Brechkraft



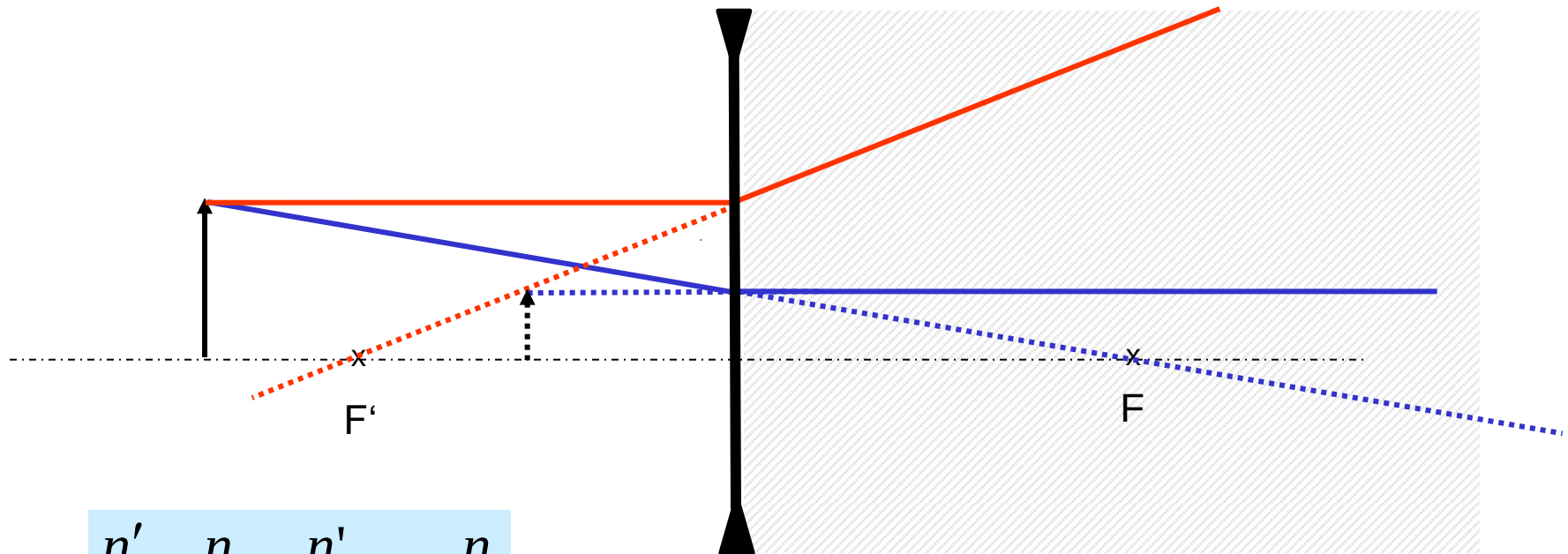
$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

