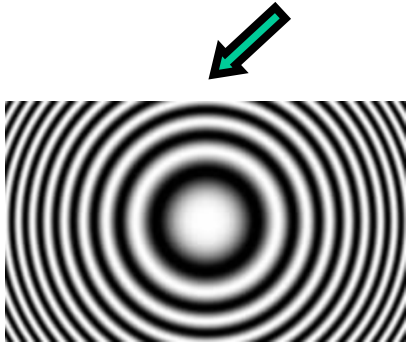
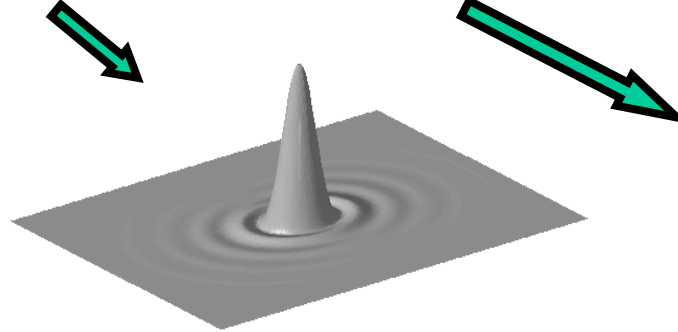


Warum Wellenoptik?

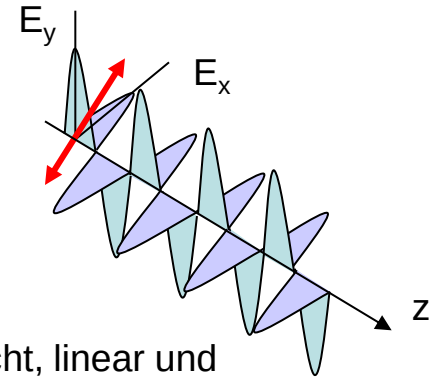
Weil das Strahlenmodell des Lichtes nur eine eng begrenzte Gültigkeit hat und wesentliche Effekte wie **Interferenz, Beugung und Polarisation** überhaupt nicht erklären kann.



Interferenz von
Lichtwellen



Intensitätsverteilung im
Airy-Scheibchen



Licht, linear und
unter 45° polarisiert

Zur Interferenz

Unter Nutzung der Interferenz, also der Wechselwirkung von Lichtwellen, lassen sich sehr genaue und schnelle Messsysteme aufbauen. Beispielsweise für die Messung von

- Längen mittels Laserinterferometer (in den Größenordnungen von pm über nm, m bis km)
- Dehnungen, Verschiebungen, (typ. Nanometer- bis Mikrometerbereich)
- Verformungen an Maschinenbauteilen (Karosserien mittels Holografie, Mikrometer)
- Schwingungen, orts aufgelöst und auch zeitaufgelöst bis in den kHz-Bereich (Motortest)

Mit interferometrischen Verfahren können weiterhin folgende Größen gemessen werden :

- ebene Winkel (von Winkelsekunden bis zum Vollkreis, Phys. Techn. Bundesanstalt, PTB),
- Mikroformen (Rauheit) Weißlichtinterferometrie – 2015: weit unter 1 nm Tiefenauflösung,
- Schichtdicken (Entspiegelungsschichten, Strahlteilerschichten, auch Ölschichten auf Stahl),
- Brechzahlen von optischen Gläsern, auch dreidimensionale Verteilungen,
- Spektralverteilungen, z.B. von Lichtquellen und spektrale Absorption und Transmission.

Die Anwendung der Interferometrie erfolgt v. A. in Verbindung mit modernen Lichtquellen wie fasergekoppelten Laserdioden, Gas- und Festkörperlaser, Frequenzkamm-Lasern sowie Superlumineszenzdioden (SLDs), Weißlichtquellen wie Halogenlampen und weißen LEDs.

Als Sensoren werden insbesondere CCD- und **CMoS-Kameras** (Zeile und Matrix) sowie schnelle Fotodioden (auch Zeilen) eingesetzt, auch Photomultiplier bei biolog. Applikationen.

Die technischen Vorteile (genau, schnell, sensitiv auch flächig) der interferenzbasierten Verfahren schaffen große Motivationen für den Einsatz in der Halbleiterindustrie u. im Präzisionsmaschinenbau (beispielsweise Laserinterferometer in 3D-Koordinatenmessmaschinen).

Interferometrische Längenmessungen mit Lichtwellen sind nach Zeitmessungen und Frequenzmessungen die am genauesten durchführbaren Messungen überhaupt.

Beugung ist ein physikalisches Phänomen, das untrennbar mit der Wellennatur des Lichts verbunden ist und nur durch diese erklärt werden kann. Beugung ist oft ein limitierender Faktor, der aber auch gezielt genutzt werden kann, z.B. bei der Wellenfrontformung mit einem Beugungsgitter (z.B. Zonenlinse). Als limitierender Faktor begegnet uns die Beugung bei der optischen Abbildung. Hier haben wir es mit der beugungsbegrenzten Unschärfe von Bildpunkten und abgebildeten Kanten zu tun, z. B. bei der Belichtung von sehr feinen Masken für Halbleiter-Chips. Diese beugungsverursachte Unschärfe ist bei der Belichtung von Fotofilm, Fotolack oder Sensor-Chips sehr unerwünscht. Der Ausweg besteht bei HL-Belichtung in der Anwendung immer kürzerer Wellenlängen (UV- und EUV-Bereich) und Immersionstechniken.



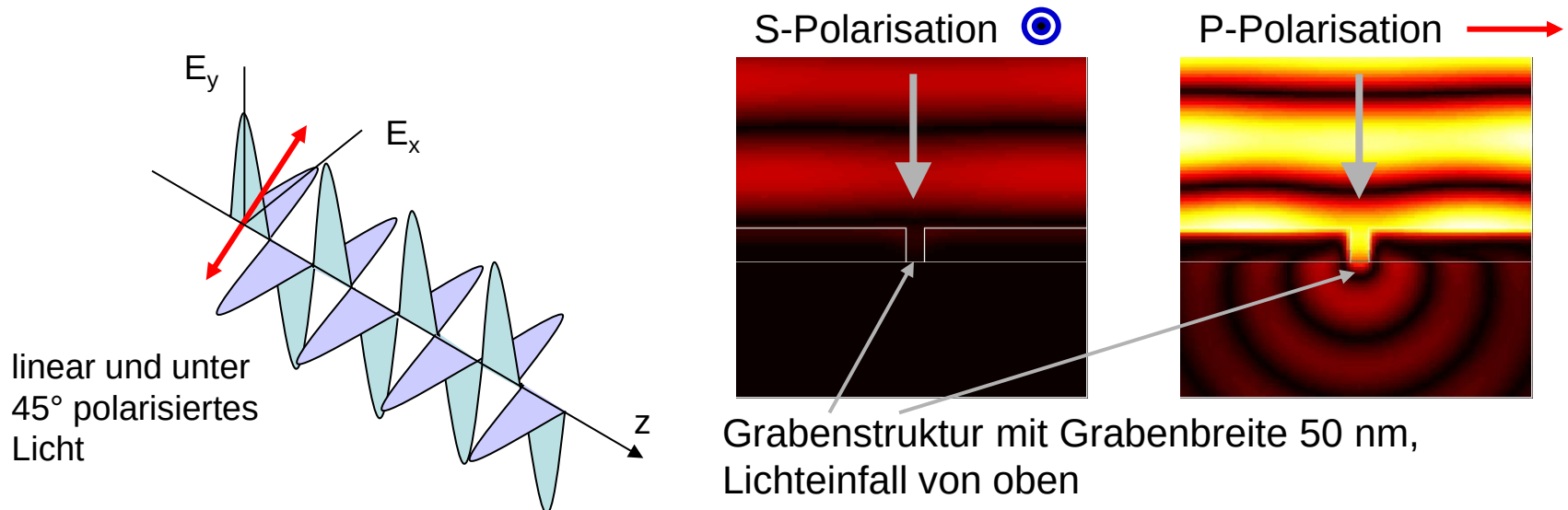
Intensität im beugungsbegrenzten Punktbild einer kreisförmigen Apertur (Airy-Scheibchen)

Wellenoptik - Polarisation - Motivation

Die Polarisationsrichtung des Lichts ist die Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke.

Polarisation spielt bei Lichtquellen, insbesondere bei Lasern eine wichtige Rolle.

Die Wechselwirkung des Lichts mit Oberflächen, bspw. der Grad der Reflexion an einem Spiegel oder einem Glaskörper (Scheibe, Prisma, Linse), ist beim schrägen Lichteinfall auch stark vom Polarisationszustand des Lichts abhängig. Die mikroskopische Sichtbarmachung von Mikrostrukturen im Subwellenlängenbereich ist bei der Interferenzmikroskopie auch von der Orientierung einer Grabenstruktur zur Polarisationsrichtung des Lichts (senkrecht oder parallel zur Einfallrichtung) abhängig.



- Entstehung: Durch Wechselwirkung von elektrischen und magnetischen Erregungen des Raumes
- Beschreibung: Elektrodynamik/Maxwellgleichungen
- Aus den Maxwellgleichungen folgt die Wellengleichung (Vorlesungsskript Gl. 3.2), s. a. Vorlesungsfolien OMT-3:2 bis OMT-3:11:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0$$

partielle Differenzialgleichung mit der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ und der Lichtgeschwindigkeit c , stellt also eine Raum-Zeit-Beziehung dar

Δ - Laplace-Operator mit
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Der Laplace-Operator, auch als Delta-Operator (Δ) bekannt, ist in der Analysis ein wichtiger Differentialoperator, der die Summe der zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variablen – hier die drei Raumkoordinaten x, y, z - ermittelt.

Lösung: Ansatz für die harmonische Welle, s. a. Vorlesungsskript Gl. 3.3:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)}$$

$\mathbf{E}$ - elektrische Feldstärke, $\mathbf{a}$ – Vektoramplitude, $\mathbf{k}$ – Wellenzahlvektor, $\mathbf{r}$ – Vektor, ω - Kreisfrequenz, t - Zeit

Zur Lösung der Wellengleichung (G. 3.2)

Lösung: Ansatz für *harmonische Welle*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit } \mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$\mathbf{A}$ - komplexe Vektoramplitude, $\mathbf{a}$ - Vektoramplitude

Phase: $-\varphi(\mathbf{r}, \omega) + \omega t$ Wellenzahlvektor: $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_k$

$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ Wellenzahl: $k = 2\pi/\lambda$

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi\nu$ Wellenlänge λ , Frequenz ν

OMt-3: 13

zeitliche Ableitungen: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E} = i\omega \cdot \mathbf{A} \cdot e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mathbf{A} \cdot e^{i\omega t}$$

↪ zeitfreie Wellengleichung: $\boxed{[\Delta + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2] \mathbf{A} = 0} \quad (3.4)$

Lösung: komplexe Vektoramplitude

Voraussetzung: alle Feldgrößen hängen nur von Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_k$ ab

Wellenamplitude $\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\varphi(\mathbf{r}, \omega)}} \quad (3.5)$

Monochromatische Lichtwelle

Bemerkung: Rechnen mit komplexen Exp.- Ausdrücken ist mathematisch gesehen nützlich

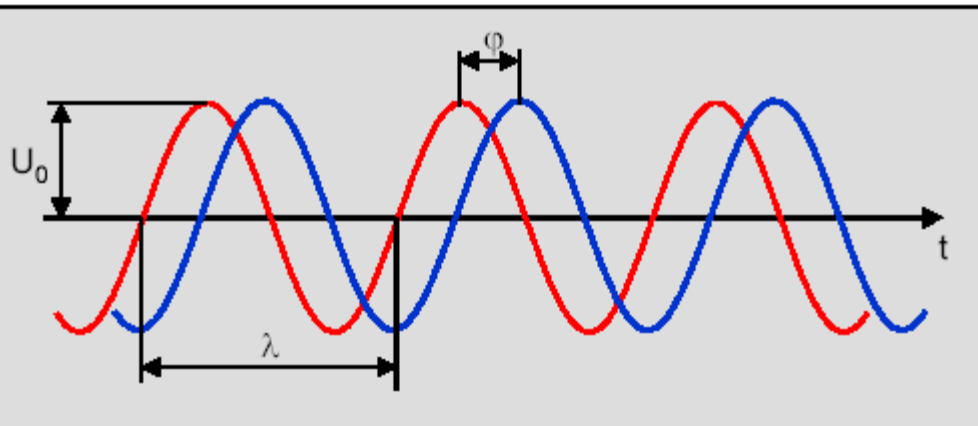
Vereinbarung: für reelle physikalische Größe wird Realteil herangezogen (Real- und Imaginärteil befriedigen für sich Maxwell- und Wellengleichung)

bekannter Ausdruck für monochromatische Lichtwelle:

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0(\mathbf{r}) \cdot \cos[-\varphi(\mathbf{r}, \omega) + \omega t] \quad (3.6)$$

momentane Amplitude maximale Amplitude Phase
(räuml./zeitl. Verlauf)

OMt-3: 15



$$c = \lambda \cdot \nu \quad \text{Dispersionsrelation} \quad (3.7)$$

$$c_{\text{Vakuum}} = 299.792,458 \text{ km/s}$$

OMt-3: 16

Zeitlicher Verlauf der el. Feldstärke U an zwei Punkten im Raum

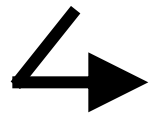
Komplexe Vektoramplitude, siehe a. Gl. (3.5):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\varphi(\mathbf{r}, \omega)}$$

Vernachlässigung des Vektorcharakters (eine Komponente)

komplexe Amplitude $A(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\varphi(\mathbf{r}, \omega)}$, siehe Gl. (3.8)

$$a(\mathbf{r}) = |\mathbf{a}(\mathbf{r})|$$



Wellentypen:

Spezifikation der Phasenfunktion: $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$

Ansatz für monochromatische ebene Welle:

$$A(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} \quad , \text{ siehe Gl. (3.9)}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 \quad , \text{ siehe Gl. (3.10)}$$

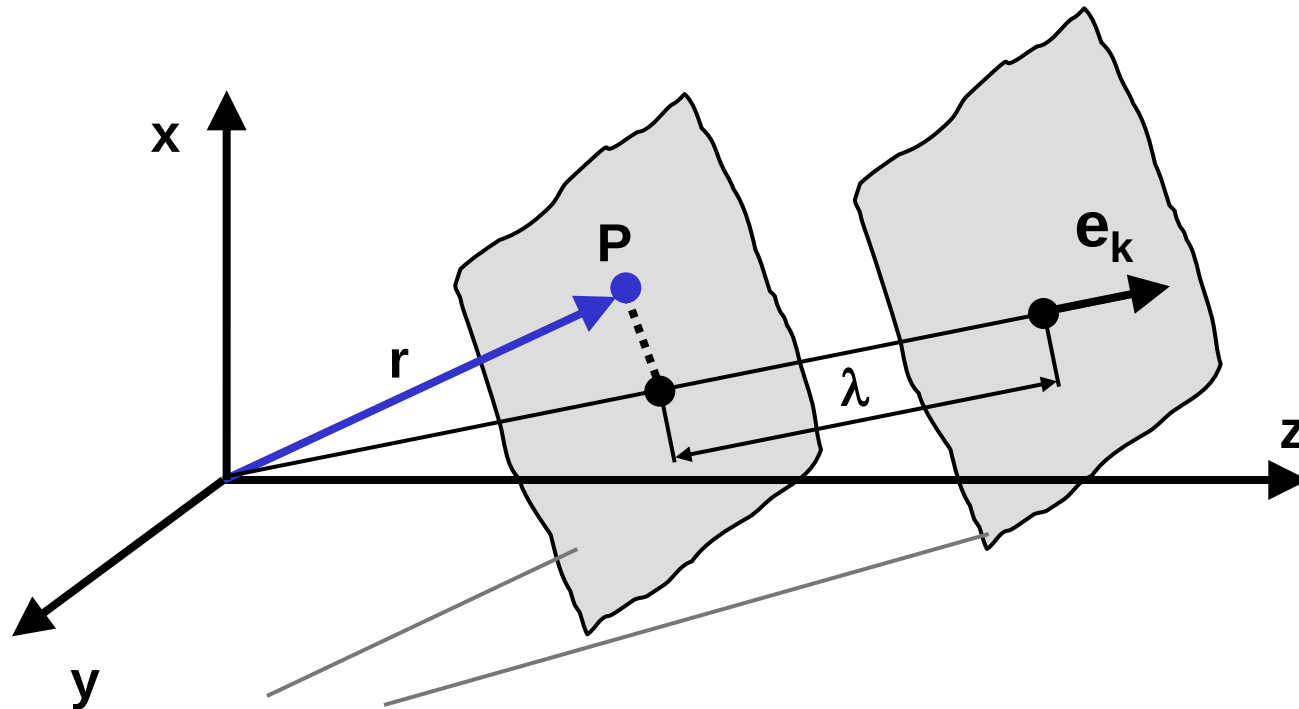
$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \mathbf{e}_k$$

$\mathbf{e}_k$ – Ausbreitungsvektor

φ_0 – Phasenkonstante

Feldstärke $\mathbf{E}$ ist konstant für alle $\mathbf{r}$ und t , für die die Phase konstant ist :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 - \omega t = \text{const.}$$

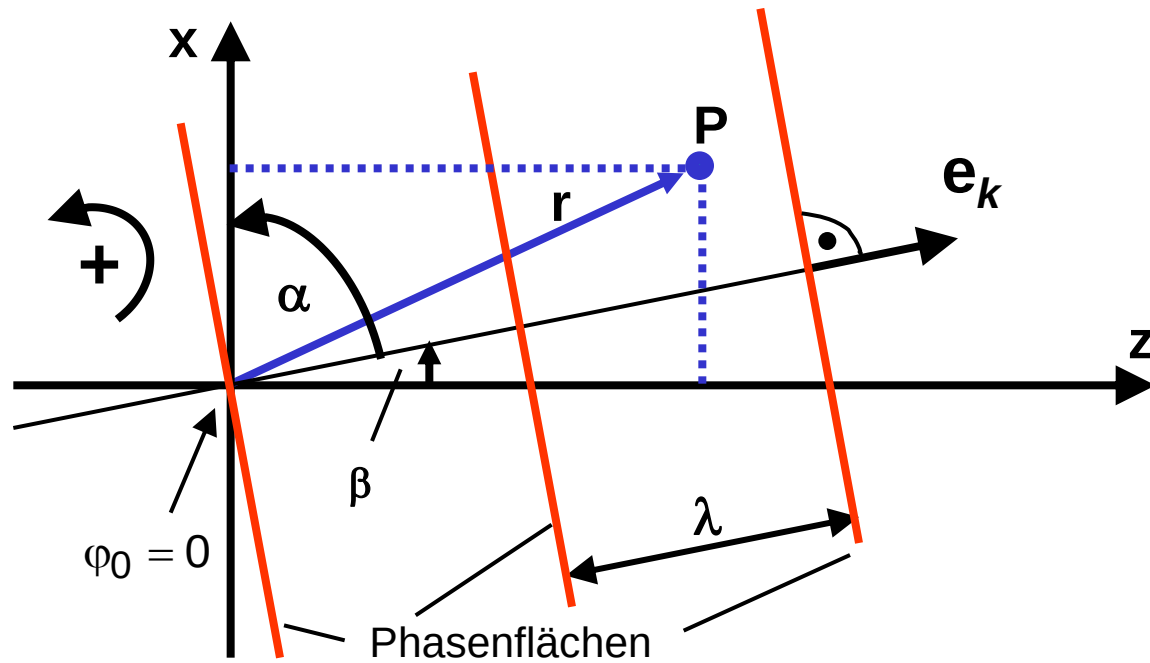


Phasenflächen: Flächen, auf denen bei festgehaltener Zeit die Phase konstant ist

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \quad \text{Ebenengleichung, } \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \text{ ist ein Skalarprodukt.}$$

Phasenflächen sind Ebenen senkrecht zu $\mathbf{e}_k$.

Ebene Welle in der x,z-Ebene



$$\angle(\mathbf{e}_k, x) = \alpha, \quad \angle(\mathbf{e}_k, z) = 360^\circ - \beta, \quad \cos(360^\circ - \beta) = \cos \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r}, \text{ Skalarprodukt!}$$

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r} = e_k \cdot x \cdot \cos \alpha + e_k \cdot z \cdot \cos \beta \quad [\cos \beta = \sin \alpha]$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha), \text{ s.a. Vorlesung Gl. 3.12, } x \text{ und } z \text{ sind Beträge!}$$

$$\rightarrow A(x, y = \text{const.}, z) = a(x, z) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha)}, \text{ s.a. Vorlesung Gl. 3.13}$$

Aufgabe 1

Wir betrachten die x,z -Ebene zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine ebene, monochromatische, elektromagnetische Welle mit der Wellenlänge λ fällt unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ zur x -Achse ein. Die Phase φ_0 im Koordinatenursprung sei 0. Ein Punkt P ist in der x,z -Ebene durch den Ursprungsvektor $\mathbf{r}$ mit den Koordinaten $x = 4\lambda$ und $z = 6\lambda/\sqrt{3}$ gegeben. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke beträgt $a(x,z)$.

1. Wie groß ist die Phase φ der elektromagnetischen Welle am Punkt P?
2. Wie groß ist die elektrische Feldstärke U der Welle am Punkt P?

Lösung zu 1:

mit Gl. 3.12:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha) + \varphi_0$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(4\lambda \cdot \cos 60^\circ + \frac{6\lambda}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ \right)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(4\lambda \cdot \frac{1}{2} + \frac{6\lambda}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{\underline{10\pi}}$$

Die Phase beträgt am Punkt P 10π .

Lösung zu 2:

mit Gl. 3.13 (oder auch Gl. 3.6):

$$A(x,z) = a(x,z) \cdot e^{-i\varphi}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \text{ (nach Euler)}$$

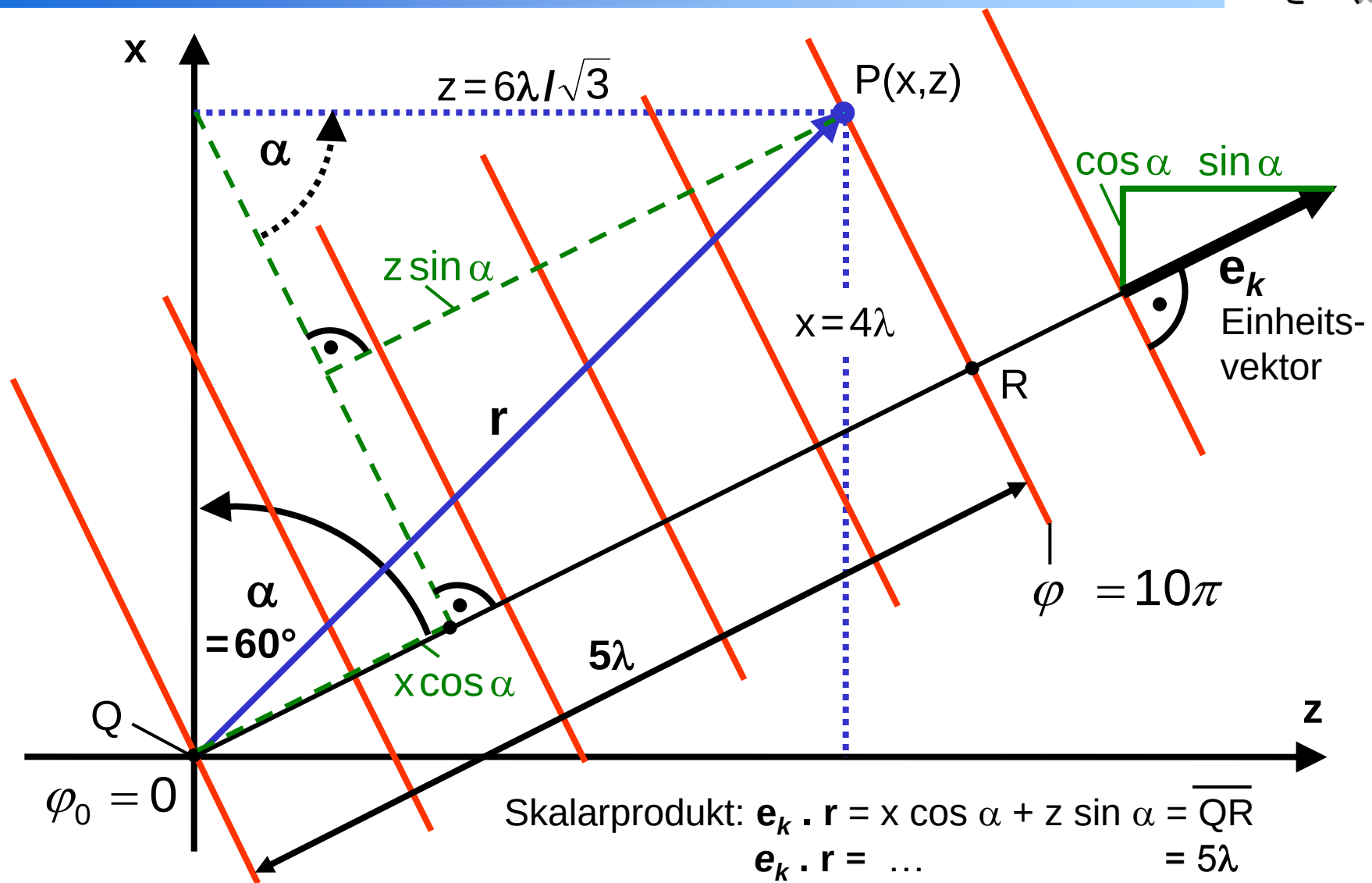
$$\operatorname{Re}\{A(x,z)\} = a(x,z) \cdot \cos \varphi = U, \text{ (} U \text{ ist reell)}$$

$$U = a(x,z) \cdot \cos 10\pi$$

$$\underline{\underline{U = a(x,z)}}$$

Die Feldstärke U ist am Punkt P für $t = 0$ gleich der Amplitude $a(x,z)$.

Geometrische Darstellung von Aufgabe 1



Der optische Weg $\overline{QP}$ beträgt für die ebene Welle 5λ , da die Punkte R und P auf einer (gemeinsamen) Fläche gleicher Phase liegen. Die Phase beträgt 10π am Punkt P .

- Kugelwelle ist Welle, die von Punktquelle aus dem Koordinatenursprung kommt. Phase ist konstant für alle Punkte im Abstand r mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vom Ursprung.

für $t = t_0$ und $\varphi(t_0) = \varphi_0$ gilt

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \varphi(r, \omega) = k \cdot r + \varphi_0 \quad , \text{siehe Gl. 3.14}$$

$$A(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot e^{-i(k \cdot r + \varphi_0)} \quad , \text{siehe Gl. 3.15}$$

$$A(\mathbf{r}) = \frac{a(\mathbf{r})}{r} \cdot e^{-i(k \cdot r + \varphi_0)} \quad , \text{siehe Gl. 3.16}$$

- Wenn nur Phasenverhalten interessiert, kann Amplitudendämpfung $1/r$ vernachlässigt werden. Beachte $k \cdot r$ ist hier das Produkt der Beträge!

Aufgabe 2

Wir betrachten die x,z -Ebene zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine monochromatische, elektromagnetische Kugelwelle mit der Wellenlänge λ entspringt dem Koordinatenursprung. Die Phase φ_0 im Koordinatenursprung sei 0. Ein Punkt P ist in der x,z -Ebene durch den Ursprungsvektor $\mathbf{r}$ mit den Koordinaten $x = 4\lambda$ und $z = 6\lambda/\sqrt{3}$ gegeben.

Wie groß ist die Phase φ der elektromagnetischen Welle am Punkt P?

Lösung:

mit Gl. 3.14 :

$$\varphi = k \cdot r + \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r, \text{ da } \varphi_0 = 0$$

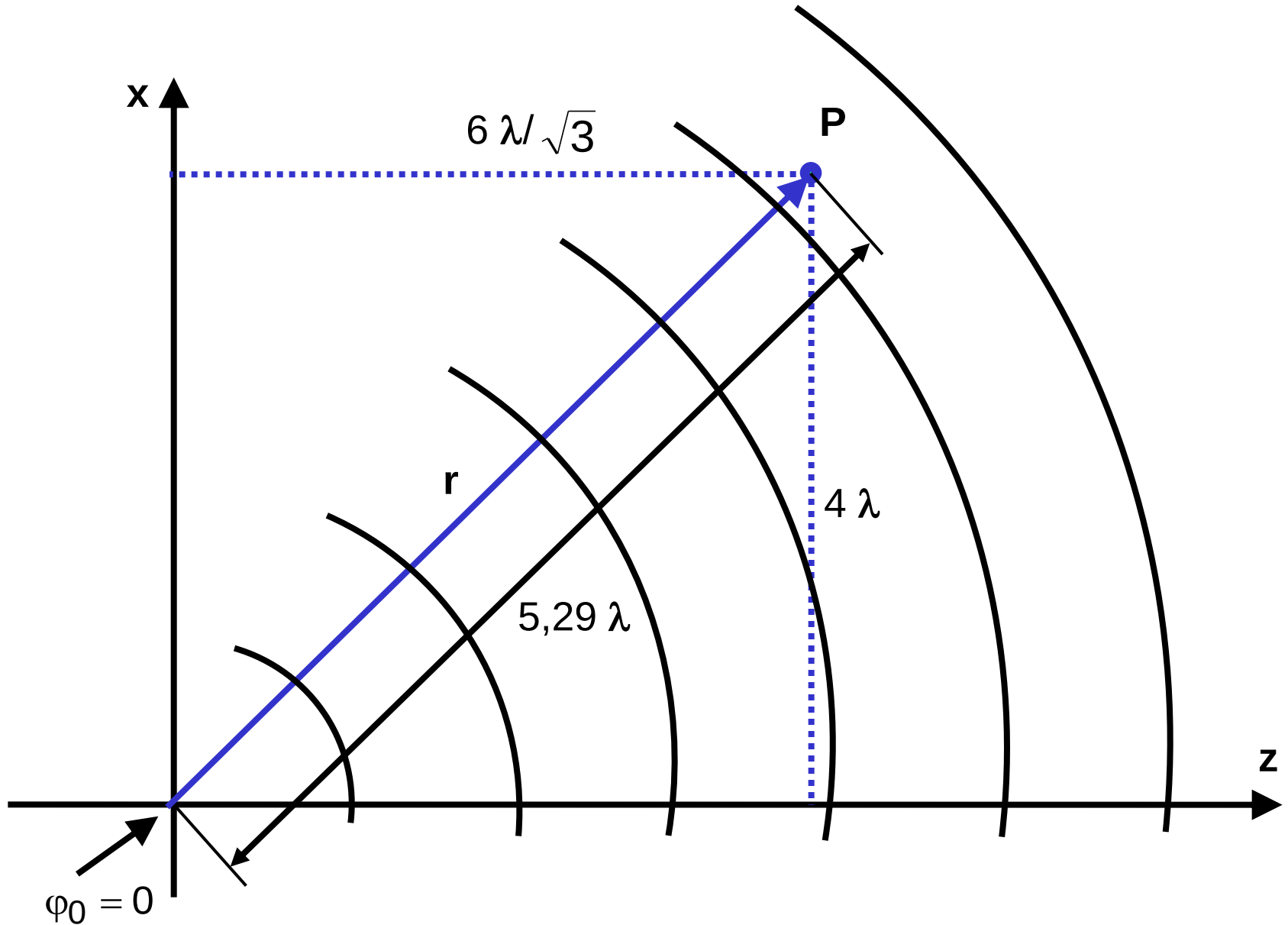
$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(4\lambda)^2 + \left(\frac{6\lambda}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2\lambda \cdot \sqrt{7} \approx \underline{5,2915\lambda}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\lambda \cdot \sqrt{7} = 4\pi\sqrt{7}$$

$$\underline{\underline{\varphi \approx 10,583\pi}}$$

Die Phase beträgt am Punkt P $\varphi \approx 10,583\pi$.

Geometrische Darstellung von Aufgabe 2



Können wir mit den üblichen, uns zur Verfügung stehenden Detektoren (Fotoelement, Fotodiode, CCD-Kamera, CMOS-Kamera) die elektrische Feldstärke E detektieren? **Nein!**

Was können wir mit den verfügbaren Detektoren bei Lichteinfall aufnehmen? **Intensitäten**, die einen Zeitmittelwert über viele Schwingungen darstellen. Zur Beachtung: Die Frequenz des Lichtes liegt im Bereich von 10^{15} Hz.

Die Energie des elektromagnetischen Feldes wird durch den Pointingvektor $\mathbf{P}$ beschrieben:

$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. $\mathbf{P}$ ist der Pointingvektor, $\mathbf{E}$ ist die elektrische Feldstärke, $\mathbf{H}$ ist die magnetische Feldstärke.

Der Betrag des zeitlichen Mittelwerts des Poyntingvektors $\mathbf{P}$ – als Ergebnis des Kreuzprodukts (Vektorprodukt) führt zur Intensität I mit

$$I = \langle |\mathbf{P}| \rangle_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot c \cdot A \cdot A^* = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot c \cdot a^2 \text{ (Vakuum)}. \text{ Also } I \propto a^2 . \mathbf{P} \text{ zeigt in Lichtausbreitungsrichtung, steht}$$

also senkrecht zu $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$. **Die Intensität ist dem Quadrat der Feldstärke proportional!**

Dabei ist A die komplexe Amplitude und a die Amplitude der elektrischen Feldstärke, ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Einheit der Intensität ist

$$[I] = [\varepsilon_0] \cdot [c] \cdot [a^2] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} .$$

Die Einheit der Intensität ist W/m^2 . Durch die „quadratischen“ Empfänger geht bei der Detektion der Intensität die Phaseninformation verloren.

Durch die Überlagerung einer Objektwelle mit einer Referenzwelle können wir jedoch die Phasenverteilung, die vom Objekt erzeugt wird, in eine Intensitätsverteilung umwandeln (Holografie).

Überlagerung von Wellen

Aus der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen folgt:

Die Überlagerung von zwei oder mehreren Wellen stellt wieder eine Welle dar.

Wir betrachten hier zwei ebene elektromagnetische Wellen mit gleicher Frequenz, gleicher linearer Polarisation bei festgehaltener Zeit mit den komplexen Feldstärke-Amplituden:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) \cdot e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varphi_{01})} = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\varphi_1}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{a}_2(\mathbf{r}) \cdot e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \varphi_{02})} = \mathbf{a}_2(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\varphi_2}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r})$, Es muss eine vektorielle Addition von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ erfolgen.

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \text{ Ableitung s. Nebenrechnung}$$

$$\text{Daraus folgt mit } I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot a^2 \text{ und } \delta_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \delta_{12} \text{ (Absolutglied und Interferenzglied). Für } I_1 = I_2 = I_0 \text{ wird}$$

$$I = 2I_0 \cdot (1 + \cos \delta_{12}) = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta_{12}}{2},$$

$$\text{wobei für } \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0 : \delta_{12} = \mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} [x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + z(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)]$$

Das Maximum der Intensität beträgt $4I_0$ und das Minimum ist 0.

NR zur Ableitung der Intensität bei Überlagerung von zwei ebenen Wellen

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot (A_1 + A_2) \cdot (A_1^* + A_2^*) \quad , * \text{ bedeutet komplex konjugiert}$$

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot [A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_1 A_2^* + A_1^* A_2]$$

$$\text{mit } A_1 = a_1 \cdot e^{-i\varphi_1} \text{ und } A_2 = a_2 \cdot e^{-i\varphi_2}$$

$$\text{und } A_1^* = a_1 \cdot e^{i\varphi_1} \text{ und } A_2^* = a_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot [a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{-i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \cdot e^{i\varphi_1})]$$

$$\text{Mit } e^{-i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{und } e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ (Euler)}$$

$$\text{wird mit } \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{und } -i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$$\text{Mit } I_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot a_1^2 \text{ und } I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cdot a_2^2 \text{ und } \delta_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ wird}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \delta_{12}.$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \delta_{12}$$

$$\text{Mit } I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\text{und } I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

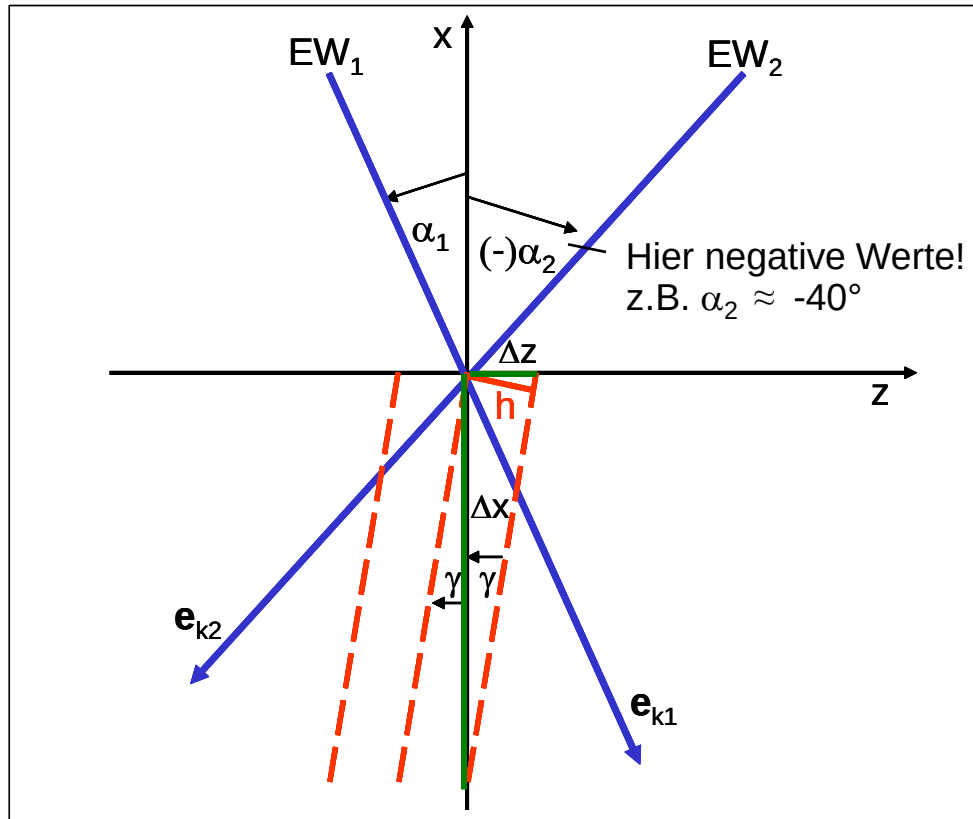
ergibt sich mit dem Kontrast $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ s. a. Gl. (3.40).

