

Strahlenoptische Grundlagen- wesentliche Grundbegriffe und Formeln

Erich Steinbeißer
Institut für Technische Optik
Pfaffenwaldring 9/ 1.Stock/ 1.226
Tel. 685-66068
E-Mail: steinbeisser@ito.uni-stuttgart.de

Reelle und virtuelle Bildpunkte

Optische Abbildung: Umwandlung eines homozentrischen Strahlenbündels aus dem Objektraum (Zentrum wird Objektpunkt O genannt) in ein anderes homozentrisches Bündel in den Bildraum (Zentrum des Bündels im Bildraum = Bildpunkt O')

Die Umwandlung erreichen wir durch ein **optisches System**, das aus einer beliebigen Anzahl von brechenden und reflektierenden Flächen besteht.

Da die Lichtrichtung meist von links nach rechts angenommen wird, folgt dann:

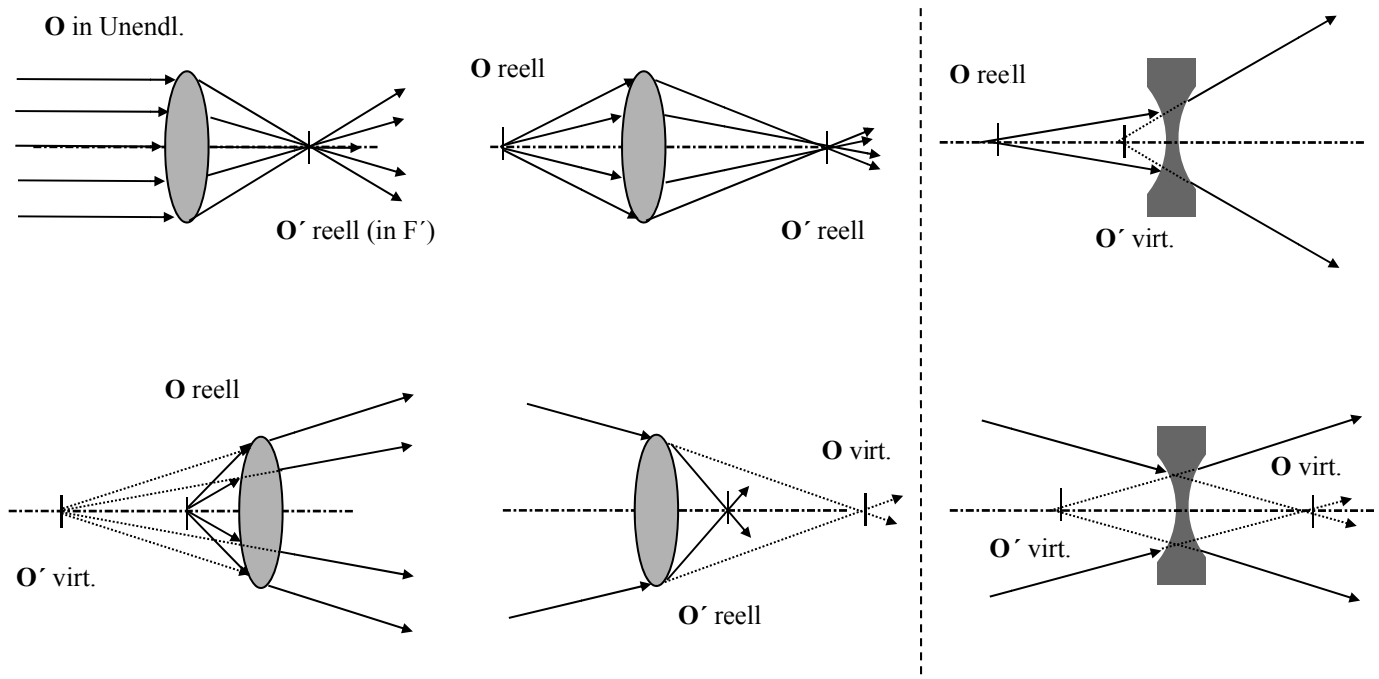
Objektraum: links vom optischen System

Bildraum: rechts vom optischen System

Die Umwandlung des Strahlenbündels kann so geschehen, dass sich die Strahlen in einem Bildpunkt schneiden (= **reeller Bildpunkt**). Dieser kann z.B. auf einer Mattscheibe sichtbar gemacht werden (Energiekonzentration).

Nach dem optischen System kann auch ein divergentes Strahlenbündel entstehen, welches von einem gemeinsamen Zentrum auszugehen scheint. Dieser scheinbare Schnittpunkt wird **virtueller Bildpunkt** genannt. Ein virtueller Bildpunkt kann nicht auf einer Mattscheibe sichtbar gemacht werden.

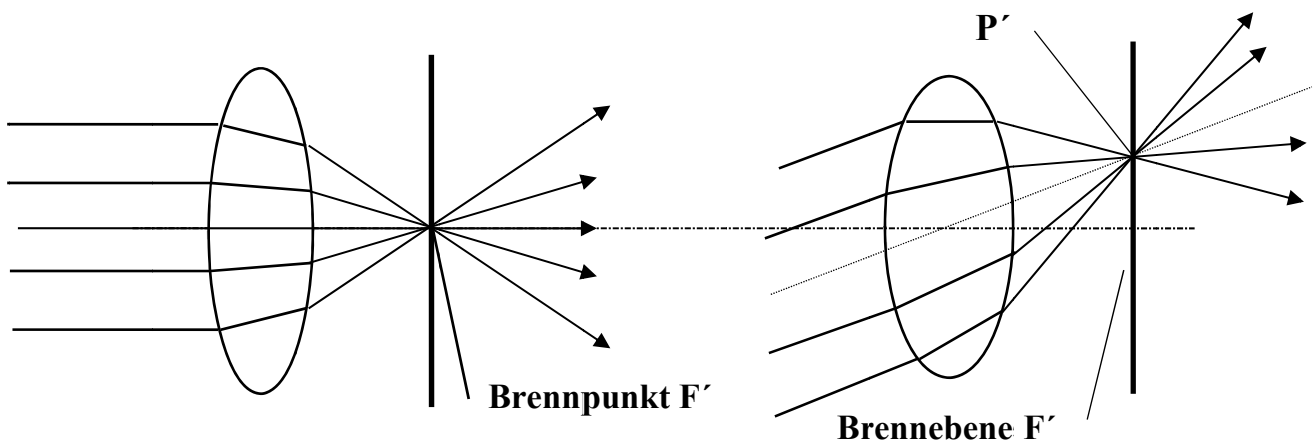
Beispiele (gelten alle für achснаhe Strahlenbündel, Gaußsche Optik)



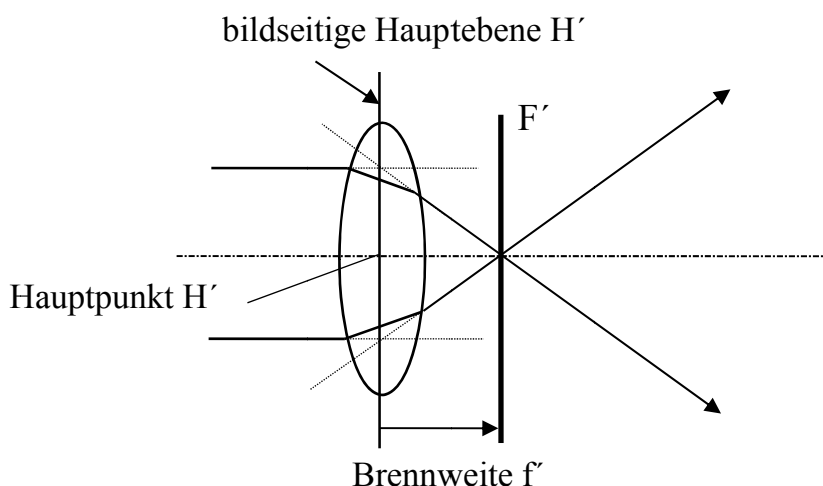
Kardinalpunkte: Brennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte

Mit Hilfe von Brennebenen und Hauptebenen lässt sich ein praktikables Ersatzschaltbild einer Linse oder eines Linsensystems zeichnen.

- parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen treffen sich im **bildseitigen Brennpunkt F'**
- achsensenkrechte Ebene durch F' ist die **bildseitige Brennebene**
- parallele, aber zur optischen Achse geneigte Strahlen werden durch die Linse zu einem Punkt P' in der bildseitigen Brennebene gebrochen
- **Je stärker das parallele Strahlenbündel geneigt ist, umso weiter ist der Schnittpunkt P' von F' entfernt**

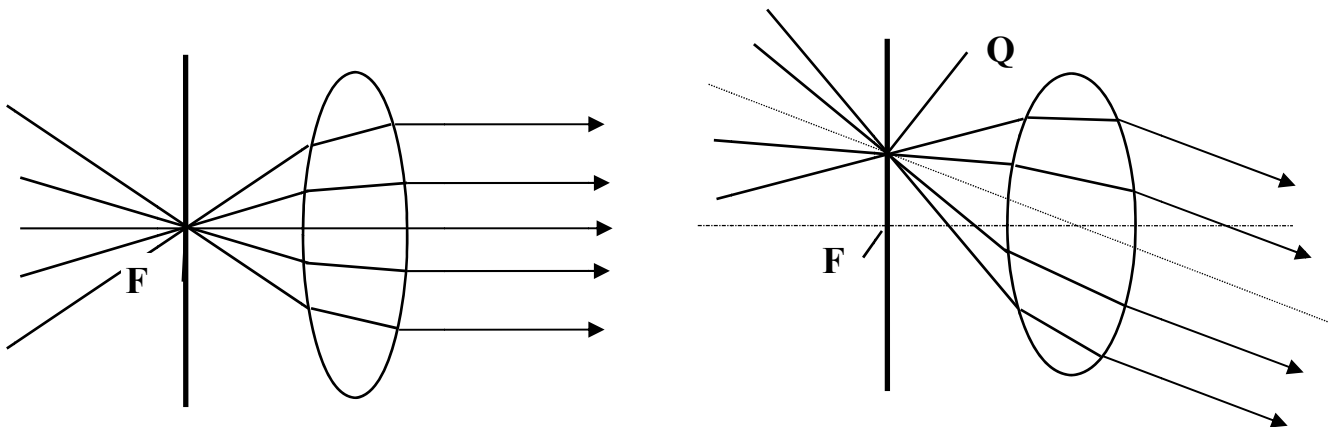


- bringt man einen achsparallelen Strahl zum Schnitt mit dem dazugehörigen Brennpunktstrahl, so ist der Schnittpunkt ein Punkt der Hauptebene H'
- die achsensenkrechte Ebene durch diesen Schnittpunkt ist die Hauptebene H'
- den Durchstoßpunkt der Hauptebene H' mit der optischen Achse nennen wir Hauptpunkt H'
- Der Abstand des Brennpunktes F' vom Hauptpunkt H' ist die *bildseitige Brennweite f'* .

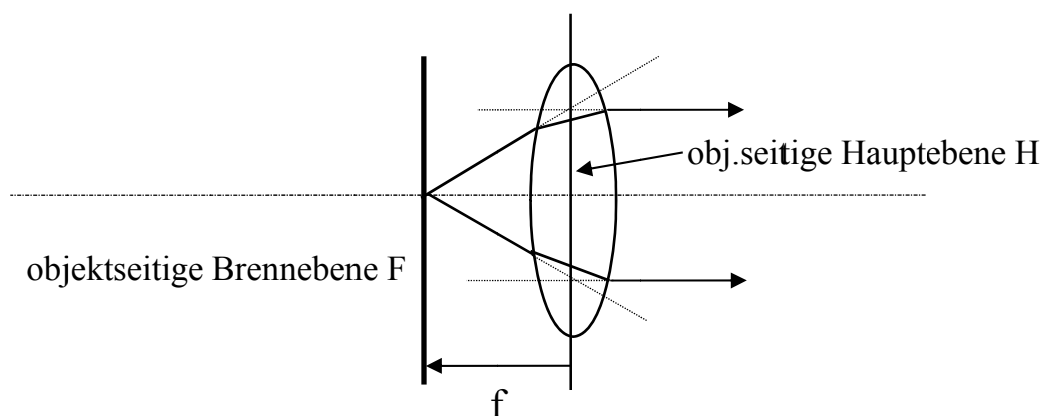


Entsprechendes gilt für die objektseitigen Kenngrößen:

- Lichtstrahlen, die achsparallel aus einer Sammellinse austreten, kommen aus einem Punkt der optischen Achse, dem **objektseitigen Brennpunkt F**.
- Die achsensenkrechte Ebene durch F ist die **objektseitige Brennebene F**.
- Lichtstrahlen, die von einem Punkt Q der objektseitigen Brennebene ausgehen, werden durch die Linse zueinander parallel gerichtet. Diese Parallelstrahlen sind zur optischen Achse geneigt, wenn Q nicht in F liegt.



- Bringt man die von F ausgehenden Lichtstrahlen mit den zugehörigen achsparallel gerichteten Lichtstrahlen zum Schnitt, so ist die achsensenkrechte Ebene durch die Schnittpunkte die **objektseitige Hauptebene H**.
- Der Durchstoßpunkt der optischen Achse durch diese Hauptebene ist der objektseitige **Hauptpunkt H**.
- Der Abstand des Brennpunktes F vom Hauptpunkt H ist die **objektseitige Brennweite f**.
- Befindet sich vor und hinter einer Linse das gleiche Medium (z.B. Luft), so sind die **Brennweiten f und f' gleich groß und haben entgegengesetztes Vorzeichen**.

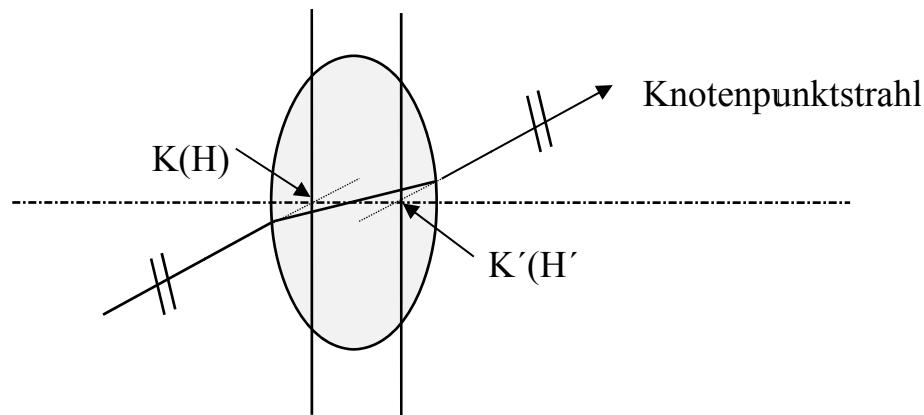


Knotenpunktstrahl

(Knotenpunkte fallen bei Systemen in Luft mit entsprechenden Hauptpunkten zusammen)

- Ein Lichtstrahl, der auf den objektseitigen Knotenpunkt K zuläuft, tritt aus der Linse oder dem System so aus, als käme er aus dem bildseitigen Knotenpunkt K' . **Der austretende Lichtstrahl hat die gleiche Richtung wie der einfallende Lichtstrahl.**
- Der ganze Lichtstrahl wird **Knotenpunktstrahl** genannt. Bei einer dünnen Linse verläuft also dieser Strahl scheinbar ungebrochen und ohne Versatz durch die Linse.

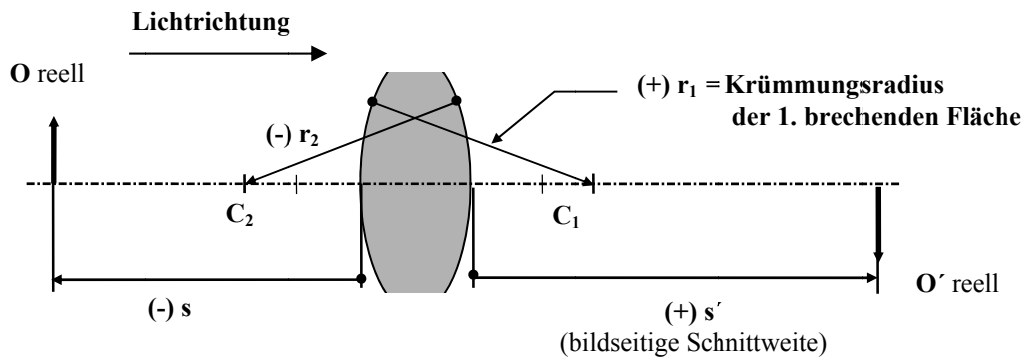
Bsp.: dicke Linse



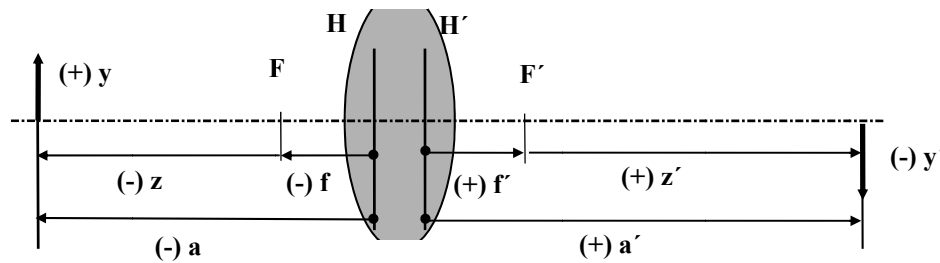
Zusammenfassung:

- Optische Systeme sowie dicke Linsen (Dicke = Scheitelpunktsabstand nicht vernachlässigbar) weisen im Allgemeinen zwei unterschiedliche Hauptebenen auf; diese können als **Ebenen der äquivalenten Brechung** aufgefasst werden. Bei zusätzlicher Kenntnis der **Lage der Brennebenen** lassen sich Abbildungen auch durch mehrlinsige Systeme (nach Gaußscher Näherung) vereinfacht durchrechnen
- Bei **dünnen Linsen** (die Strahlhöhen an den brechenden Flächen sind näherungsweise gleich) **fallen die Hauptebenen zusammen** und sind am Ort der Linse
- Bei Systemen, die vom **gleichen Medium** (meist Luft) **umgeben** sind, fallen die jeweiligen **Haupt- und Knotenpunkte zusammen**, im allgemeinen Fall müssen die Positionen der Knotenpunkten separat bestimmt werden

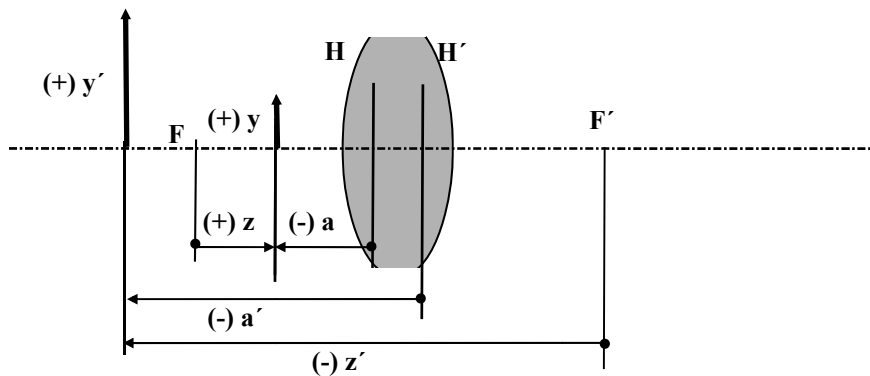
Definition der wichtigsten Größen/ Vorzeichenregel



Bsp. mit reeller Abb.