Listing Konstruktion

positive Brennweite bei verschiedenen Objektlagen



Listing Konstruktion, negative Brechkraft

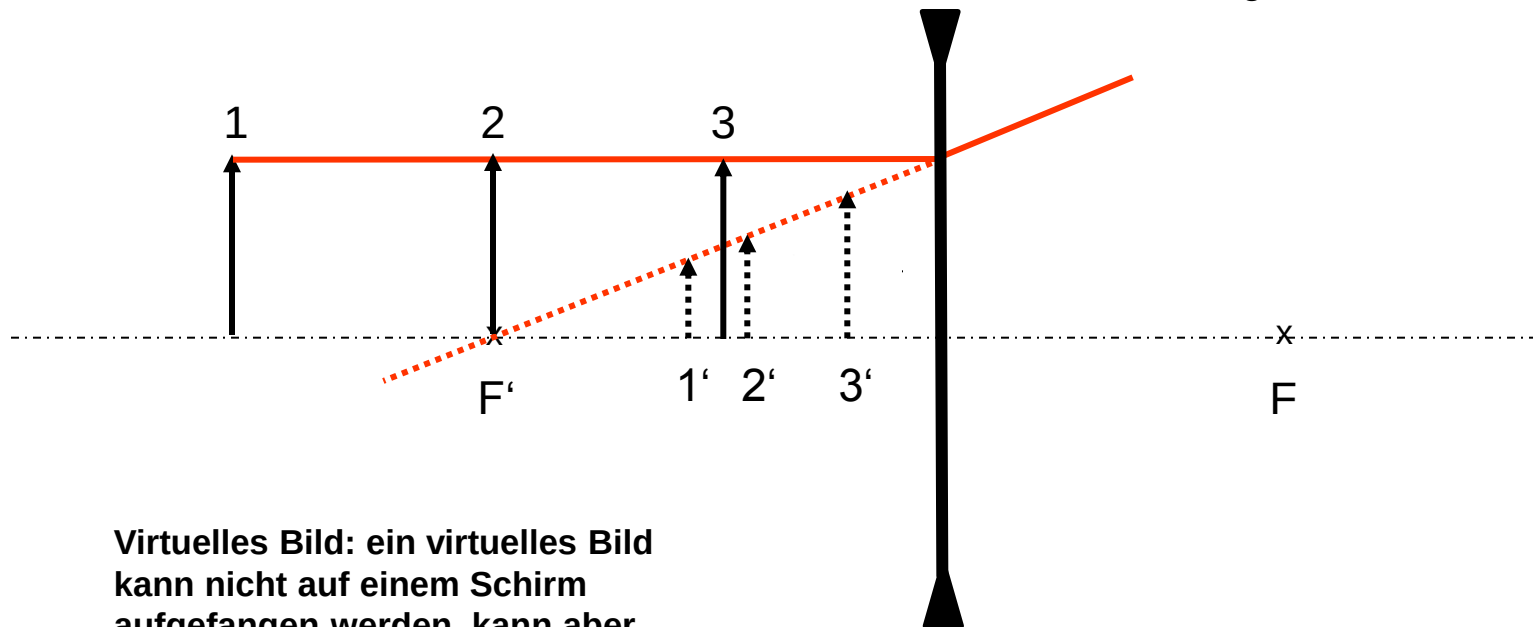


$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

Listing Konstruktion

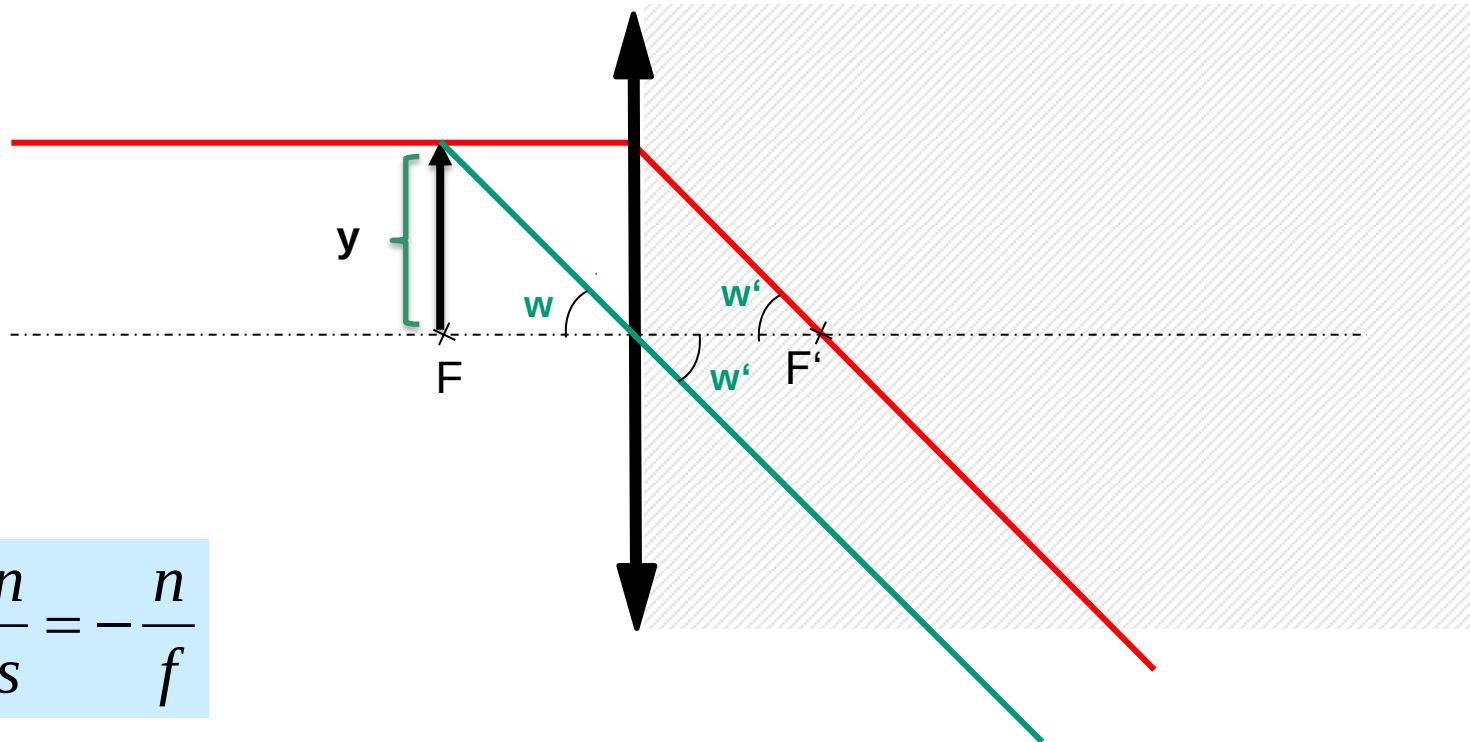
negative Brechkraft bei verschiedenen Objektlagen