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} - (I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2})}{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} + I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}}$$

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad \Rightarrow I = (I_1 + I_2) \cdot (1 + C \cdot \cos \delta_{12})$$

Für $I_1 = I_2 = I_0$ wird der Kontrast $C = 1$

Zur Interferenz ebener Wellen



s. a. OMT-3:52

Abstand der I.-Maxima, s. a. OMT-3:53

$$x - \text{Richtung} : \Delta x = \frac{\lambda}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}$$

$$z - \text{Richtung} : \Delta z = \frac{\lambda}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}$$

Winkel γ , s. a. OMT-3:52

$$\gamma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \text{ (Winkelhalbierende)}$$

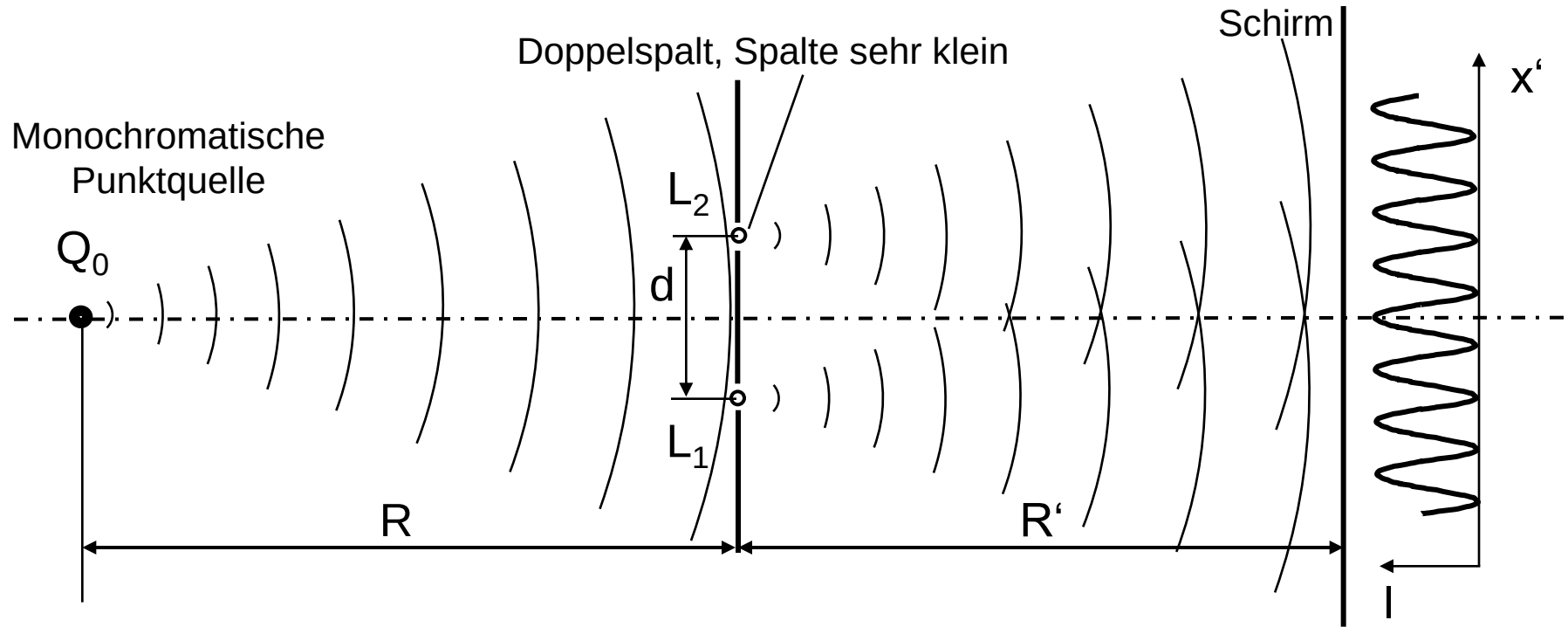
Interferenzstreifenabstand h ,
s. a. OMT-3:52

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}, \text{ Gl. (3.42)}$$

Wenn der Winkel zwischen den Normalen der interferierenden, ebenen Wellen 2α

beträgt, ist der Interferenzstreifenabstand $h = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$ (senkrecht zu γ)

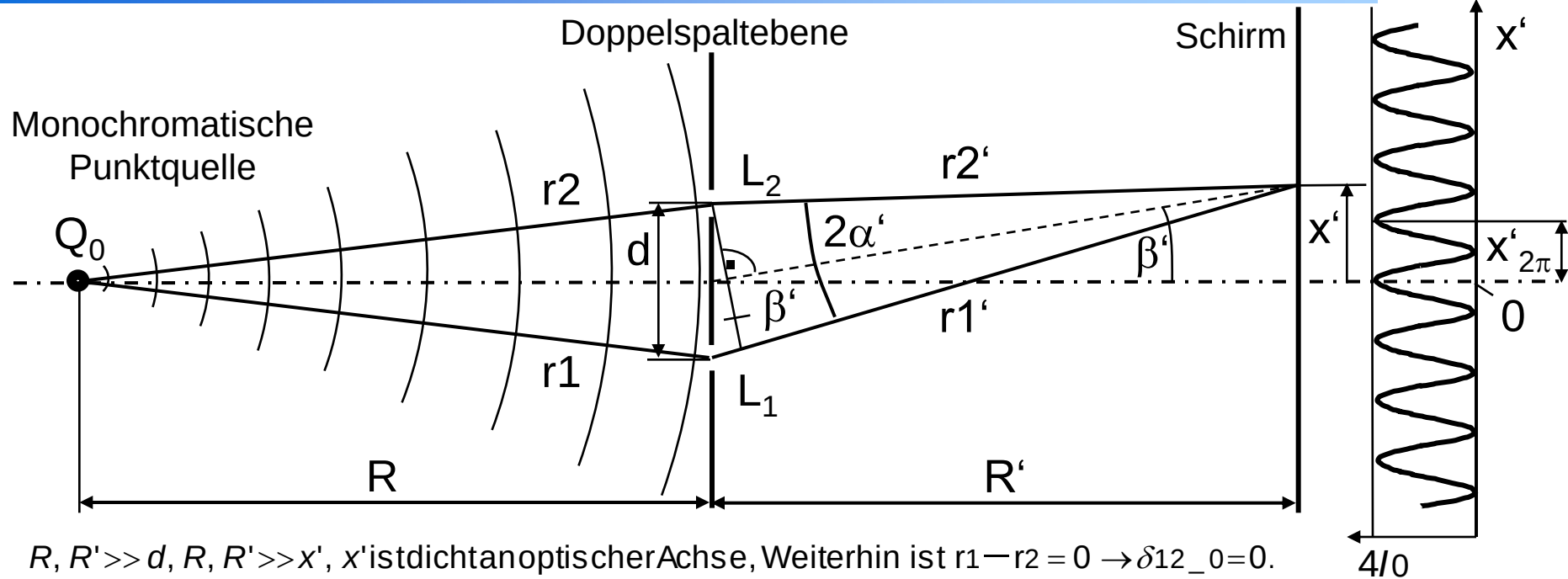
Youngscher Doppelspaltversuch, Punktlichtquelle auf der Achse



Für $R, R' \gg d$ ergeben sich für eine Punktlichtquelle bei kleinen Spalten auf dem Beobachtungsschirm nahe der optischen Achse Interferenzen.

Im Jahr 1802 publizierte Thomas Young „Wave addition device“ [Thomas Young, *Journal of the Royal Institution of Great Britain*, 1, 262 (1802)].

Youngscher Doppelspaltversuch, monochromatische Punktlichtquelle auf der Achse



$R, R' \gg d, R, R' \gg x'$, x' ist dicht an optischer Achse, Weiterhin ist $r_1 - r_2 = 0 \rightarrow \delta_{12_0} = 0$.

Es ist die optische Wegdifferenz ab Doppelspat zum Schirm: $r_1' - r_2' \approx d \cdot \sin \beta'$.

Da $\sin \beta' \approx \frac{x'}{R'} \approx \beta'$, wird $r_1' - r_2' \approx \frac{d \cdot x'}{R'}$.

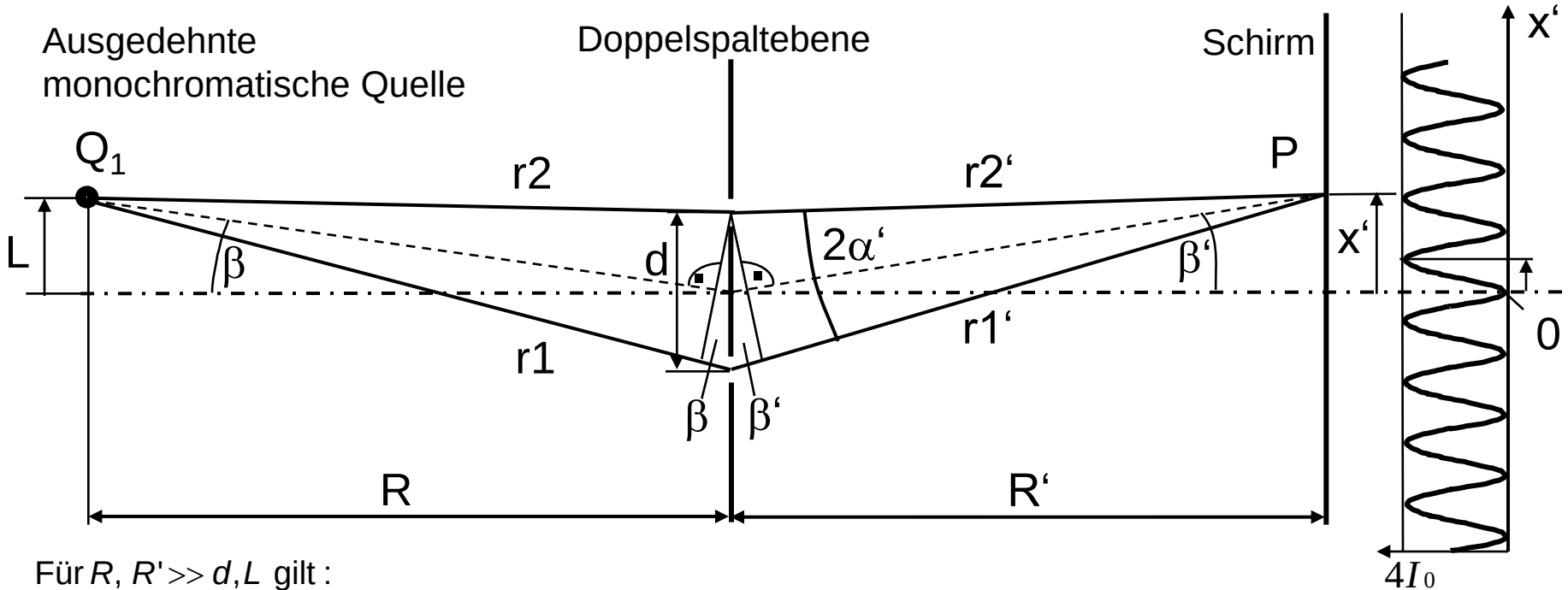
Die Phasendifferenz ist $\delta'_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1' - r_2') = \frac{2\pi \cdot d \cdot x'}{\lambda \cdot R'}$. Für $\delta'_{12} = 2\pi$ wird $x'_{2\pi} = \frac{\lambda \cdot R'}{d}$ (Streifenabstand h)

Mit Gl.(3.37), da Spalte gleich breit und $I_1 = I_2 = I_0$, wird $I = 2I_0(1 + \cos(\delta_{12_0} + \delta'_{12})) = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta'_{12}}{2}$.

Da $\cos \delta'_{12} = 1$ für $\delta'_{12} = 2N\pi, N = 0, \pm 1, 2, 3, \dots$, liegen Maxima bei $\frac{d \cdot x'}{R'} \approx N \cdot \lambda, N = 0, \pm 1, 2, 3, \dots$

Mit $\sin \beta' = \frac{x'}{R'}$ folgt für die Maxima die bekannte Gleichung: $\sin \beta' \approx \frac{N \cdot \lambda}{d}$. Die maximale Intensität beträgt $4I_0$.

Youngscher Doppelspaltversuch, monochromatische Lichtquelle ausgedehnt



Für $R, R' \gg d, L$ gilt :

optische Wegdifferenz vom Quellpunkt Q_1 bis zum Doppelspalt : $r_1 - r_2 \cong d \cdot \sin \beta$

Da $\sin \beta \cong \frac{L}{R} \cong \beta$, wird $r_1 - r_2 \cong \frac{d \cdot L}{R}$.

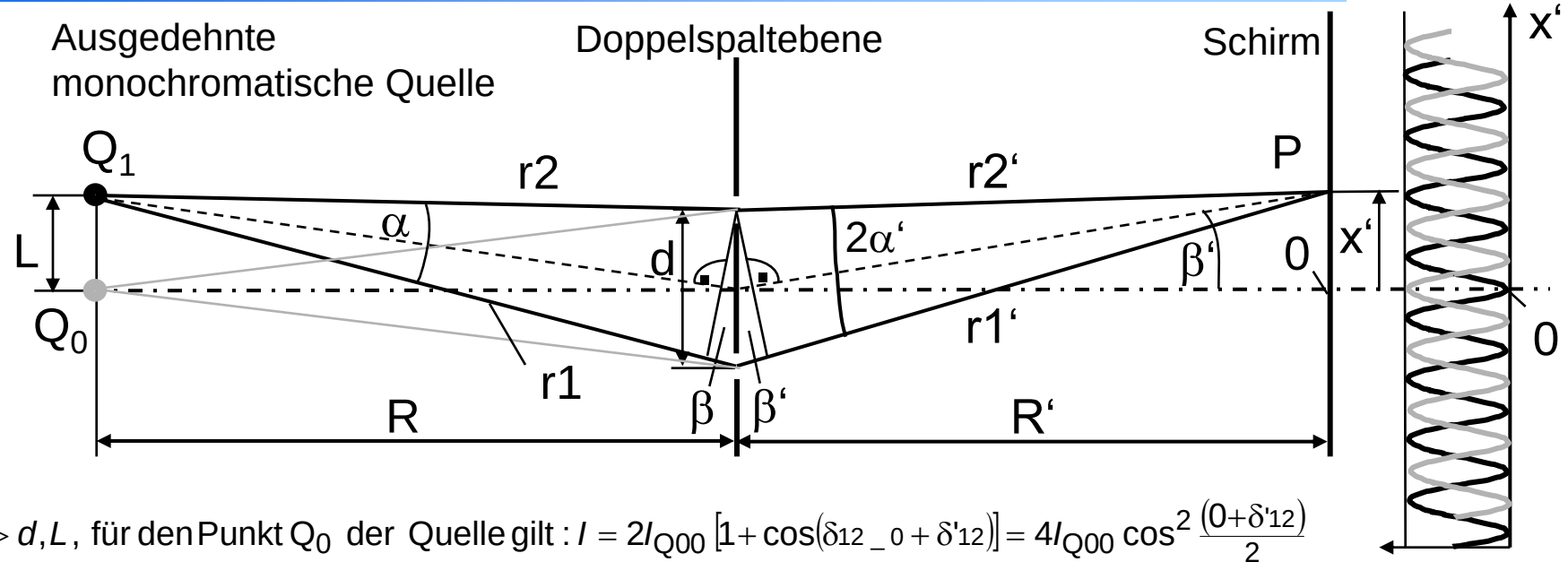
Die Phasendifferenz ist $\delta_{12_1} = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi \cdot d \cdot L}{\lambda \cdot R}$.

Es muss jedoch die ges. optische Wegdifferenz : $(r_1 - r_2) + (r_1' - r_2')$ von Q_1 bis P auf Schirm betrachtet werden.

$(r_1 - r_2) + (r_1' - r_2') = \frac{d \cdot L}{R} + \frac{d \cdot x'}{R'}$ und die Phasendifferenz wird $\delta_{12_1} + \delta'_{12} = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda} \left(\frac{L}{R} + \frac{x'}{R'} \right)$.

$$I = 2I_0 (1 + \cos[\delta_{12_1} + \delta'_{12}]) = 4I_0 \cos^2 \left[\frac{\delta_{12_1} + \delta'_{12}}{2} \right]$$

Summation der Intensitäten von zwei inkohärent strahlenden Punkten einer ausgedehnten Quelle



$R, R' \gg d, L$, für den Punkt Q_0 der Quelle gilt : $I = 2I_{Q00} [1 + \cos(\delta_{12_0} + \delta'_{12})] = 4I_{Q00} \cos^2 \frac{(0 + \delta'_{12})}{2}$
für den Punkt Q_1 der Quelle gilt : $I = 2I_{Q10} [1 + \cos(\delta_{12_1} + \delta'_{12})] = 4I_{Q10} \cos^2 \frac{(\delta_{12_1} + \delta'_{12})}{2}$

Bei Betrachtung der Intensitäten am Punkt $x' = 0$ ist die Phasendifferenz $\delta'_{12} = 0$ und für Q_1 ist $\delta_{12_1} = \frac{2\pi \cdot d \cdot L}{\lambda \cdot R}$.

Für den Quellpunkt Q_0 folgt : $I_{Q0} = 2I_{Q00} (1 + \cos 0) = 2I_0 [1 + 1] = 4I_0$ und

für den Quellpunkt Q_1 folgt : $I_{Q1} = 2I_{Q10} (1 + \cos \delta_{12_1}) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \cdot d \cdot L}{\lambda \cdot R} \right)$ mit Annahme : $I_{Q00} = I_{Q10} = I_0$.

Da Quellpunkte Q_0 und Q_1 inkohärent strahlen, wird hier die Summe der Intensitäten $I_{Q0} + I_{Q1}$ detektiert.

Gegenphasigkeit [$\cos \delta_{12_1} = -1 \rightarrow$ Interferenzkontrast = 0] tritt das erste Mal für $\cos \pi = \cos \frac{2\pi \cdot d \cdot L}{\lambda \cdot R}$ auf.

Gute Sichtbarkeit der Interferenz folgt (auch bei $x' \neq 0$) für $\frac{2\pi \cdot d \cdot L}{\lambda \cdot R} \ll \pi \Rightarrow \frac{d \cdot L}{R} \ll \frac{\lambda}{2} \Rightarrow L \cdot \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{2}$.

Aufgabe 3 (zum Youngschen Doppelspaltversuch)

1. Ist die Interferenzerscheinung auf dem Auffangschirm beim Youngschen Doppelspaltversuch noch sichtbar, wenn der Abstand R zwischen Lichtquelle und der Doppelspaltebene $R=2\text{ m}$ beträgt? Dabei ist der Spaltabstand der sehr feinen Spalte $d=0,5\text{ mm}$. Die Lichtquelle besitzt eine Ausdehnung in x -Richtung von $L=0,1\text{ mm}$ und die Wellenlänge derselben beträgt $\lambda=550\text{ nm}$.

2. Wie groß ist der Interferenzstreifenabstand ($x'_{2\pi}$ bzw. h) auf dem Auffangschirm bei einem Abstand von den Doppelspalten zum Auffangschirm $R'=1\text{ m}$?

Zu 1.

$$\frac{d \cdot L}{R} \approx L \cdot \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{0,5\text{ mm} \cdot 0,1\text{ mm}}{2000\text{ mm}} = 25\text{ nm} \ll \frac{550\text{ nm}}{2}$$

Die Interferenzerscheinung ist gut sichtbar, da der optische Gangunterschied mit 25 nm von den Randpunkten der Lichtquelle deutlich kleiner als die halbe Lichtwellenlänge ist.

Zu 2.

$$x'_{2\pi} = \frac{\lambda \cdot R'}{d} \text{ (Streifenabstand)}$$

$$x'_{2\pi} = \frac{550\text{ nm} \cdot 1\text{ m}}{0,5\text{ mm}}$$

$$x'_{2\pi} = \frac{550 \cdot 10^{-9}\text{ m} \cdot 1\text{ m}}{0,5 \cdot 10^{-3}\text{ m}} = \underline{\underline{1,1\text{ mm}}}$$

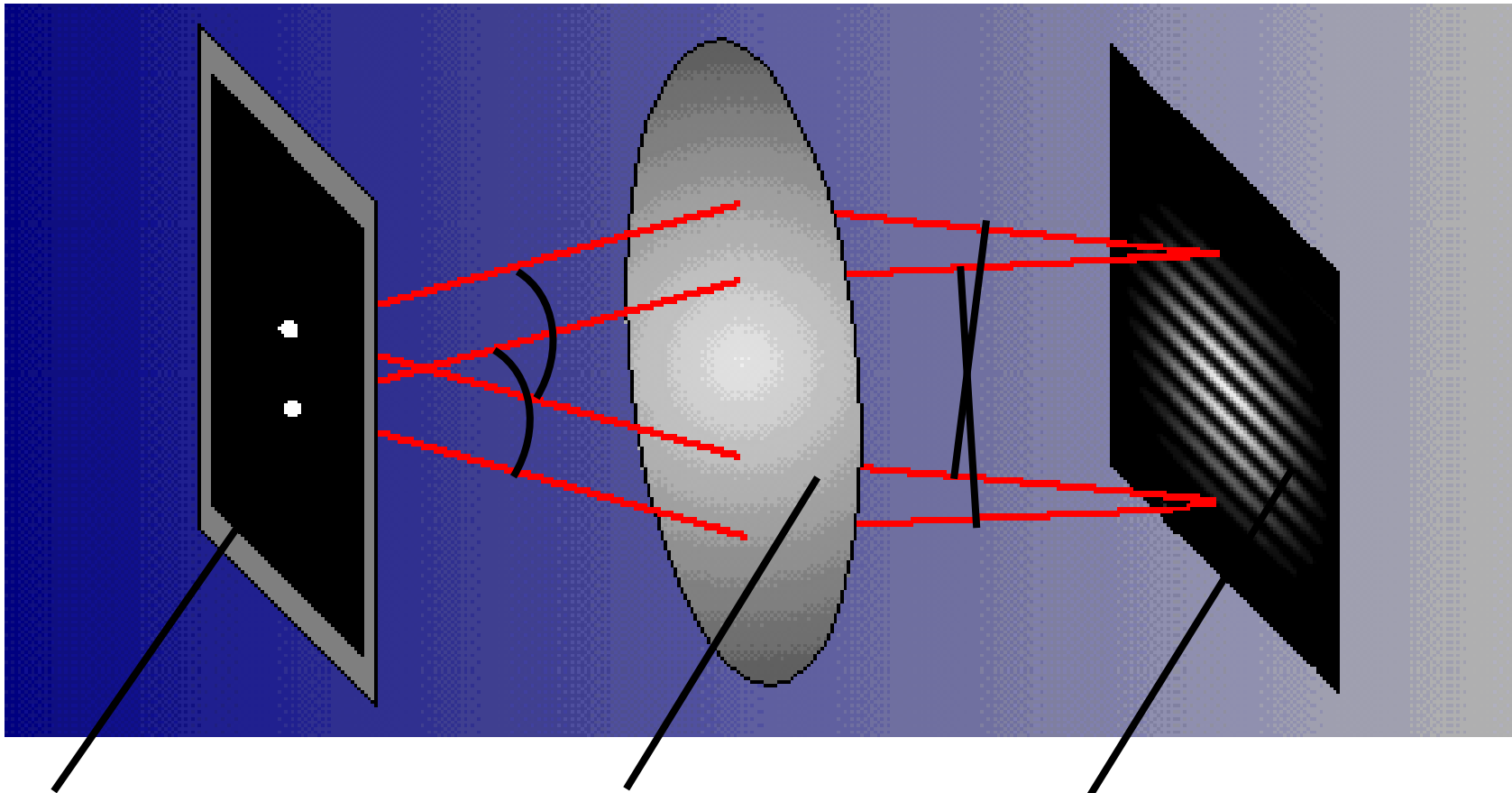
oder mit Näherung für ebene Wellen (3.42)

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = \left| \text{für } \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha' \right| = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \alpha'}$$

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \alpha'} \approx \frac{\lambda}{\left(\frac{d}{R'} \right)} = \frac{\lambda \cdot R'}{d} = \frac{550\text{ nm} \cdot 1\text{ m}}{0,5\text{ mm}} = \underline{\underline{1,1\text{ mm}}}$$

Der Abstand der Interferenzstreifen beträgt $1,1\text{ mm}$ und kann damit auch mit dem normalsichtigen, bloßen Auge auf dem Schirm aus 250 mm Entfernung beobachtet werden.

Anwendung des Youngschen Doppelspaltprinzips



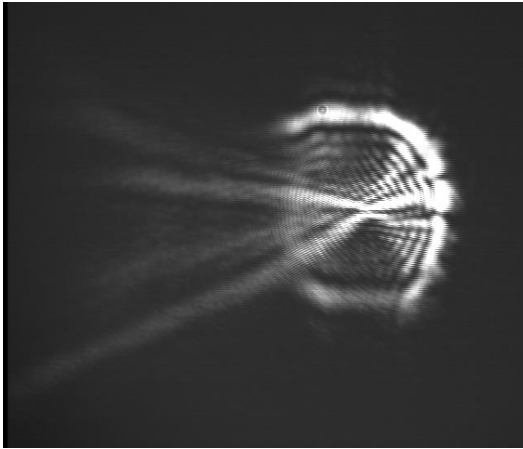
Spatial Light Modulator (SLM), kann auch als Liquid Crystal Display (LCD) ausgeführt sein.

Zu prüfendes System

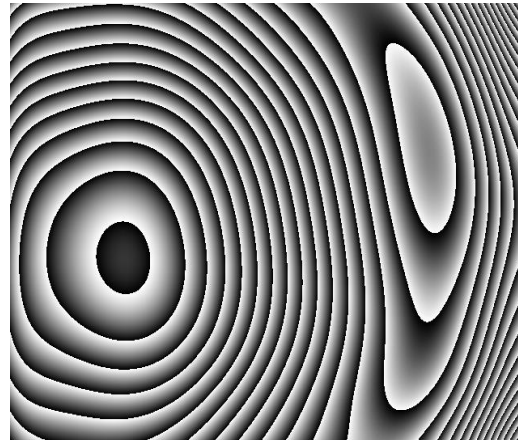
Beobachtungskamera

Ansatz nach J. Liesener et al., Institut für Technische Optik (ITO), 2001

Vom aberrierten Punktbild zum korrigierten Punktbild



Aberriertes Punktbild



Kompensationshologramm

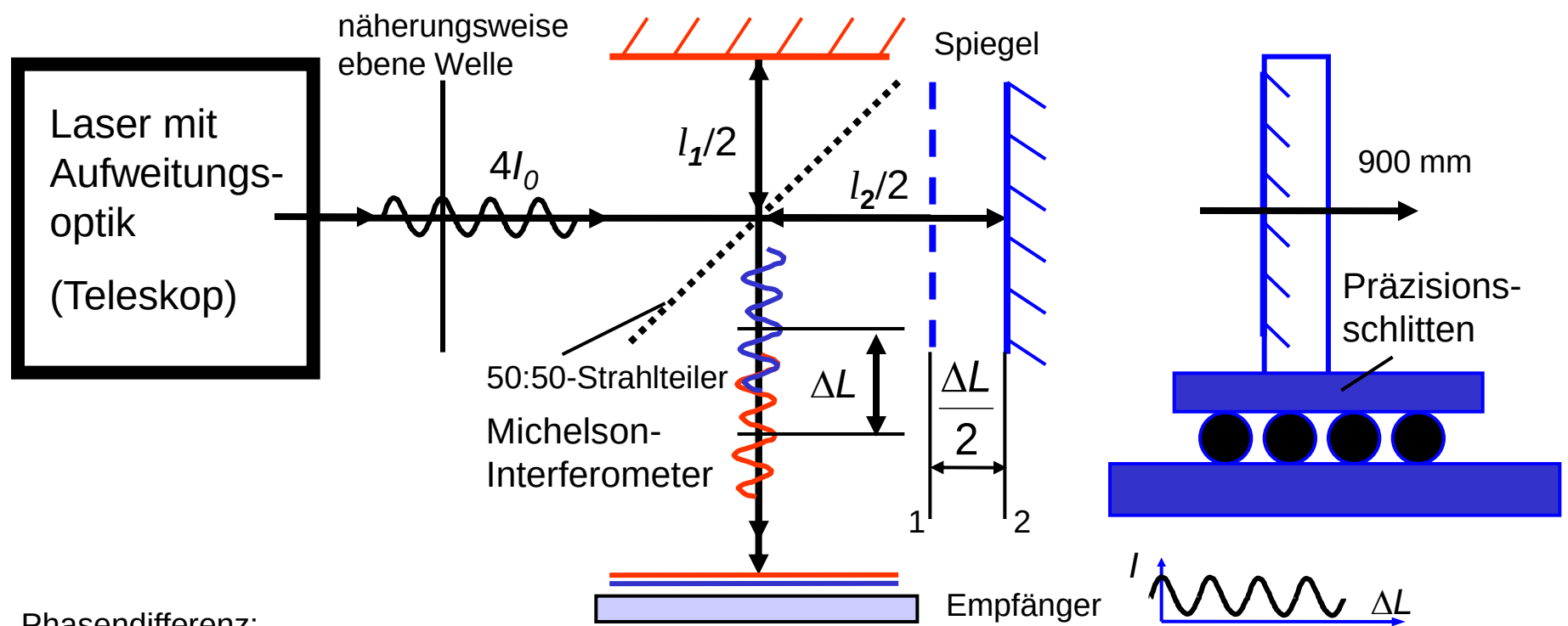


Korrigiertes Punktbild

Ansatz nach J. Liesener et al.,
Institut für Technische Optik (ITO), 2001

Ebene Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung

Bei gleicher Ausbreitungsrichtung ebener Lichtwellen sind die Wellenzahlvektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ gleichgerichtet ($\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, wegen skalarer Betrachtung hier nur Wellenzahl k). Das kann beispielsweise mit einem **Michelson-Interferometer** mit hochebenen Planspiegeln im ideal justierten Zustand gut angenähert werden.



Phasendifferenz:

$$\delta_{12} = k \cdot (l_1 - l_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta L$$

1. Fall : $\Delta L = 0 \Rightarrow \delta_{12} = 0$

2. Fall : z.B. $\Delta L = 1800 \text{ mm} \Rightarrow \delta_{12} = \frac{2\pi}{633 \text{ nm}} \cdot 1800 \text{ mm} = 2.843.601,896 \cdot 2\pi$

$$I = 2I_0 \cdot \left(1 + C \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta L\right) \right)$$

Moderne digitale Phasemesser können mindestens $2\pi/100$ - $2\pi/1000$ auflösen . ➡ Nanometerauflösung!

Voraussetzungen für die Längenmessung mittels Interferenz

Laser-Interferometer – Längenmessung mit Licht

Physikalische Voraussetzungen

- Erfüllung der zeitlichen und räumlichen Kohärenz (sonst Kontrastverlust)

$$L_K = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} > \Delta L \quad (3.55) \quad \Delta = b \cdot \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{2} \quad (3.53)$$

- Die Intensitäten I_1 und I_2 dürfen sich nicht zu stark unterscheiden (sonst Kontrastverlust, $C \downarrow$).

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} \quad (3.40)$$

Technische Voraussetzungen

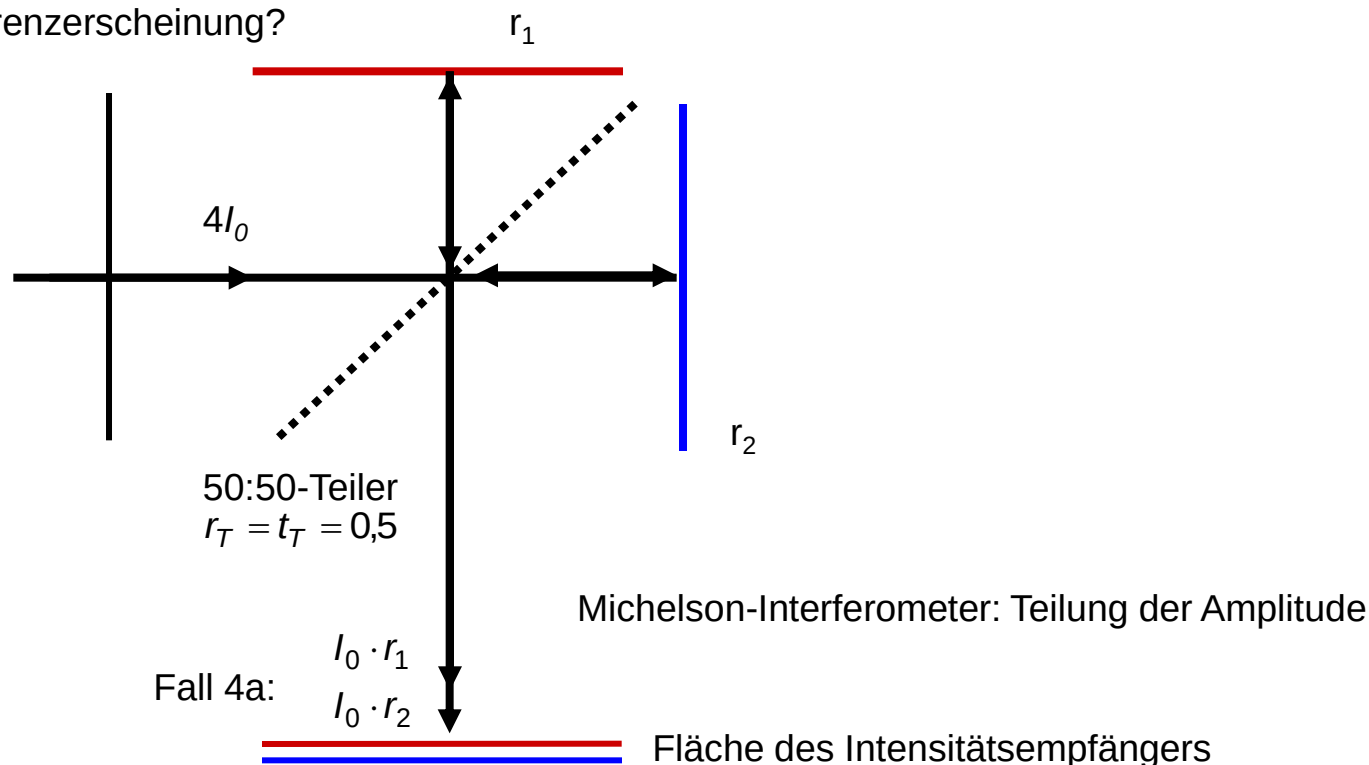
- Robust aufgebautes Interferometer mit hochebenen Planspiegeln und Teilerfläche
- Justierung des Interferometers: Die Verkipfung der Komponenten darf nur einen Bruchteil der Lichtwellenlänge – bezogen auf die Komponentenabmessungen - betragen.
- Mechanisch robustes Umfeld (z.B. Präzisionswerkzeugmaschine, auch Stahl ist nur „besserer Gummi“)

Messtechnische Voraussetzungen (für hochgenaue Längenmessung)

- Messwellenlänge (Laser-Wellenlänge) muss hinreichend genau bekannt sein (ggf. stabilisiert).
- Umweltbedingungen müssen bekannt sein, da i. d. R. kein Vakuum („Wetterstation“ für die Umgebungsluft, Temperatur der Komponenten, Ausdehnungskoeffizienten der Werkstoffe).
- Laserstrahl darf auf dem beweglichen Spiegel nur innerhalb enger Toleranzen verkippt sein.

Aufgabe 4: Kontrastverlust durch ungleiche Spiegel-Reflektivitäten

- 4a: In einem Michelson-Interferometer mit einem 50:50-Strahlteiler betragen die Spiegel-Reflektivitäten 0,95 und 0,04. Wie hoch ist der erreichbare Kontrast der Interferenzerscheinung?
- 4b: In einem Michelson-Interferometer mit einem 30%-Reflexions- und 70%-Transmissions-Strahlteiler betragen die Spiegel-Reflektivitäten ebenfalls 0,95 und 0,04. Wie hoch ist der erreichbare Kontrast der Interferenzerscheinung?



Vorlesung Gl. 3.40 : Kontrast $C = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{I_0 \cdot r_1 \cdot I_0 \cdot r_2}}{I_0(r_1 + r_2)} = \frac{2I_0\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{I_0(r_1 + r_2)} = \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 + r_2} = \frac{2\sqrt{0,95 \cdot 0,04}}{0,95 + 0,04} = 0,394$

Teilaufgabe 4a: Der Kontrast beträgt 0,39. Teilaufgabe 4b: Der Kontrast beträgt auch 0,39. Warum?

Zu Aufgabe 4

Zu 4a :

$$I_1 = 4I_0 \cdot r_T \cdot r_1 \cdot t_T$$

$$I_1 = 4I_0 \cdot 0,5 \cdot r_1 \cdot 0,5 \quad (\text{da } 50 : 50 - \text{Strahlteiler})$$

$$I_1 = I_0 \cdot r_1$$

$$I_2 = 4I_0 \cdot t_T \cdot r_2 \cdot r_T$$

$$I_2 = 4I_0 \cdot 0,5 \cdot r_2 \cdot 0,5 \quad (\text{da } 50 : 50 - \text{Strahlteiler})$$

$$I_2 = I_0 \cdot r_2$$

$$\text{Gl. 3.40 : } C = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{I_0 \cdot r_1 \cdot I_0 \cdot r_2}}{I_0 \cdot (r_1 + r_2)} = \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{(r_1 + r_2)}$$

$$C = \frac{2\sqrt{0,95 \cdot 0,04}}{(0,95 + 0,04)} = \underline{\underline{0,394}}$$

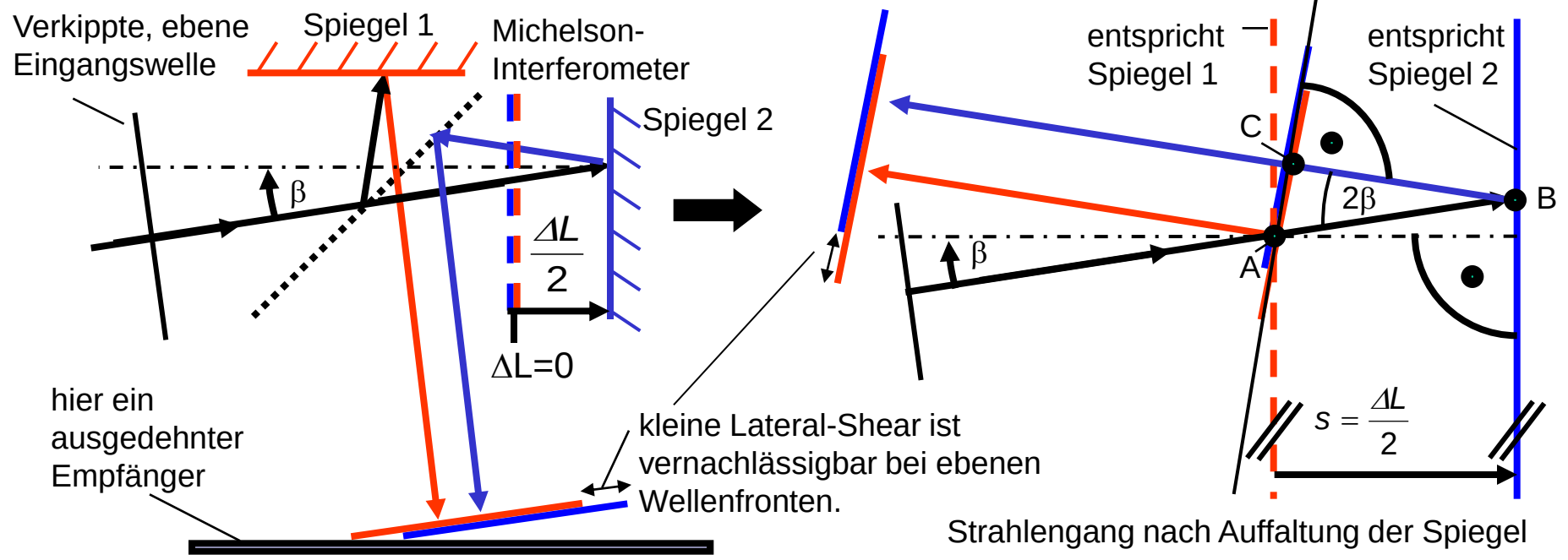
Der Kontrast C der Interferenz beträgt 0,39.

Zu 4b : Der Kontrast C beträgt ebenfalls 0,39.

Denn: Eine unterschiedliche Strahlteilerreflexion und -transmission (z.B. 30:70) wirken in gleicher Weise auf I_1 und I_2 und sind deshalb aus Gleichung 3.40 herausgekürzt.

$$C = \frac{2r_T \cdot t_T \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_T \cdot t_T \cdot (r_1 + r_2)} = \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{(r_1 + r_2)}$$

Aufgabe 5: Verkippte Eingangs-Wellenfront im Michelson-Interferometer



Wie groß ist der Fehler bei der Messung einer Verschiebung von $s = 900 \text{ mm}$, wenn die ebene Eingangswelle um $\beta = 0,1^\circ$ ($\beta = 0,001745 \text{ rad}$) zum bewegten Interferometer-Spiegel verkippt ist?