Bsp. mit virtueller Abb.



- Die Lichttrichtung wird im Allgemeinen von links nach rechts angenommen.
- Strecken, die von der optischen Achse senkrecht nach oben verlaufen, sind positiv, nach unten negativ.
- **Strecken entgegen der Lichttrichtung sind negativ, Strecken in Lichttrichtung sind positiv.**
- Die Startpunkte der gerichteten Strecken sind im Bild durch einen Kreis, die Zielpunkte durch einen Pfeil gekennzeichnet. (f' ist im obigen Beispiel positiv)
 Das Vorzeichen der Größen ist zur Orientierung in Klammern angegeben.

Abbildungsgleichungen und lateraler Abbildungsmaßstab β'

(bei Linsen oder Abb.systeme in Luft)

allgemeine (hauptpunktsbezogene) Abbildungsgleichung: (Gl.2.13 im Manuskript)

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'}$$

Newton'sche (brennpunktsbezogene) Abbildungsgleichung (nach Gl.2.7)

$$z \cdot z' = -f'^2$$

lateraler Abbildungsmaßstab β' : (Gl.2.6 und Gl.2.13)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$$

Tiefenabbildungsmaßstab α'

Eine kleine Änderung Δz der Lage des Objektes in Richtung der optischen Achse bewirkt eine Änderung $\Delta z'$ der Bildlage.

$$\alpha' = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \frac{dz'}{dz} \text{ (Näherung für kleine Änderung)}$$

$$z' = \frac{f \cdot f'}{z}$$

$$\frac{dz'}{dz} = -\frac{f \cdot f'}{z^2} = \frac{f \cdot f}{z^2} \text{ (bei Linse in Luft } f = -f')$$

$$\text{da } \beta' = -\frac{f}{z} \text{ folgt:}$$

$\alpha' = \beta'^2$

 (für kleine Objektverschiebungen und β' annähernd konstant)

Achtung: Im Gegensatz zum linearen lateralen Abbildungsmaßstab nimmt die Tiefenausdehnung quadratisch zu! (keine Abbildungstreue in der Tiefe!)

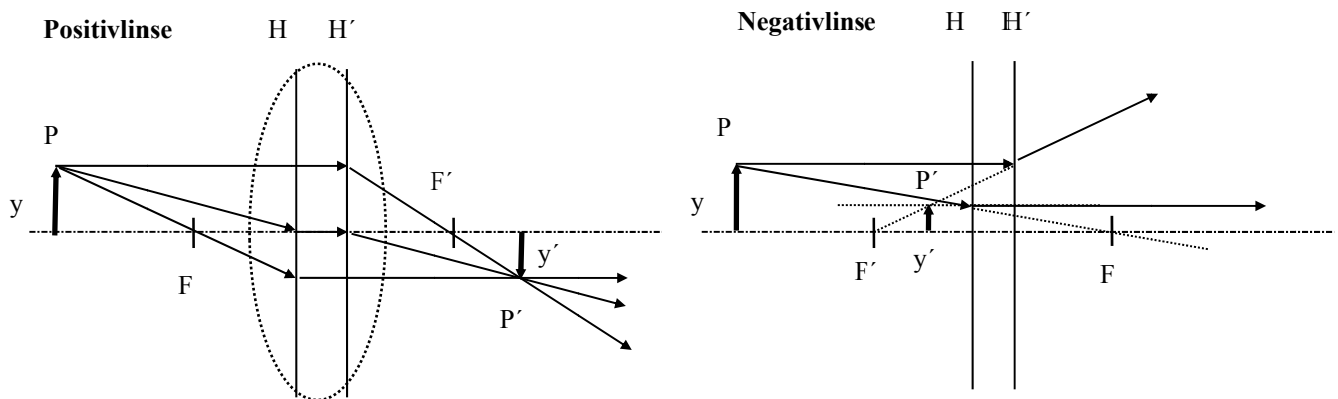
noch genauer (ohne Herleitung)

$$\alpha' = \frac{\beta'^2}{1 + \frac{\Delta z}{z}}$$

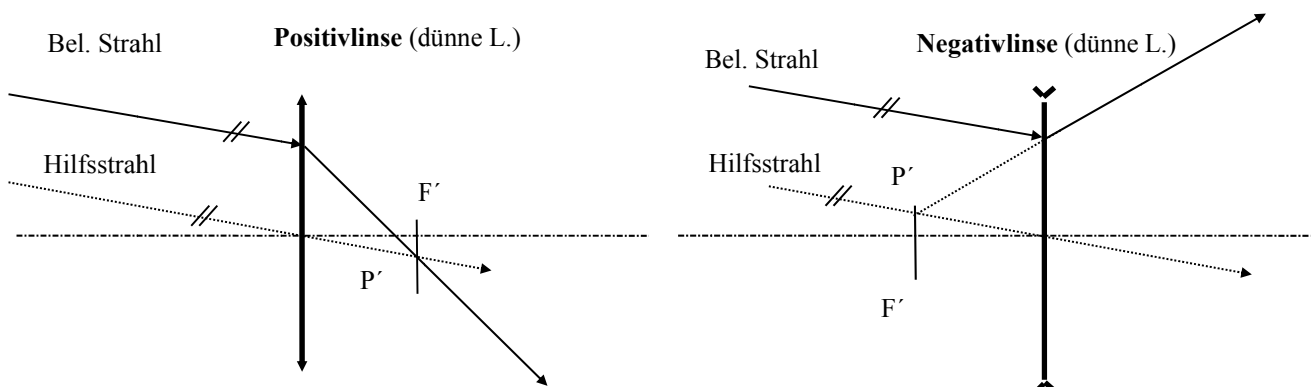
Listingsche Bildkonstruktion

Zur Abbildung einer achsensenkrechten Strecke y genügt die Abbildung eines nicht auf der Achse liegenden Punktes P zu konstruieren. Die Genauigkeit nimmt mit der Entfernung des Punktes P von der optischen Achse zu. Aus den unendlich vielen von Punkt P ausgehenden Strahlen verwendet man die, deren weiteren Verlauf man kennt.

1. der objektseitige Brennpunktstrahl durch F wird an H zum Parallelstrahl
2. der objektseitige Parallelstrahl wird an H' zum Brennpunktstrahl durch F'
3. der auf $K(H)$ zielende Knotenpunktstrahl ändert seine Richtung nicht, sondern tritt nur parallel verschoben aus K' (H') wieder aus