→ Für negative Brechkraft sind nur virtuelle Bilder vor der Linse möglich



Virtuelles Bild: ein virtuelles Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden, kann aber durch eine Optik in ein reelles Bild abgebildet werden

Objekt im Brennpunkt



$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = -\frac{n}{f}$$

$$s = f$$

$$\Rightarrow s' = \infty$$

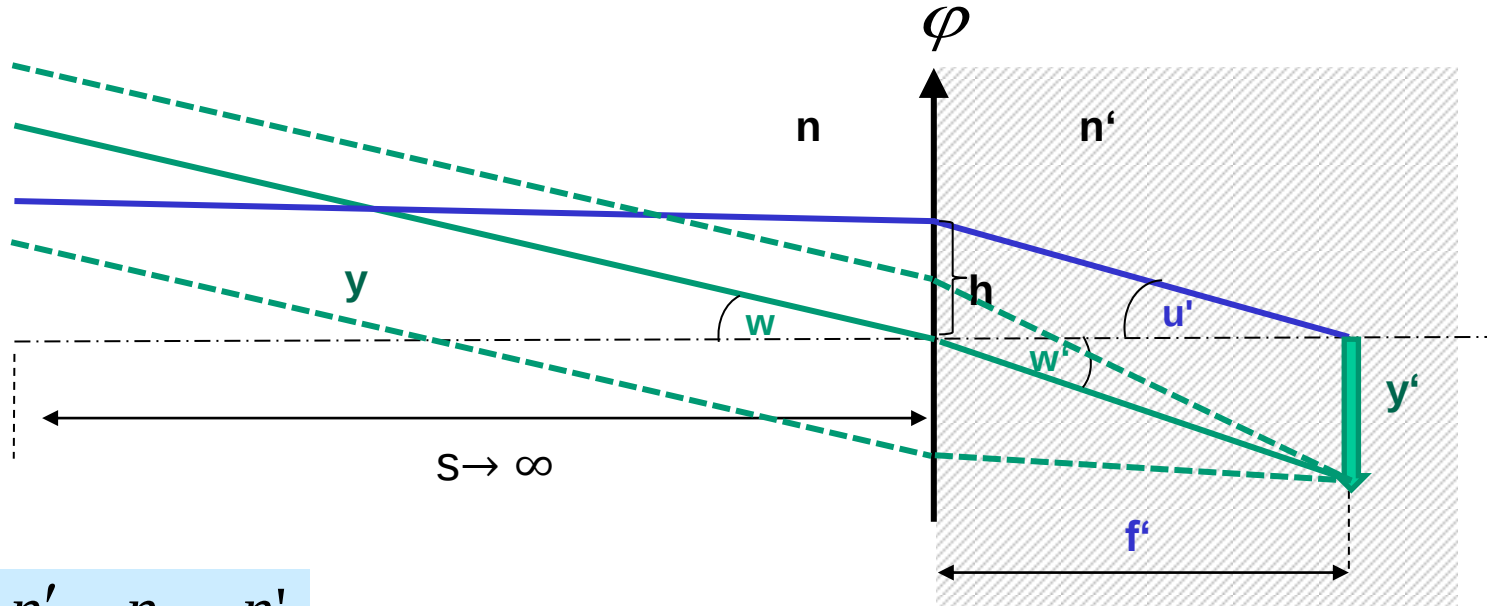
$$w = -\frac{y}{f}$$

$$w' = \frac{y}{f'} \quad (2.10)$$

$$\tan w' = \frac{y}{f'}$$

gilt exakt
für große w'