$\Delta\Delta L = \Delta L_{\text{kipp}} - \Delta L$ mit $\Delta L_{\text{kipp}} = \overline{AB} + \overline{BC} = \Delta L \cdot \cos(\beta)$

NR: $\Delta L_{\text{kipp}} = \overline{AB} + \overline{BC}$, siehe rechtes Bild

$\Delta\Delta L = \Delta L \cdot [\cos(\beta) - 1]$ für kleine Winkel β gilt: $\cos(\beta) \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$

$\overline{AB} = \frac{s}{\cos \beta}$ und $\overline{BC} = \frac{s}{\cos \beta} \cdot \cos 2\beta$

$\Delta\Delta L \approx \Delta L \cdot \left[1 - \frac{\beta^2}{2} - 1\right] = -\frac{\Delta L \cdot \beta^2}{2}$ ($\Delta\Delta L$ Änderung d. Gangunterschieds)

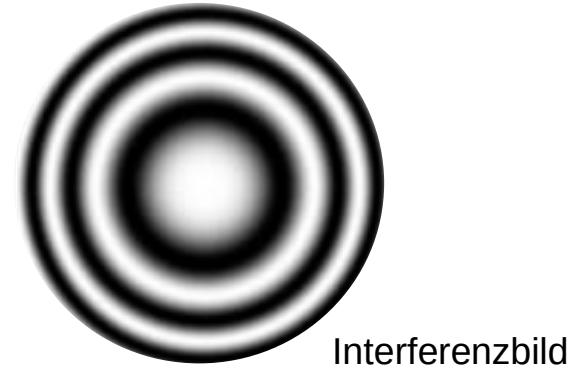
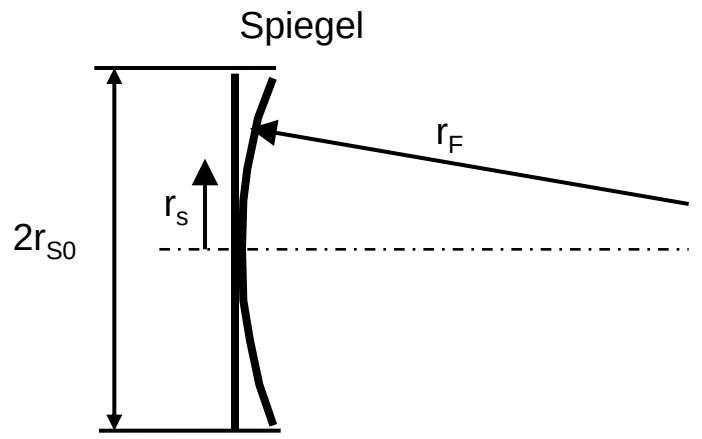
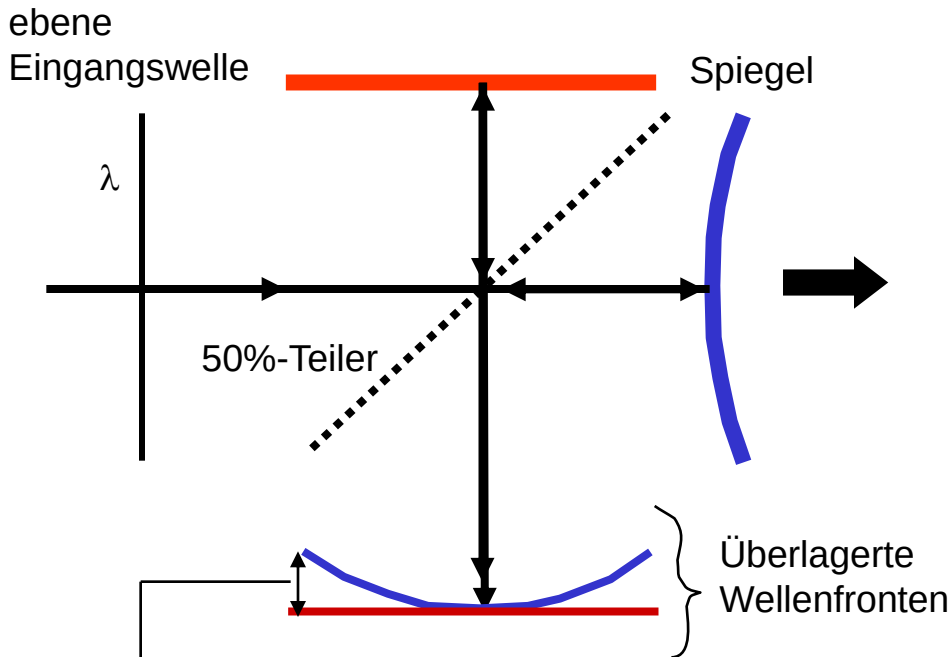
$\Delta L_{\text{kipp}} = \frac{s}{\cos \beta} \cdot (1 + \cos 2\beta) = 2s \cdot \cos \beta = \Delta L \cdot \cos \beta$
 $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$

$\Delta\Delta L \approx -\frac{1800 \text{ mm} \cdot (0,001745)^2}{2} \approx -2,74 \text{ }\mu\text{m}$

$\Delta s_{\text{mess}} = \frac{\Delta\Delta L}{2} \approx -1,37 \text{ }\mu\text{m}$

Der Fehler Δs_{mess} bei der Messung einer Verschiebung von $s = 900 \text{ mm}$ ergibt sich bei einer Verkipfung der Eingangswellenfront von $0,1^\circ$ zu $-1,37 \text{ }\mu\text{m}$. Der ermittelte Messwert ist also zu klein.

Schwach gekrümmter Spiegel im Michelson-Interferometer

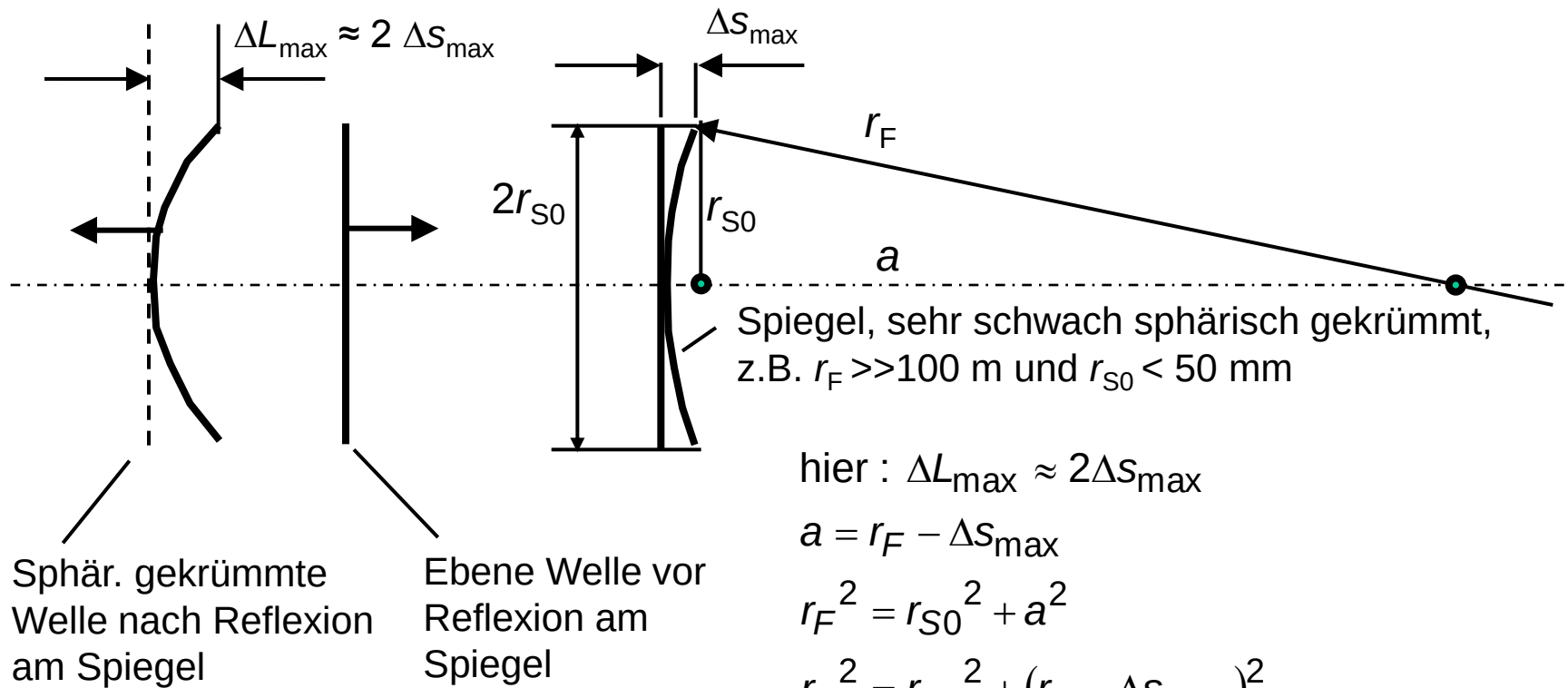


$$\Delta L \approx \frac{r_S^2}{r_F} \quad \text{für } r_F \gg r_S$$

$$\Delta L_{\max} \approx \frac{r_{S0}^2}{r_F} \quad (\Delta L_{\max} \text{ maximaler optischer Gangunterschied am Spiegelrand, bei } r_{S0})$$

$$\xi \approx \frac{r_{S0}^2}{r_F \cdot \lambda} \quad (\xi \text{ maximale Ringzahl auf dem Spiegel})$$

Optischer Gangunterschied ΔL am gekrümmten Spiegel



hier : $\Delta L_{\max} \approx 2\Delta S_{\max}$

$$a = r_F - \Delta S_{\max}$$

$$r_F^2 = r_{S0}^2 + a^2$$

$$r_F^2 = r_{S0}^2 + (r_F - \Delta S_{\max})^2$$

$$0 = r_{S0}^2 - 2r_F\Delta S_{\max} + \cancel{\Delta S_{\max}^2}$$

$$\Delta S_{\max} \approx \frac{r_{S0}^2}{2r_F}$$

$$\Delta L_{\max} \approx \frac{r_{S0}^2}{r_F} \text{ (max. opt. Gangunterschied)}$$

Aufgabe 6a: Spiegelkrümmung

Wie groß ist der Krümmungsradius (r_F) eines Interferometerspiegels von 50 mm Durchmesser ($2r_{S0}$), wenn auf dem Spiegel 1 Interferenzring bei einer Wellenlänge von $\lambda=633$ nm beobachtet werden kann?

$$\xi \approx \frac{r_{S0}^2}{r_F \cdot \lambda} \quad (\xi \text{ maximale Ringzahl auf dem Spiegel})$$

$$r_F \approx \frac{r_{S0}^2}{\xi \cdot \lambda} \quad (r_F \text{ Krümmungsradius, } \xi \text{ maximale Ringzahl auf dem Spiegel})$$

$$r_F \approx \frac{625 \text{ mm}^2}{1 \cdot 633 \text{ nm}} = \frac{625 \text{ mm}^2}{633 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}$$

$$r_F \approx 987 \text{ m}$$

Der Krümmungsradius des Interferometerspiegels beträgt 987 m.

Ist dies ein guter Spiegel für ein Interferometer?

Nein, da bei der Ringzahl von 1 (kreisförmiger Spiegel) Interferenzstreifen bereits merklich gekrümmt sind. Die Abweichung der Spiegeloberfläche von der idealen Ebene beträgt hier bereits eine halbe Wellenlänge, s. a. Aufgabe 6b.

Was ist eine Ringzahl für einen sehr guten Spiegel (klass. Interferometrie – keine num. Korr.)?

Ein sehr guter Spiegel für ein Interferometer weist zum Beispiel 0,1 bis 0,01 Ringe auf. Der Krümmungsradius r_F bei einer Wellenlänge von $\lambda=633$ nm beträgt dann ca. 10 km bzw. 100 km.

Aufgabe 6b: Spiegelkrümmung

Ein Siliziumwafer von 300 mm Durchmesser ($2r_{SO}$) soll für den Belichtungsprozess hocheben hergestellt und dann vakuumgespannt werden (Vakuumanaugen auf Chuck). Der Krümmungsradius des Wafers beträgt $r_F = 12 \text{ km}$.

Wie viele Interferenzringe sind dann bei einer Wellenlänge von $\lambda = 635 \text{ nm}$ mittels Interferometer und Kamerasystem zu detektieren, wenn eine Abweichung des Siliziumwafers in Sphärenform (Schüssel) angenommen wird? (Bemerkung: Das ist jedoch eine Idealisierung, da Siliziumwafer wegen ihrer geringen Dicke eine unregelmäßige Form aufweisen können.)

$$\xi \approx \frac{r_{SO}^2}{r_F \cdot \lambda} \quad (\xi \text{ maximale Ringzahl auf dem Spiegel})$$

$$\xi \approx \frac{(150 \text{ mm})^2}{12 \text{ km} \cdot 635 \text{ nm}} = \frac{2,25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2}{1,2 \cdot 10^7 \text{ mm} \cdot 0,635 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}$$

$$\underline{\underline{\xi \approx 3 \text{ (2,95)}}}$$

Es sind mittels Kamerasystem etwa 3 Ringe zu beobachten.

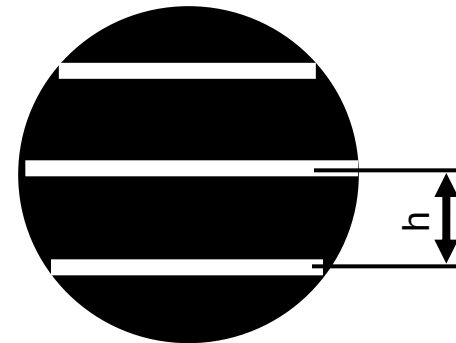
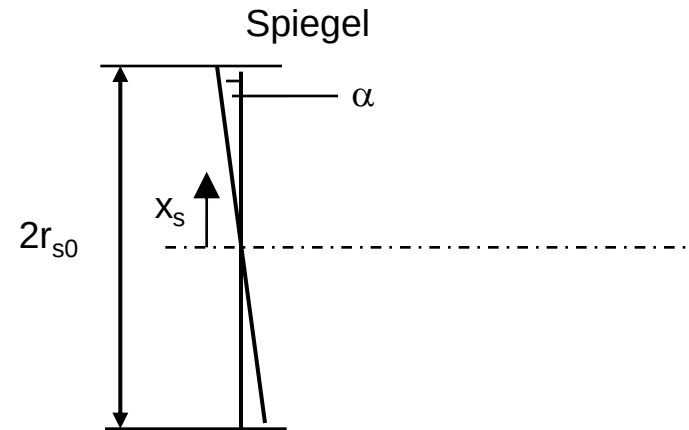
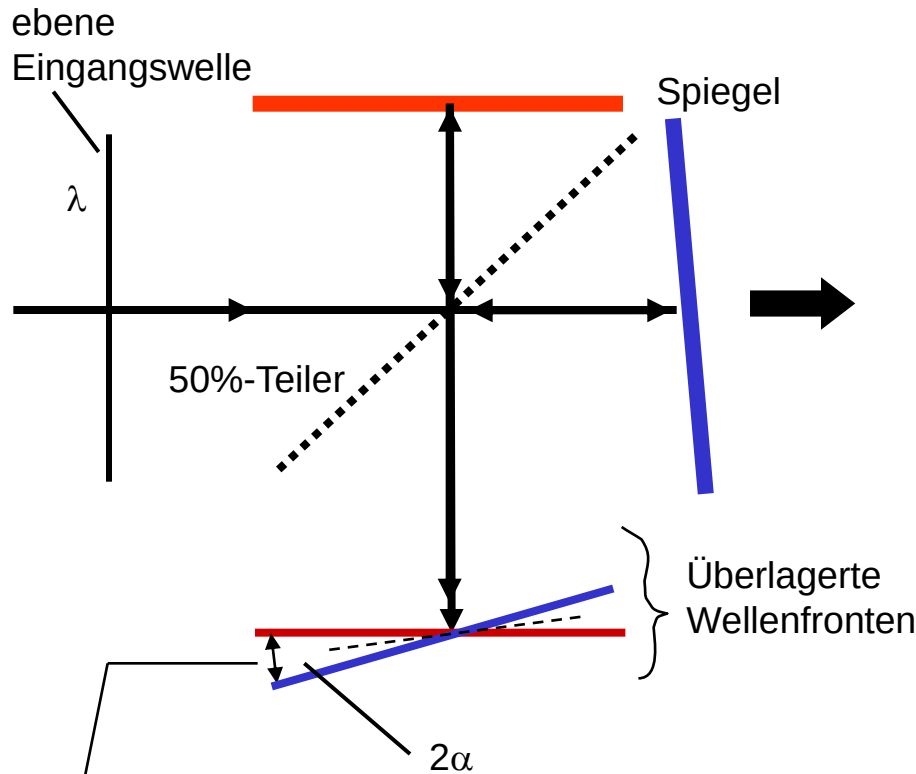
Um welchen Betrag ist dann der Wafer am Rand dicker gegenüber d. Mitte bei Schüsselform?

$$\Delta s = \xi \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta s = 2,95 \cdot 317,5 \text{ nm} \approx 0,937 \text{ } \mu\text{m}$$

Der vakuumgespannte Wafer ist in diesem Fall am Rand $0,937 \text{ } \mu\text{m}$ dicker als in der Mitte.

Gering verkippter Spiegel im Michelson-Interferometer



Interferenzbild

$$\Delta L = 2 \sin \alpha \cdot x_S \approx 2\alpha \cdot x_S \quad (-r_{S0} \leq x_S \leq r_{S0})$$

$$\Delta L_{\max} \approx 4\alpha \cdot r_{S0}$$

$$\rho_{\max} \approx \frac{4\alpha \cdot r_{S0}}{\lambda} \quad (\rho_{\max} \text{ maximale Streifenzahl auf dem Spiegeldurchmesser})$$

$$h \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \quad (h \text{ Interferenzstreifenabstand, } \alpha \text{ Winkel der Spiegelkipfung, } 2\alpha \text{ Winkel zwischen interfer. W})$$

Aufgabe 7: Spiegelverkipfung

Wie groß ist die Verkipfung α eines Interferometerspiegels von 50 mm Durchmesser ($2r_{S0}$), wenn auf dem Spiegel 5 Interferenzstreifen bei einer Wellenlänge von $\lambda = 550$ nm beobachtet werden können?

$$\rho_{\max} \approx \frac{4\alpha \cdot r_{S0}}{\lambda} \quad (\rho_{\max} \text{ Streifenzahl, } \alpha \text{ Spiegelverkipfung, } r_{S0} \text{ Spiegelradius})$$

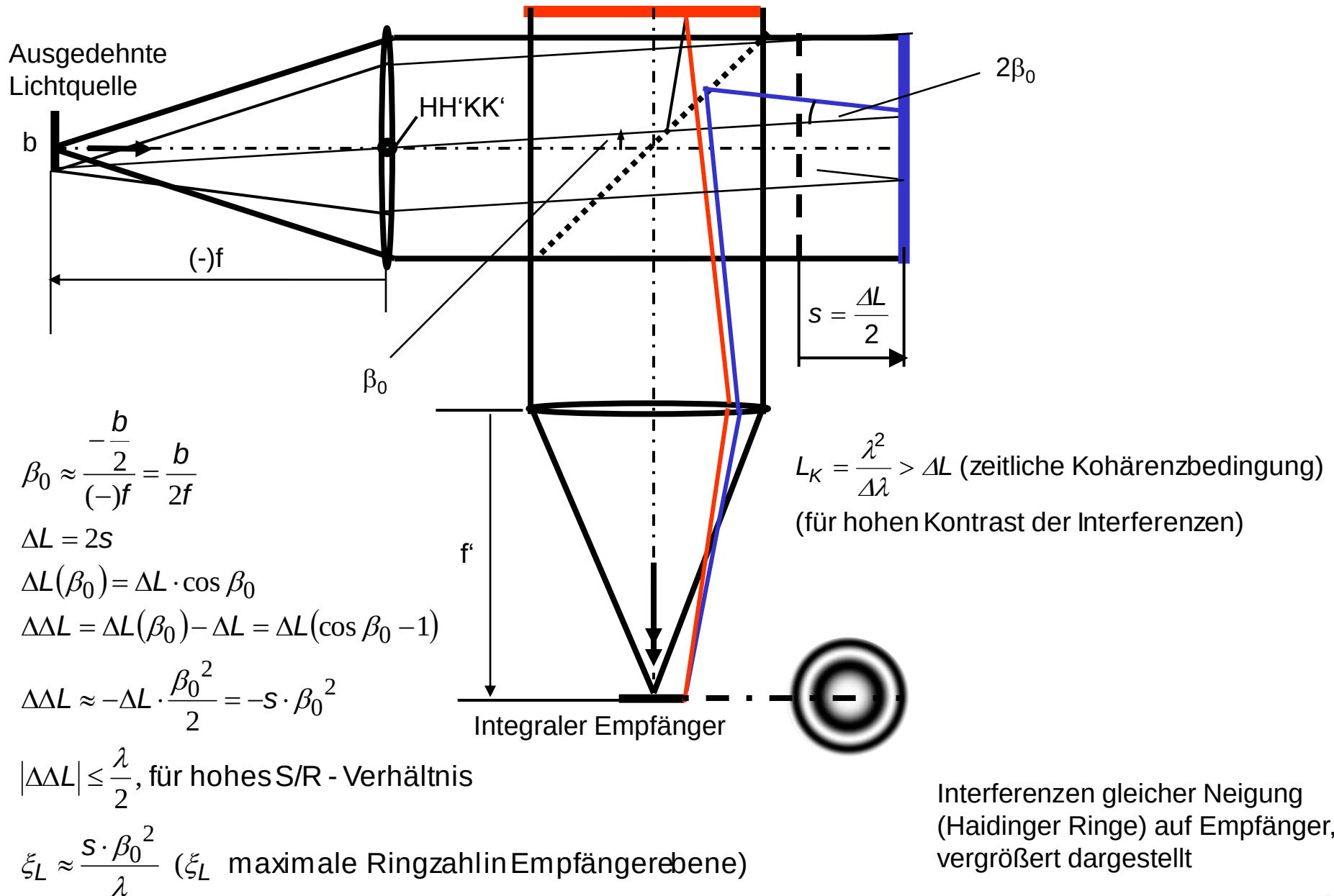
$$\alpha \approx \frac{\rho_{\max} \cdot \lambda}{4 \cdot r_{S0}}$$

$$\alpha \approx \frac{5 \cdot 550 \text{ nm}}{4 \cdot 25 \text{ mm}} = 27,5 \cdot 10^{-6}$$

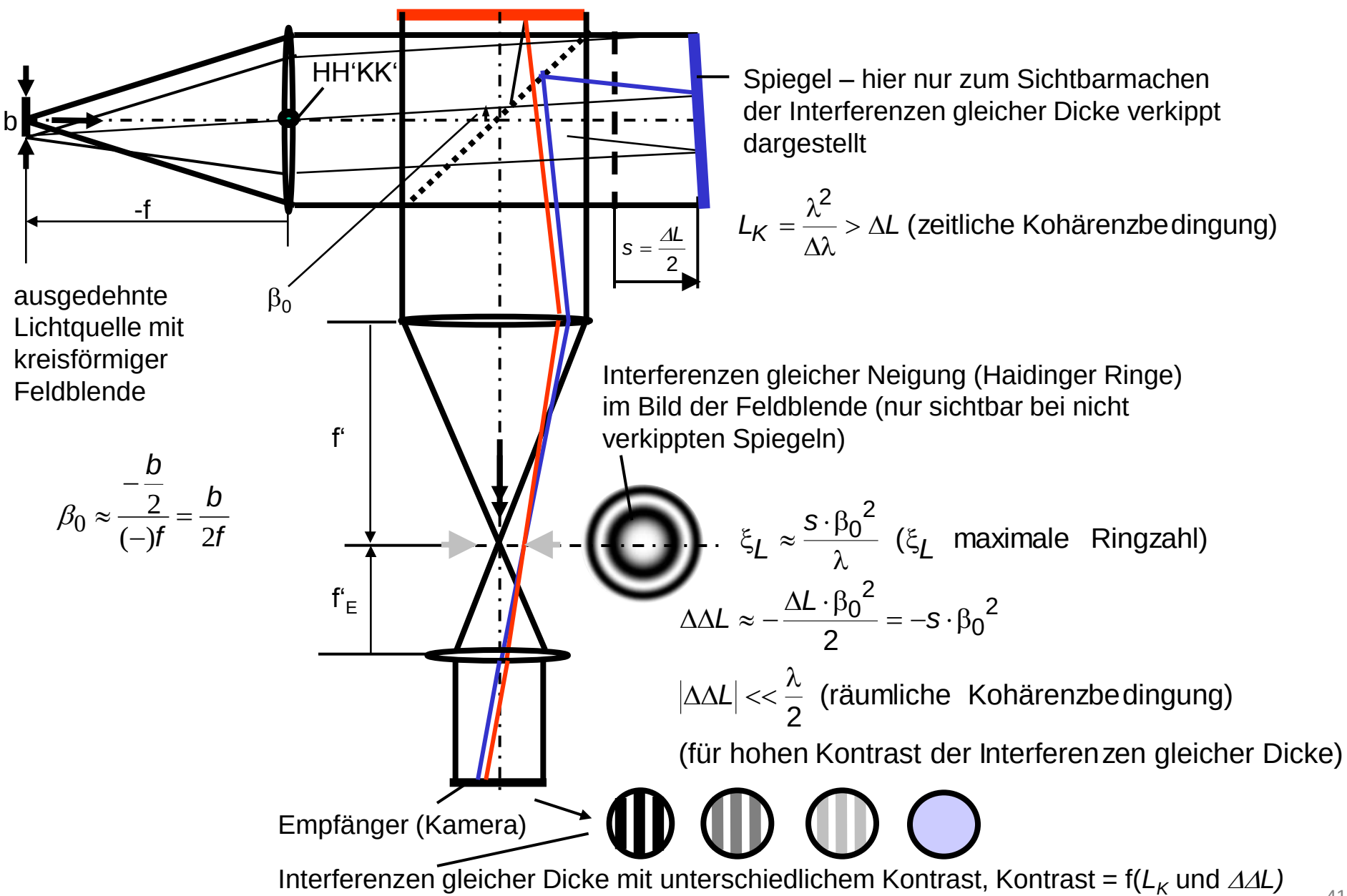
$$\alpha \approx 0,00158^\circ = 5,67'' \text{ (Winkelsekunden)}$$

Die Verkipfung des Interferometerspiegels beträgt 5,67“.

Twyman-Green-Interferometer, 1916



Räumliche und zeitliche Kohärenz (Twyman-Green-Interferometer)



Elektrodynamik:

Wellengleichung

Skalare Wellengleichung

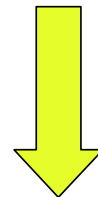
Ableitung Fresnel-Huygens Prinzip

Sonderfall: Fresnelsche Beugung

Sonderfall: Fraunhofersche Beugung

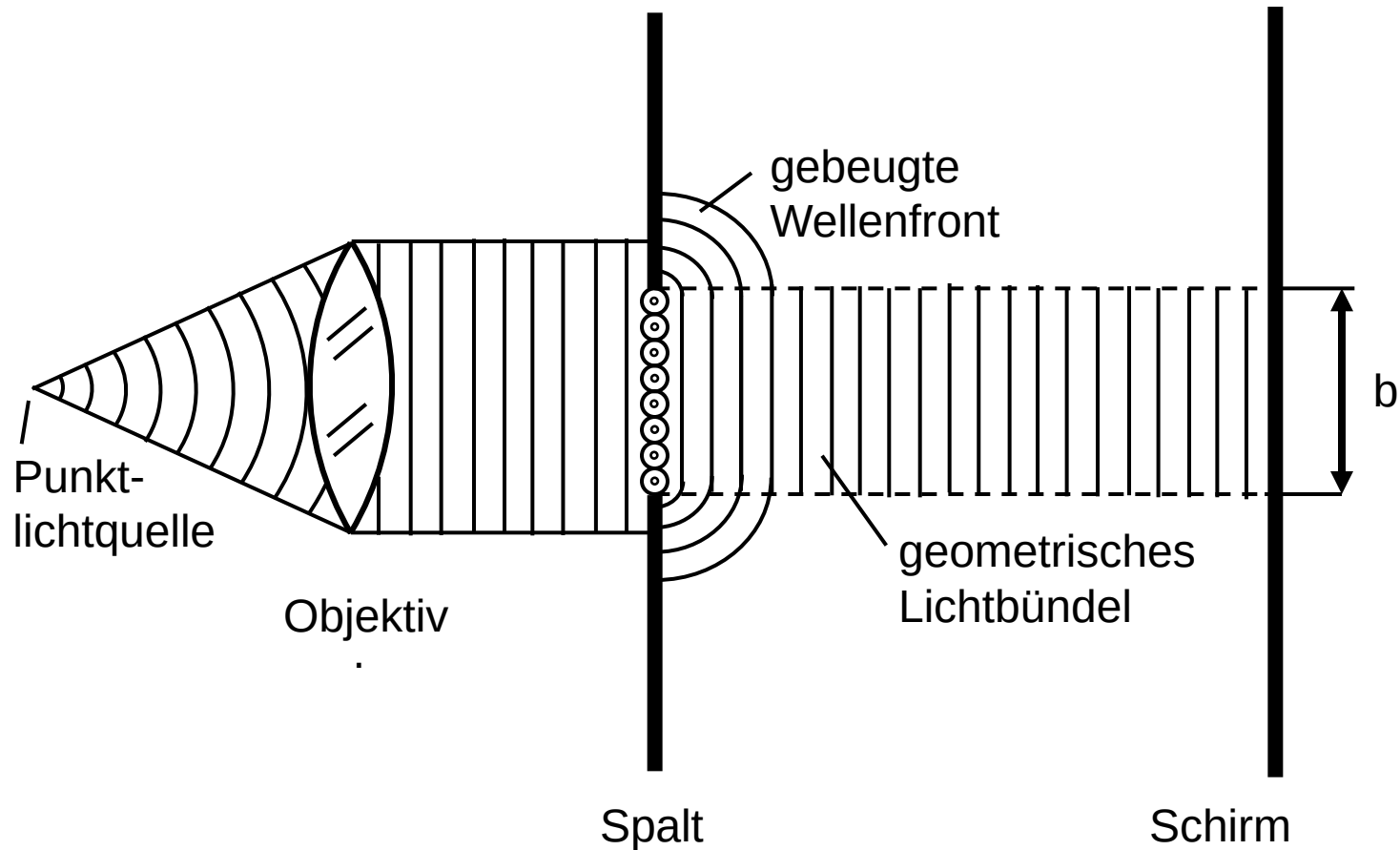
Sonderfälle: Spalt, Gitter, kreisförmige Blende

Vorlesung



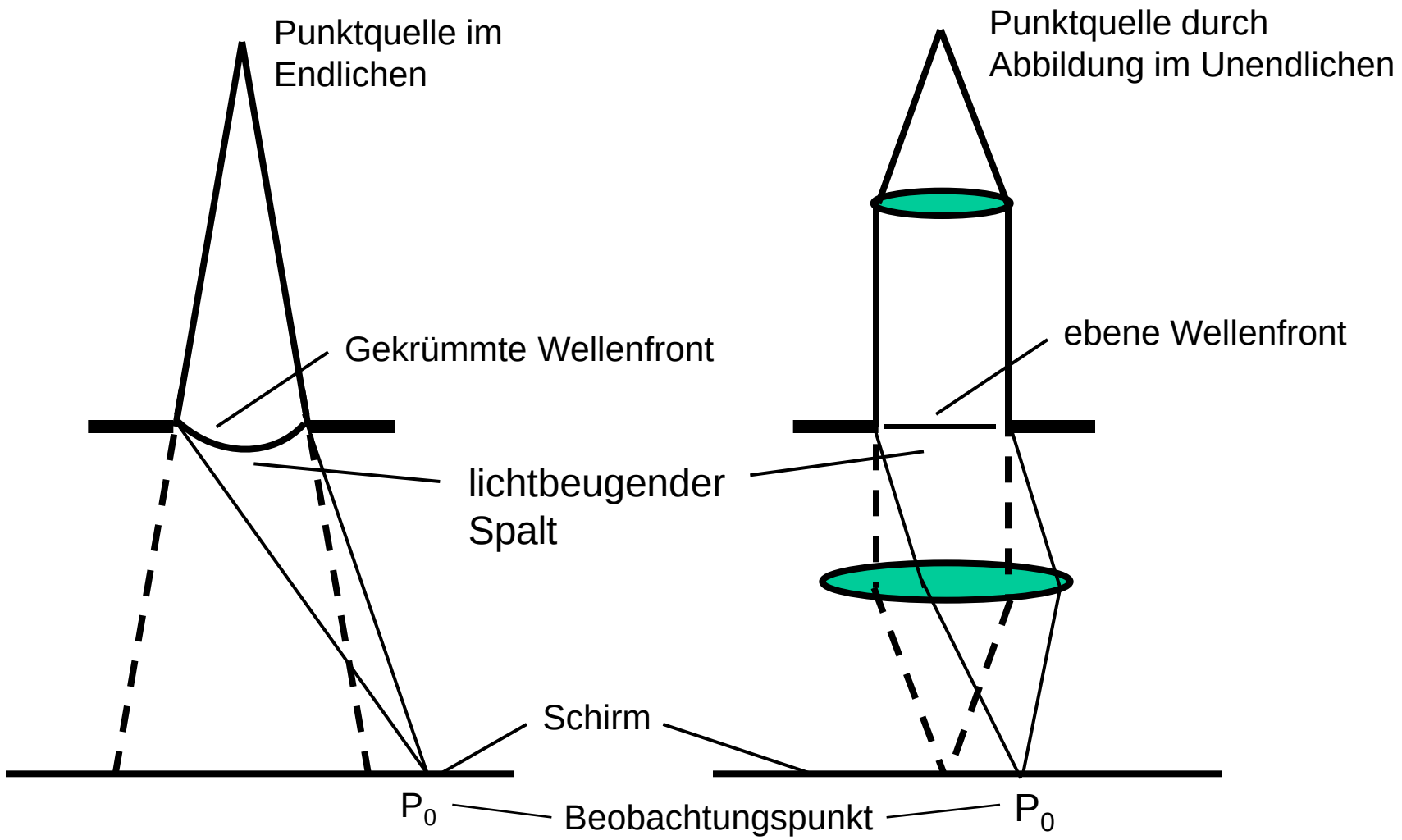
Einfache Formeln

Beugung einer ebenen Welle am Spalt



Huygens-Fresnelsches Prinzip: Zu jedem Zeitpunkt sind alle Punkte einer Wellenfront Quellen kugelförmiger Elementarwellen. An jedem nachfolgenden Punkt ist die Amplitude des optischen Feldes durch die Überlagerung aller dieser Elementarwellen gegeben. (Es sind also stets Amplitude und Phase zu betrachten.)

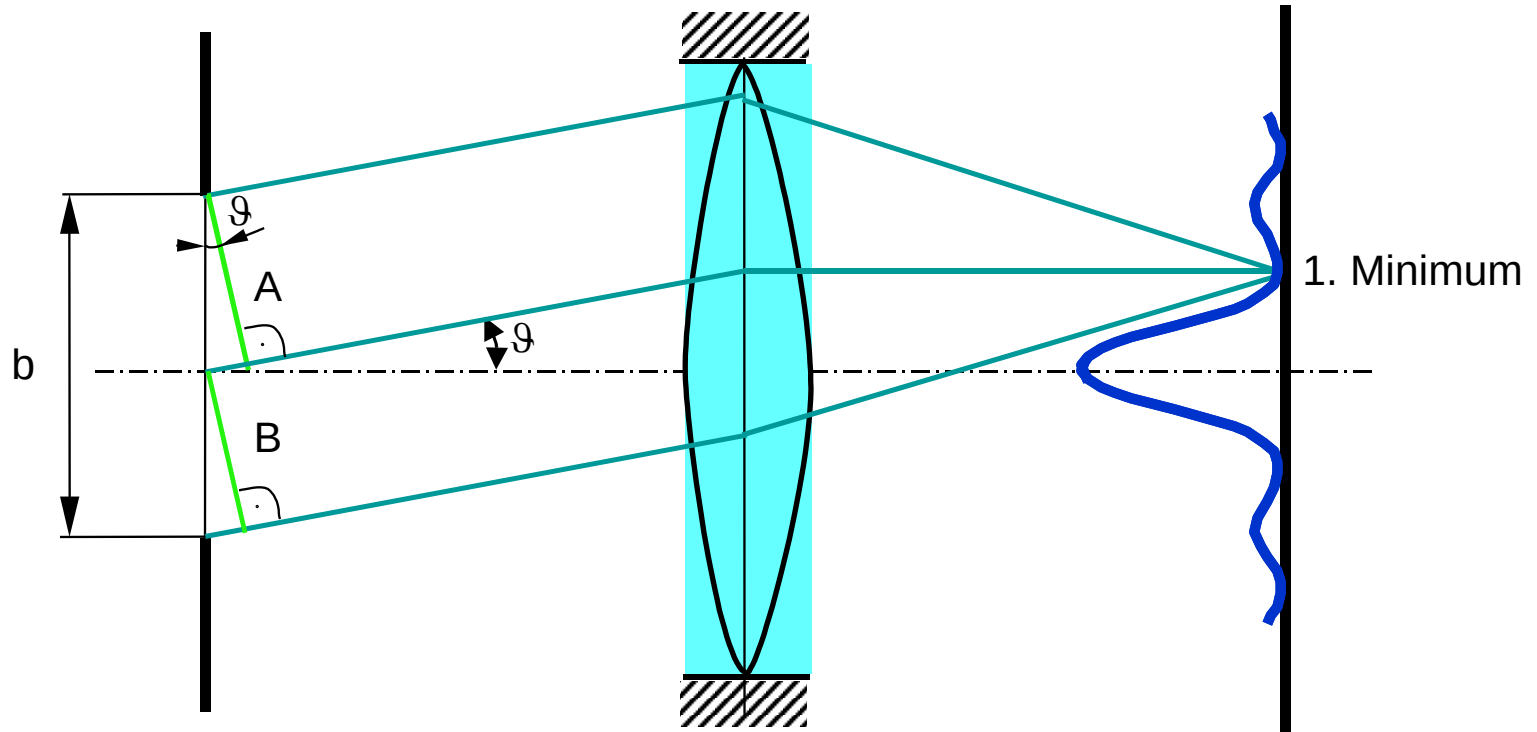
Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung



Fresnelsche Beugung:
Spaltbreite klein gegen Entfernung
von Punktquelle und Schirm

Fraunhofersche Beugung:
Spaltbreite klein und Punktquelle und Schirm
im Unendlichen, bzw. in Brennebene von Linse

Fraunhofersche Beugung am Spalt



$$\sin \vartheta \approx \frac{(2N+1)\lambda}{2b}, N = \pm 1, \pm 2, \pm 3.. \Rightarrow \text{konstruktive Interferenz (Maxima)}$$

$$\sin \vartheta = \frac{N\lambda}{b}, N = \pm 1, \pm 2, \pm 3.. \Rightarrow \text{destruktive Interferenz (Minima)}$$

Aufgabe 8: Fraunhofersche Beugung am Spalt

Wie groß ist die Breite b eines Spalts, wenn das gebeugte Licht der Wellenlänge $\lambda=532 \text{ nm}$ im ersten Intensitätsminimum unter einem Winkel von $\vartheta=0,18^\circ$ in sehr großer Entfernung (im Unendlichen) erscheint?

$$\sin \vartheta = \frac{N \cdot \lambda}{b}$$

$$b = \frac{N \cdot \lambda}{\sin \vartheta}$$

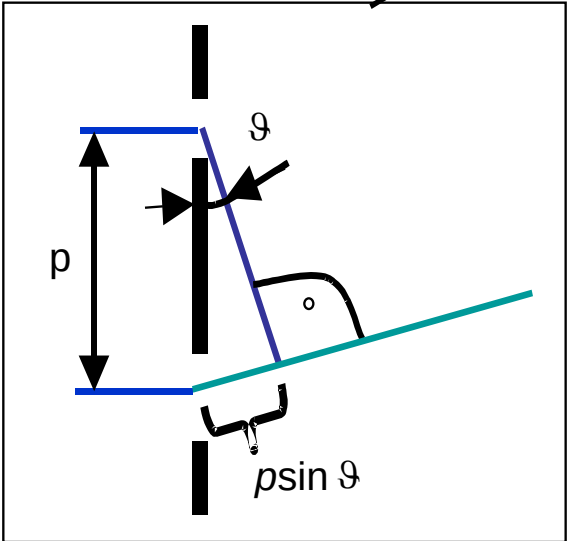
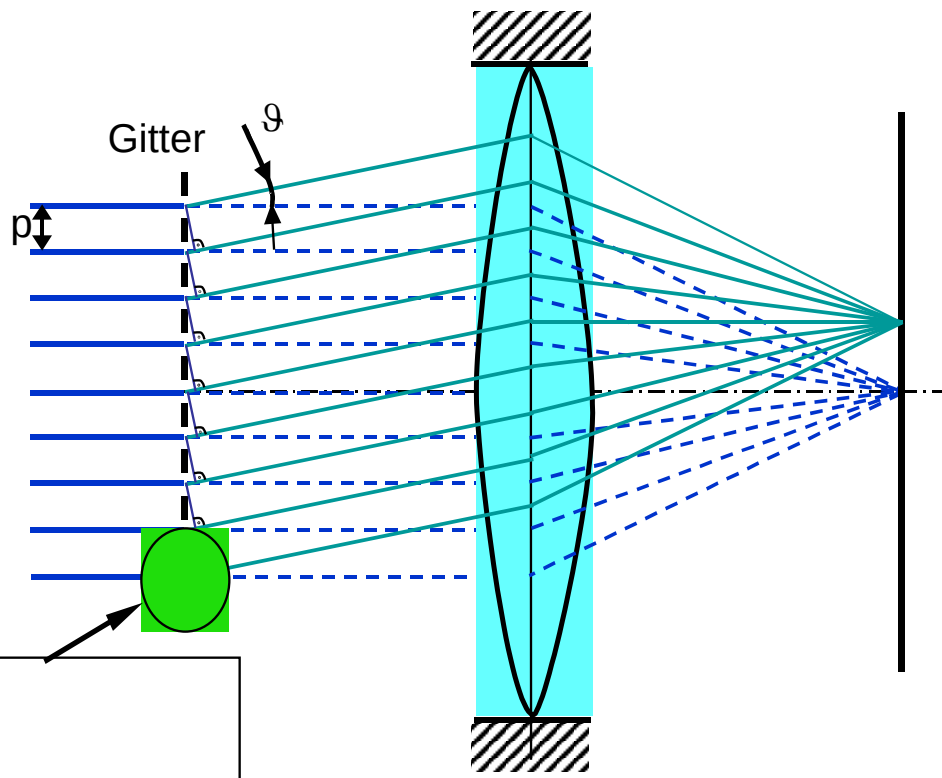
$$b = \frac{1 \cdot \lambda}{\sin \vartheta_1}$$

$$b = \frac{532 \text{ nm}}{\sin 0,18^\circ} = \frac{0,532 \mu\text{m}}{\sin 0,18^\circ}$$

$$\underline{\underline{b \approx 169 \mu\text{m}}}$$

Der Spalt ist etwa $169 \mu\text{m}$ breit, wenn das gebeugte Licht der Wellenlänge 532 nm im ersten Intensitätsminimum unter einem Winkel von $0,18^\circ$ in sehr großer Entfernung erscheint.