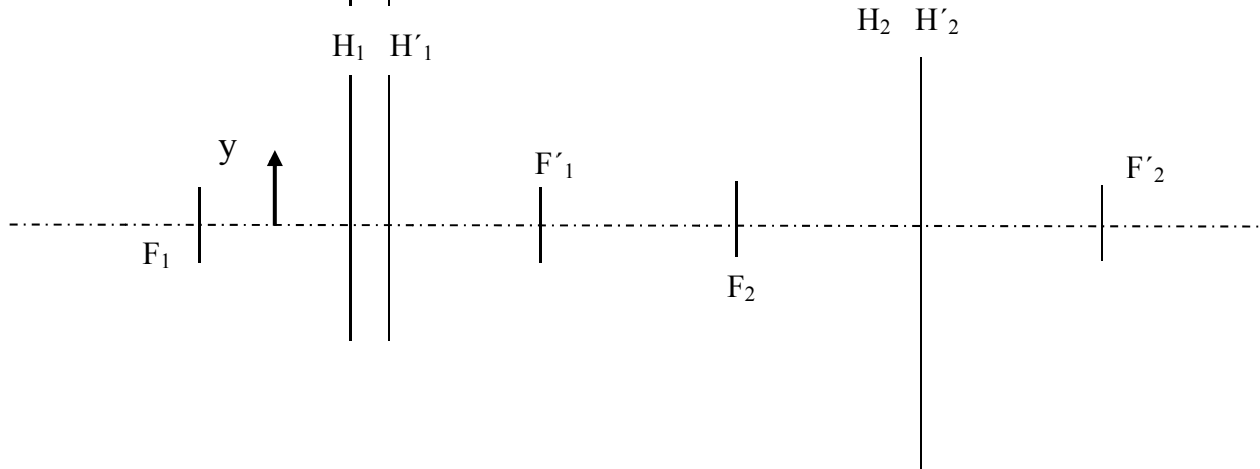
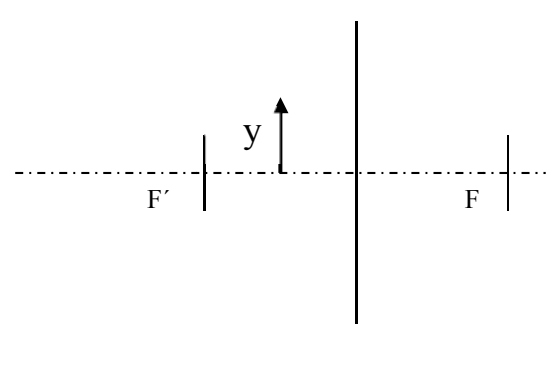
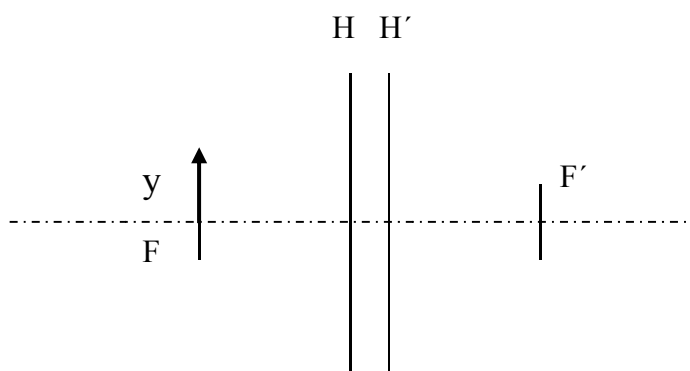
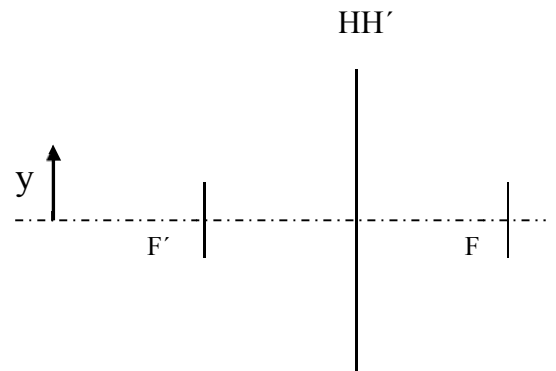
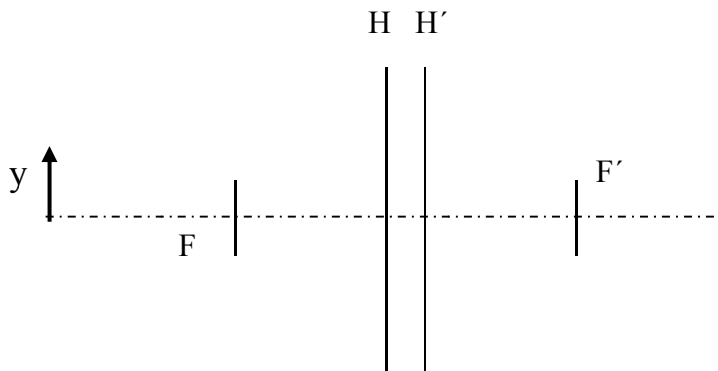


Mit der oben genannten Regel läßt sich auch für einen beliebig einfallenden Strahl der an der Linse gebrochene Strahl konstruieren. Man benutzt dazu als Hilfsstrahl den parallel zum betrachteten Strahl einfallenden Knotenpunktstrahl. Beiden Strahlen kann ein gemeinsamer Objektpunkt im Unendlichen zugeordnet werden. Der zugehörige Bildpunkt ist der Schnittpunkt des gebrochenen Strahles (bzw. seiner rückwärtigen Verlängerung bei der Zerstreuungslinse) mit dem Knotenpunktstrahl; dieser Schnittpunkt liegt in der bildseitigen Brennebene.



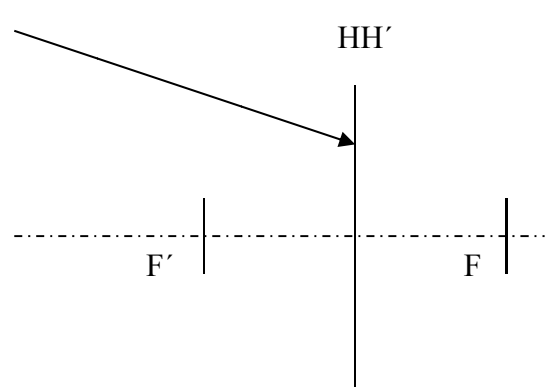
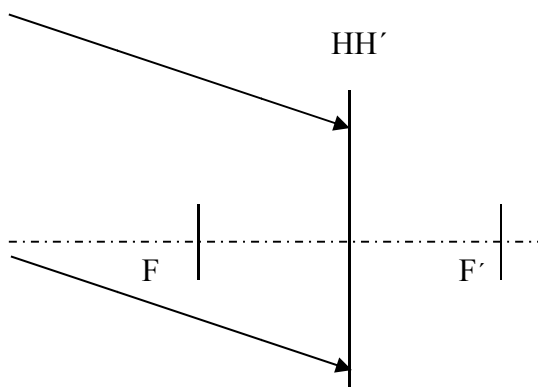
Positivlinse (hier: dicke Linse)

Negativlinse (dünne L.)



Positivlinse

Negativlinse

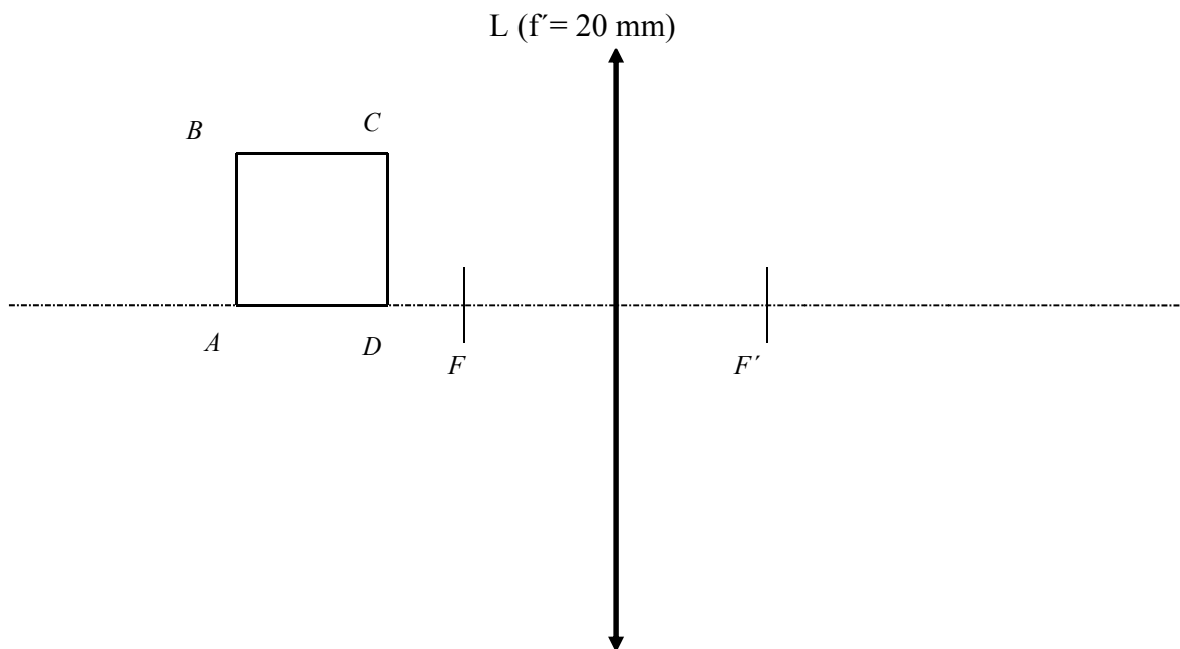


Tiefenabbildung und geneigte Strecken

Mit einer dünnen Linse L der Brennweite $f' = 20 \text{ mm}$ soll ein transparenter Würfel mit der **Kantenlänge 20 mm** abgebildet werden. Gezeichnet ist in untenstehender Skizze nur ein Schnitt in der y-z-Ebene.