Für Objekt im objs. Brennpunkt
→ Bild im Unendlichen unter Winkel w'



$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'}$$

$$S = \infty$$

$$\Rightarrow S' = f'$$

$$y' = f' \cdot w'$$

$$n'w' = nw$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}$$

$$y' = f \cdot w \quad (2.11)$$

$$y' = f \cdot \tan w$$

**Für Objekt im Unendlichen
→ Bild in der bilds. Brennebene**

2. Geometrische Optik

2.1 Axiome und Gesetze der geom. Optik

2.2 Abbildungsgleichung

2.3 Weitere Gleichungen der Paraxialen Optik

Größe des Bildes ?

Maßstab

$$\beta := \frac{y'}{y} \quad (2.12)$$

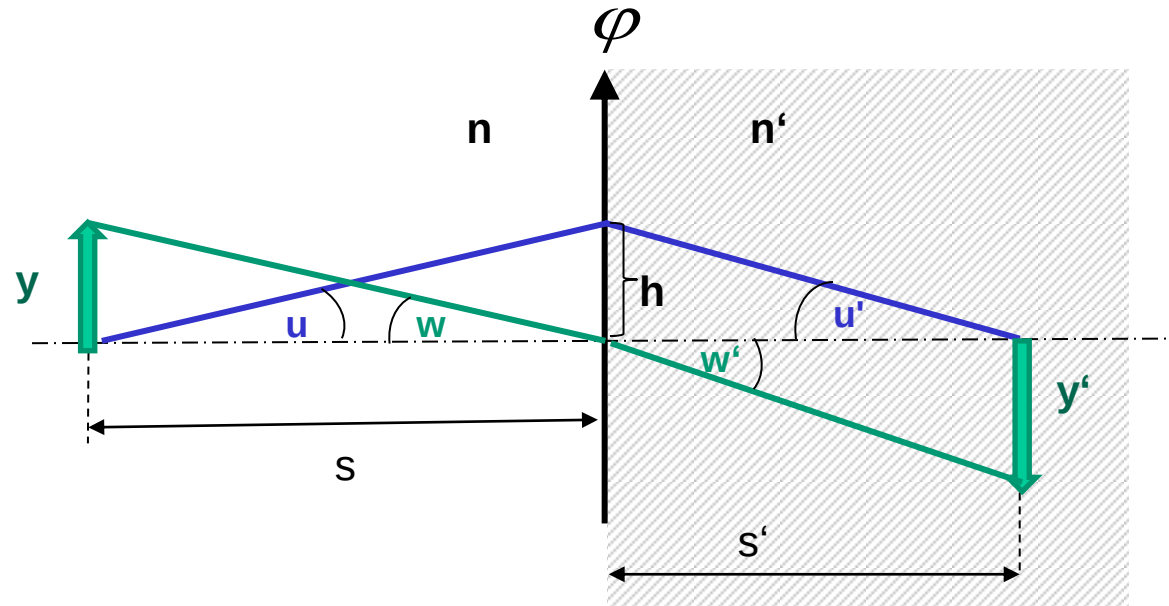
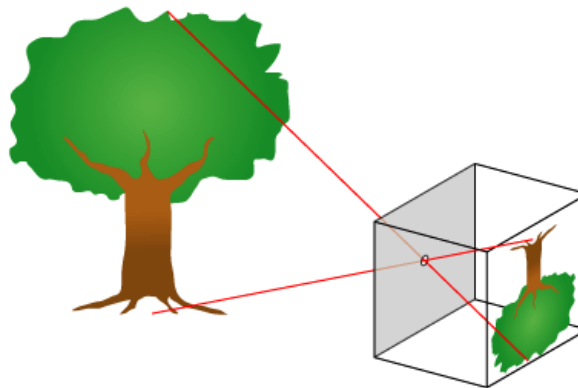
$$n \cdot w = n' \cdot w'$$

$$y = s w$$

$$y' = s' \cdot w'$$

$$\beta = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}$$

(2.13)