Beugung am Gitter



$$p \sin \vartheta = N \lambda$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



konstruktive Interferenz
 vergleiche mit Doppelspalt

$$p \sin \vartheta = (2 N + 1) \lambda / 2$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



destruktive Interferenz

Aufgabe 9: Fraunhofersche Beugung an Kreisblende

Eine kleine kreisförmige Lochblende wird mit einem Laser (ebene Wellenfront) der Wellenlänge $\lambda = 532 \text{ nm}$ durchstrahlt. Es ergibt sich auf einem Beobachtungsschirm im Abstand $R_{P_0} = 5 \text{ m}$ im Beugungsbild ein Radius des ersten Beugungsminimums von $q_1 = 15 \text{ mm}$.

Welchen Öffnungsdurchmesser d hat die Lochblende, wenn hier wegen des vergleichsweise großen Schirmabstandes von 5 m die Fraunhofersche Beugung angenommen wird?

$$q_1 = 1,22 \cdot \lambda \frac{R_{P_0}}{d}, \text{ s. a. Gl. 3.80 mit } d = 2a$$

(q_1 Radius des ersten dunklen Ringes, R_{P_0} Schirmentfernung,

d Öffnungsdurchmesser)

$$d = 1,22 \cdot \lambda \frac{R_{P_0}}{q_1}$$

$$d = 1,22 \cdot 532 \text{ nm} \cdot \frac{5 \text{ m}}{15 \text{ mm}}$$

$$\underline{\underline{d \approx 216 \text{ } \mu\text{m}}}$$

Die kreisförmige Lochblende hat einen Öffnungsdurchmesser von ca. $216 \text{ } \mu\text{m}$.

Aufgabe 10: Fraunhofersche Beugung an Kreisblende

Bei der fokussierten Abbildung einer unendlich fernen Punktlichtquelle der Wellenlänge 635nm mittels Spezialkamera mit einem Objektiv mit einer Brennweite von $f'=12$ mm befindet sich zwischen dem Objektiv und dem Aufnahmemedium Wasser, hier mit der Brechzahl $n'=1,33$. Die Objektivblende ist kreisförmig und weist einen Durchmesser von $d=2$ mm auf.

1. Welchen Durchmesser D_{Airy} weist das Airy-Scheibchen (Bild der Punktlichtquelle) in der Brennebene des Objektivs auf?
2. Warum handelt es sich um Fraunhofersche Beugung?

Der Durchmesser des Punktbildes (Airy - Scheibchen) beträgt gemäß Gleichung 3.81

$$D_{\text{Airy}} = 2q_1 = 2 \cdot 1,22 \cdot \lambda \frac{f'}{n' \cdot d} = 2,44 \cdot \lambda \frac{f'}{n' \cdot d}$$

(q_1 Radius des ersten dunklen Ringes des Airy - Musters, f' Brennweite, d Blendendurchmesser, d Öffnungsdurchmesser, n' Brechungsindex)

oder auch mit Gleichung 3.82

$$D_{\text{Airy}} = 2q_1 = 2 \cdot 0,61 \cdot \frac{\lambda}{n' \cdot \sin \sigma'} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{n' \cdot \sin \sigma'} \text{ (numerische Apertur : } \sin \sigma' \approx \frac{d}{2f'} \text{)}.$$

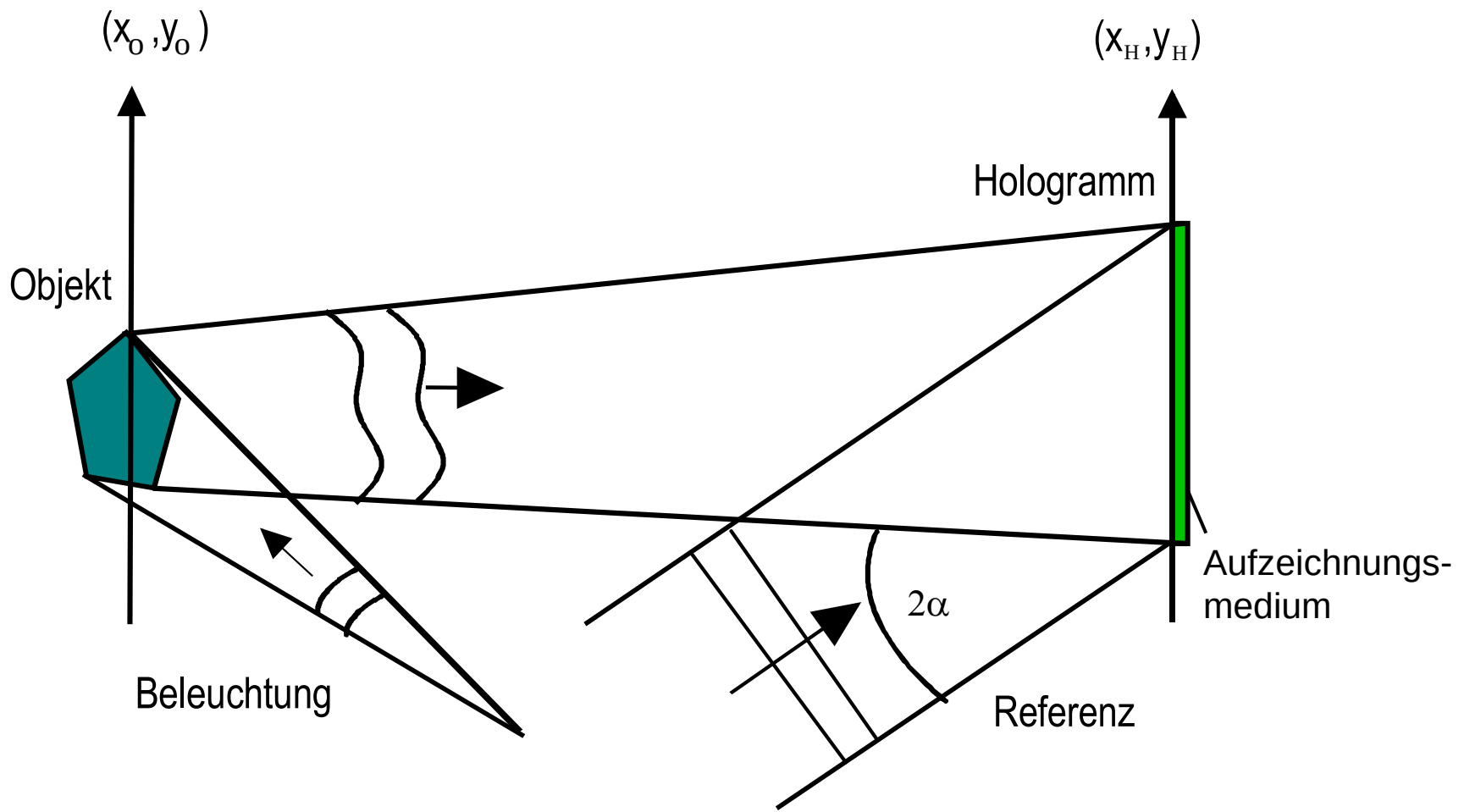
$$D_{\text{Airy}} = 2,44 \cdot \lambda \frac{f'}{n' \cdot d}$$

$$D_{\text{Airy}} = 2,44 \cdot 635 \text{ nm} \frac{12 \text{ mm}}{1,33 \cdot 2 \text{ mm}}$$

$$\underline{\underline{D_{\text{Airy}} = 6,99 \mu\text{m}}}$$

Der Durchmesser des Punktbildes (Airy - Scheibchen) ergibt sich zu 6,99 μm . Es handelt sich um Fraunhofersche Beugung, da Objekt und Aufnahmemedium optisch im Unendlichen sind.

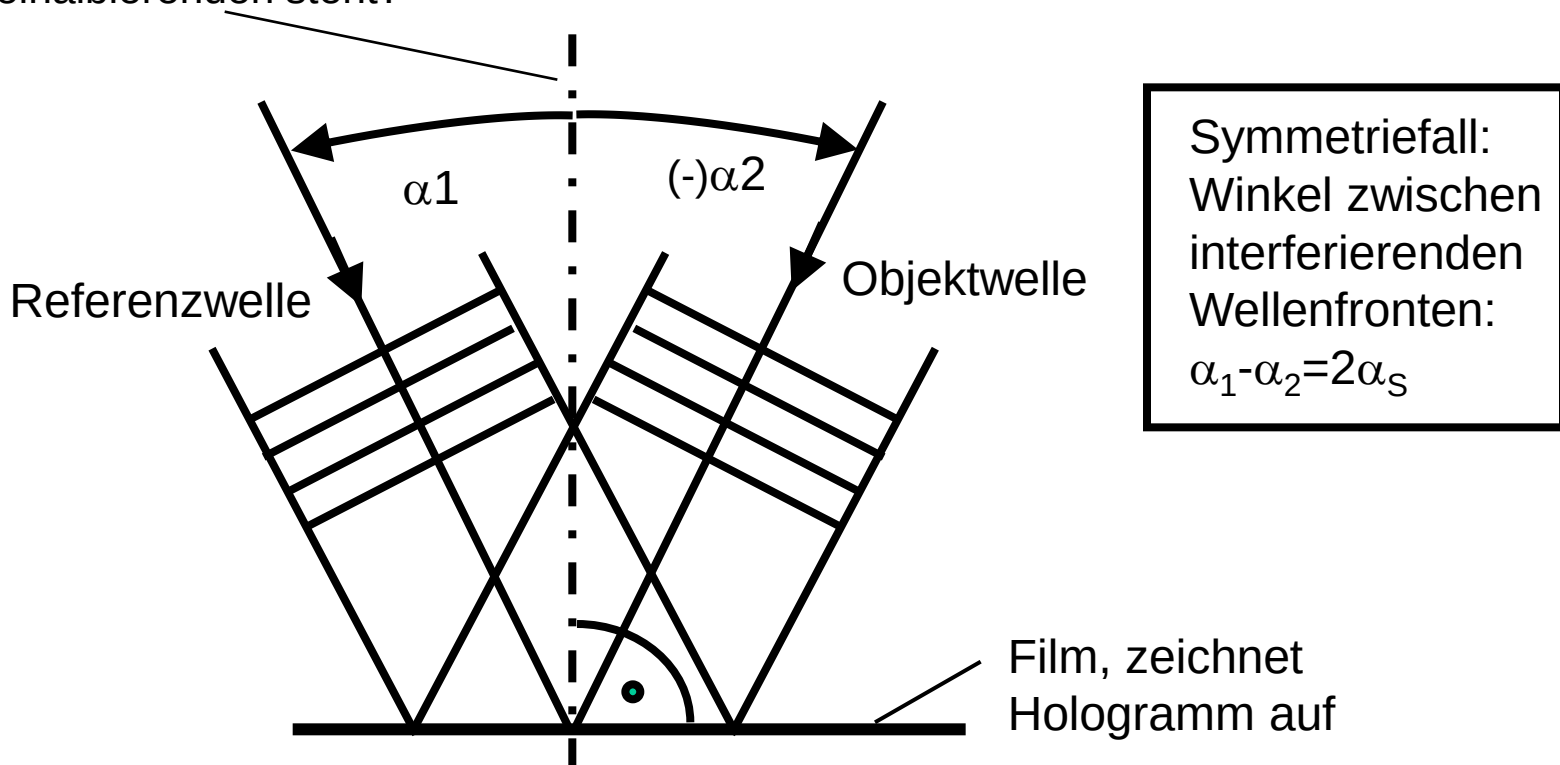
Anordnung zur holografischen Aufzeichnung



Aufgabe 11 zur holografischen Aufzeichnung

Bei der holografischen Aufzeichnung mit einem Laser der Wellenlänge $\lambda=532 \text{ nm}$ soll das Aufzeichnungsmedium, ein Film für holografische Aufzeichnung, senkrecht zur Winkelhalbierenden der interferierenden Wellen angeordnet sein. Die maximale Ortsfrequenz beträgt 2000 LP/mm (Ein Linienpaar/mm kann hierbei einem Interferenzstreifen pro mm gleichgesetzt werden)

Unter welchem maximalen Winkel bei Einhaltung des Samplingtheorems, bzw. Abtasttheorems dürfen die interferierenden Wellen (voller Winkel $2\alpha_S$ zwischen Wellenfrontnormalen) auf den Film auftreffen, wenn dieser senkrecht zur Winkelhalbierenden steht?



Lösung zu Aufgabe 11 (holografische Aufzeichnung)

$$h_S = \frac{1}{f_{Ort}} = \frac{1}{2000 \text{ LP/mm}} = \frac{1}{2000 \cdot \frac{1}{\text{mm}}} = \frac{1 \text{ mm}}{2000} \quad (f_{Ort} \text{ Anzahl der Linienpaare/mm} = 1/\text{mm})$$

$$\underline{\underline{h_S = 0,5 \mu\text{m}}}$$

Der Streifenabstand h_S , bei dem das Samplingtheorem für den Spezialfilm noch erfüllt ist, beträgt $0,5 \mu\text{m}$.

$$h_S = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)}$$

(s. Gl. 3.42, h Interferenzstreifenabstand, λ Wellenlänge, α_1, α_2 Winkel zur x - Achse)

$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_S$, Symmetriefall: α_S ist halber Winkel zwischen Normalend. interfer. Wellenfronten

Gesucht ist also der Winkel $2\alpha_S$, bei dem d. Samplingtheorem noch erfüllt ist. Mit Gl. 3.42 folgt:

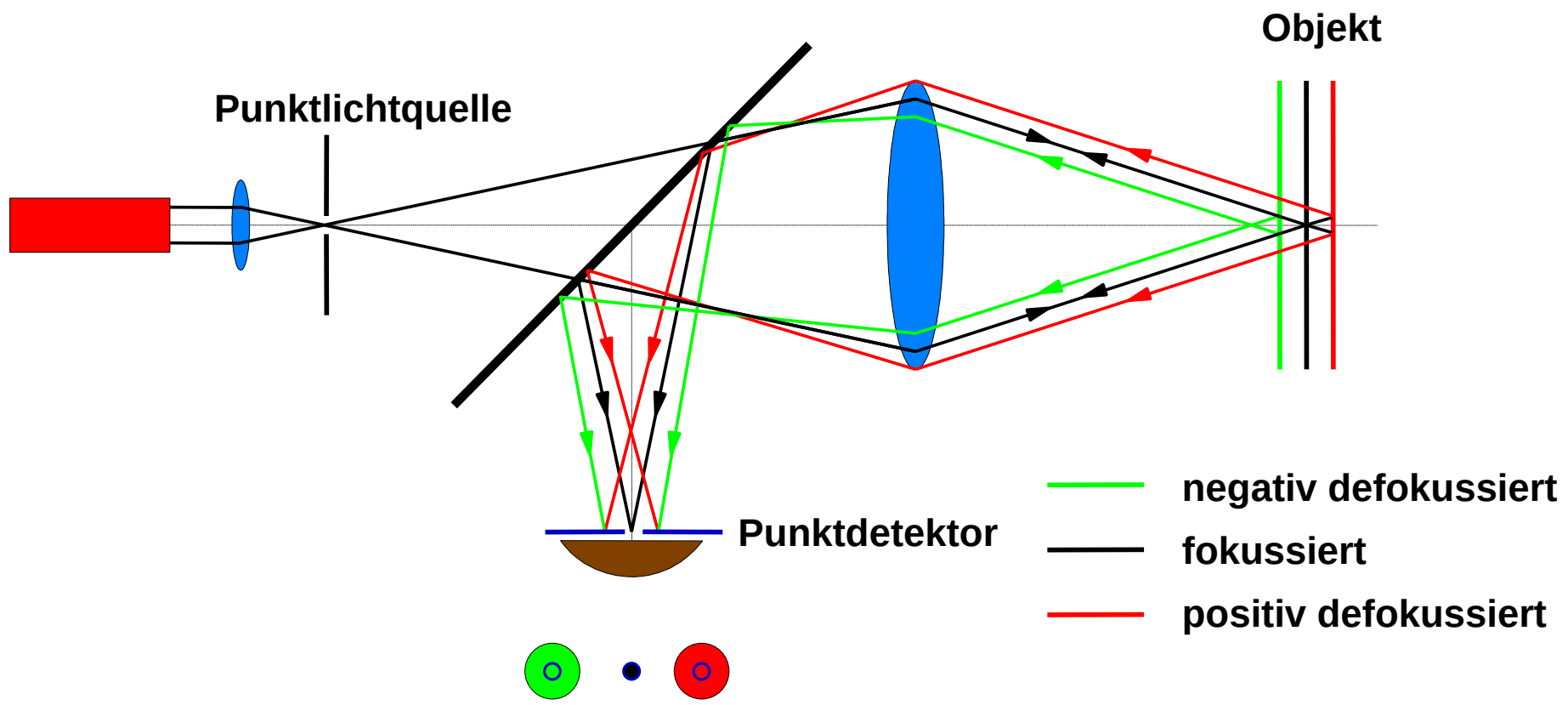
$$2\alpha_S = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{2h_S}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{532 \text{ nm}}{2 \cdot 0,5 \mu\text{m}}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{532 \text{ nm}}{1 \mu\text{m}}\right)$$

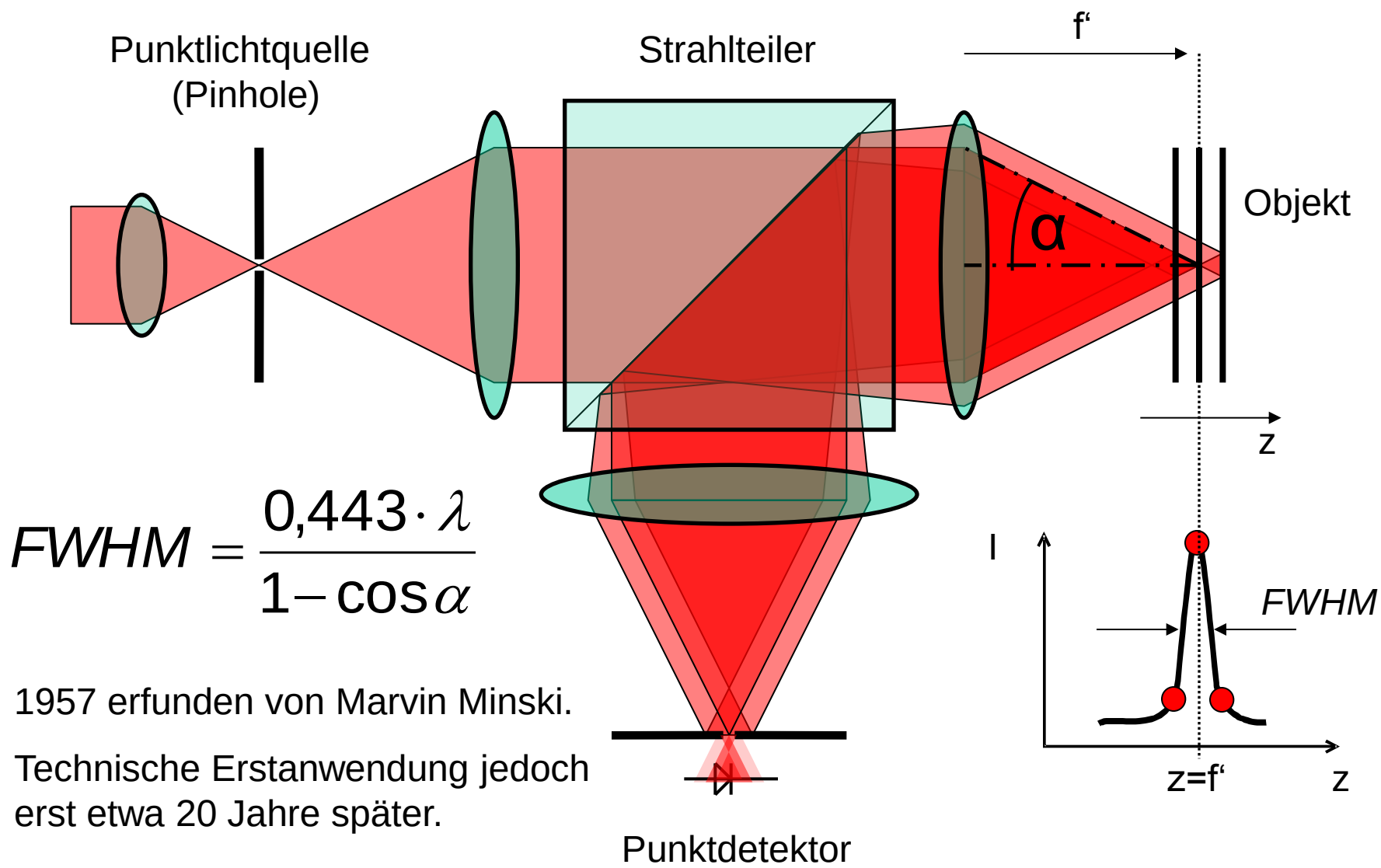
$$\underline{\underline{2\alpha_S = 64,28^\circ}}$$

Der maximale Winkel zwischen d. Normalend. interferierenden Wellenfronten darf $64,28^\circ$ betragen.

Eine Näherungslösung mit $h \approx \frac{\lambda}{VW_{Bogen}}$ ist nicht mehr akzeptabel!

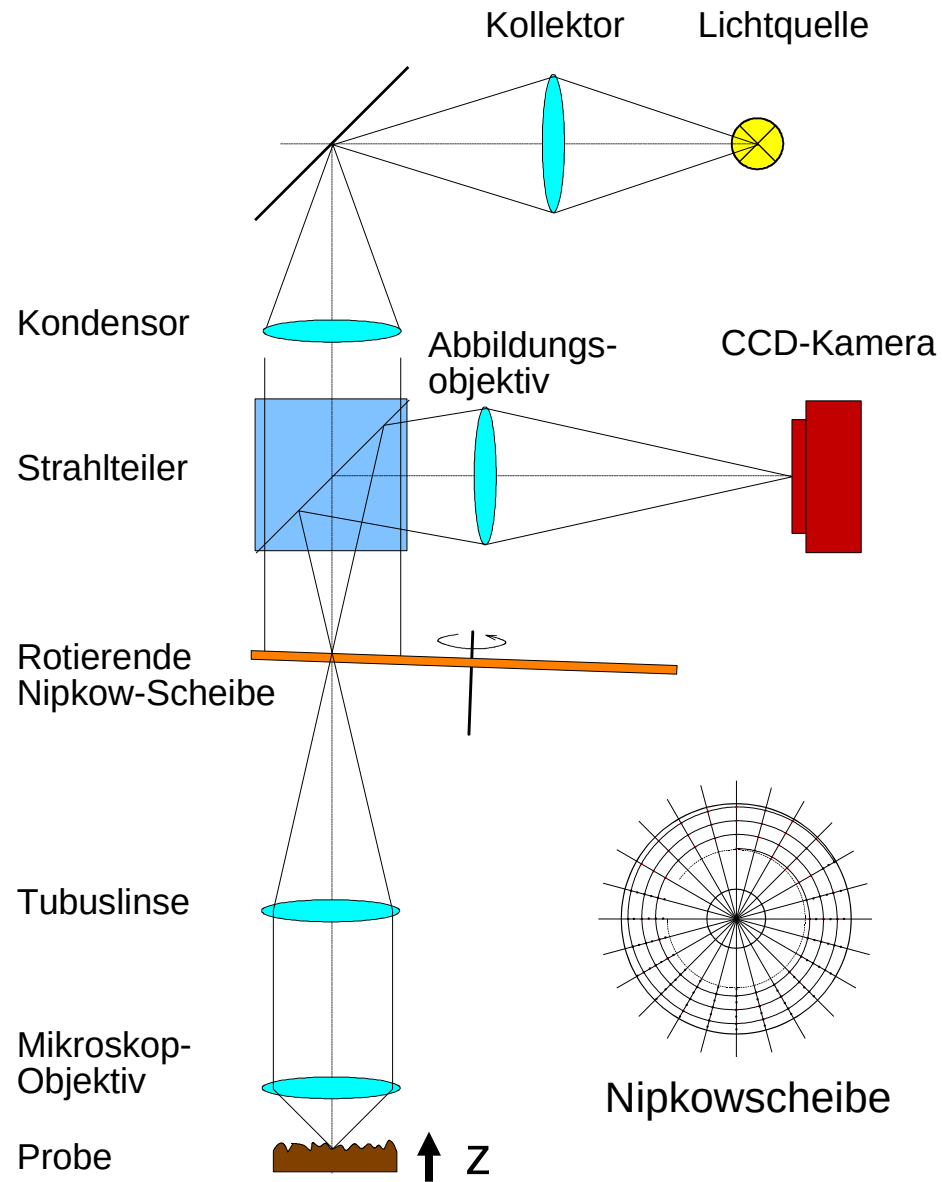
(VW_{Bogen} = Vollwinkel zwischen den Wellenfrontnormalen im Bogenmaß)





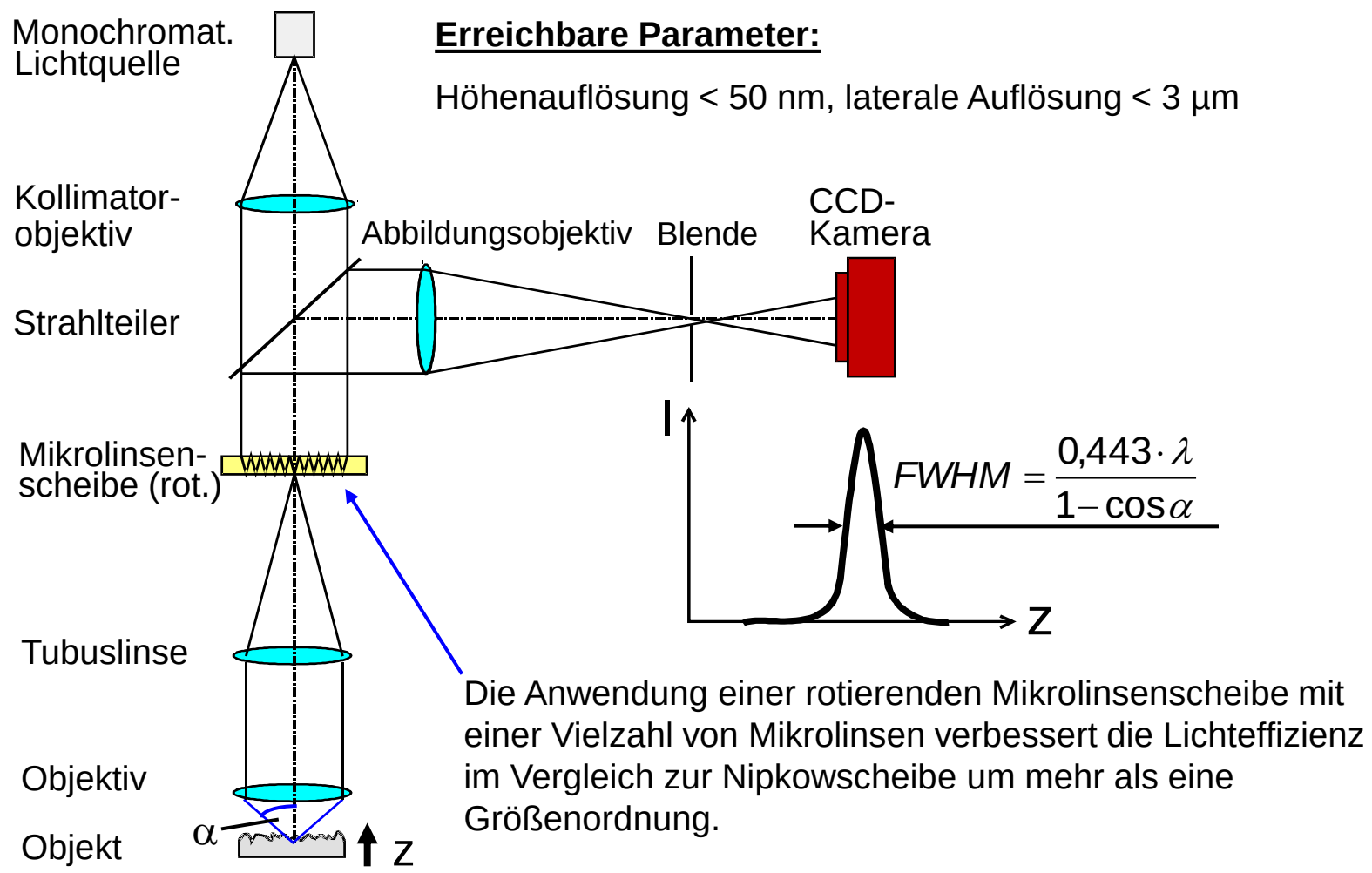
1957 erfunden von Marvin Minski.
Technische Erstanwendung jedoch
erst etwa 20 Jahre später.

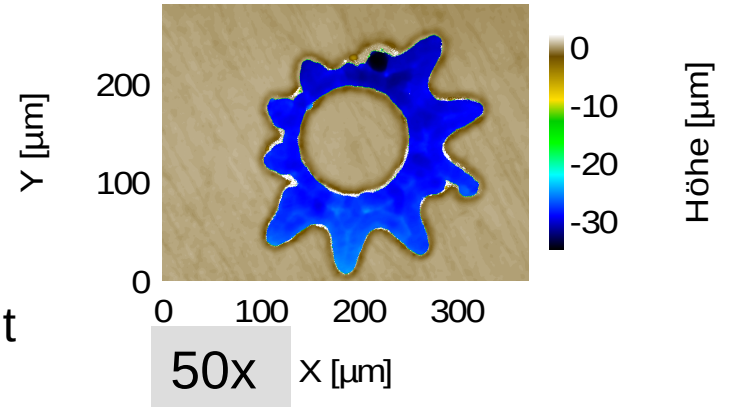
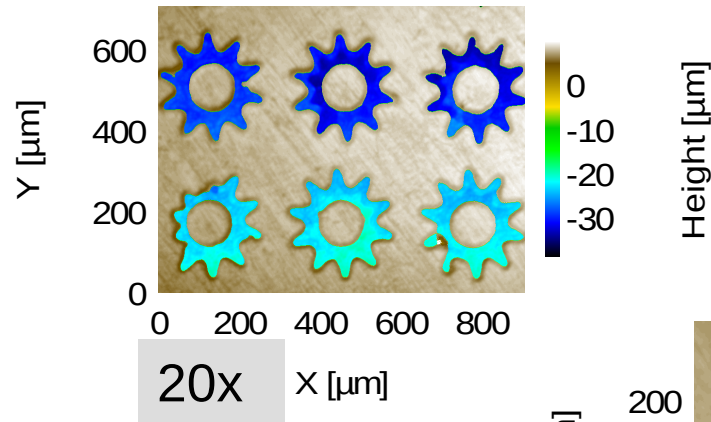
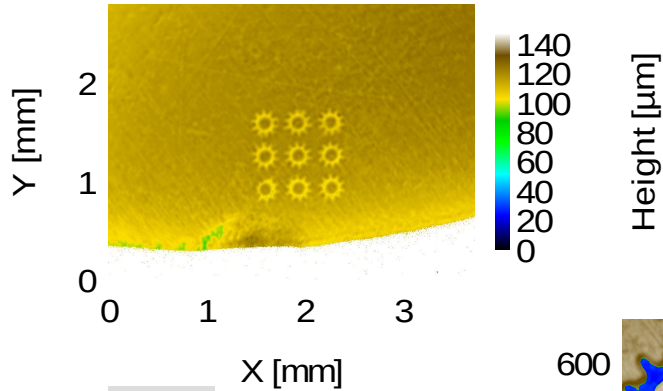
Flächenhaft messendes, konfokales Mikroskop



Die Anwendung einer rotierenden Nipkowscheibe mit einer Vielzahl von Pinholes, die hier Punktlichtquellen darstellen, ermöglicht den Übergang zur flächenhaften Detektion eines Objekts.

Flächenhaft messendes, konfokales Mikrolinsen-Mikroskop



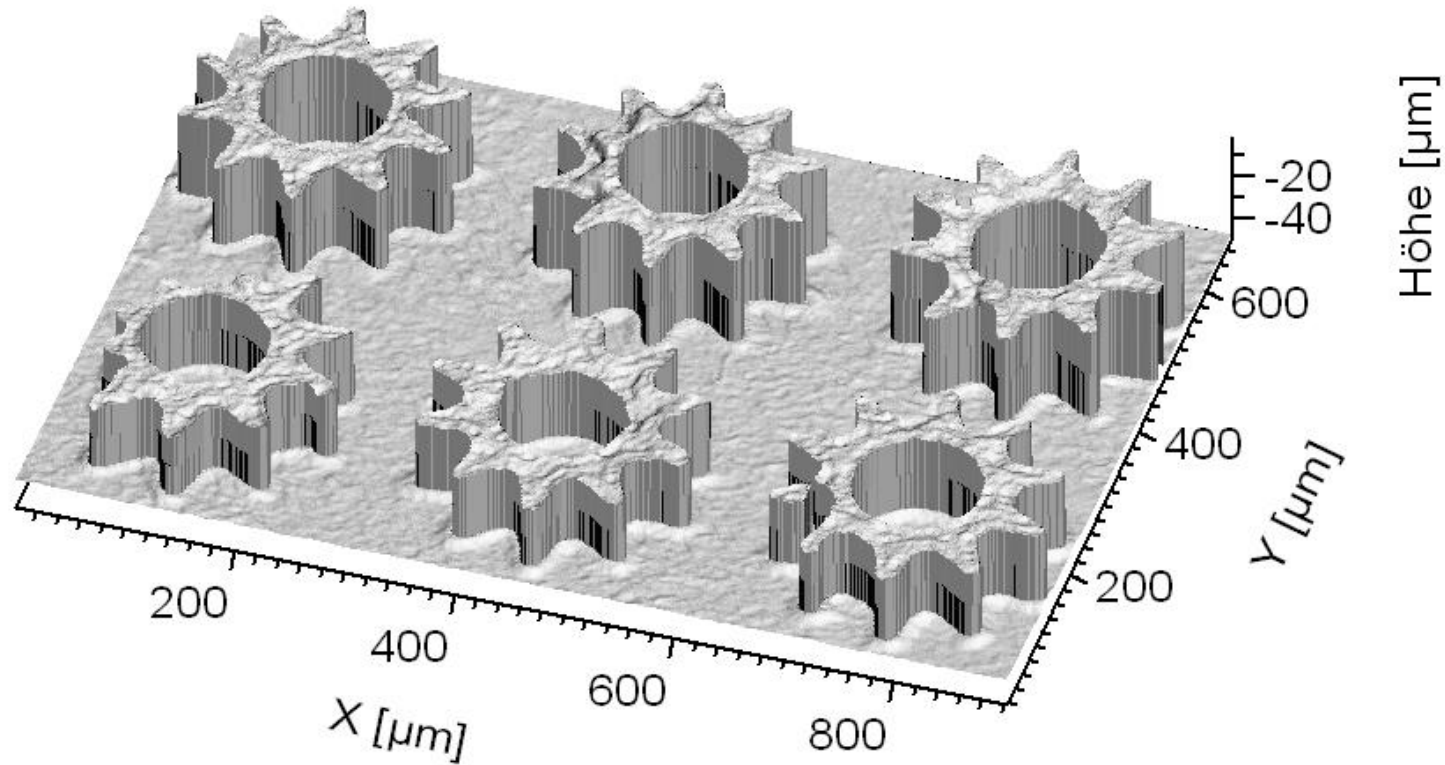


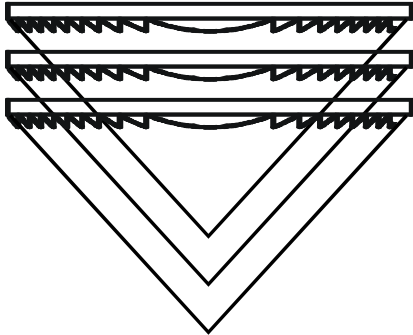
Messergebnisse an einem Mikro Zahnrad-Array mit unterschiedlichen Vergrößerungen: 5x, 20x, 50x

Messung an Mikrozahnrädern

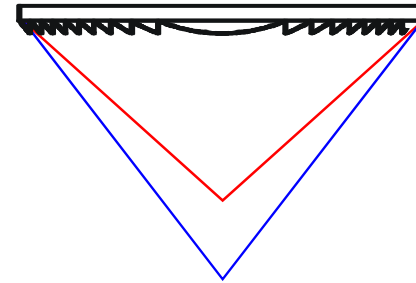
mit dem konfokalen Mikroskop,

Objektiv: 20x, NA = 0,4

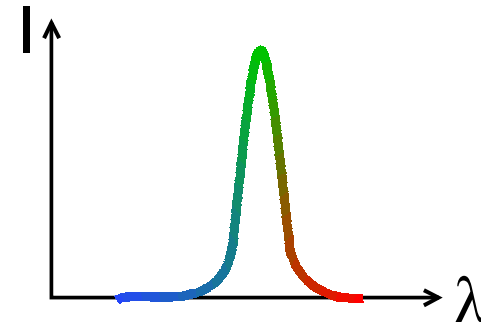
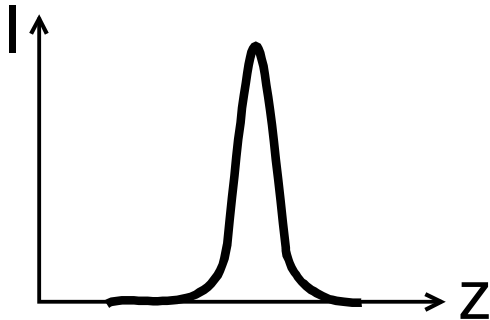