- a) Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'$ des vorgegebenen Quadrats ABCD. Beschriften Sie dazu auch die einzelnen Bildpunkte A' , B' , C' und D' .

maßstäbliche Skizze:

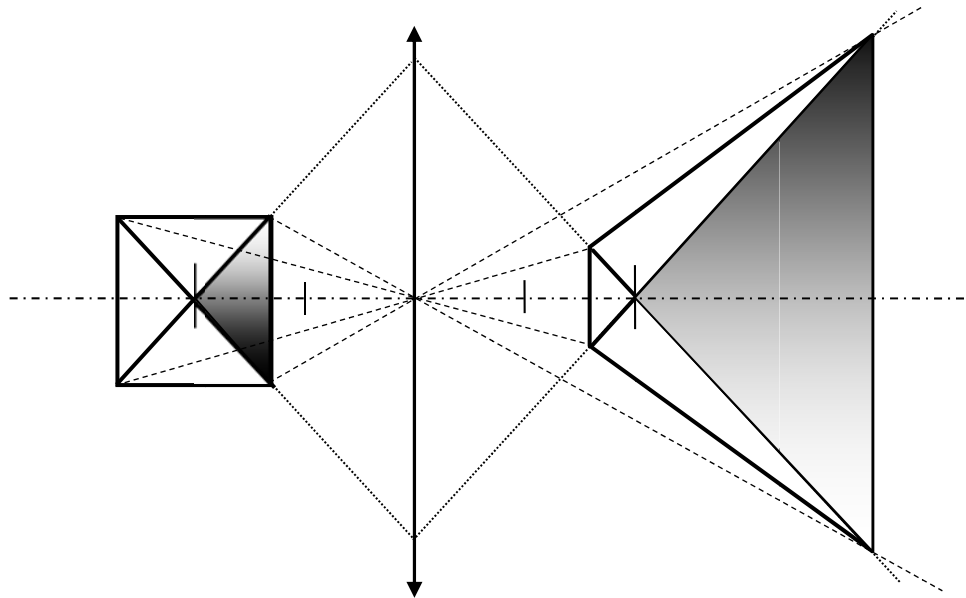


- b) Verlängern Sie nun die Linien AC und $A'C'$ soweit, bis sie sich schneiden. Was fällt Ihnen dabei auf? Was besagt die Scheimpflugbedingung? Welche Eigenschaften hat das Bild, wenn die Scheimpflugbedingung eingehalten wird? Welche speziellen Objektive werden bei professionellen Kameras eingesetzt, um bei geneigten Objekten die Scheimpflugbedingung einzuhalten?
- c) Der Punkt A habe einen Abstand von **50 mm** zur Linse. Berechnen Sie die Lage des Bildpunktes A' . Mit welchem lateralen Abbildungsmaßstab wird eine kleine achsensenkrechte Strecke in A dorthin abgebildet? Wie groß ist der Tiefenabbildungsmaßstab für kleine axiale Ausdehnungen um den Punkt A?
- d) Sie setzen eine bikonvexe Linse, deren Radien betragsmäßig gleich groß sind. Berechnen Sie die Radien r_1 und r_2 , um eine Linse der Brennweite $f' = 20 \text{ mm}$ zu erhalten. Die Brechzahl des verwendeten Glases beträgt **$n = 1,51$** . (Hier als dünne Linse rechnen.)
- e) Auf welchen Wert ändert sich die Brennweite, wenn die **Dicke der Linse mit 10 mm** bei der Berechnung berücksichtigt wird?

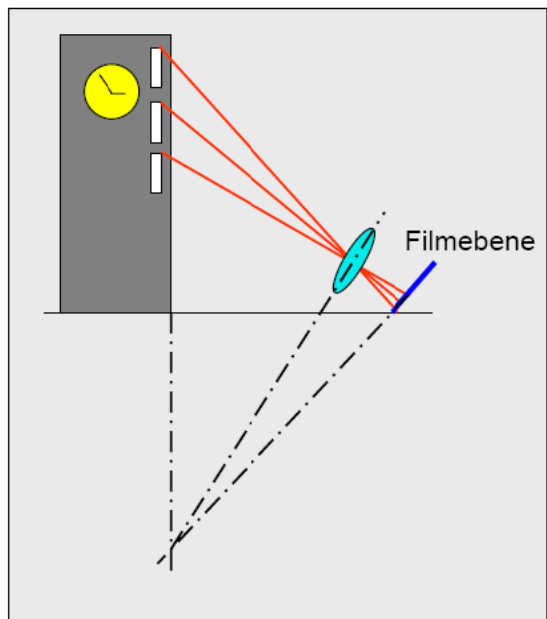
Scheimpflugbedingung für scharfe Abbildung von geneigten Objekten

Skizze zeigt verzerrte Abbildung in der Tiefe und Bedingung für scharfe Abbildung:

Bei zur optischen Achse geneigten Objekten müssen sich **Objektebene**,



Hauptebenen des abbildenden Objektivs und **Bildebene in einer Schnittgeraden schneiden**, damit die Objektpunkte scharf auf die Bildebene abgebildet werden.



aus Manuskript: Grundlagen der Technischen Optik (Problem stürzende Linien)

Tilt-

(durch Verschwenken des Objektivs
läßt sich bei geneigten Objekten die
Schärfenebene anpassen.

(Scheimpflug-Bedingung)

(aus: <http://www.photoscala.de/>

und Shift- Objektive

(nötig z.B. bei Deckenprojektoren,

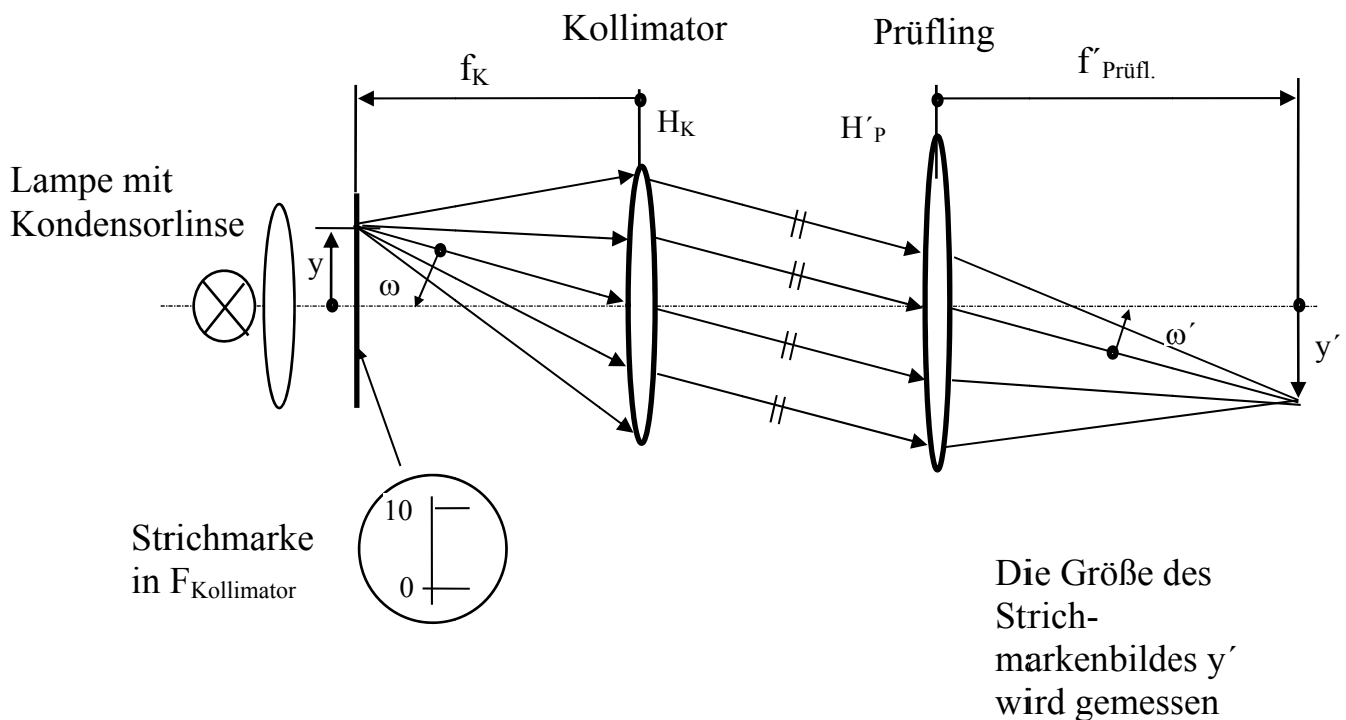
die nicht mittig zur Leinwand aufgestellt werden können oder zur Vermeidung von
stürzenden Linien bei der Fotografie großer Gebäude)



(aus: www.wikipedia.de/Tilt-und-Shift-Objektiv)

Brennweitenmessung aus Objektwinkel und Bildgröße

Eine schnelle und genaue Brennweitenmessung ist in folgender Skizze dargestellt. Hierbei muss ein Kollimator mit genau bekannter Brennweite f_K und eine beleuchtete Marke mit bekanntem Markenabstand y gegeben sein. Der Prüfling fokussiert die kollimierten Strahlenbündel in dessen Brennebene F'_p . Der Abstand der Markenbilder y' ist proportional zur gesuchten Prüflingsbrennweite f'_p .