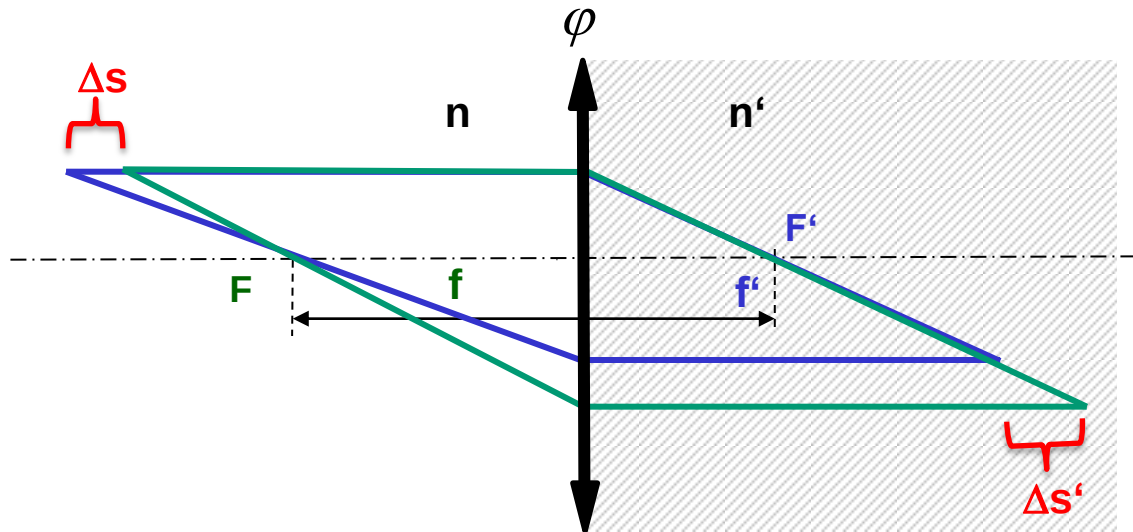


$$u = \frac{h}{s}$$

$$u' = \frac{h}{s'}$$

$$\beta = \frac{n \cdot u}{n' \cdot u'}$$

(2.14)



Differenzierung der Abbildungsgleichung:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \varphi \Rightarrow$$

$$-\frac{n'}{s'^2} \partial s' = -\frac{n}{s^2} \partial s$$

Multiplikation mit h^2 :

$$n' u'^2 \partial s' = n u^2 \partial s$$

Tiefenmaßstab

$$\alpha = \frac{\partial s'}{\partial s} = \frac{n u^2}{n' u'^2} = \frac{n'}{n} \beta^2 \quad (2.15)$$

Kombination von Brechkraften – Dünne Linse



Dünne Linse: Zwei Kugelflächen (Brechkraften) in geringem Abstand d :

1. Fläche: $\frac{n'_1}{s'_1} - \frac{n_1}{s_1} = \varphi_1$ $\varphi_1 = \frac{(n'_1 - n_1)}{r_1}$

2. Fläche: $\frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n_2}{s_2} = \varphi_2$ $\varphi_2 = \frac{(n'_2 - n_2)}{r_2}$