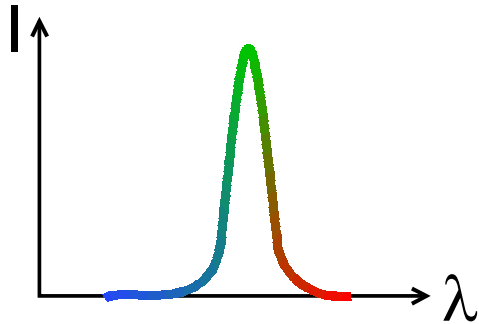
mechanischer Höhenscan



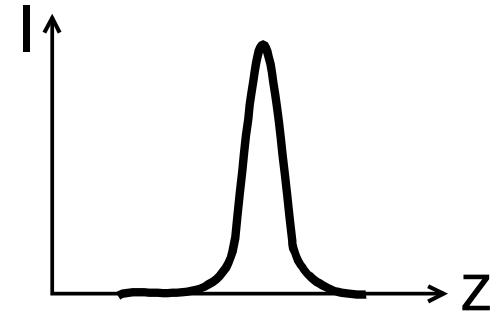
chromatischer Höhenscan



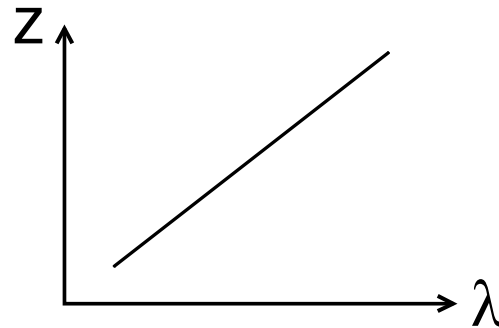
Wellenlängen-Abstands Relation



Spektrometersignal

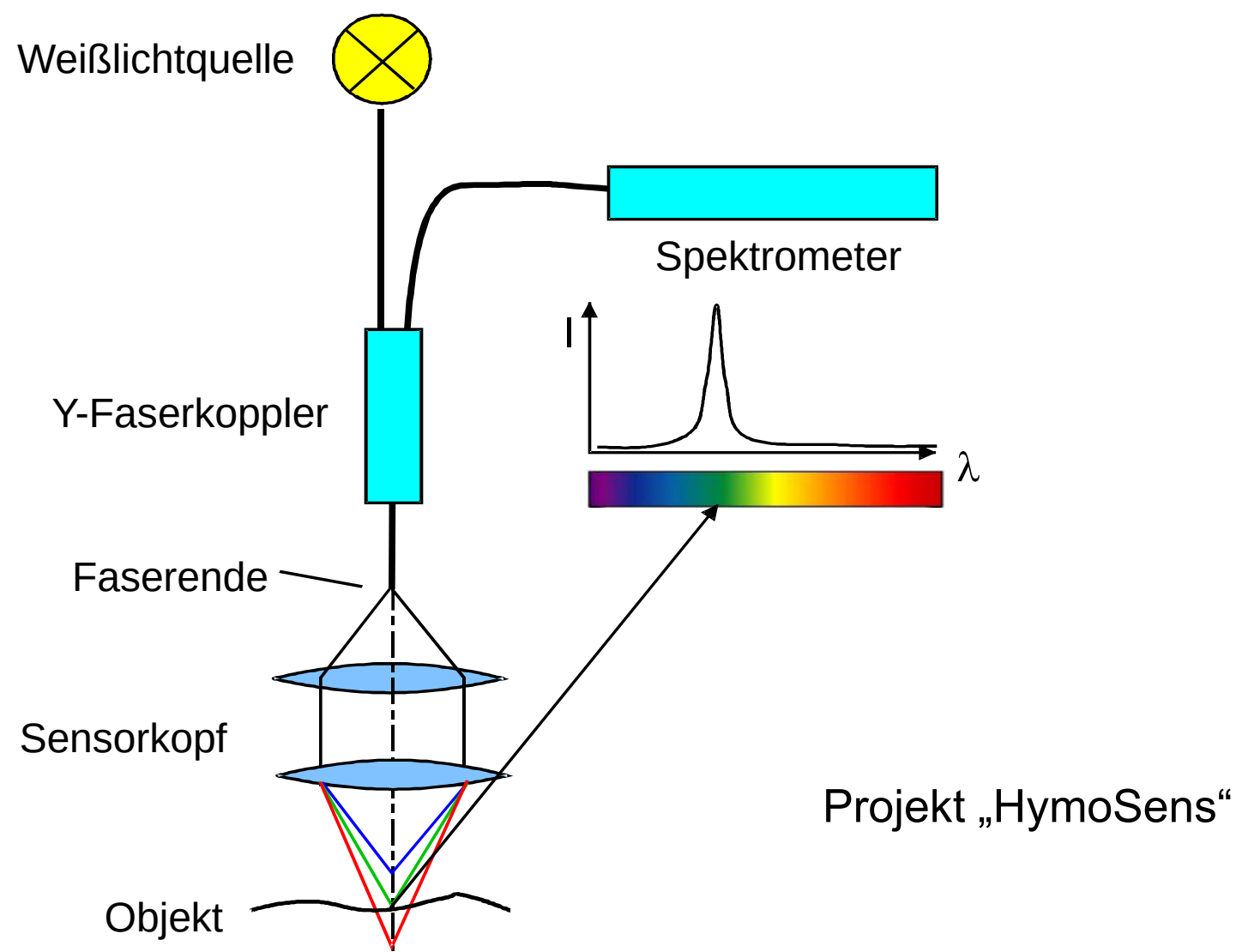


Höhensignal

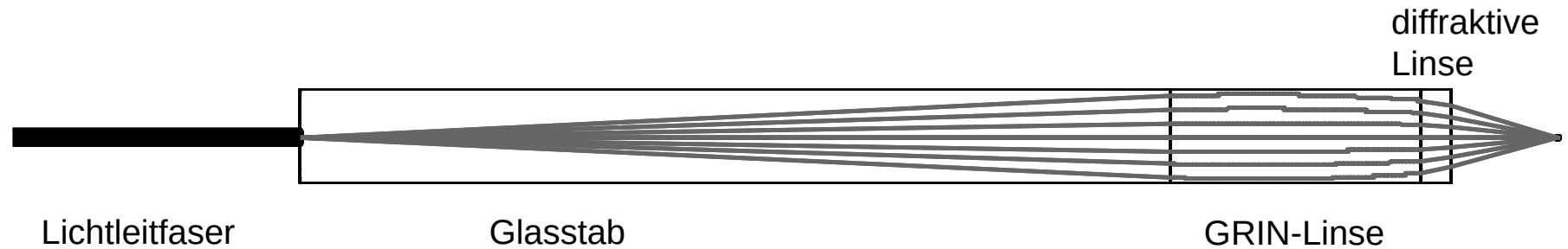


chromatische Höhenaufspaltung

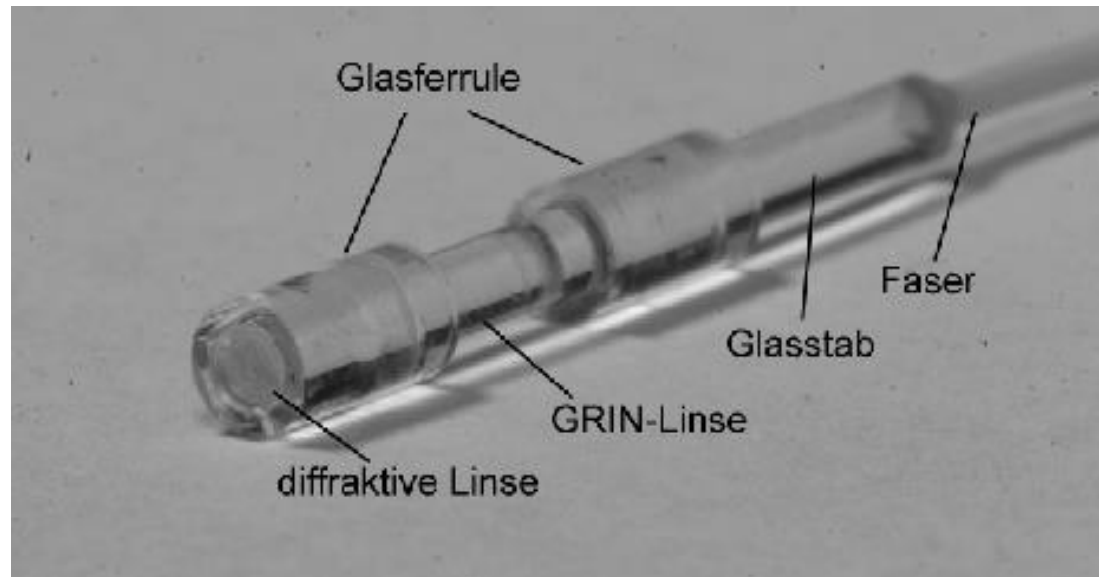
Chromatisch-konfokaler Punktsensor



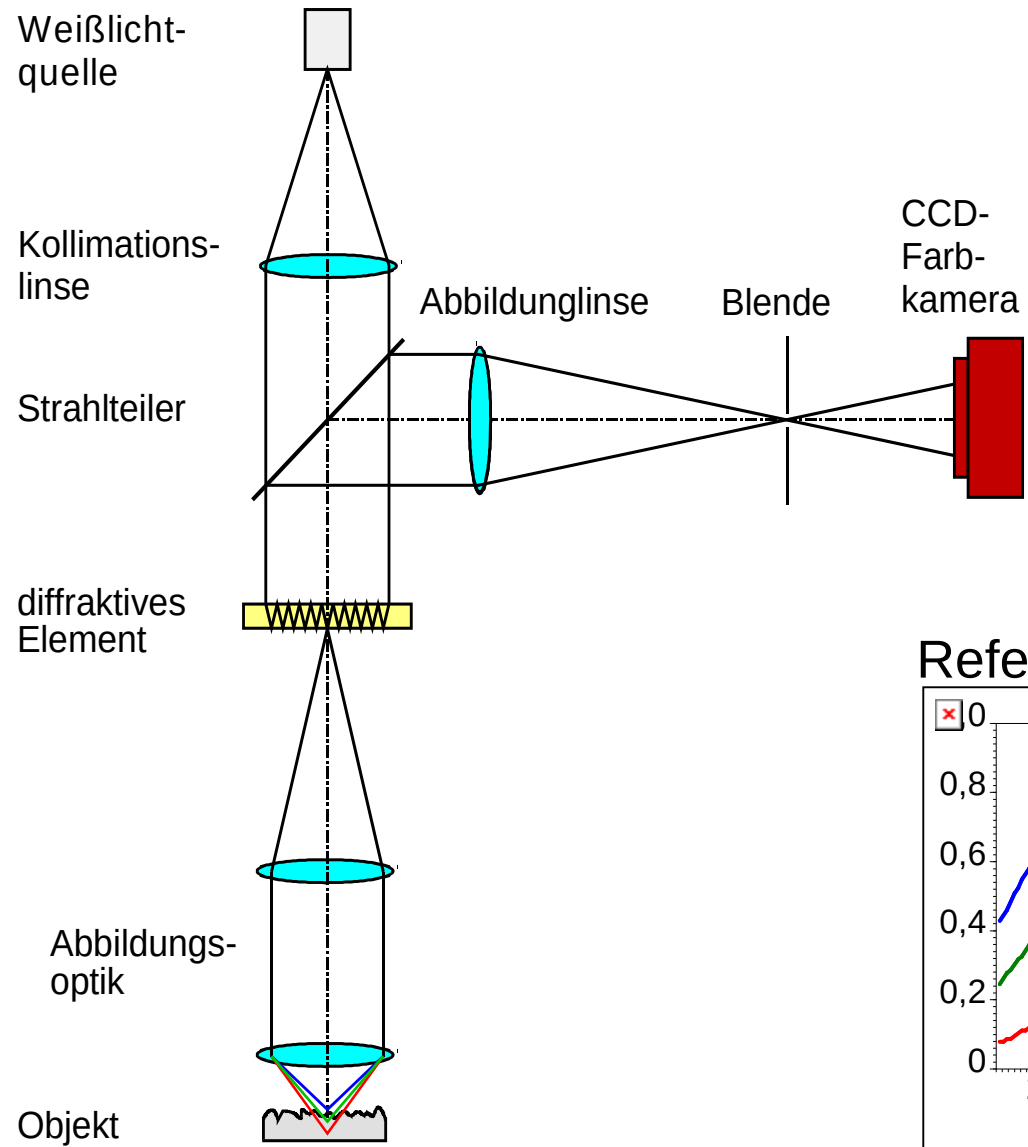
Miniaturisierter Punktsensor



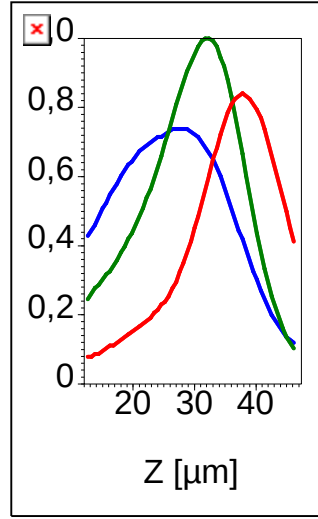
$\varnothing = 1 \text{ mm};$ $NA \approx 0,5;$ $HWB < 10 \text{ }\mu\text{m}$



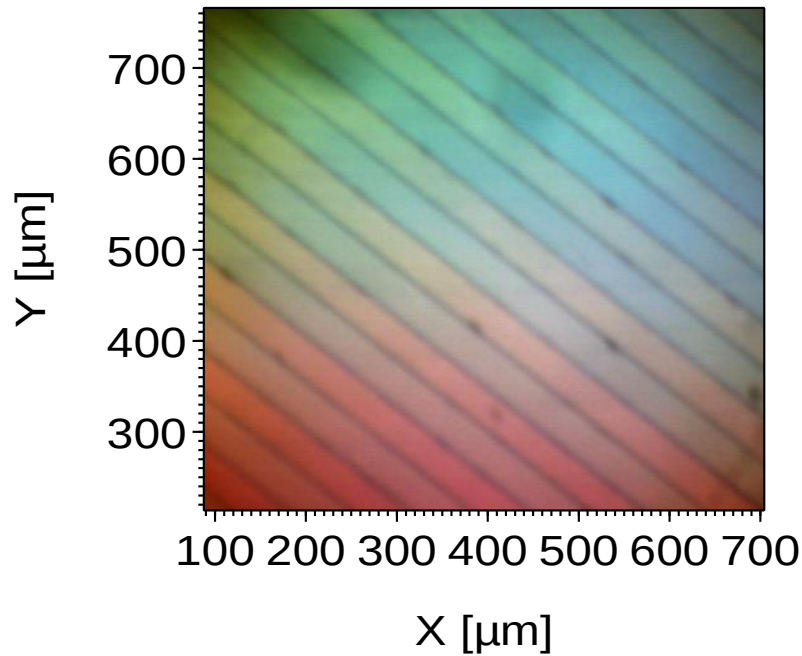
Chromatisch konfokaler Flächensensor



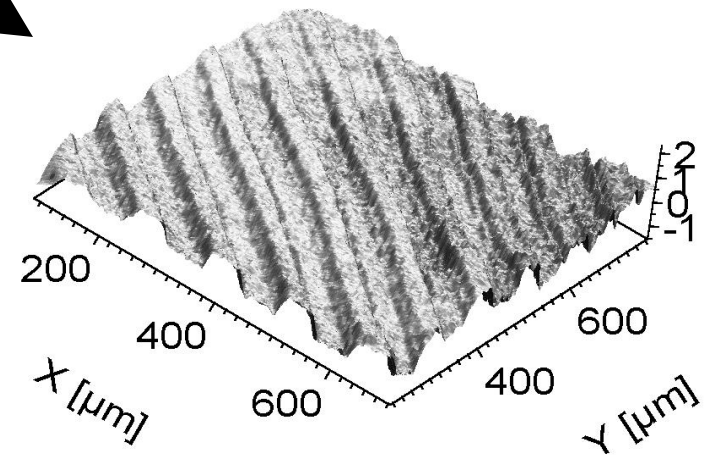
Referenzkurven



Farbbild



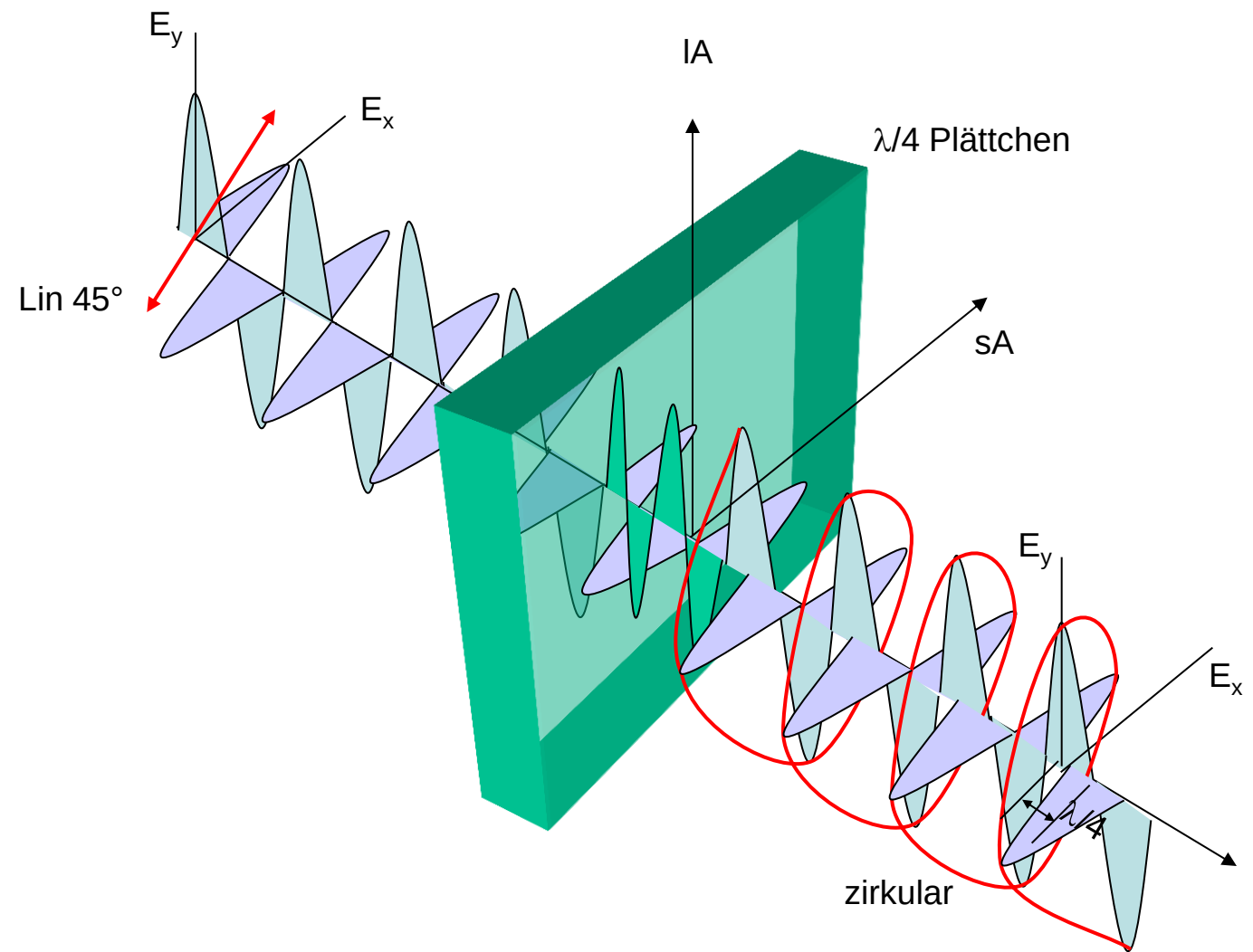
Topografie



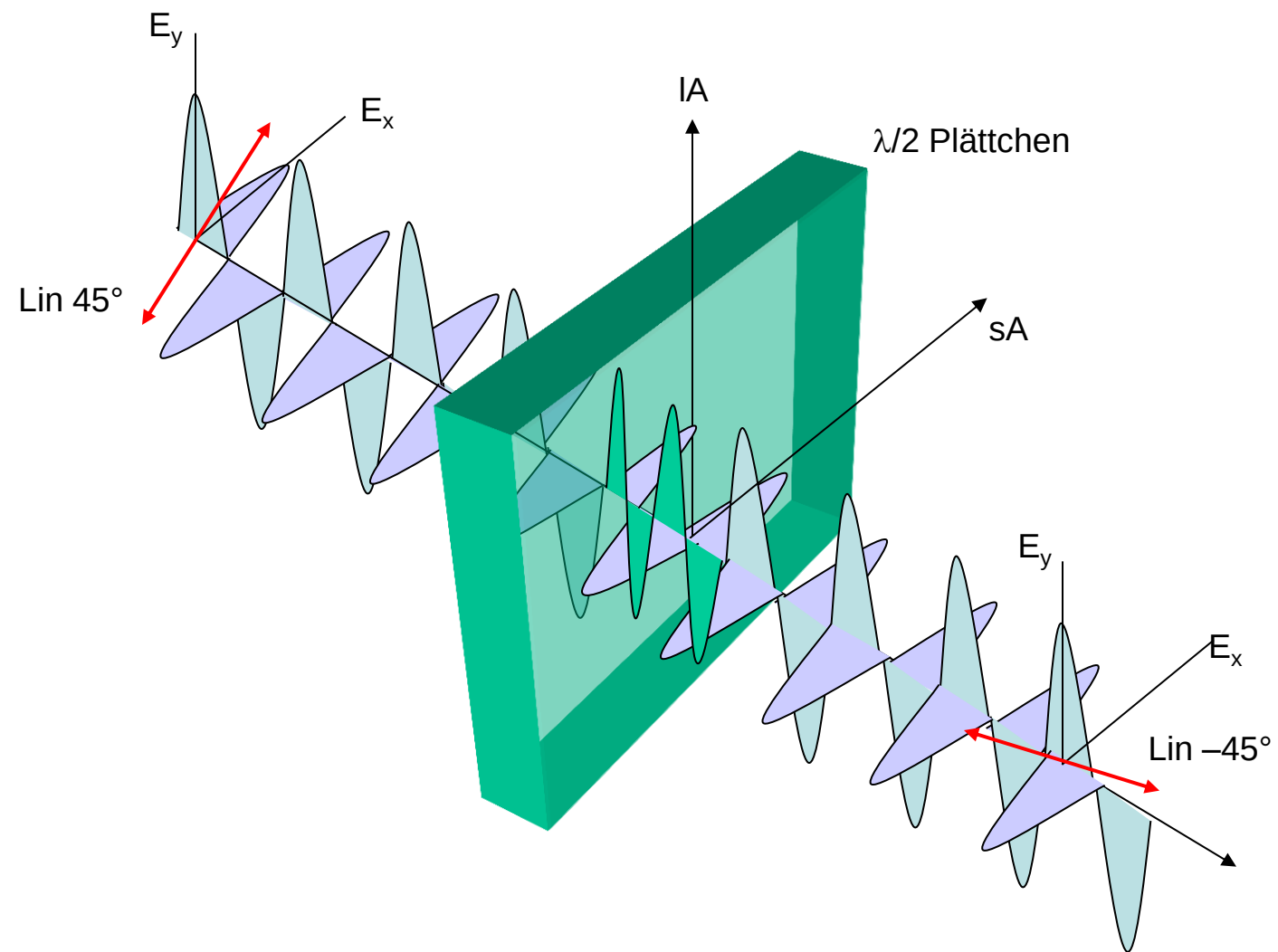
Messbereich: ca. 20 μm

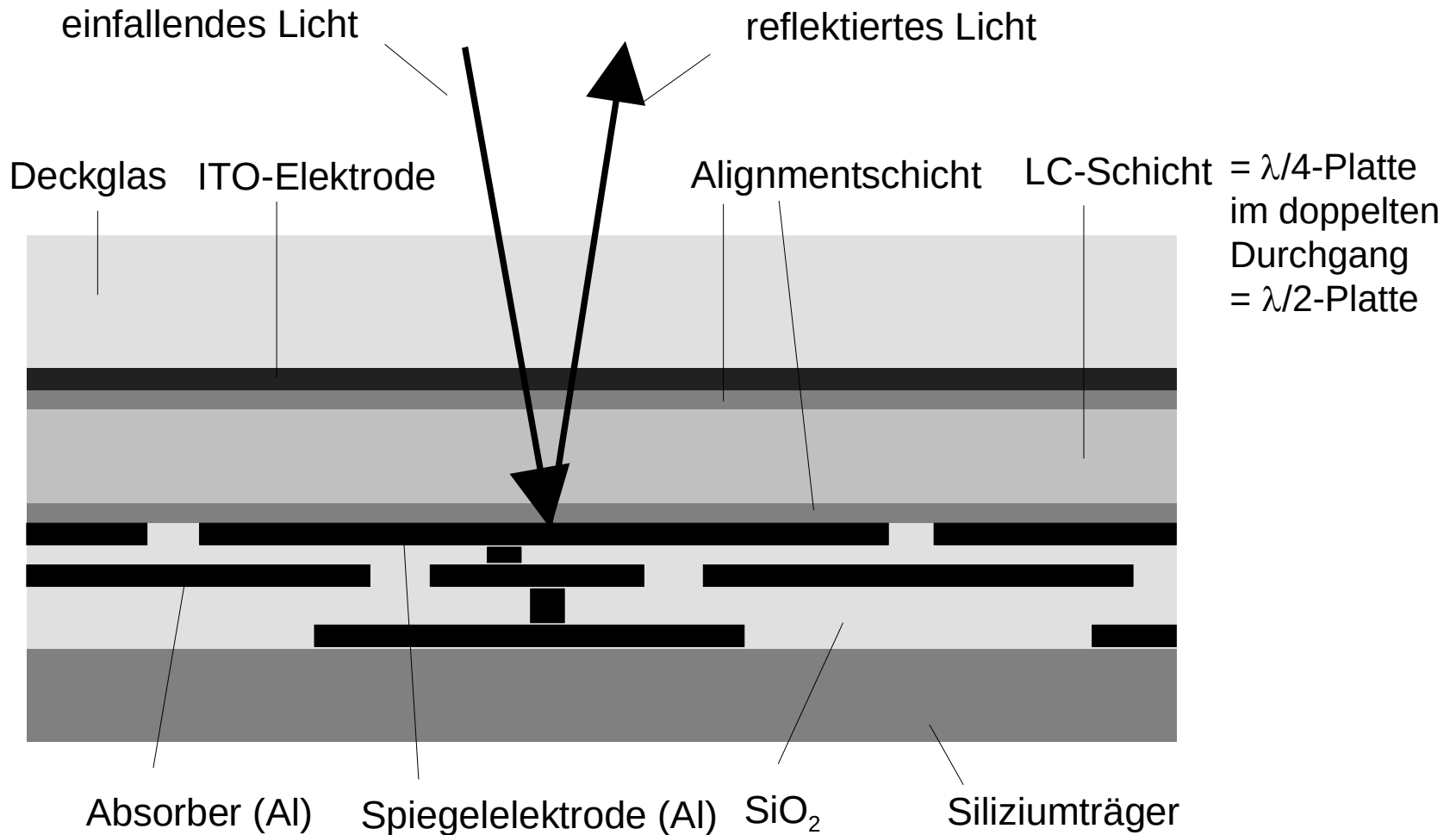
20 ms Belichtungszeit → ca. 500 kHz Topografie-Punktmessrate

Polarisation, Wirkung einer $\lambda/4$ -Platte



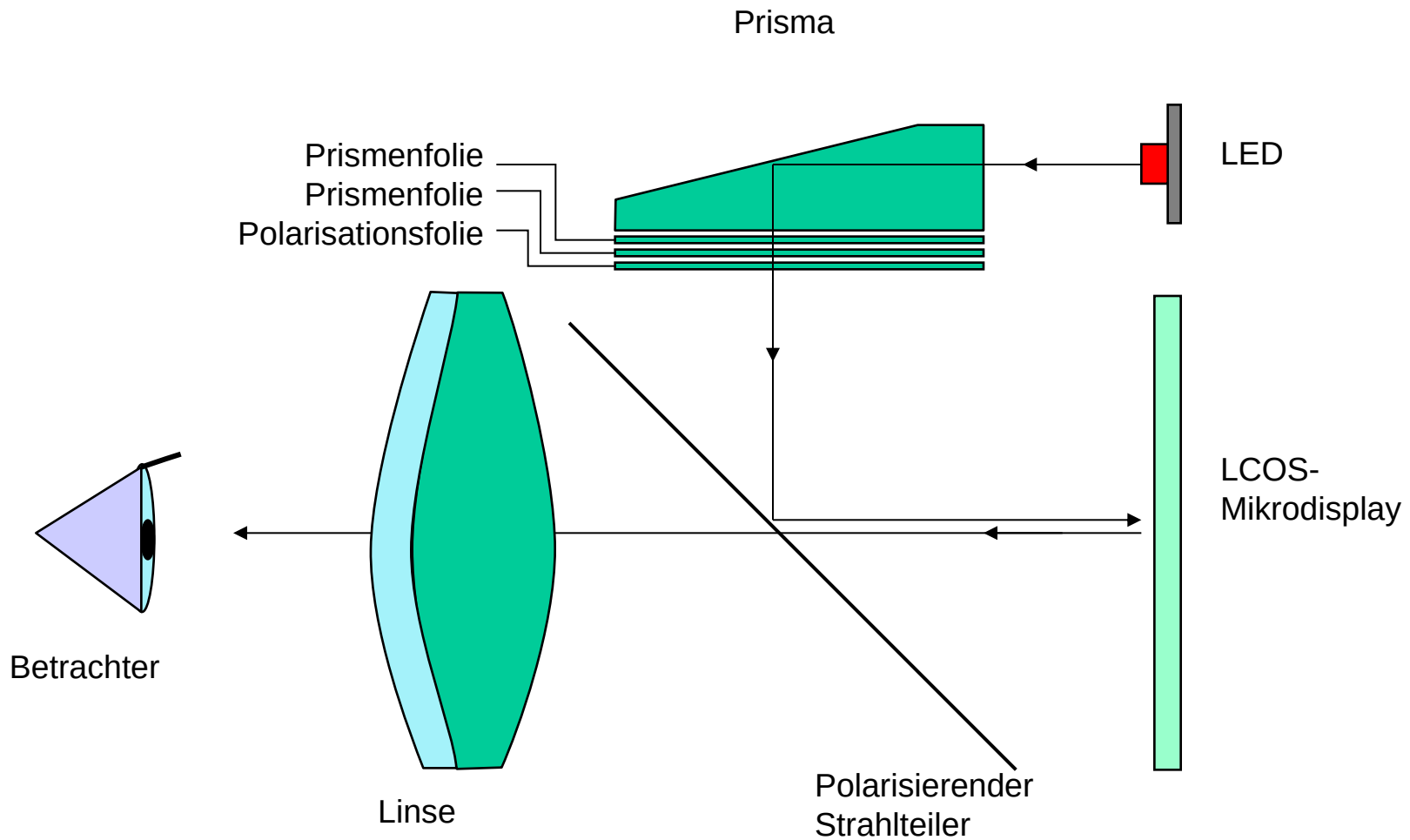
Polarisation, Wirkung einer $\lambda/2$ -Platte



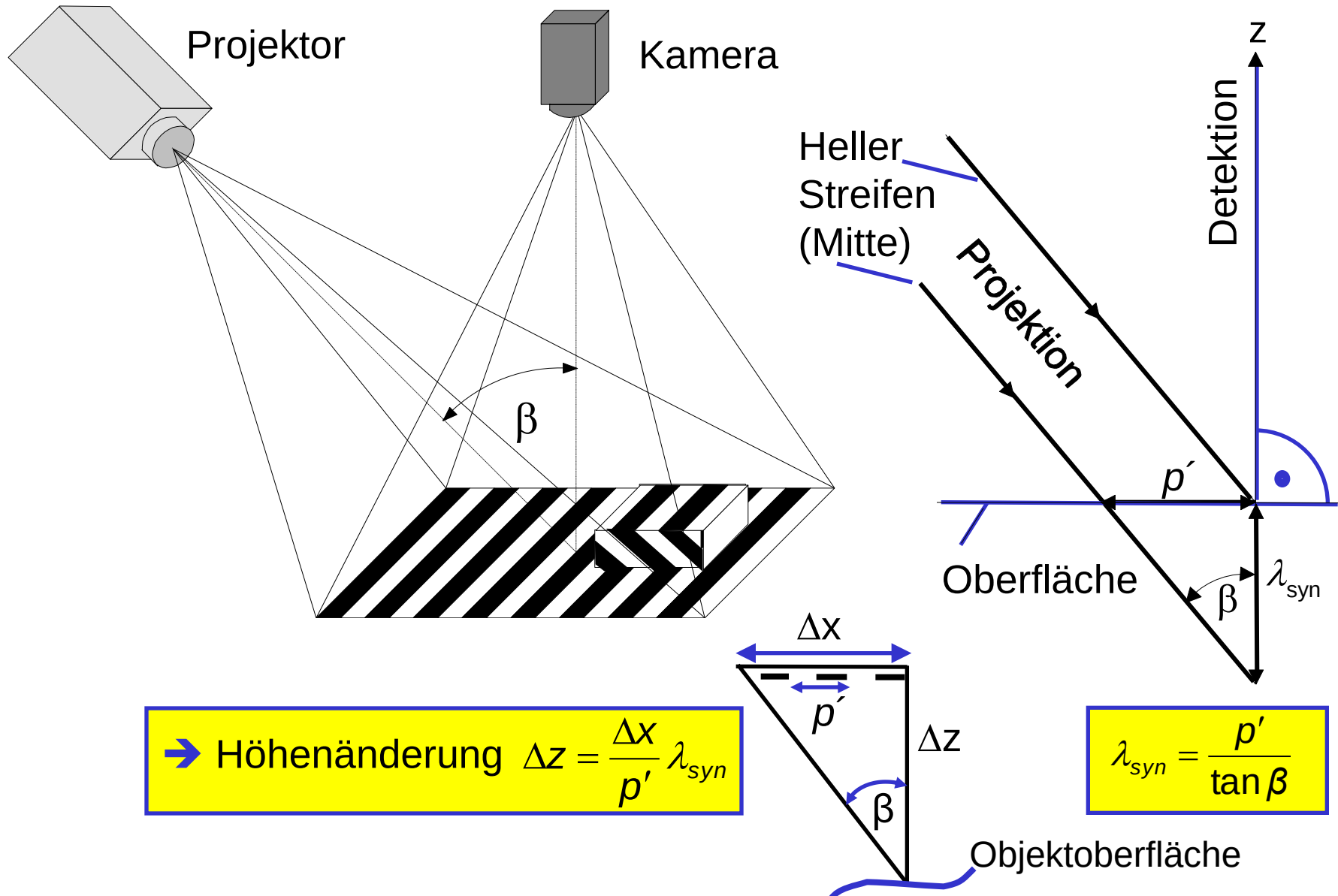


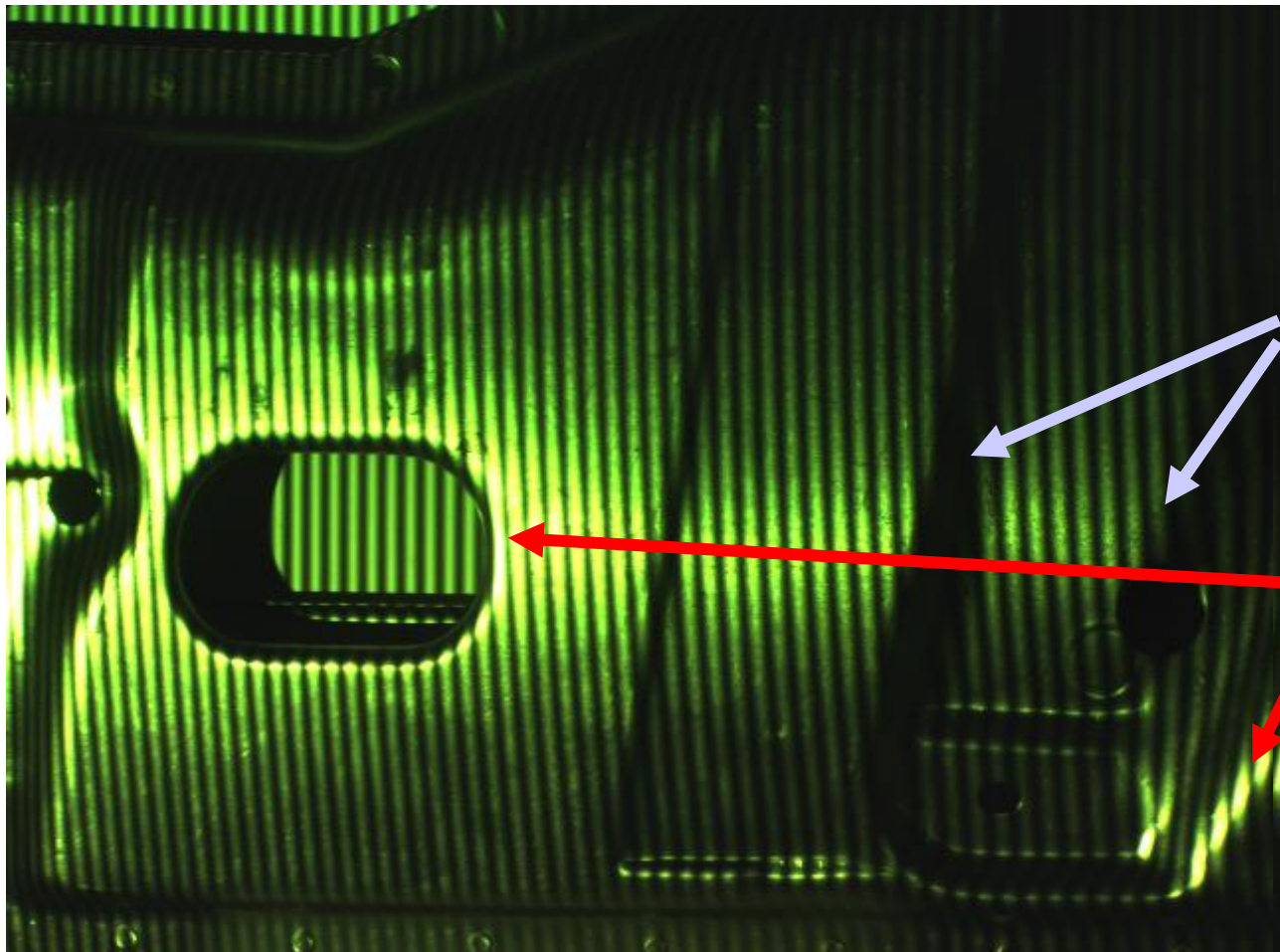
Schichtdicke im Vergleich zu transmittiver Anordnung halbiert!

Nutzung der Polarisation, Anordnung mit $\lambda/2$ -Effekt



Triangulation mit Streifenprojektion





Starke Abschattungen
(Gradienten)

Glanzlichter
(Gradienten)

Aufgabe 13: Triangulation (makroskopische Skale)

Wir betrachten eine Streifen-Triangulations-Messanordnung bei der zur Kalibrierung parallele, äquidistante Streifen schräg auf eine hochebene Kalibrierplatte projiziert werden. Die projizierte Streifenperiode auf der Platte beträgt $p' = 2,4 \text{ mm}$ und der Triangulationswinkel ist $\beta = 32^\circ$. Die Aufnahme erfolgt mittels Kamera. Dabei ist die optische Achse des Kameraobjektivs senkrecht zur Kalibrierplatte.

Die Kalibrierplatte wird nun ersetzt durch ein Präzisions-Werkstück mit einer hochebenen Oberfläche und einer Einsattelung mit ebener Bodenfläche, die parallel zur Oberfläche ist. Bestimmen Sie die Tiefe dieser Einsattelung, wenn in der vertieften Bodenfläche die Streifen sich um $n=3,5$ Perioden lateral gegenüber denen auf der Oberfläche verschoben haben (Annahme: telezentrische Projektion).

Lösung:

mit Gl. für d. synth. Wellenlänge folgt:

$$\lambda_{syn} = \frac{p'}{\tan \beta}$$

$$\lambda_{syn} = \frac{2,4 \text{ mm}}{\tan 32^\circ}$$

$$\lambda_{syn} = 3,84 \text{ mm}$$

Die synth. Wellenlänge beträgt 3,84 mm.

mit Gl. für die Höhenänderung folgt:

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{p'} \cdot \lambda_{syn} = \frac{n \cdot p'}{p'} \cdot \lambda_{syn}$$

$$\Delta z = 3,5 \cdot 3,84 \text{ mm}$$

$$\Delta z = 13,44 \text{ mm}$$

Die Tiefe der Einsattelung beträgt 13,44 mm.