Aufgabe:

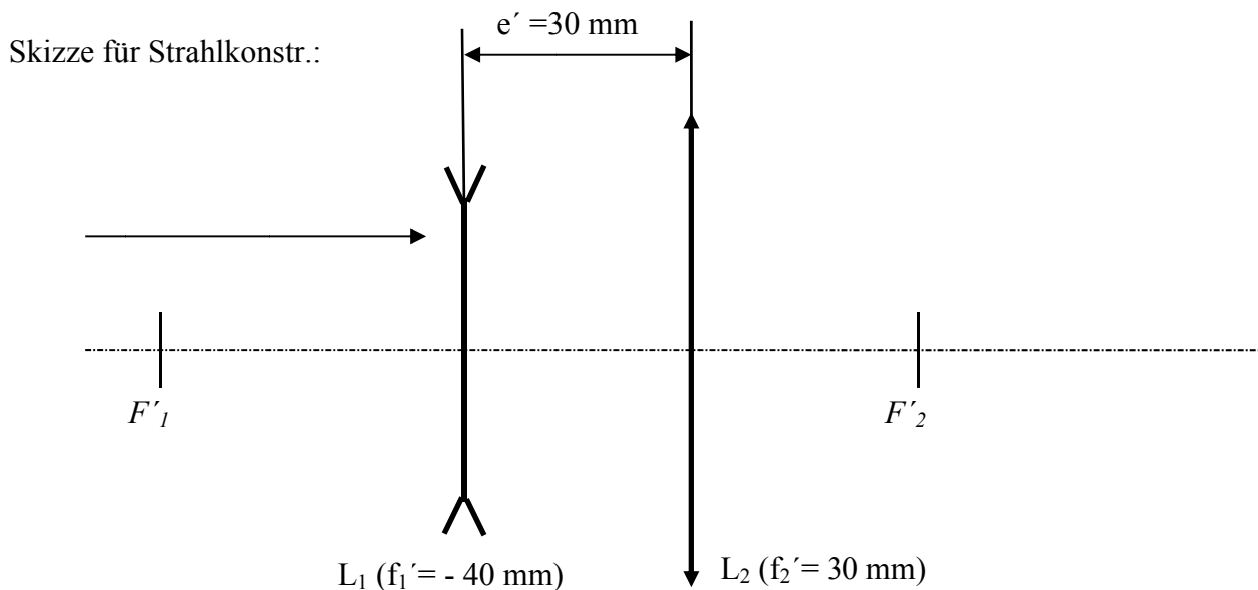
Der Kollimator habe eine Brennweite $f_K = 1000$ mm. Der Strichmarkenabstand y der beiden Marken beträgt 10 mm. In der bildseitigen Brennebene des Prüflings wird ein Abstand der entsprechenden Markenbilder von $y' = 2,0$ mm gemessen.

- Wie groß ist die Brennweite f'_p des Prüflings?
- Kann diese Messmethode auch bei einer dicken Linse oder einem optischen System eingesetzt werden?
- Hat ein seitlicher Versatz des Prüflings (also senkrecht zur optischen Achse) Auswirkungen auf die Messung? Wenn ja, welche?

Weitwinkelobjektiv für Spiegelreflexkameras

(Retrofokussystem, d.h. „den Brennpunkt zurücksetzen“)

Ein Weitwinkelobjektiv setzt sich aus den Linsen L_1 ($f_1' = -40 \text{ mm}$) und L_2 ($f_2' = 30 \text{ mm}$) zusammen, die in einem Abstand von $e' = 30 \text{ mm}$ montiert sind. Die Linsen können als dünne Linsen gerechnet werden.

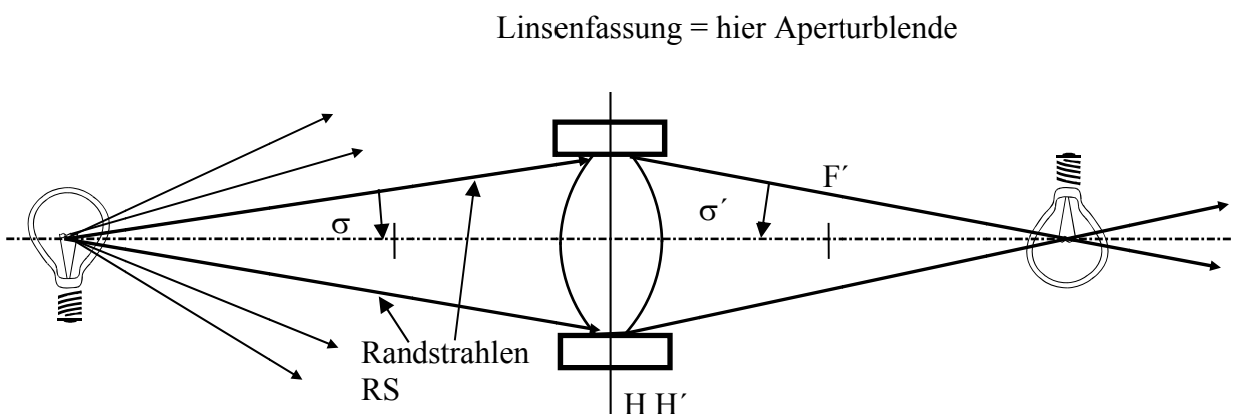


- Ermitteln Sie zeichnerisch den weiteren Verlauf des achsparallel eingezeichneten Strahls zunächst durch Linse L_1 und dann durch Linse L_2 . Markieren Sie bitte den Gesamtbrennpunkt F'_{12} des zweilinsigen Systems in der Skizze. (Wie groß ist der Abstand L_2 zur Gesamtbrennebene?)
- Konstruieren Sie nun die bildseitige Hauptebene H'_{12} des Gesamtsystems.
- Tragen Sie die Gesamtbrennweite f'_{12} in die Skizze ein. Welchen Wert erhalten Sie für f'_{12} ?
Das Ergebnis Ihrer Zeichnung soll nun **durch Rechnung** überprüft werden.
- Wie groß ist die Gesamtbrennweite f'_{12} des Weitwinkelsystems?
- Wo befindet sich die Bildebene ($s'_{2F'} = ?$) für Objekte im Unendlichen in Bezug auf die zweite Linse? Wo liegt die Hauptebene H' der Gesamtsystems?

Bündelbegrenzung

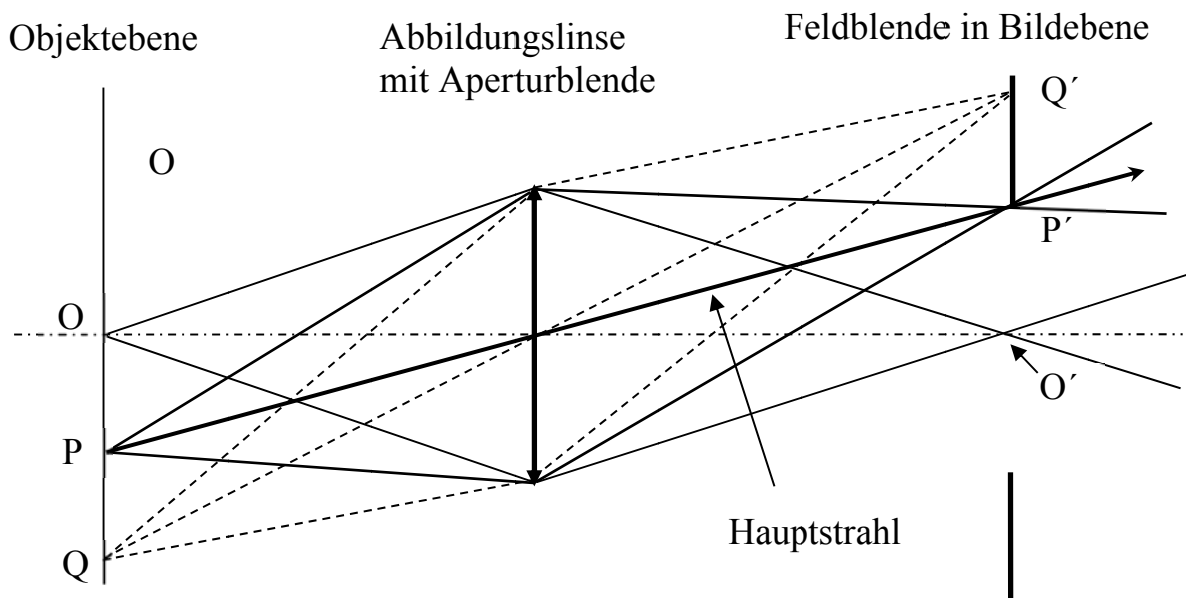
- Blenden können den Öffnungswinkel (Querschnitt), der bei der optischen Abbildung nutzbaren Strahlenbündel begrenzen.
- Sie legen dadurch die
 - Bildhelligkeit ($E \sim \sin^2(\sigma')$) und die
 - Schärfentiefe der Abbildung ($D_F \sim \frac{1}{\sin(\sigma')}$), sowie das
 - beugungsbegrenzte Punktbild (Airyscheibchen) ($D_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda}{n' \cdot \sin(\sigma')}$) fest.
- Die **Aperturblende** ist die physikalisch vorhandene Blende, die das von einem Objektpunkt auf der Achse ausgehende Strahlenbündel am stärksten begrenzt, d.h. der Öffnungs- oder Aperturwinkel wird durch die Aperturblende bestimmt.