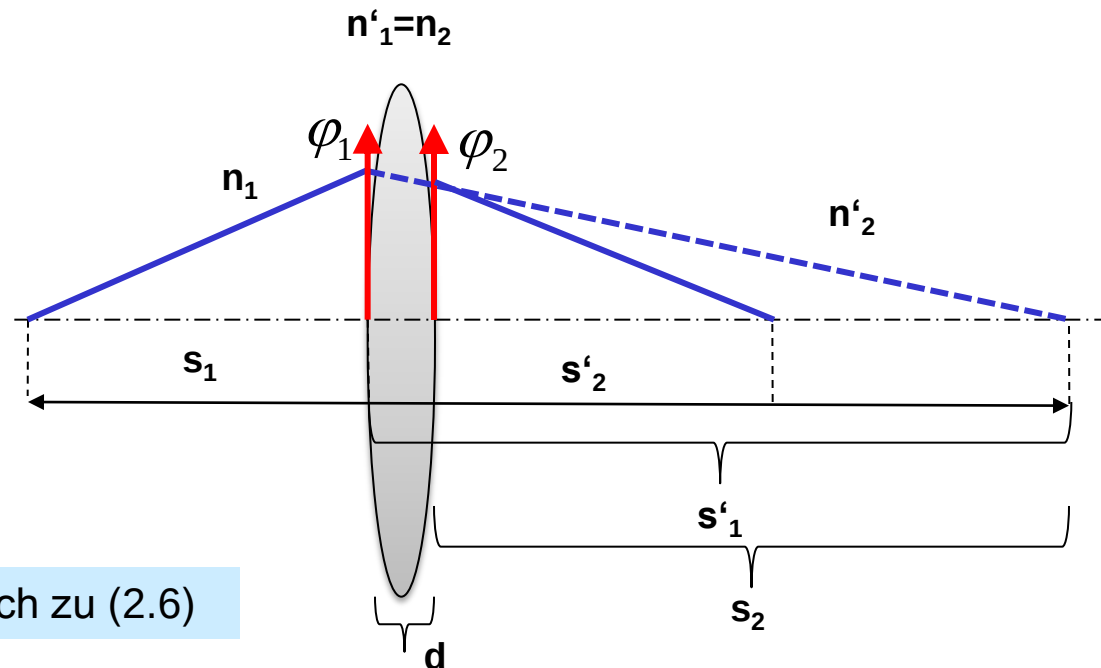
$$s_2 = s'_1 \underbrace{- d}_{\approx 0}$$

$$\frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n_1}{s_1} = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\phi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n_1}{s_1} = \phi$$

identisch zu (2.6)

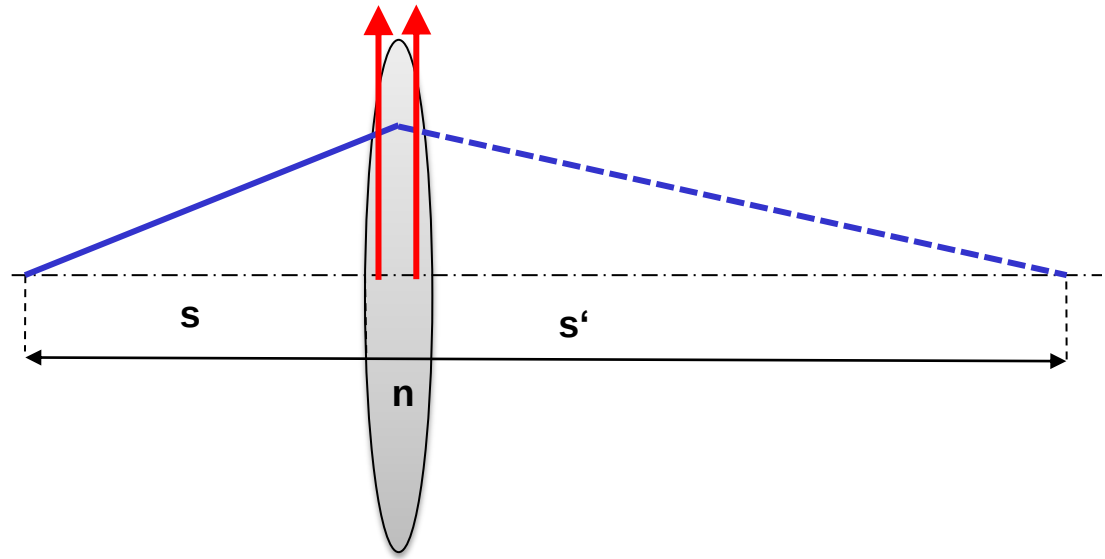


In Luft:

Luft: $n_1 = n_2' = 1$

Linsenmaterial: n

$$\frac{n_2'}{s'} - \frac{n_1}{s} = \phi$$



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \phi = \frac{1}{f'} \quad (2.16)$$

Linsen-Abbildungs-Gleichung

Brechkraft (1/Brennweite)

$$\phi = \varphi_1 + \varphi_2 = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.17)$$

Linsen-Macher-Gleichung