Phasenschiebeverfahren

1) Projektion von Streifen mit Cosinus-Quadrat-förmigem Intensitätsprofil:

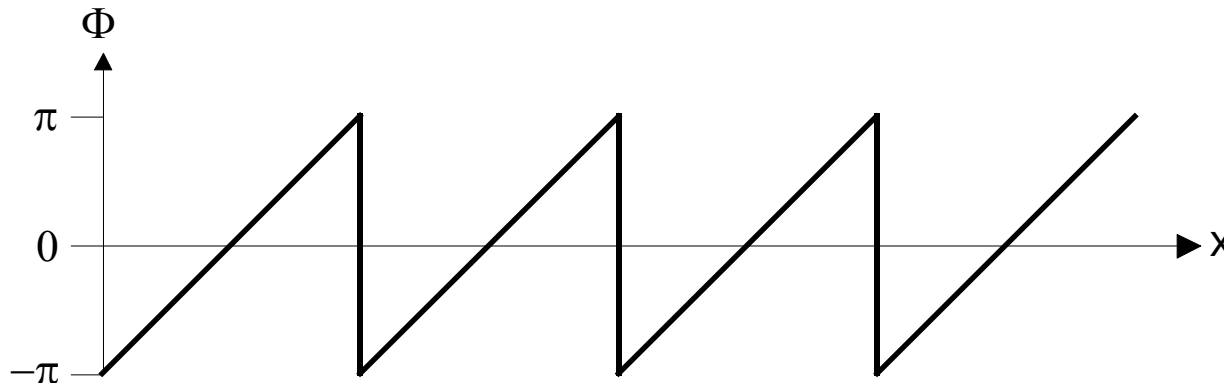
$$I_i(x, y) = I_0(x, y) [1 + m(x, y) \cos(\phi(x, y) + \Delta_i)] \longrightarrow \Delta z = \frac{\Delta \phi}{2\pi} \lambda_{\text{syn}}$$

2) Berechnung der (Roh-)Phase im Intervall $-\pi$ bis $+\pi$:

3-Phasen-Algorithmen: $\phi = \arctan \frac{2I_2 - I_1 - I_3}{I_3 - I_1}$ bzw. $\phi = \arctan \frac{\sqrt{3}(I_3 - I_2)}{2I_1 - I_2 - I_3}$

4-Phasen-Algorithmus: $\phi = \arctan \frac{I_2 - I_4}{I_3 - I_1}$

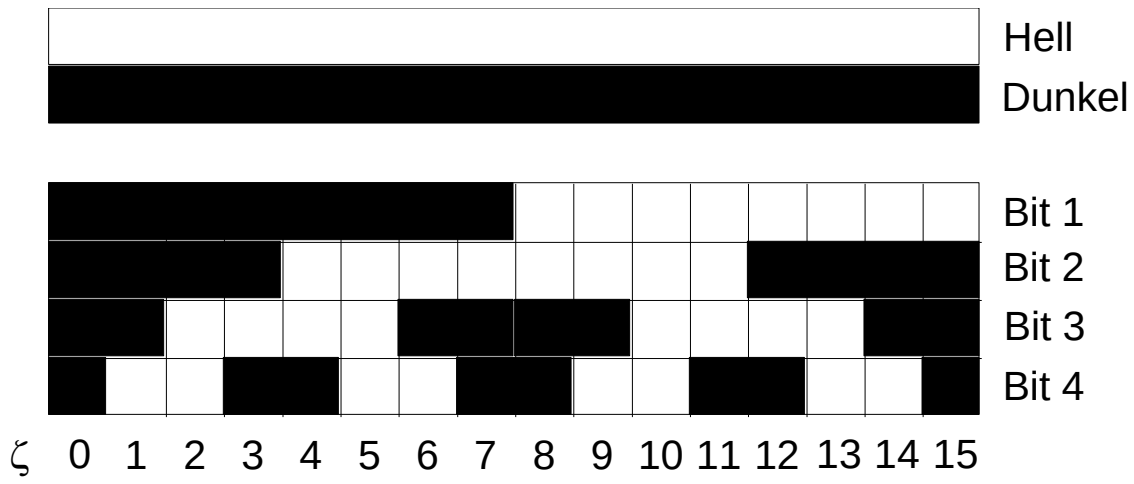
5-Phasen-Algorithmus: $\phi = \arctan \frac{2I_2 - 2I_4}{2I_3 - I_1 - I_5}$



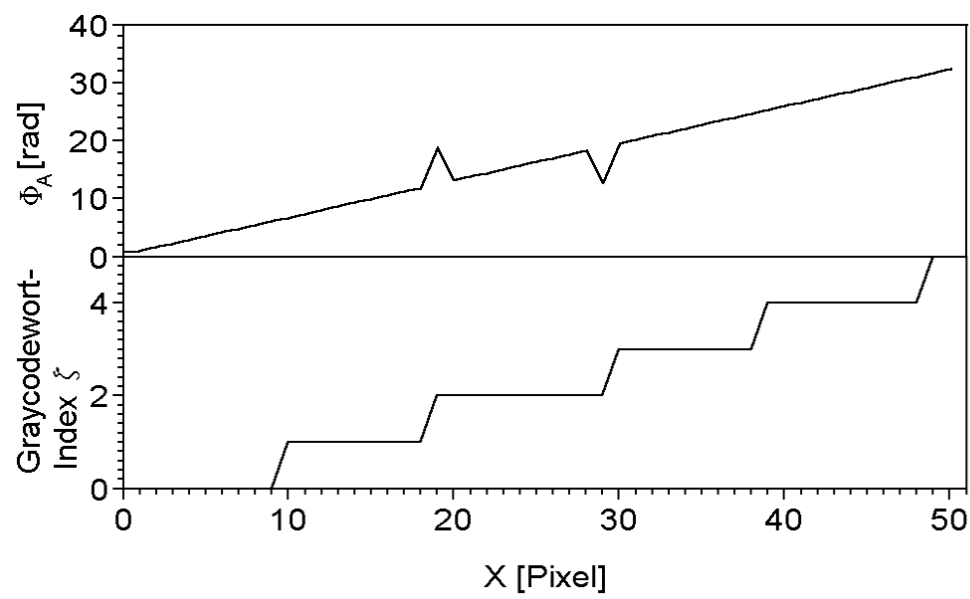
Verstetigung
notwendig

Verstetigung durch Graycode

Graycode mit
Hell-/Dunkel-Präambel



$$\Phi_A = \Phi + 2\pi\zeta + \pi$$



Verstetigung durch Graycode

1) $\Phi < -\pi/2$:

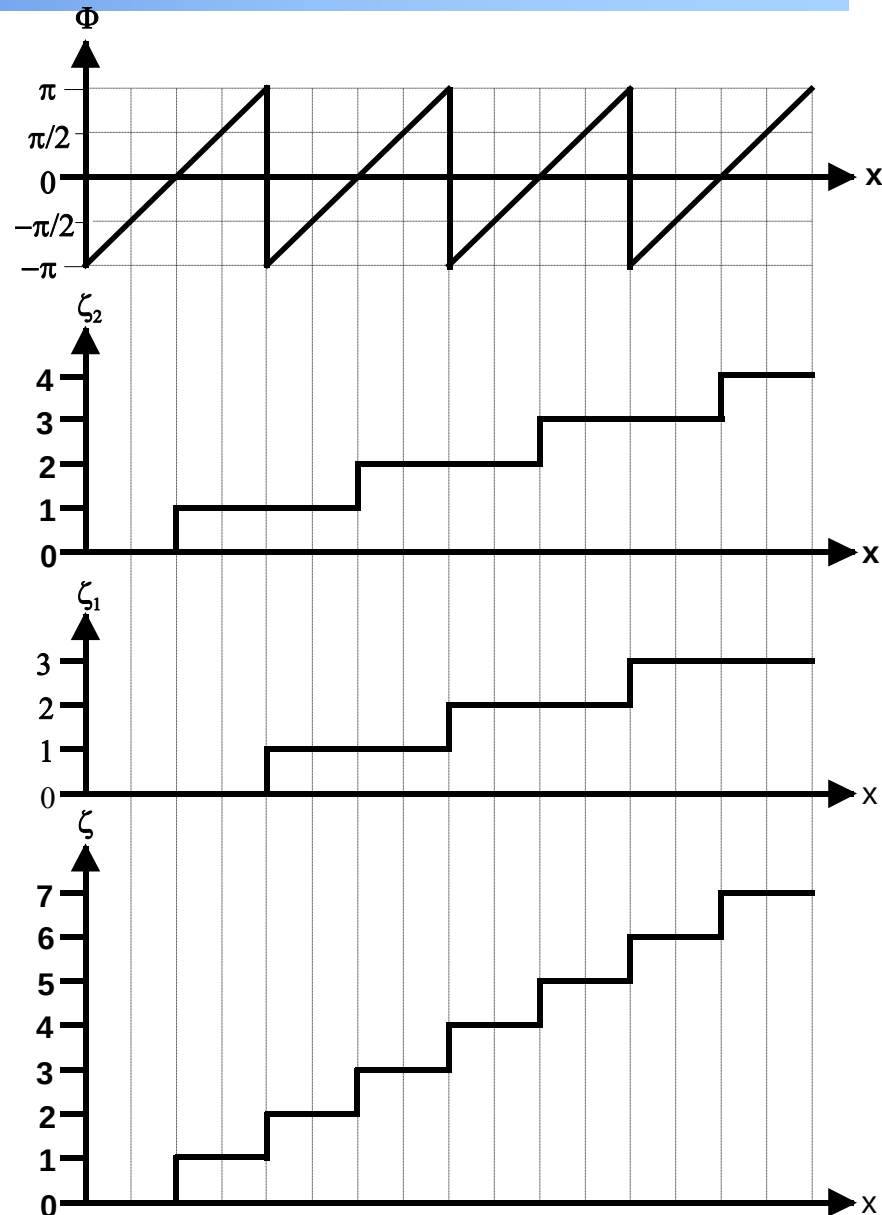
$$\Phi_A = \Phi + 2\pi\zeta_2 + \pi$$

2) $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$:

$$\Phi_A = \Phi + 2\pi\zeta_1 + \pi$$

3) $\Phi > \pi/2$:

$$\Phi_A = \Phi + 2\pi(\zeta_2 - 1) + \pi$$



Räumliche Lichtmodulatoren (engl: Spatial Light Modulators, SLMs) sind flächenhafte Elemente, mit denen eine einfallende Lichtwellenfront bezüglich

→ Amplitude

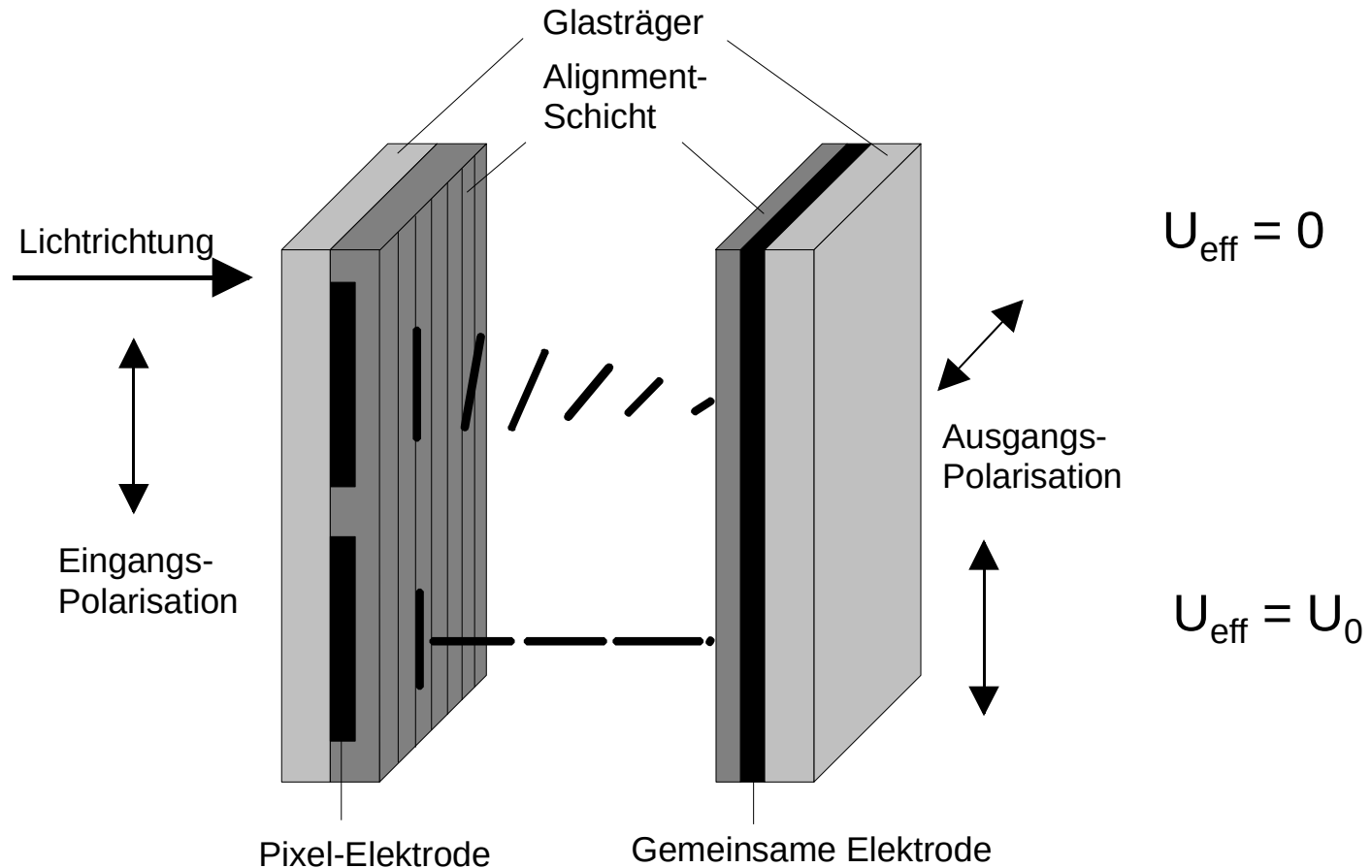
→ Phase

→ Ausbreitungsrichtung

→ Polarisationszustand

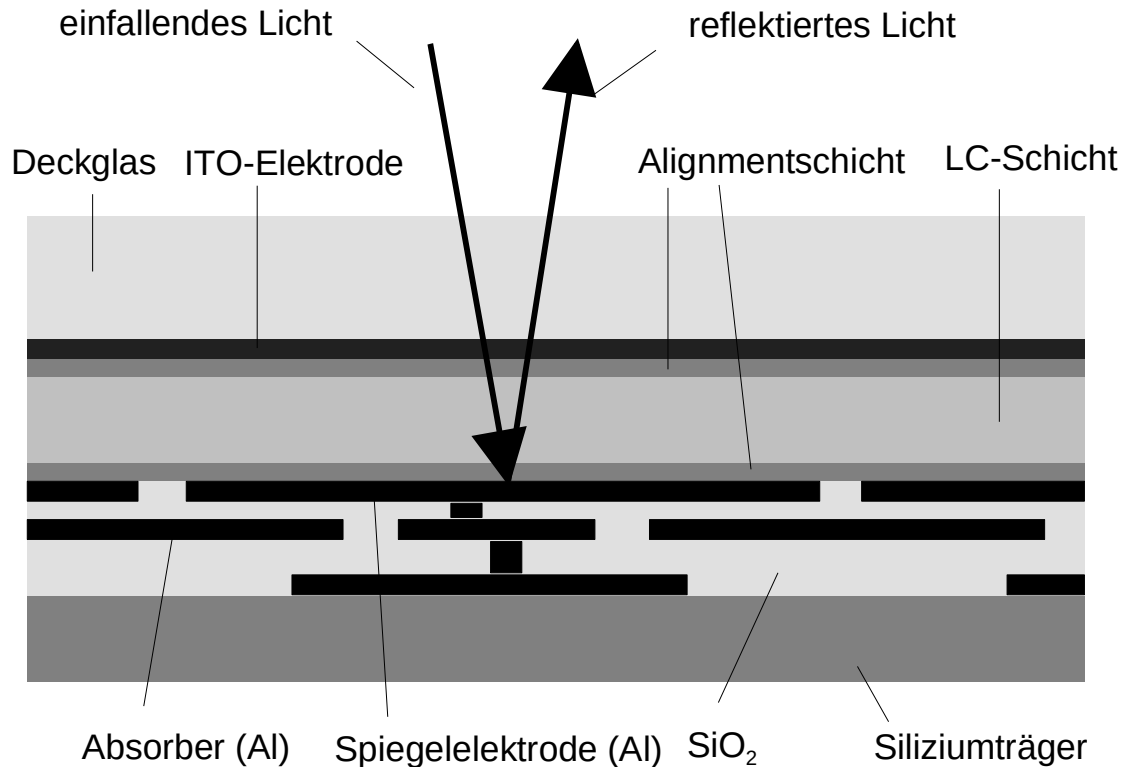
manipuliert werden kann.

Twisted-nematische LCDs



→ Polarisationsrichtung wird um 90° gedreht

FLCOS-Displays



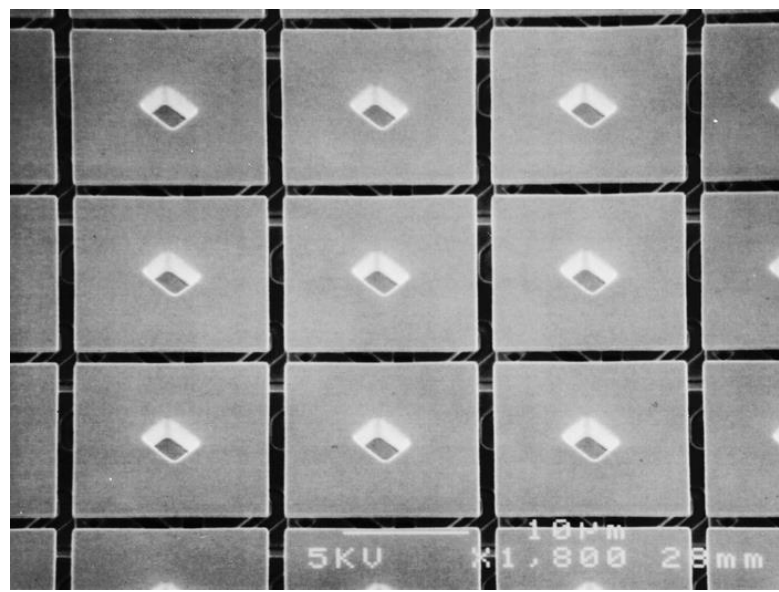
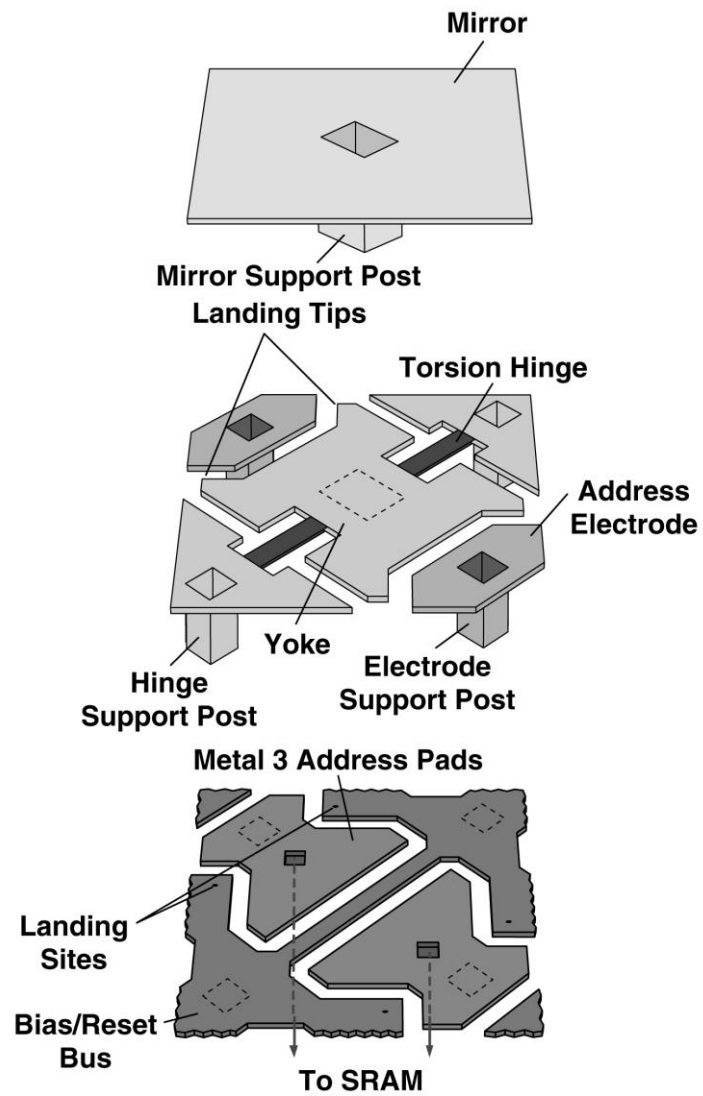
→ Schichtdicke im Vergleich zu transmittiver Anordnung halbiert

→ $\lambda/2$ -Platte

→ Füllfaktor über 90% (TN-LCDs: 30-70%)

→ digitales Element

Digital Micromirror Device (DMD)



	LCOS	FLCOS-Display	DMD
Füllfaktor	bis zu 87 %	> 90 %	ca. 90 %
Lichteffizienz	15 % - 30% (mit Polarisatoren)	ca. 20 % (mit Polarisatoren)	ca. 60 %
Pixelabstand	typ. 8 μm	< 15 μm	14,7 - 17 μm
Erzeugung von Graustufen	analog	digital	digital
Pixelzahl	bis 1920 x 1080 (0.7" Diagonale)	bis zu 1280 x 1024	bis zu 1920 x 1200 (0.97" Diagonale)
Kontrast	bis zu 1500:1 mit Kompensator (LCOS)	bis 200:1, kaum winkel- abhängig	einige 100:1 bis über 1000:1 (4000:1), eingeschränkter Win- kelbereich
Schaltzeit	10-100 ms	50-100 μs	15-20 μs

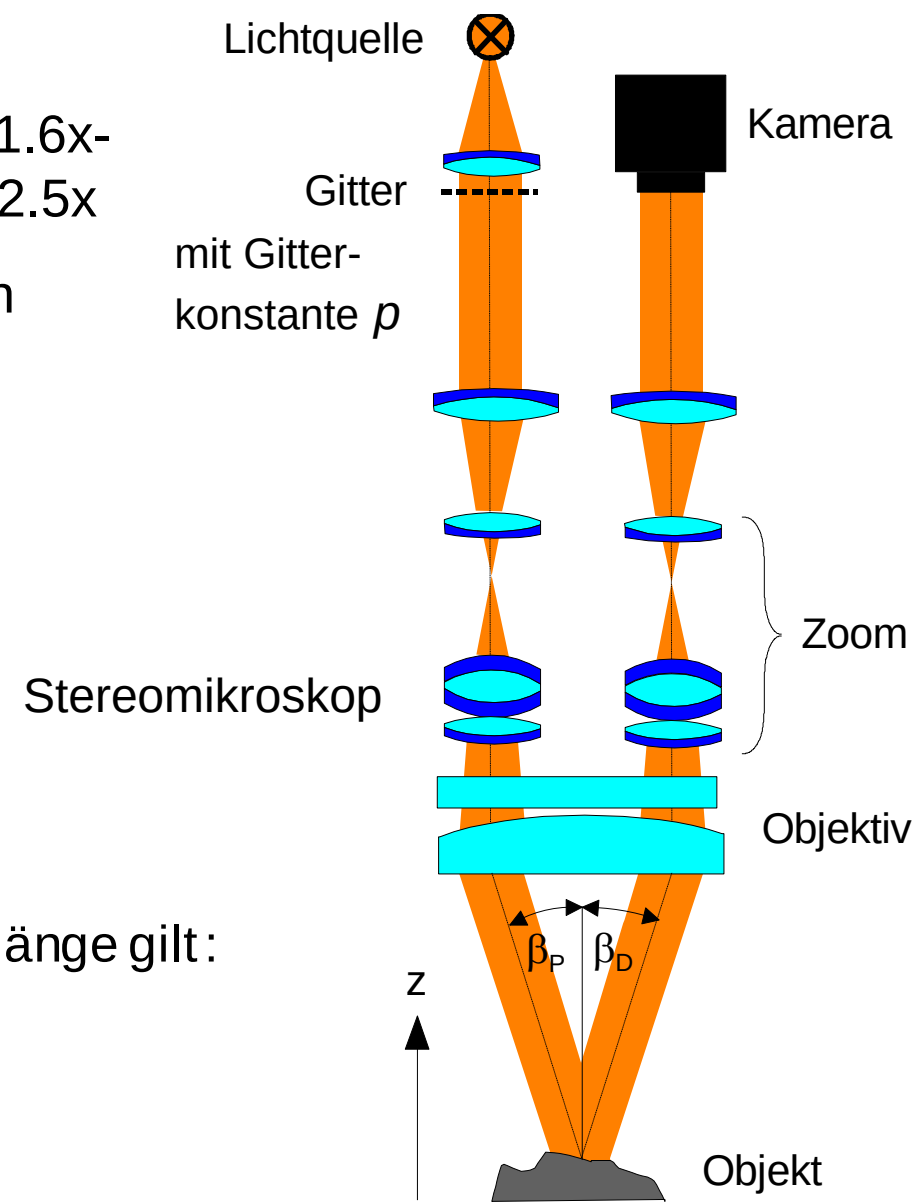
Mikroskopische 3D-Messtechnik mit Streifentriangulation

- Leica MZ12.5 Stereomikroskop mit austauschbaren 0.63x-, 1.0x-, und 1.6x-Objektiven und Zoombereich von 12.5x
- Messfeldgröße einstellbar zwischen 21,2 x 15,7 mm² und 0,8 x 0,6 mm².
- Gesamt-Triangulationswinkel β : 9° (0,63x), 18° (1,0x), 28° (1,6x)
- Höhenauflösung:

$$\Delta z = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \frac{\rho}{\beta'(\tan \beta_p + \tan \beta_D)},$$

wobei hier für die synthetische Wellenlänge gilt:

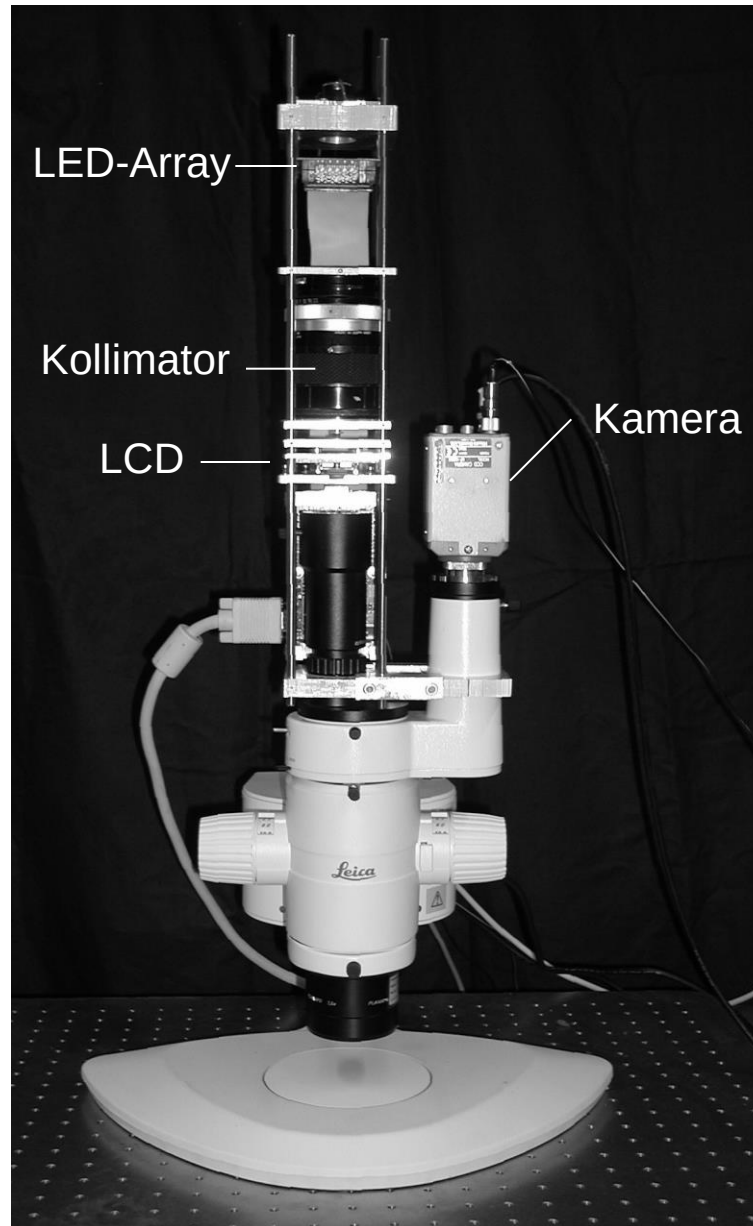
$$\lambda_{\text{syn}} = \frac{\rho}{\beta'(\tan \beta_p + \tan \beta_D)}$$



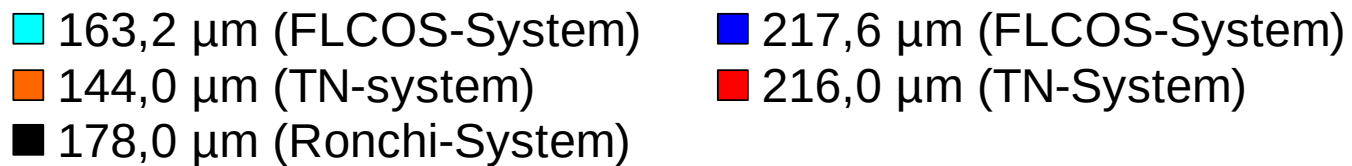
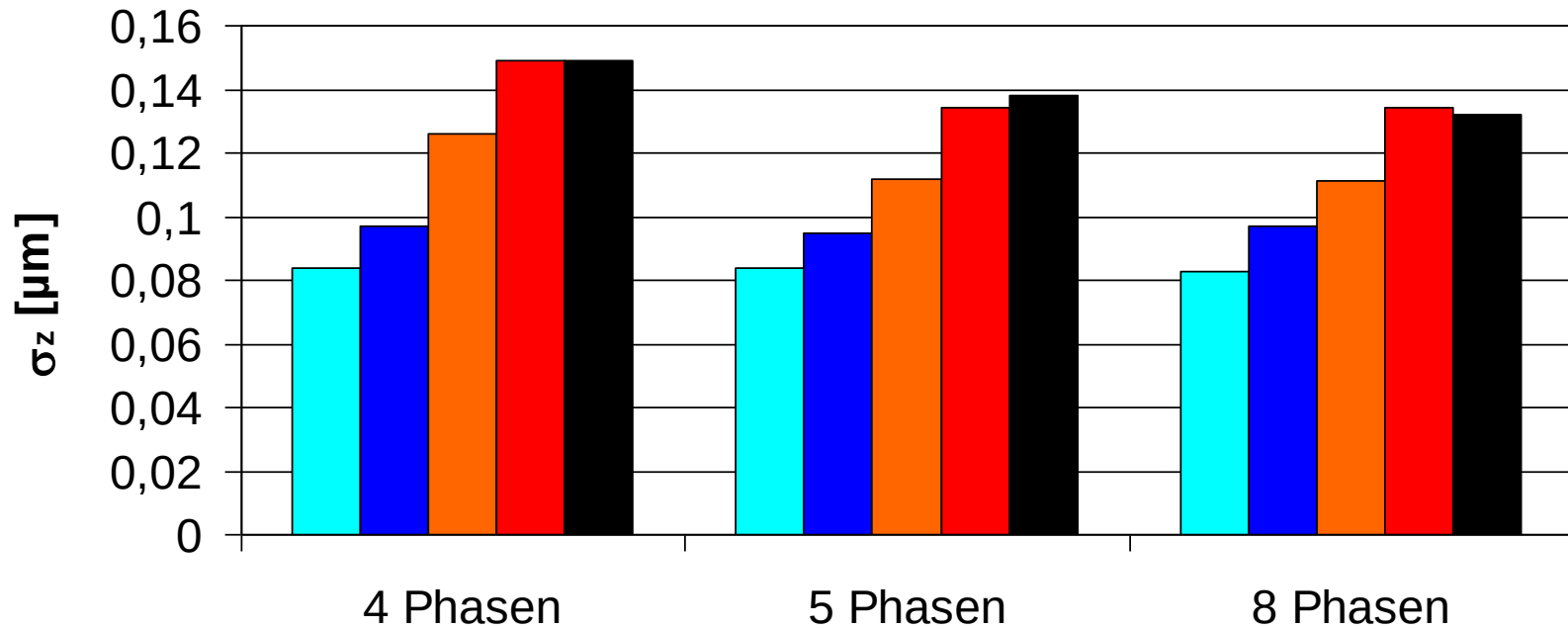
Realisierte Varianten

	LCOS-System	FLCOS-System (digital)	Ronchi-System
Streifenerzeugung	• 1920 x 1080 Pixel • 8 µm Pixel Pitch • 87% Füllfaktor • 60 Hz • (in Reflexion)	CRL SXGA-R2-L1 • 1280 x 1024 Pixel • 13,6 µm Pixel Pitch • 93% Füllfaktor • 70 µs Schaltzeit	Chrom auf Glas • cos-förmige Transmission
Kamera	Pixelfly 1,3 MPix-Kamera	Photonfocus MV-D1024 digital CMOS	Hitachi KP 160 CCD analog CCIR
Lichtquelle	Hochleistungs-LEDs 975 lm, weiß	Hochleistungs-LED ($\lambda = 617 \text{ nm}$, $P = 155 \text{ mW}$)	Halogenglühlampe
Messzeit (4 Phasen = 4 Bilder)	0,066 s	0,45 s	0,70 s
mit Graycode-Sequenz (11 Bilder)	um 0,18 s	-	-

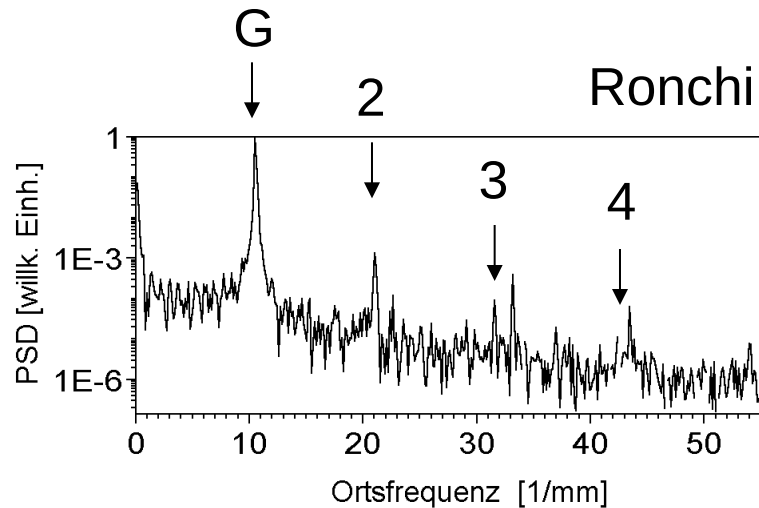
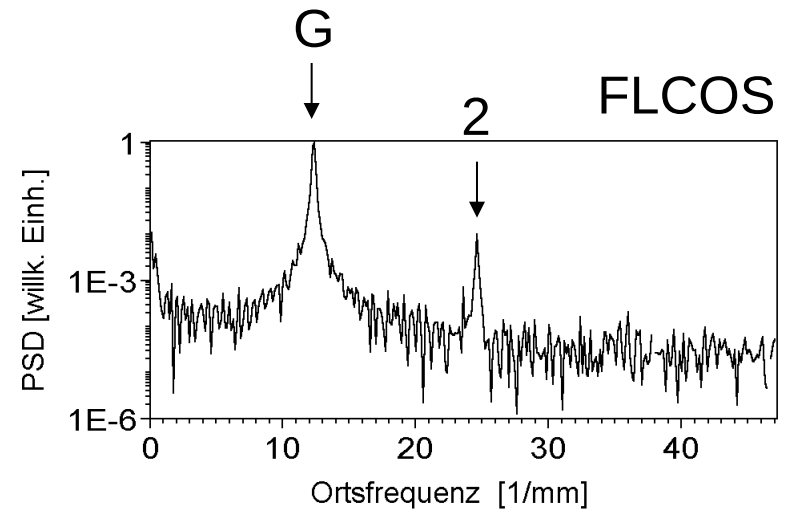
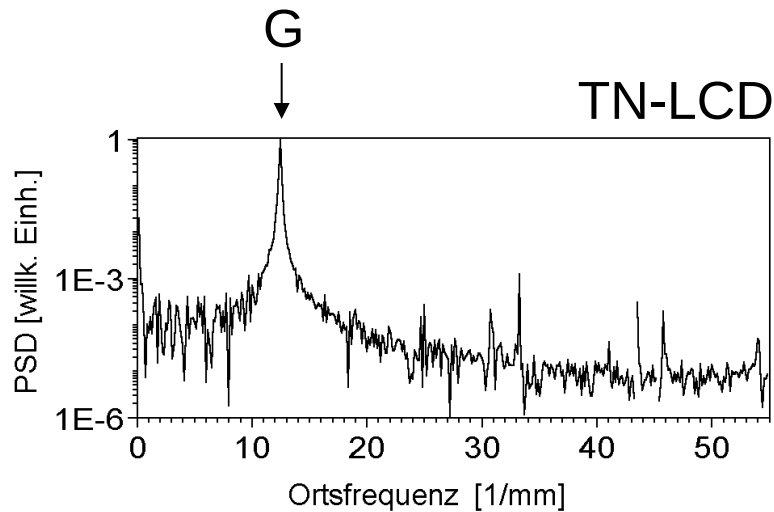
Messaufbau mit LED-Array (historische Variante 2003)



Messfeldgröße 1,04 x 0,77 mm² (1,6x-Obj., 8,0x Zoom)

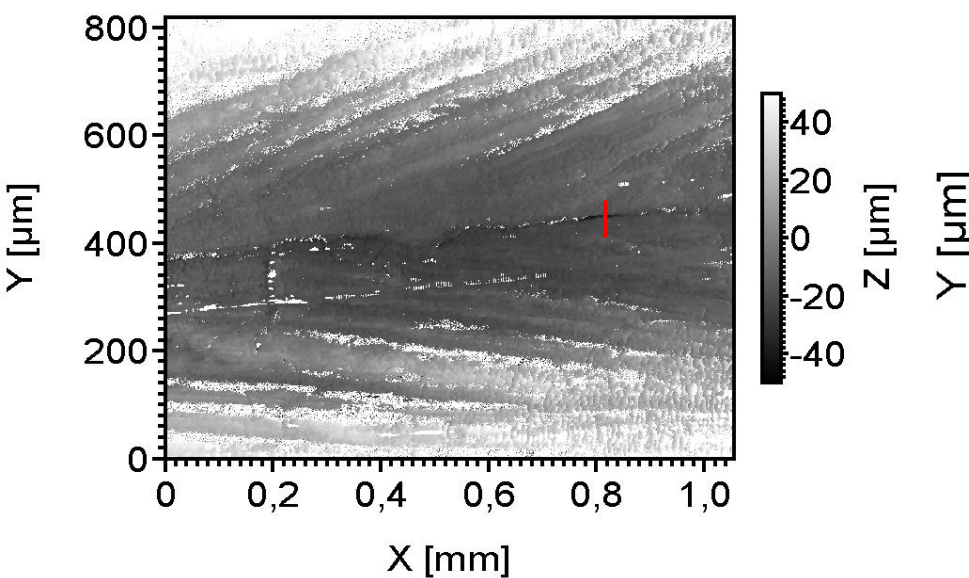


Power-Spektren der Streifen

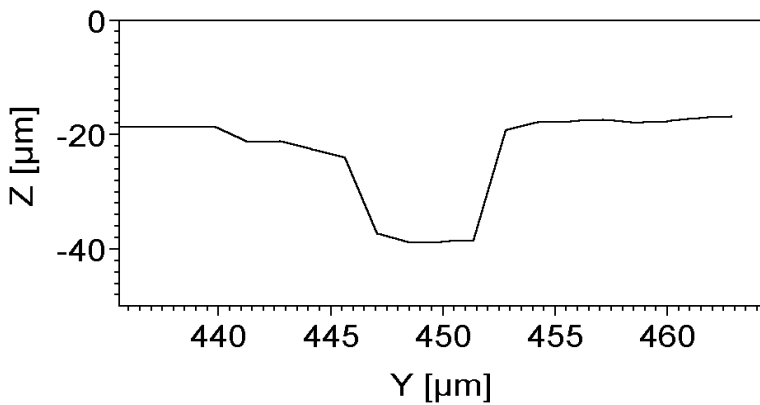
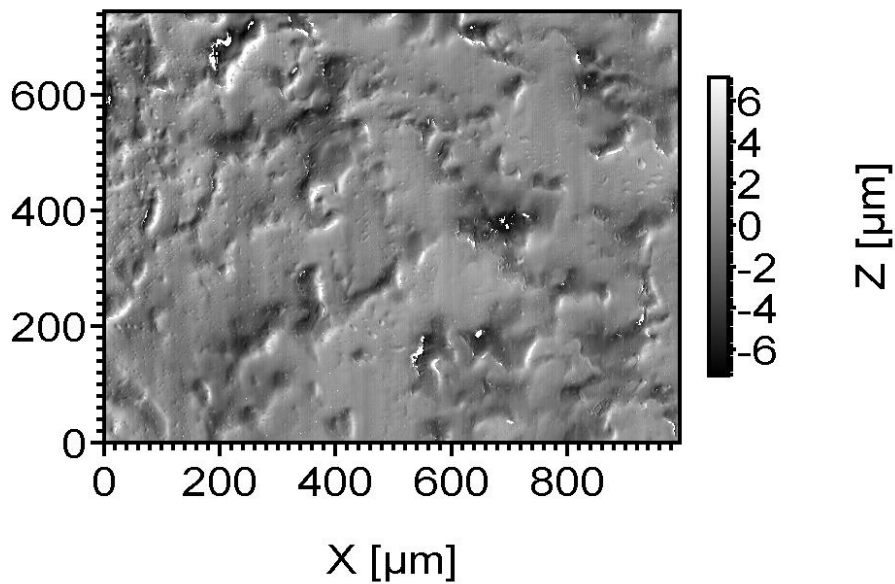




Schweißnaht (Al)



Verchromtes Stahlblech



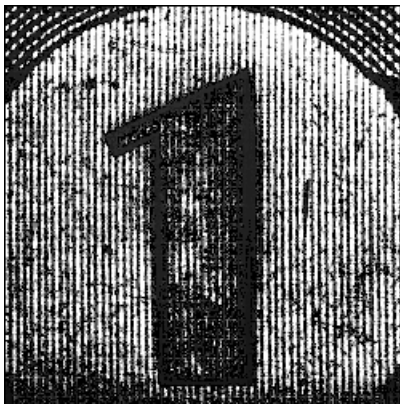
Lokale Helligkeitsanpassung

- 1) Bestimmung der Zuordnung SLM-Pixel $\rightarrow$ Kamerapixel mit Graycode mit vertikaler und horizontaler Streifenorientierung

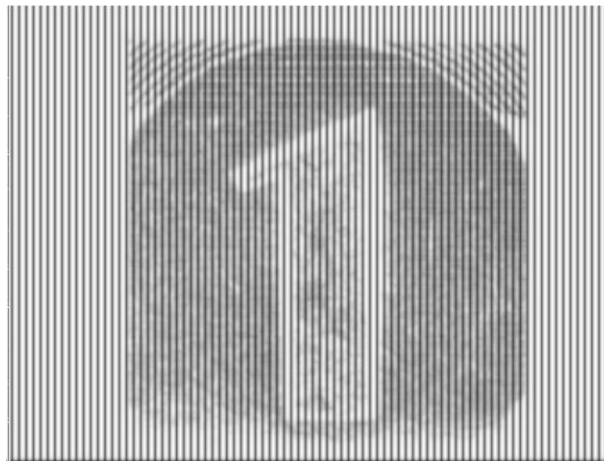
$$x_{\text{SLM},i} \rightarrow x' \quad \text{bzw.} \quad y_{\text{SLM},i} \rightarrow y'$$