Bsp. für Aperturblenden: Pupille des Auges; Irisblende eines Fotoapparates, die Objektivfassung eines Fernrohrs

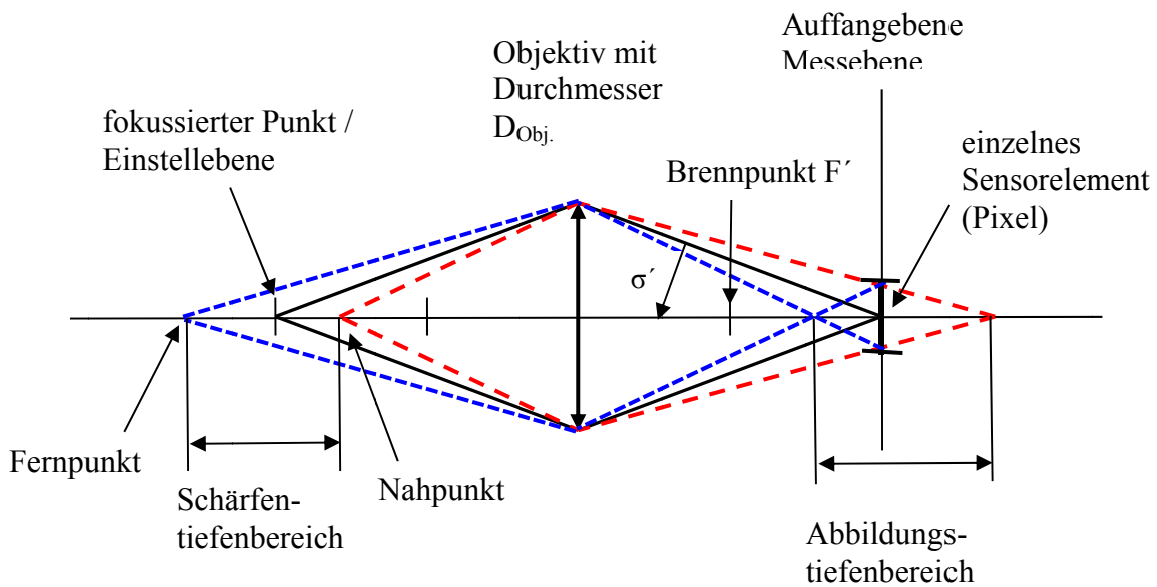


- Blenden (Rahmen, Einfassungen) können aber auch die Größe des abgebildeten Objektes (auch Feld genannt) begrenzen. Sie heißen dann **Feldblenden**.
- Der **Hauptstrahl** geht vom Rand des Objektfeldes durch die Mitte der Aperturblende und weiter zum Rand des Bildfeldes.

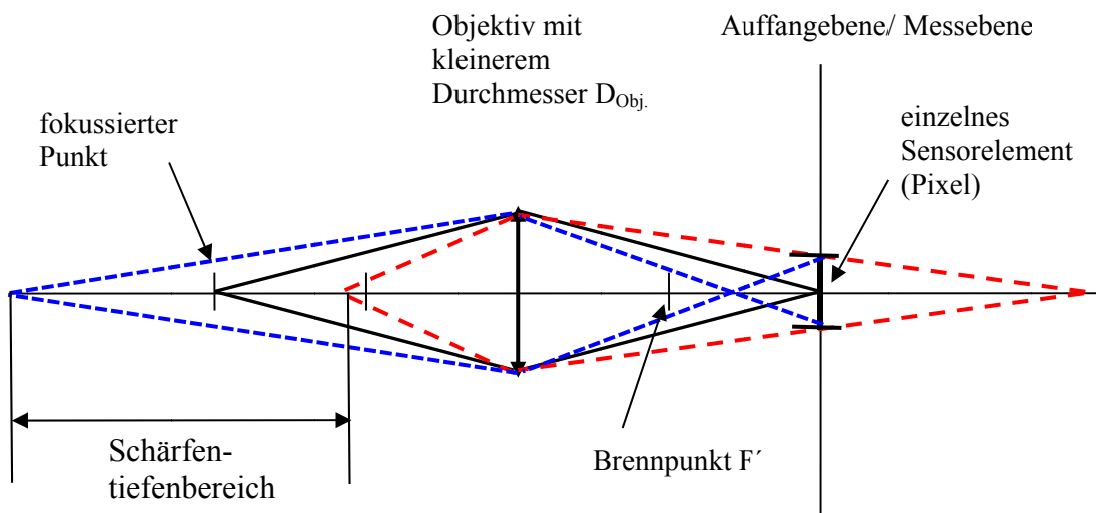
Skizze zum Strahlverlauf mit Feldblende:



Schematische Skizze zur Schärfentiefe (qualitativ)



gleiches Beispiel wie oben, jedoch mit kleinerem Blendendurchmesser, d.h. größerer Blendenzahl (qual. Prinzipskizze)

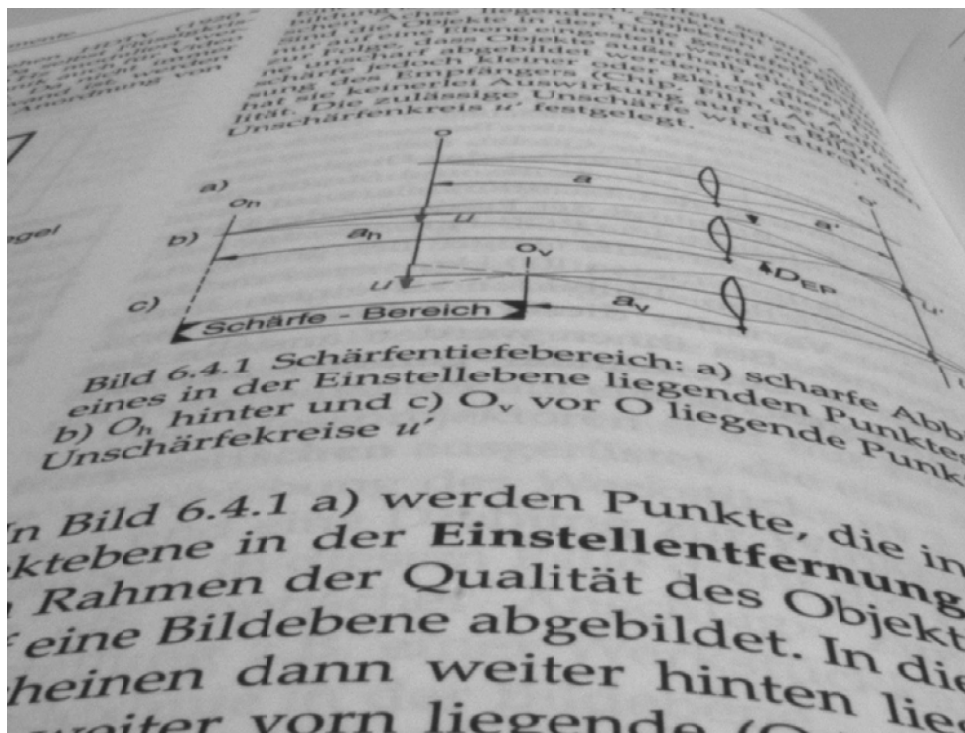


Aufnahmen mit unterschiedlicher Schärfentiefe in Abhängigkeit von der Blende $k (= f'/D_{\text{Blende}})$

aufgenommen mit Blende 1,6:



aufgenommen mit Blende 22:

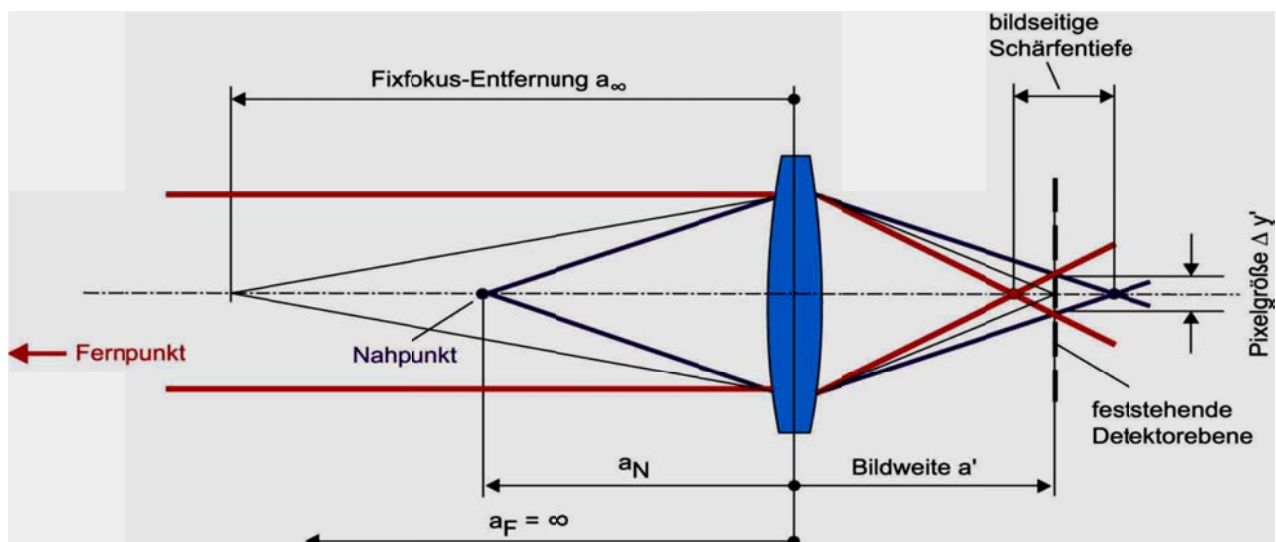


Aufgabe zur Schärfentiefe: Digitalkamera

Eine Digitalkamera ist mit einem 2/3" - CCD-Sensor (B: 8,8 mm; H: 6,6 mm) bestückt. Die Seitenlänge der quadratischen **Pixel** beträgt $\Delta y' = 3 \mu\text{m}$. Das Objektiv hat eine **Brennweite** $f' = 10 \text{ mm}$ (entspricht etwa 50 mm Brennweite bei Kleinbild-Format). Das Messobjekt mit der **Breite** 44 mm soll formatfüllend auf den CCD-Chip abgebildet werden. Die Blendenzahl der Linse lässt sich von $k (= f'/D_{\text{Blende}}) = 2$ bis 16 variieren.