- 2) Iterative Reduktion der Helligkeit in überbelichteten Bereichen

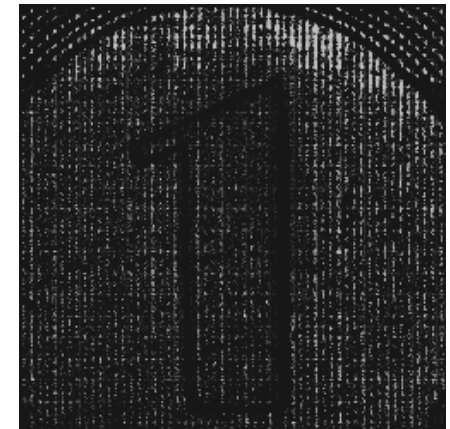
$$G'_{\text{SLM}} = c_r G_{\text{SLM}}$$



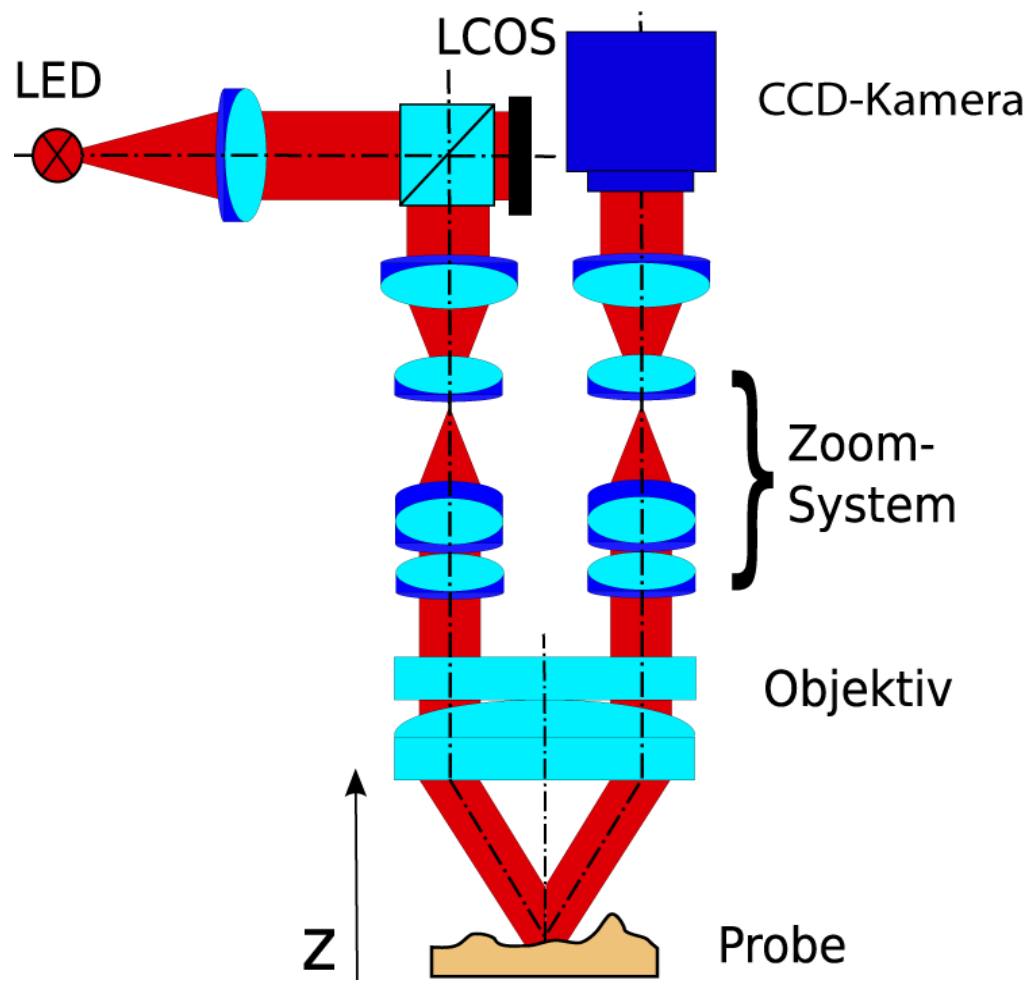
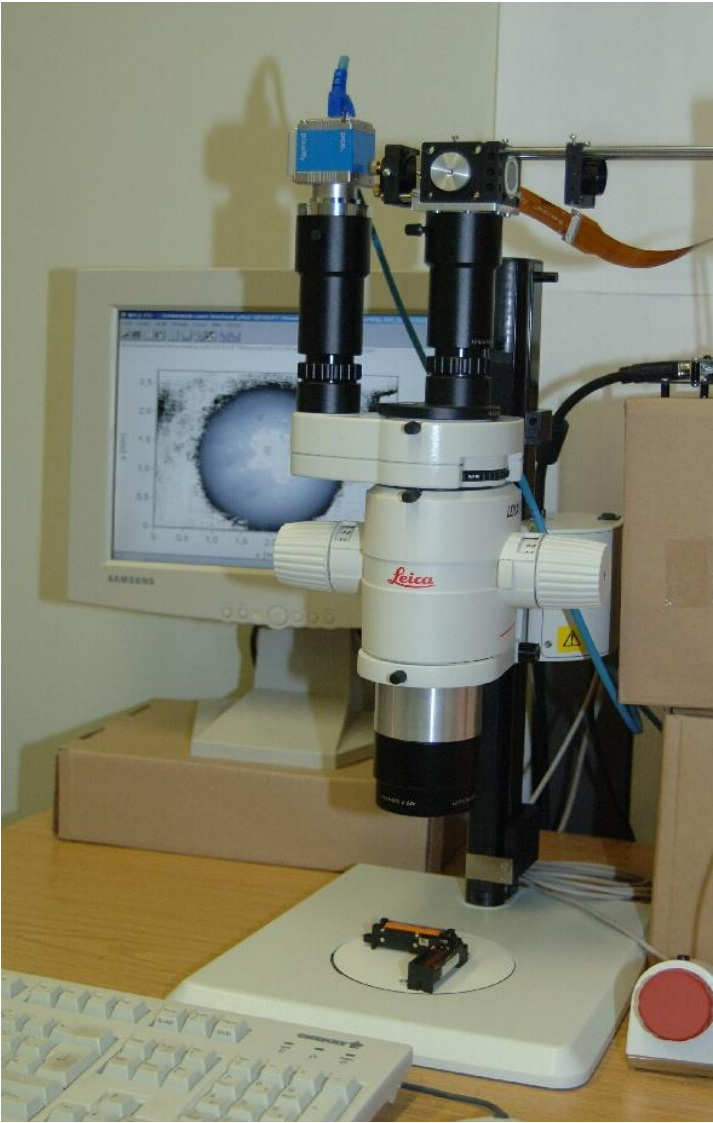
Ausgangszustand



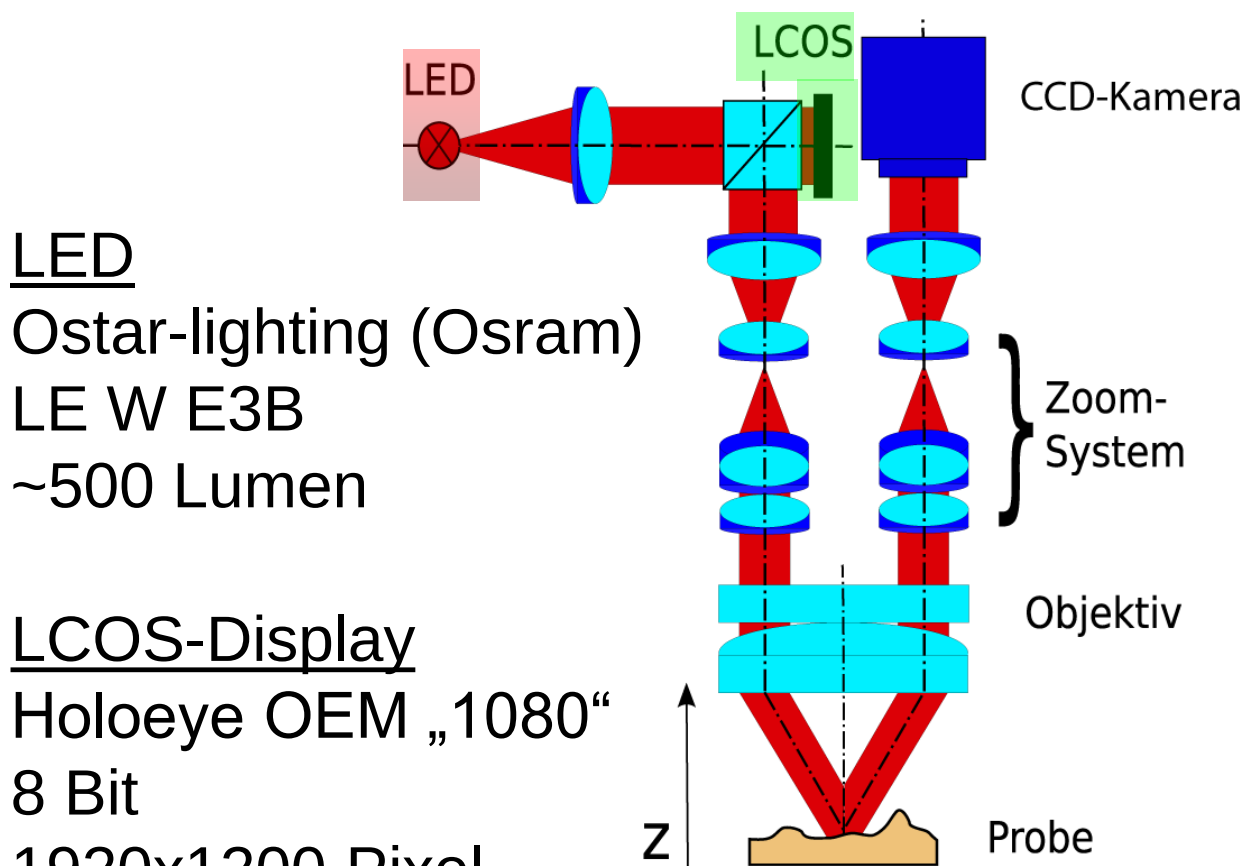
Helligkeitsangepasste
Streifenmaske



Endzustand



Daten für Streifenprojektion mit Stereomikroskop



LED

Ostar-lighting (Osram)
LE W E3B
~500 Lumen

LCOS-Display

Holoeye OEM „1080“
8 Bit
1920x1200 Pixel
Pixelgröße: 8.1 μm

PCO-Pixelfly II qe

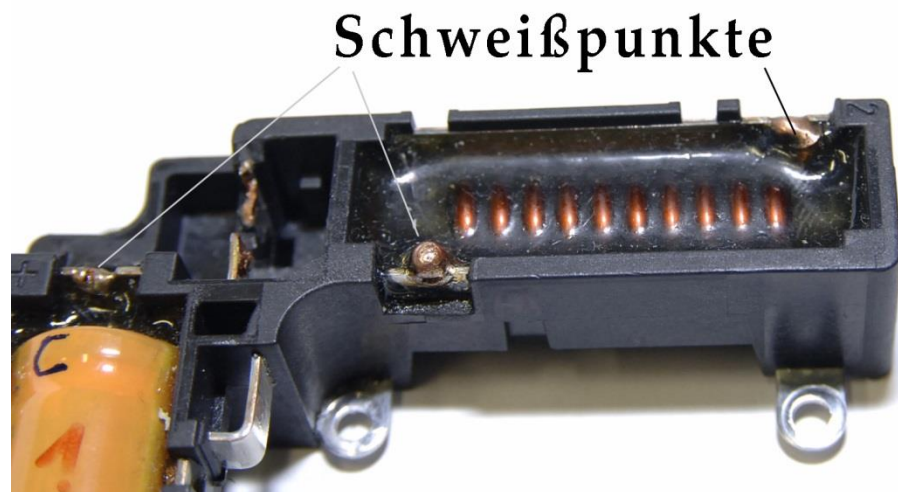
12 Bit Dynamik
1392x1024 Pixel
Pixelgröße: 6.45 μm

StereoMikroskop

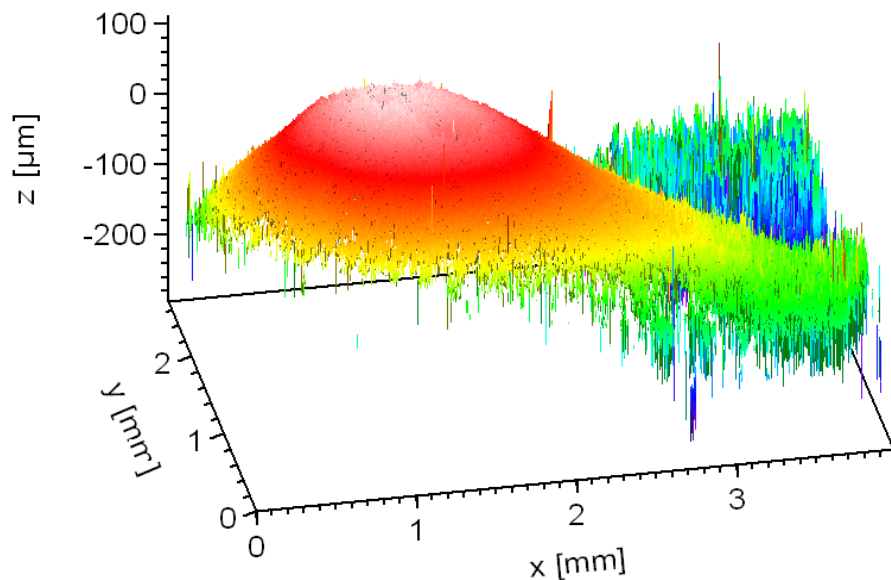
Leica MZ12.5

Zoomfaktor: 0.8x-10x
Objektiv: 0.63x, 1.6x

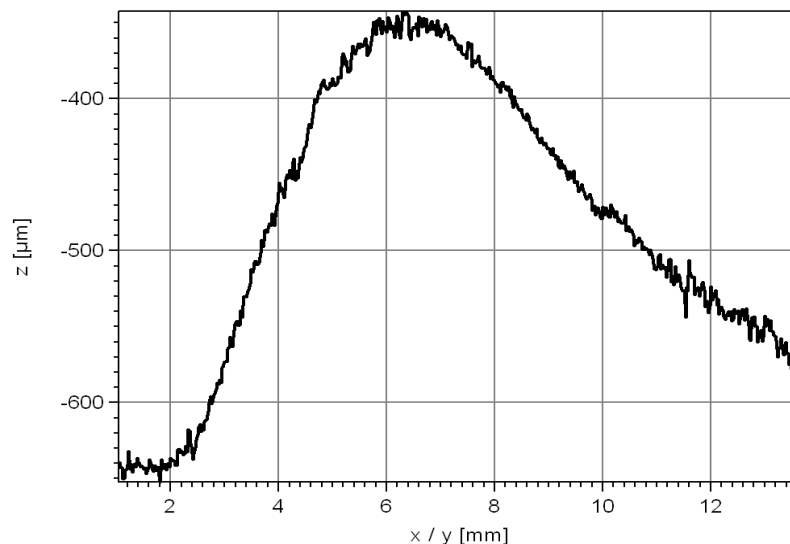
Ergebnisse auf Testobjekten



Auch reflektierende
Schweißpunkte können
gemessen werden!



Ungefilterte Topografiedaten



Schnitt durch Topografie

Aufgabe 14: Triangulation (mikroskopische Skala)

Wir betrachten eine Streifen-Triangulations-Messanordnung auf der Basis eines Stereomikroskops. Das beleuchtete Gitter (LCoS) besitzt eine Streifenperiode p von 0,160 mm. Der Abbildungsmaßstab des Mikroskops beträgt $\beta' = 8\times$ (Objekt auf Kamera-Chip). Der Gesamt-Triangulationswinkel beträgt $\beta_P + \beta_D = 9^\circ + 9^\circ = 18^\circ$.

Bestimmen Sie die Tiefe einer kleinen Einsattelung (Hammerschlag) auf einer sonst ebenen Werkstück-Oberfläche, wenn sich die Streifen in der Einsattelung lateral gegenüber denen auf der ebenen Oberfläche verschoben haben. Dabei beträgt die Phasenverschiebung dort $3,52\pi$. Diese wurde durch eine digitale Phasenmessung bestimmt.

Lösung:

mit Gl. für d. synth. Wellenlänge folgt:

$$\lambda_{syn} = \frac{p}{\beta' \cdot (\tan \beta_P + \tan \beta_D)}$$

$$\lambda_{syn} = \frac{0,16\text{mm}}{8 \cdot (\tan 9^\circ + \tan 9^\circ)}$$

$$\lambda_{syn} = 0,063\text{mm}$$

Die synth. Wellenlänge beträgt 0,063mm.

mit Gl. für die Höhenänderung folgt:

$$\Delta z = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \lambda_{syn}$$

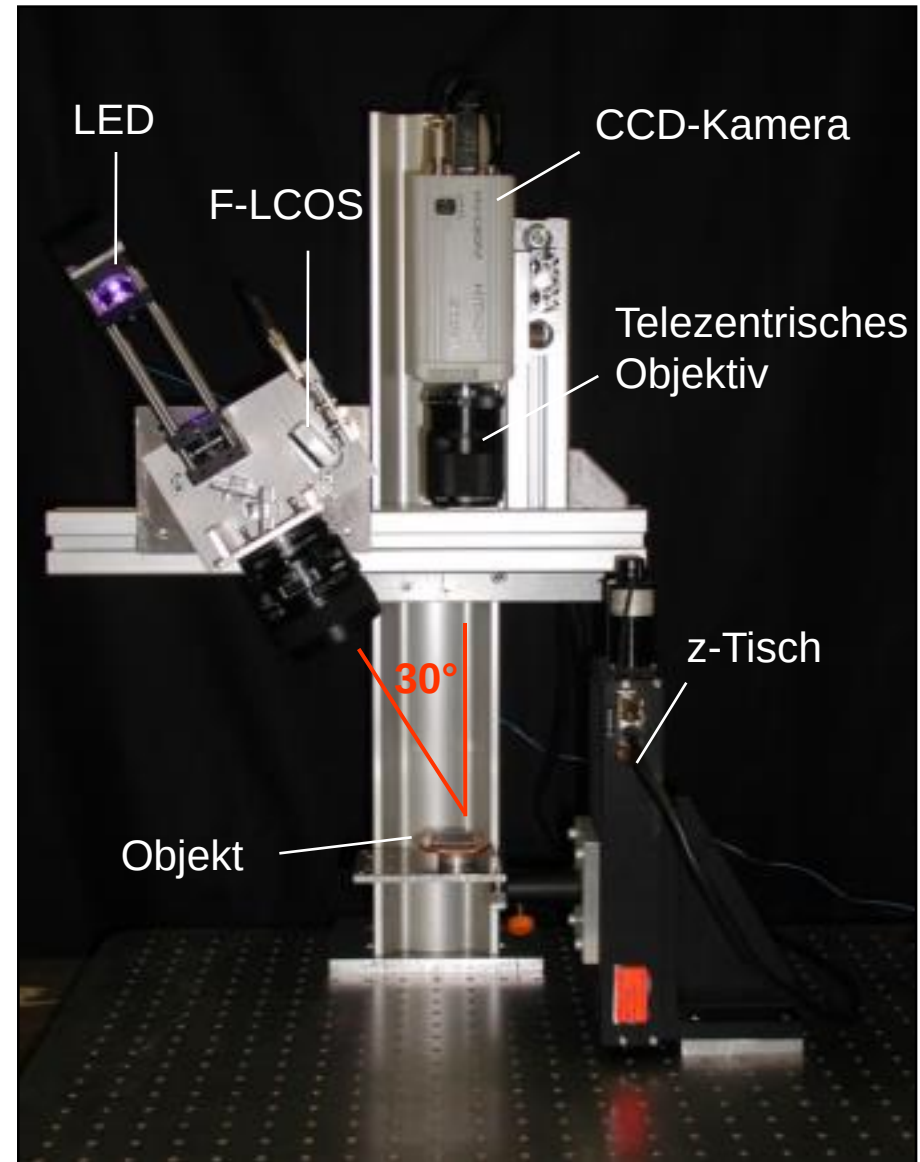
$$\Delta z = \frac{3,52\pi}{2\pi} \cdot 0,063\text{mm}$$

$$\Delta z = 0,111\text{mm}$$

Die Tiefe der Einsattelung beträgt 0,111mm.

Ein weiteres realisiertes Triangulations-Messsystem

- F-LCOS Display
unter 13° beleuchtet
- Triangulationswinkel: 30°
- Lichtquelle: Hochleistungs-LED
($\lambda_{\text{LED}} = 455 \text{ nm}$, $P_{\text{opt}} = 500 \text{ mW}$)
- Detektor: Analoge CCD-Kamera
mit telezentrischem Objektiv
- Messfeldgröße:
 $31.7 \times 23.8 \text{ mm}^2 \pm 1.6\%$
- Präzisionsverschiebetisch für
z-Kalibrierung
- z-Messbereich: 5 mm



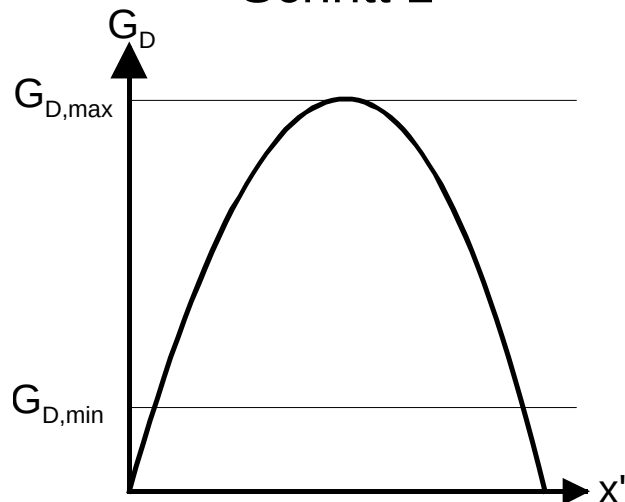
Lokale Helligkeitsanpassung

- 1) Herstellung eines Zustands ohne überbelichtete Bereiche
- 2) Bestimmung der Zuordnung SLM-Pixel → Kamerapixel
- 3) Vorausberechnung der Soll-Helligkeit, Reduktion in einem Schritt

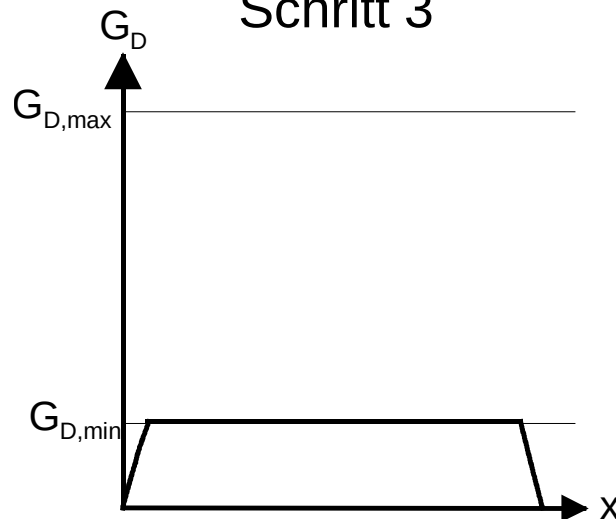
$$G'_{\text{SLM}} = c_r G_{\text{SLM}}$$

- 4) Anpassung der Beleuchtungsintensität

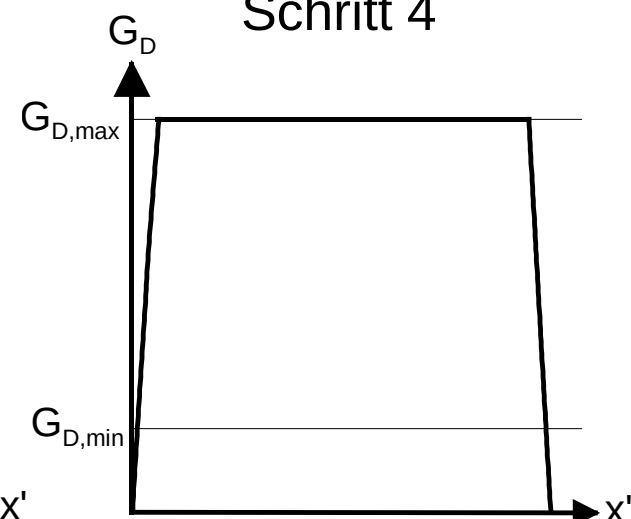
Schritt 1



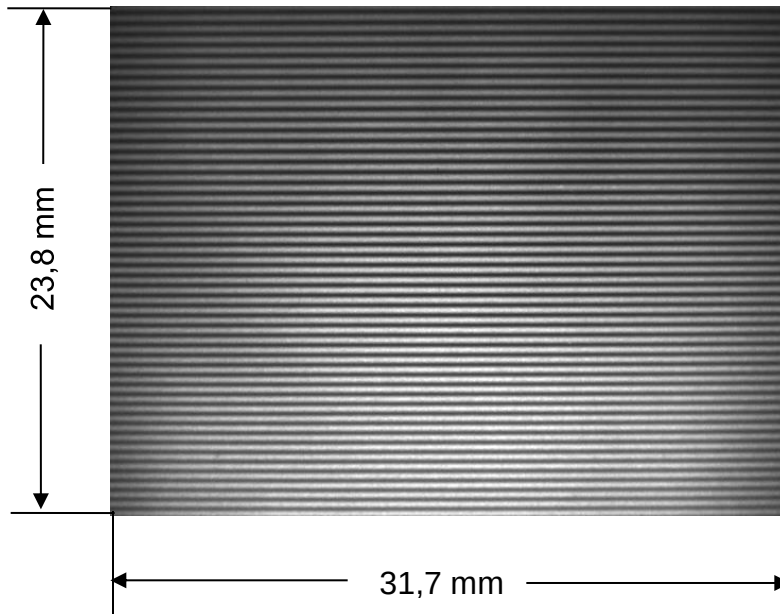
Schritt 3



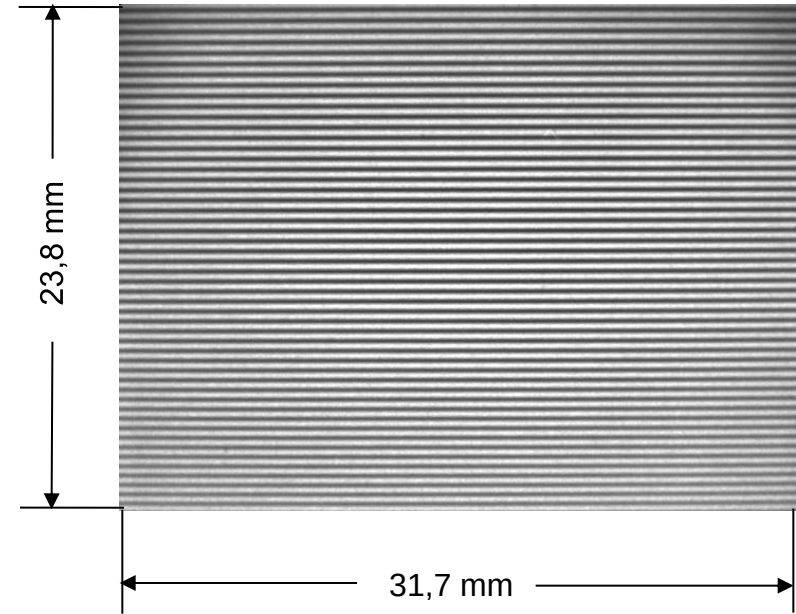
Schritt 4



Ausgangssituation

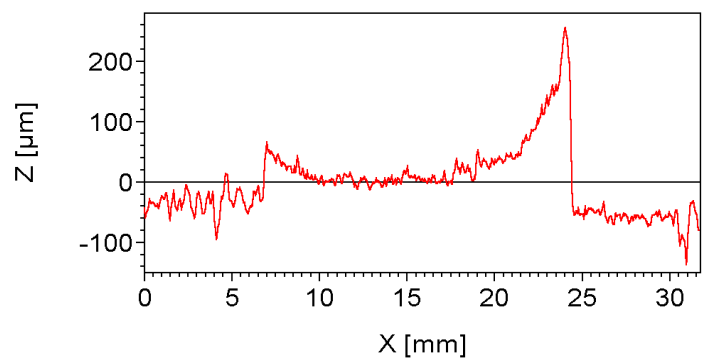
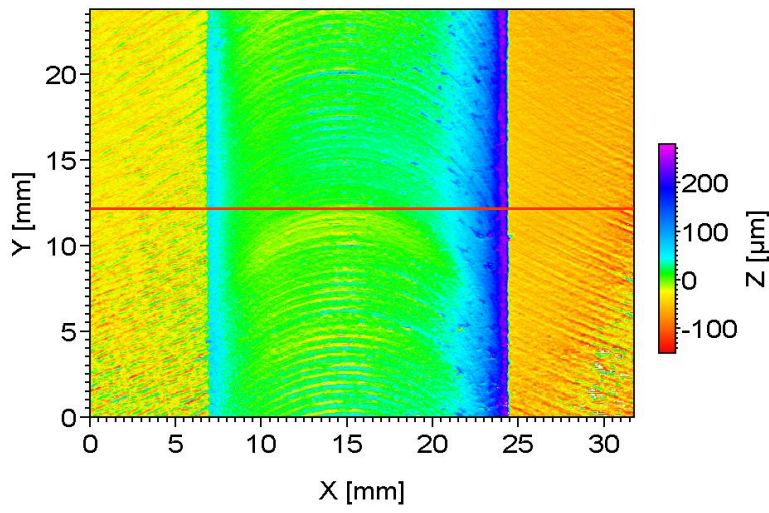


Nach Helligkeitsanpassung

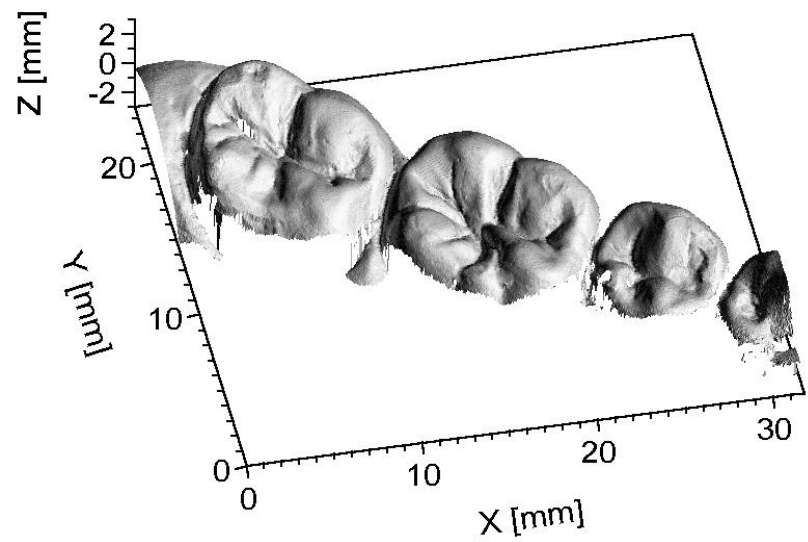


➔ Höhenauflösung $3,8 \mu\text{m} < \sigma_z < 6,1 \mu\text{m}$ für den 5-Phasen-Algorithmus
(Verbesserung um 14%)

an Reib-Rühr-Schweißnaht

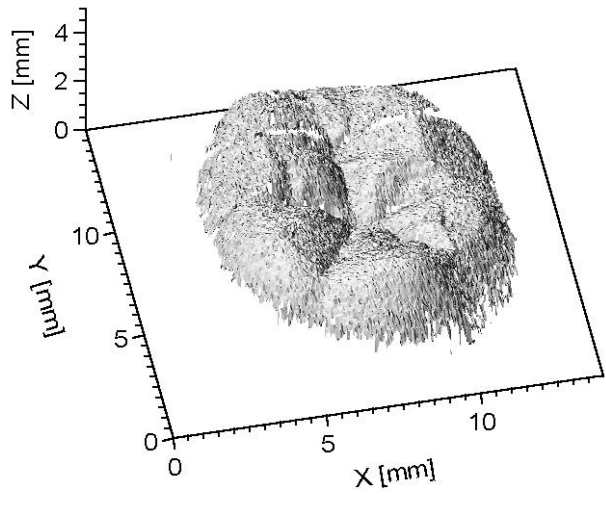
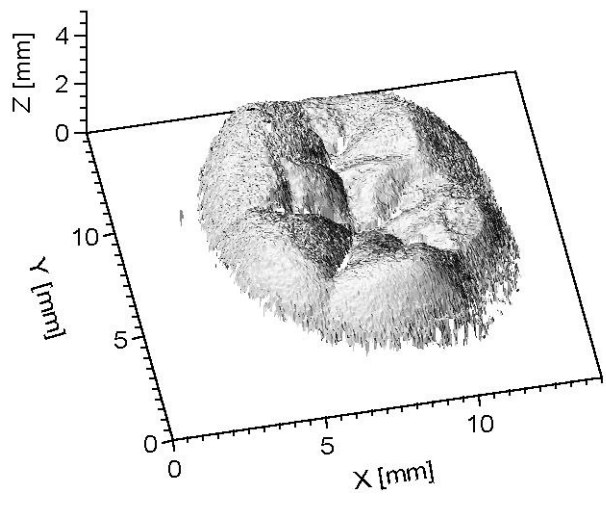
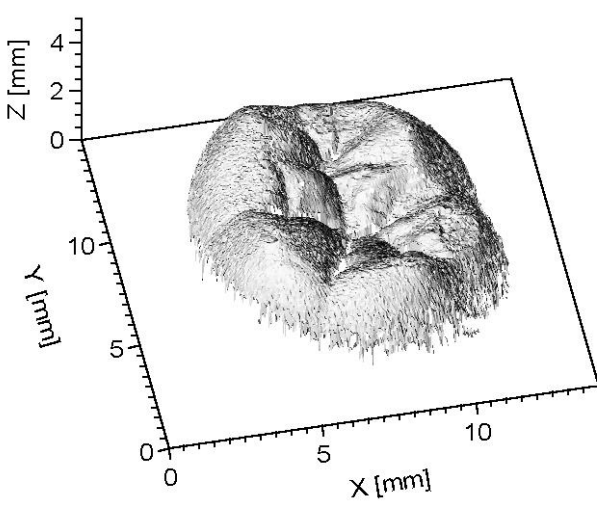
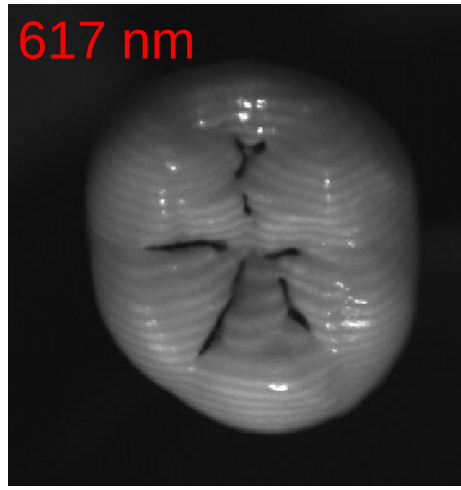
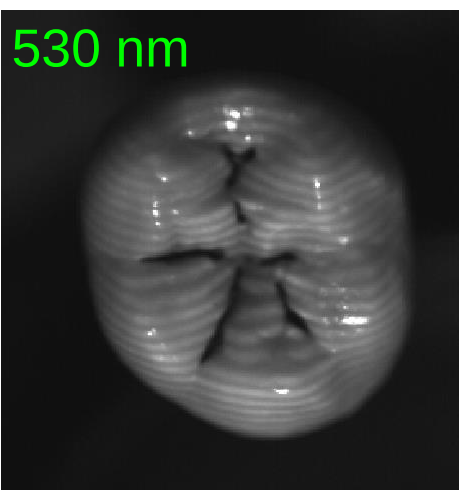
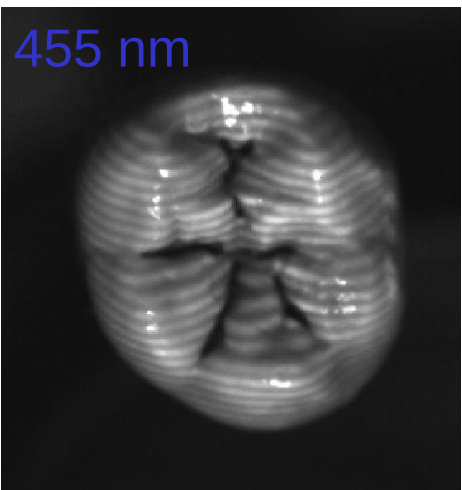


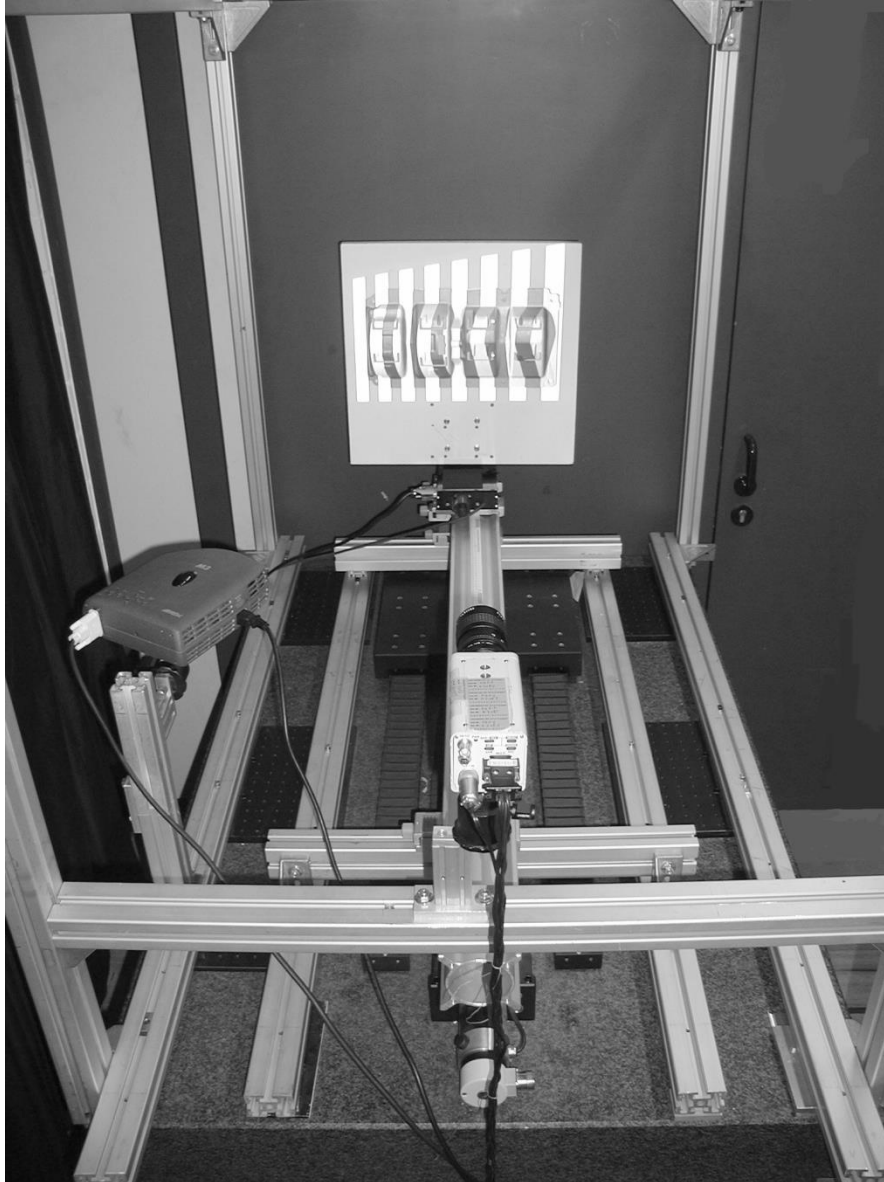
am Gipsmodell eines Unterkiefers



Messresultate

Frisch extrahierter Weisheitszahn





Implementierung der Dreikanaltechnik

- Projektor: ASK M3
(1024 x 768 Pixel, $f_v = 120\text{Hz}$)
- Kamera: Hitachi HV-C20MU
(640 x 480 Pixel, $f_v = 29,97\text{ Hz}$)
- Beleuchtung mit grünem Projektor-Farbkanal:
 $IR_D : IG_D : IB_D = 1 : 0,41 : 0,19$
- Messfeldgröße: 368 x 273 mm²
- Triangulationswinkel: 32°
- σ_z : 35μm (1:13000) für direkte z-Kalibrierung

Dreikanaltechnik

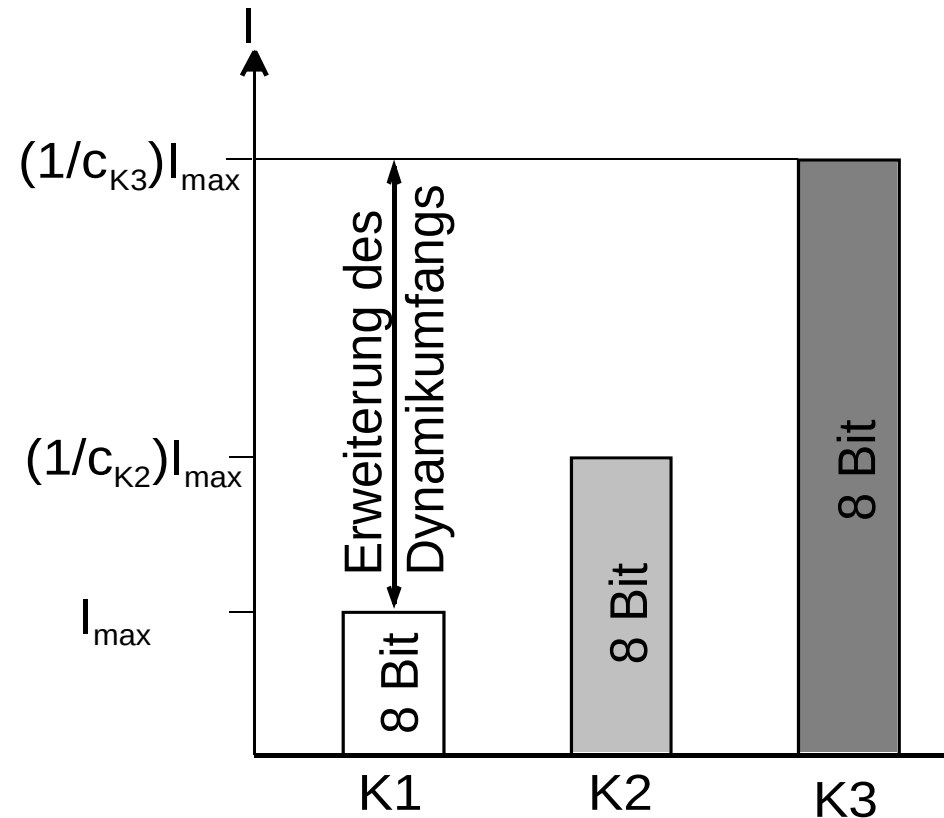
- Einsatz eines Datenprojektors und einer Farbkamera
- Durch geeignete Wahl der Farbe der Beleuchtung unterschiedliche Intensitäten in den Kamera-Farbkanälen:

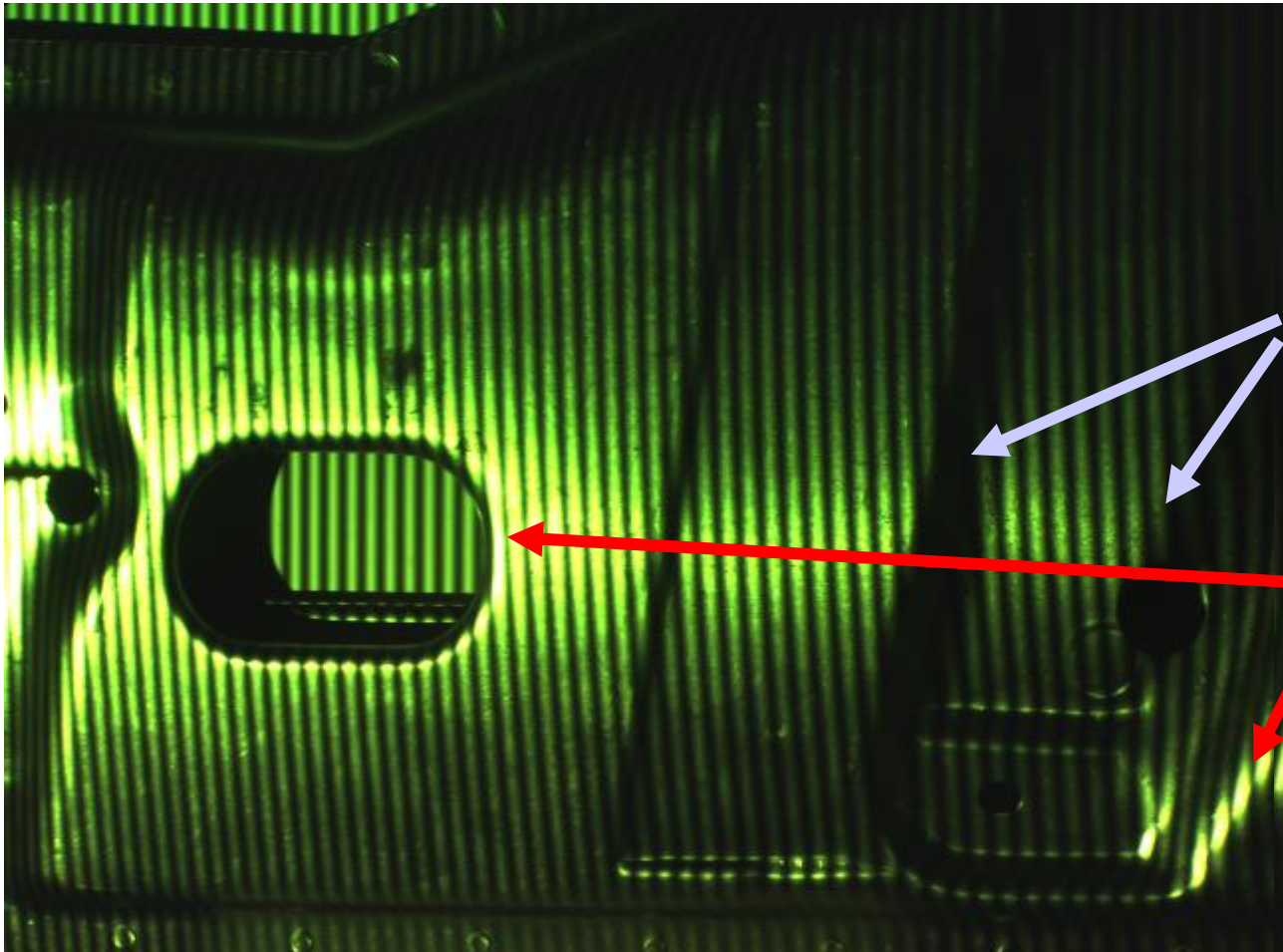
$$I_{K1} : I_{K2} : I_{K3} = 1 : c_{K2} : c_{K3}$$

$$1 > c_{K2} > c_{K3}$$

Vorteile

- parallele Datenaufnahme
- Berechnung der Topografie nur für jeweils 1 Farbkanal

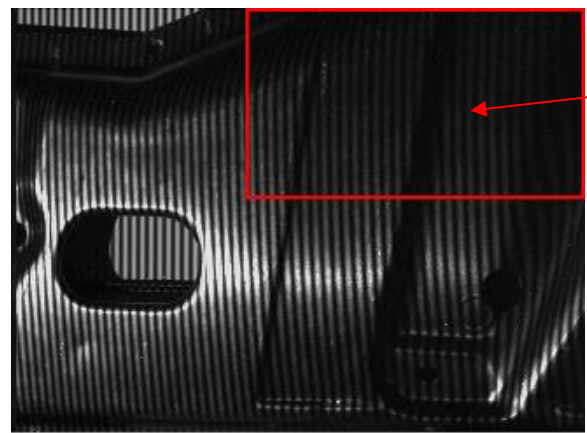




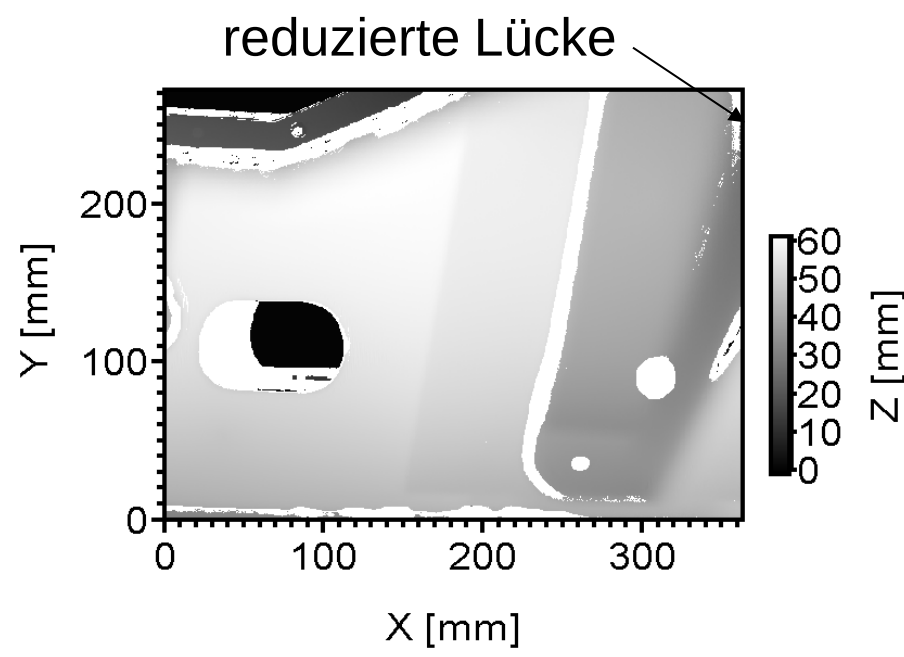
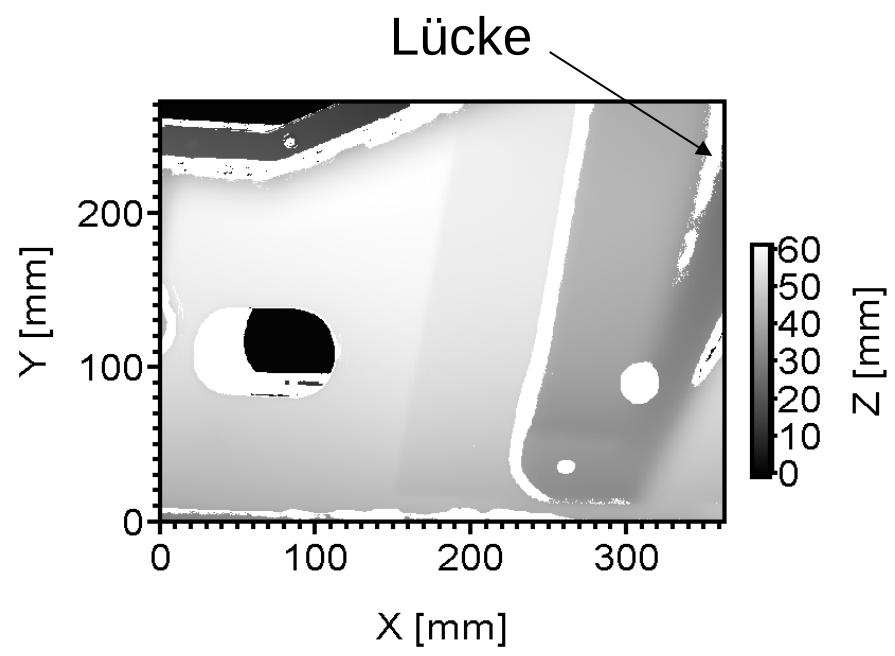
Starke Abschattungen
(Gradienten)

Glanzlichter
(Gradienten)

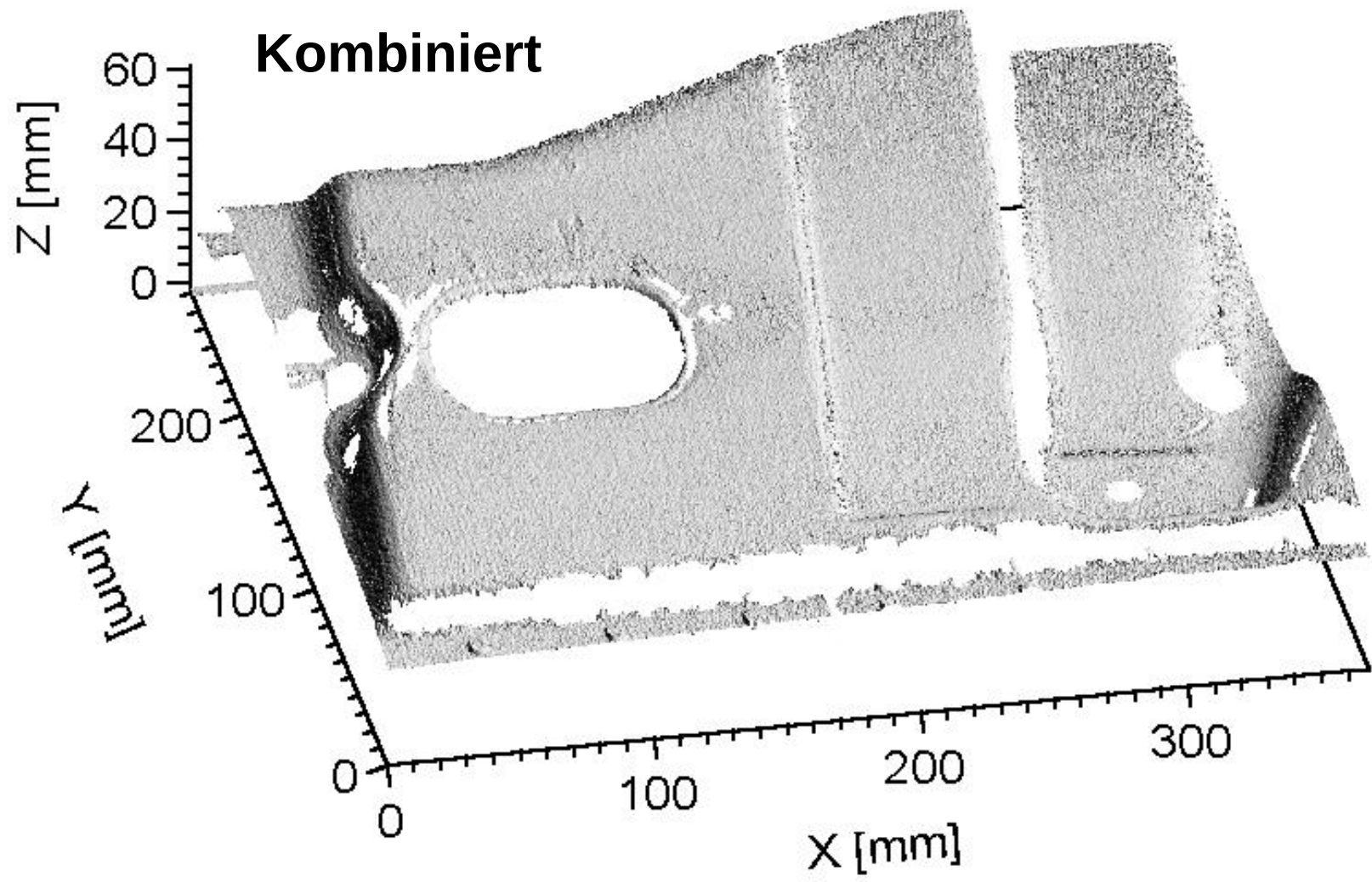
ROI-Vermessung mit CMOS-Kamera



untersteuerter Bereich



Messergebnis an einer PKW-Tür



- Verbesserung der Robustheit und der Flexibilität durch Helligkeitsanpassung, Dreikanaltechnik und Einsatz von CMOS-Kameras
- Hohe Messauflösungen durch Streifengitter mit nahezu idealer Cosinus-Form, beispielsweise durch Einsatz von SLMS
- Kurze Messzeiten durch Kombination von digitalem FLCOS-Display und einer digitalen CMOS Kamera

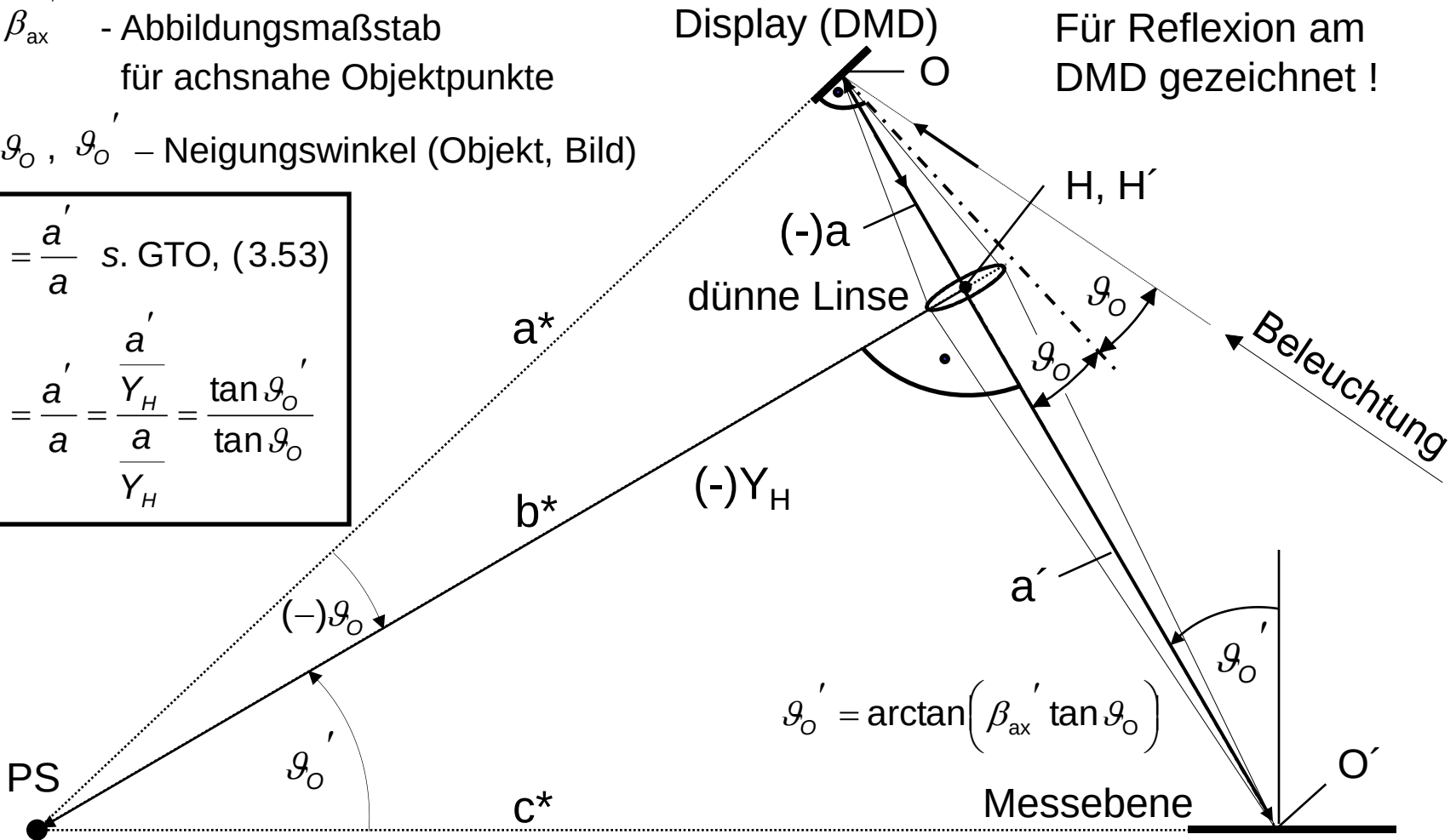
Schräge Projektion – Scheimpflugbedingung, dünne Linse

β_{ax}' - Abbildungsmaßstab
für achsnahe Objektpunkte

$\vartheta_o, \vartheta_o'$ - Neigungswinkel (Objekt, Bild)

$$\beta_{ax}' = \frac{a'}{a} \text{ s. GTO, (3.53)}$$

$$\beta_{ax}' = \frac{a'}{a} = \frac{\frac{a'}{Y_H}}{\frac{a}{Y_H}} = \frac{\tan \vartheta_o'}{\tan \vartheta_o}$$



Einhaltung der Scheimpflugbedingung durch Schnitt der 3 Geraden durch Display-Ebene (a*), Hauptebene (b*) und Messebene (c*) im Punkt PS in der Zeichenebene (a – Objektweite, a' - Bildweite)

Aufgabe 15: Scheimpflugbedingung

Wir betrachten eine Streifen-Triangulations-Messanordnung, s. dazu eine Anordnung gemäß Folie 102. Ein LCoS-Display ist, um die Scheimpflugbedingung einzuhalten, um einen Winkel von $3,2^\circ$ (ϑ_o) gekippt.

Errechnen Sie den Neigungswinkel ϑ_o' zur scharfen Abbildung der Messebene, wenn der Abbildungsmaßstab β_{ax}' des Displays auf die Messebene 17.5x mittels Projektionssystem beträgt.

Lösung:

Mit der Gleichung für die Neigung ϑ_o' der Messebene wird

$$\vartheta_o' = \arctan\left(\beta_{ax}' \tan \vartheta_o\right)$$

$$\vartheta_o' = \arctan(17,5 \tan 3,2^\circ)$$

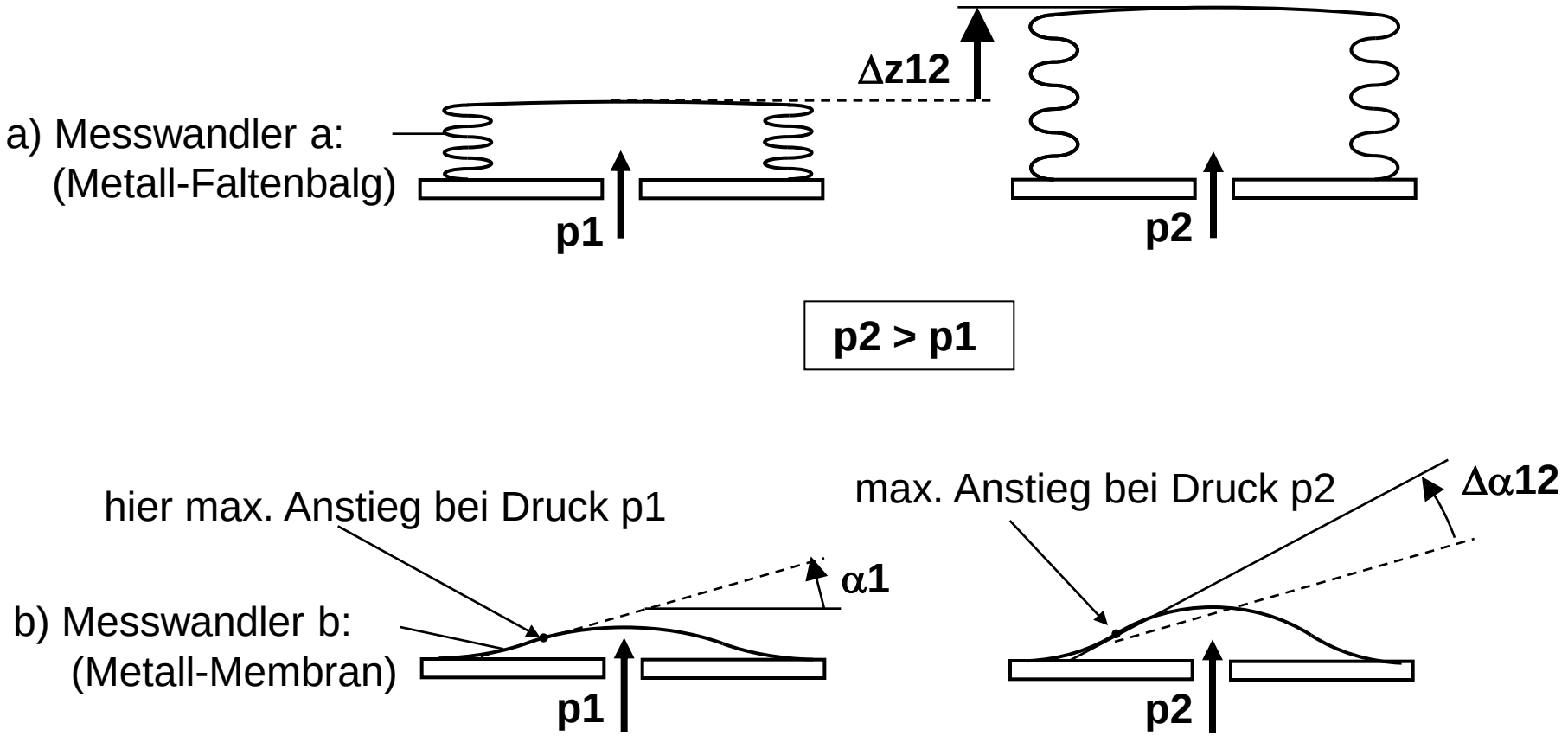
$$\vartheta_o' = 44,37^\circ .$$

Die Neigung der Messebene muss etwa $44,4^\circ$ betragen.

Aufgabe 16: Optische Druckmessung

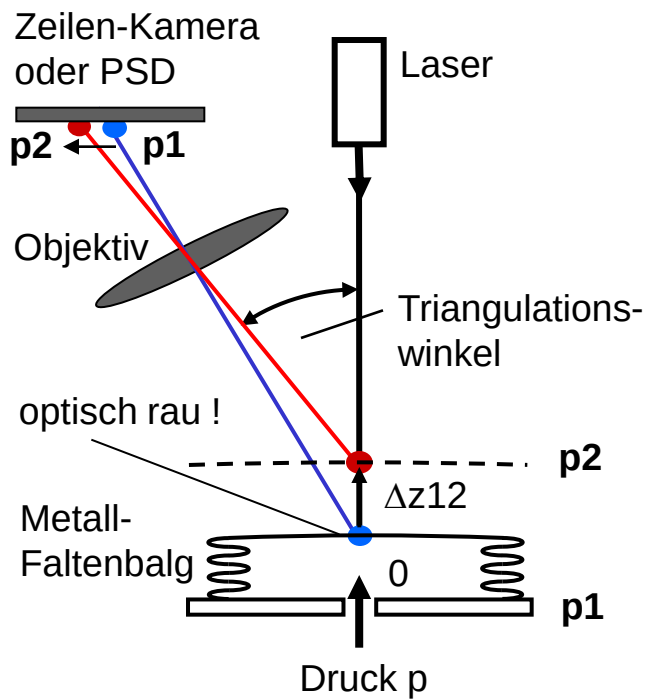
Wir betrachten zwei Anordnungen (a, b) jeweils mit Messwandler zur Druckmessung (p), die hier optisch erfolgen soll. Diese Messwandler a oder b verformen sich unterschiedlich. Dabei kann der Messwandler mit optisch rauer Oberfläche oder auch optisch glatt (spiegelnd) sein.

Diskutieren Sie verschiedene Lösungsansätze zur optischen Antastung mit Vor- und Nachteilen, die Ihnen bezüglich einer hohen Messempfindlichkeit (Sensitivität) als aussichtsreich erscheinen. Der Druck p_2 ist hierbei größer als der Druck p_1 .



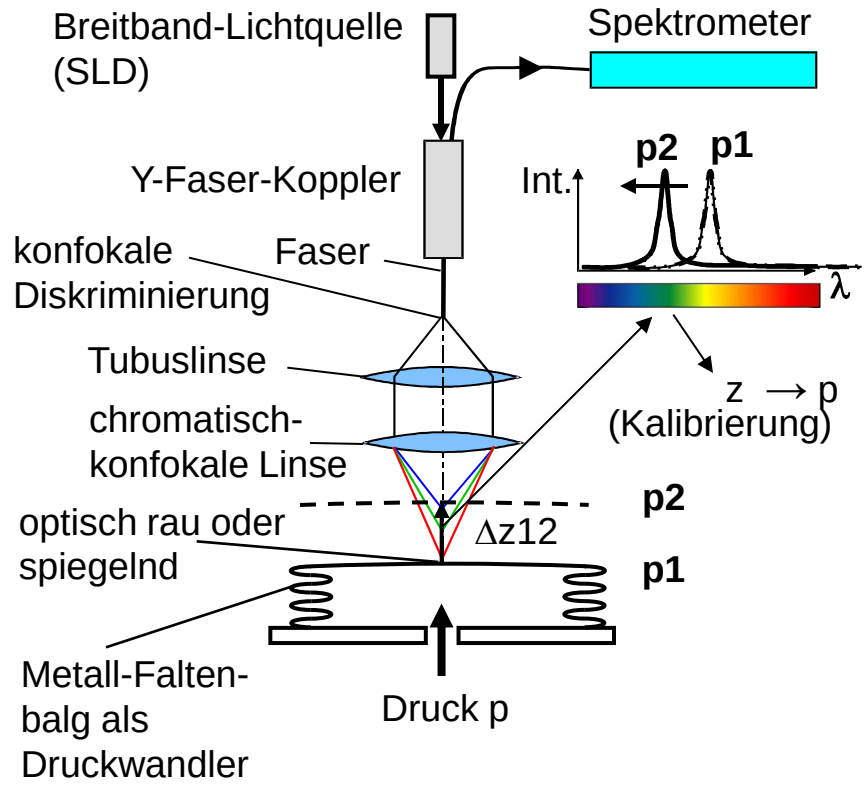


Laser-Triangulation



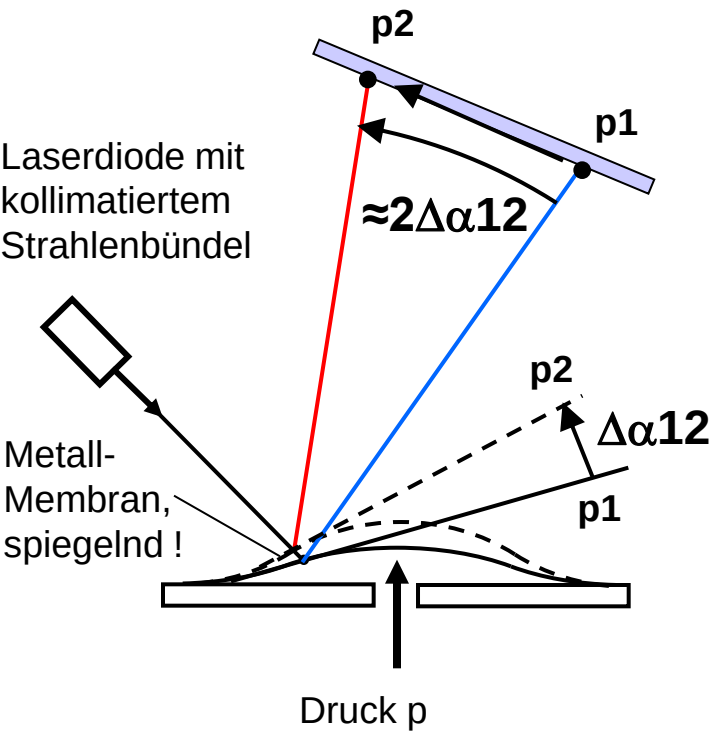
$$p_2 > p_1$$

Chromatisch-konfokaler Ansatz

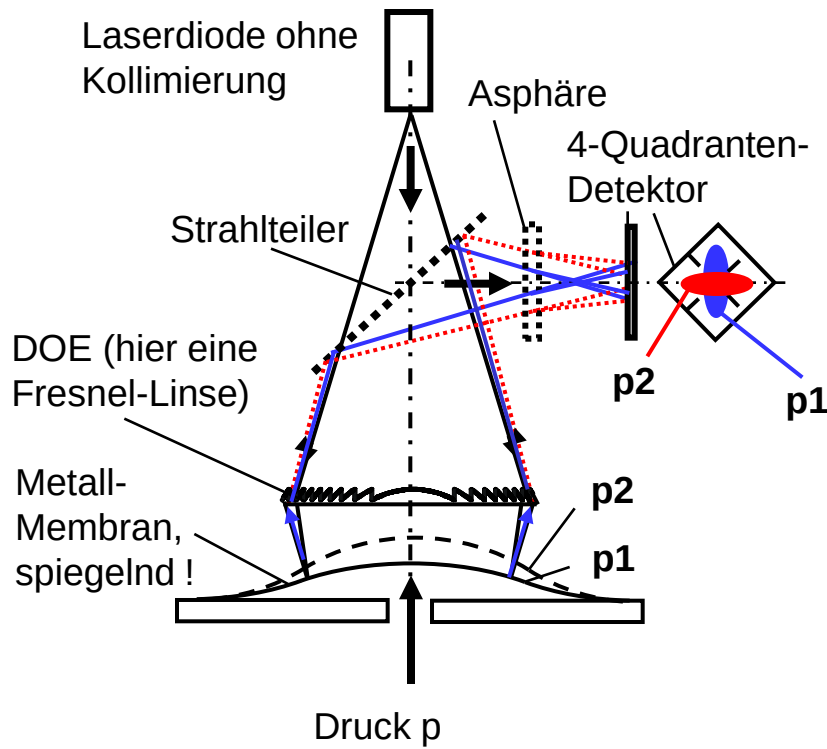




Deflektometrischer Ansatz



Deflektometrischer Ansatz mit DOE



(DOE = Diffraktiv-optisches Element)

$$p_2 > p_1$$

Aufgabe 17: Interferenz von zwei ebenen Wellen

Wir betrachten in der x,z -Ebene zwei ebene, monochromatische, elektromagnetische Wellen mit der Wellenlänge λ , die unter den Winkeln zur x -Achse $\alpha_1 = 60^\circ$ (Welle 1) und $\alpha_2 = 30^\circ$ (Welle 2) einfallen. Die Betrachtung erfolgt zum Zeitpunkt $t=0$. Diese beiden monochromatischen Wellen stammen von ein und derselben Quelle und sind durch eine 50%-Teilung der Wellenamplitude mittels Strahlteiler entstanden. Die zeitliche Kohärenz der Wellen ist gegeben. Die Anfangsphasen der Wellen im Koordinatenursprung werden jeweils mit null angenommen. Ebene Wellen sind räumlich kohärent. Somit kann Interferenz zwischen diesen beiden Wellen beobachtet werden.

Ein Punkt P ist in der x,z -Ebene durch den Ursprungsvektor $\mathbf{r}$ mit den Koordinaten $x = 4\lambda$ und $z = 4\lambda$ gegeben.

Die bei laufender Zeit t registrierbare Intensität (Zeitmittelwert) jeder Welle sei I_0 .

1. Berechnen Sie die Winkelhalbierende (γ) zwischen den Ausbreitungsvektoren der Wellen.
2. Berechnen Sie den Abstand h der Interferenzstreifen in der x,z -Ebene.
3. Wie groß ist die Phasendifferenz δ_{12} am Punkt P(x,z) der beiden elektromagnetischen Wellen zum Zeitpunkt $t=0$?
4. Zeichnen Sie die Orte von mindestens drei Maxima der Intensität der Interferenz in der x,z -Ebene für $t=0$ ein.
- 5a) Ist die Interferenzerscheinung (Streifenmuster) auch in Echtzeit zu beobachten, also wenn die Zeit t nicht festgehalten wird? Bitte begründen Sie Ihre Annahme.
- 5b) Wie groß ist dann die Phasendifferenz δ_{12} am Punkt P(x,z)?
6. Wie groß ist die Intensität I an den Intensitätsmaxima im Interferenzfeld b. laufender Zeit t ?

Lösungen von Aufgabe 17

1. Winkelhalbierende in der x,z-Ebene:

$$\gamma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$\gamma = \frac{60^\circ + 30^\circ}{2}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 45^\circ}}$$

2. Abstand h der Interferenzstreifen in der x,z-Ebene:

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \quad (3.42)$$

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \frac{60^\circ - 30^\circ}{2}}$$

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin 15^\circ}$$

$$\underline{\underline{h = 1,932 \lambda}}$$

3. Phasendifferenz δ_{12} am Punkt P(x,z) für $t=0$:

$$\delta_{12} = \mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (\text{s.a. Gl. 3.12})$$

$$\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (x \cdot \cos \alpha_1 + z \cdot \sin \alpha_1) - \frac{2\pi}{\lambda} (x \cdot \cos \alpha_2 + z \cdot \sin \alpha_2)$$

$$\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} [x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + z(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)]$$

$$\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} [4\lambda(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ) + 4\lambda(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)]$$

$$\delta_{12} = 2\pi \left[4 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{12} = 2\pi \left[2(1 - \sqrt{3}) + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{12} = 2\pi [0]$$

$$\underline{\underline{\delta_{12} = 0}}$$

5a. Ja, da die Phasendifferenzen über der Beobachtungszeit konstant bleiben (stat. Zustand.)

5b. Die Phasendifferenz δ_{12} am Punkt P(x,z) entspricht exakt der bei festgehaltener Zeit ($\delta_{12}=0$).

$$6. I_{\text{Max}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\text{für } I_1 = I_2 = I_0$$

$$\underline{\underline{I_{\text{max}} = 4I_0}}$$

Antwort zu 6. Die Intensität I an den Intensitätsmaxima im Interferenzfeld bei laufender Zeit t beträgt $4I_0$.

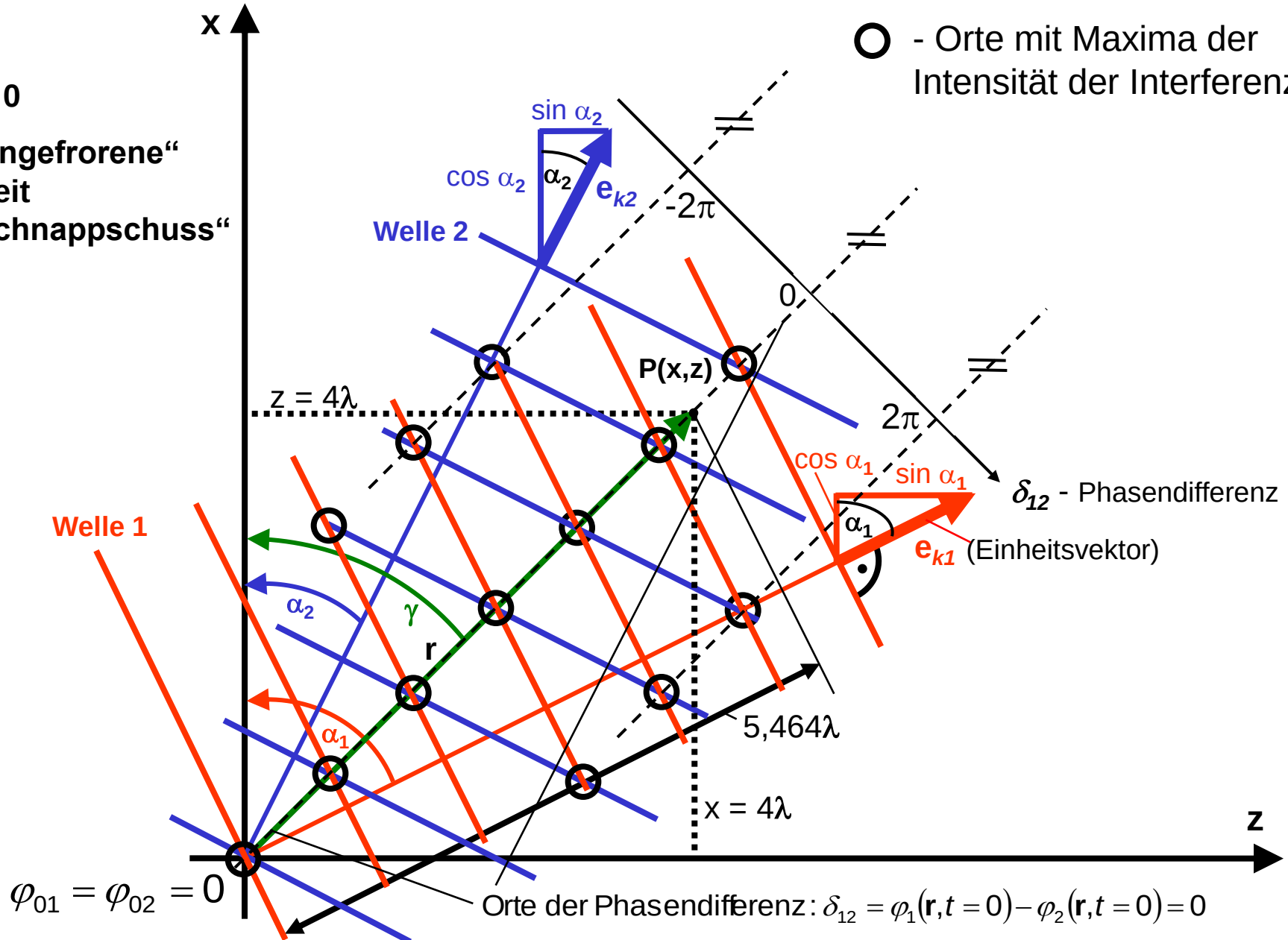
Zu Aufgabe 17: Geometrische Darstellung der Interferenz von zwei ebenen, monochromatischen Wellen bei festgehaltener Zeit t , $t=0$



$t = 0$

„eingefrorene“
Zeit
„Schnappschuss“

○ - Orte mit Maxima der Intensität der Interferenz



Zu Aufgabe 17: Geometrische Darstellung der Interferenz von zwei ebenen, monochromatischen Wellen bei laufender Zeit t