- Wie groß ist der Abbildungsmaßstab für obige Messaufgabe?
- Welchen Abstand muss das Messobjekt vom Objektiv (dünne Linse) aufweisen (Lage der Einstellebene), um bei obiger Brennweite diesen Abbildungsmaßstab realisieren zu können? Wie groß ist der entsprechende Bildabstand des Sensors vom Objektiv?
- Wo liegt nach paraxialer Optik der Nahpunkt der Aufnahme bei Blende 2, wo bei Blende 16?
- Wo liegen die entsprechenden Fernpunkte bei Blende 2 und bei Blende 16?
- Wo liegt die hyperfokale Einstellebene a_∞ bei $k = 2$ und $k = 16$, wo liegt der jeweilige Nahpunkt bei dieser Einstellung?
- Welche Einflüsse müssen bei realen Objektiven bezüglich der Schärfentiefe zusätzlich berücksichtigt werden?

Beispielskizze zu Teilaufgabe e) <http://www.winlens.de/index.php?id=13>
pdf: „Objektive in der industriellen Bildverarbeitung“



Telezentrischer Strahlengang

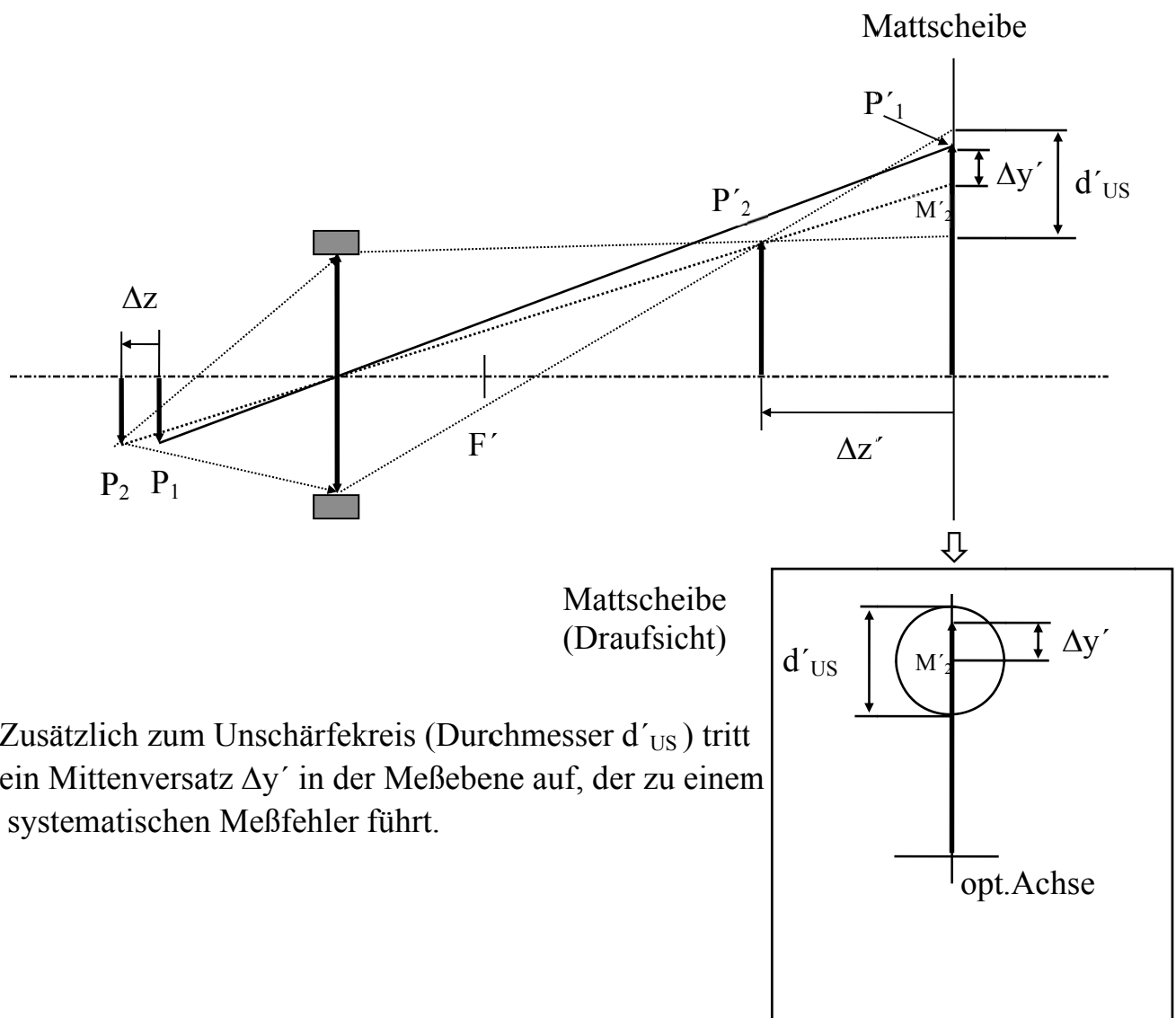
Das Ziel:

die Bildgröße in der Bildebene (Mattscheibe, Detektorfläche) soll unabhängig von kleinen Entfernungsänderungen des Objektes vom Objektiv gleich groß bleiben;

β' soll konstant bleiben.

Zunächst die herkömmliche Abbildung: die Fassung des Objektivs stellt die Öffnungs/ Aperturblende für die von Objektpunkten ausgehenden Strahlenbündel dar; der Haupt- oder Symmetriestrahlgang geht durch die Mitte der Blende.

Zentralprojektion: Das Perspektivitätszentrum ist die Linsenmitte (entozentrische Perspektive).

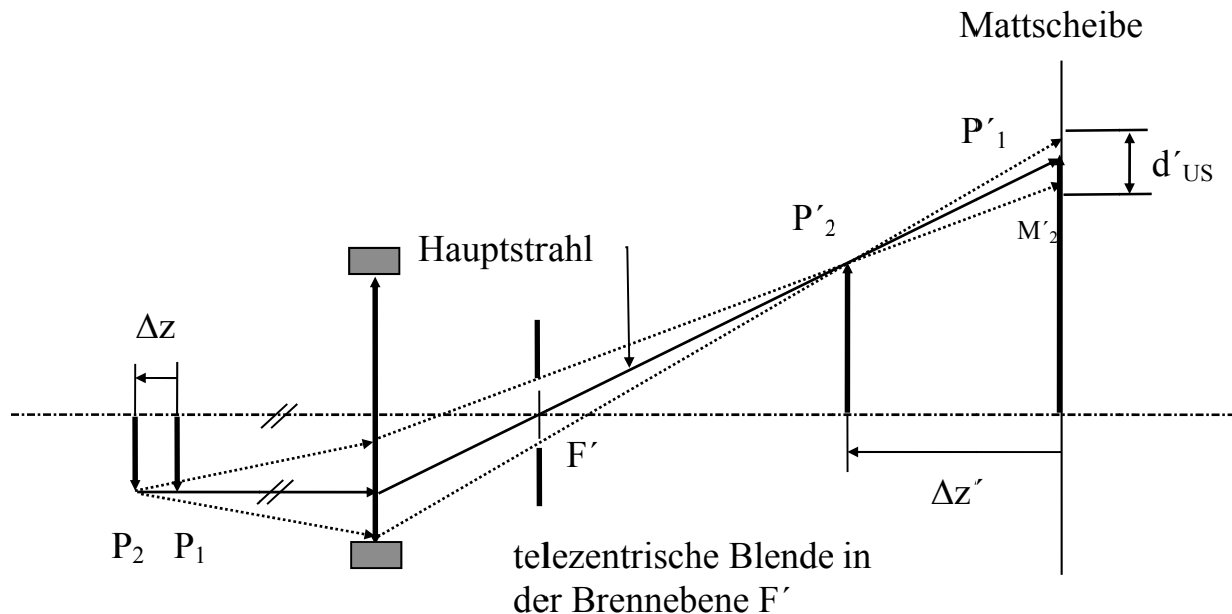


Zusätzlich zum Unschärfekreis (Durchmesser d'_{US}) tritt ein Mittenversatz $\Delta y'$ in der Meßebe auf, der zu einem systematischen Meßfehler führt.

In dieser Skizze ist eine Blende symmetrisch um den bildseitigen Brennpunkt des Objektivs angeordnet, sie wird **telezentrische Blende** genannt.

Dies bewirkt, dass die zur Abbildung beitragenden Bündel objektseitig nur eine kleine Öffnung haben und ihr Symmetrie- (Haupt-) Strahl parallel zur optischen Achse läuft.

Folge: das Perspektivitätszentrum ist im Unendlichen => Parallelprojektion



Bei Abstandsänderung erhalten wir wieder ein Unschärfescheibchen (der Durchmesser d'_{US} ist abhängig von der Größe der Blende), die Mitte dieses Scheibchens befindet sich jedoch wieder am ursprünglichen Bildort. Es entsteht **kein systematischer Messfehler**.

Bitte beachten: Die telezentrische Abbildung ist nur auf relativ kleine Objekte anwendbar, weil der freie Durchmesser der Objektivfrontlinse größer als der maximal abbildbare Werkstückdurchmesser sein muss!
(Hauptstrahl parallel zur optischen Achse!)

Abbildung ohne telezentrischen Strahlengang

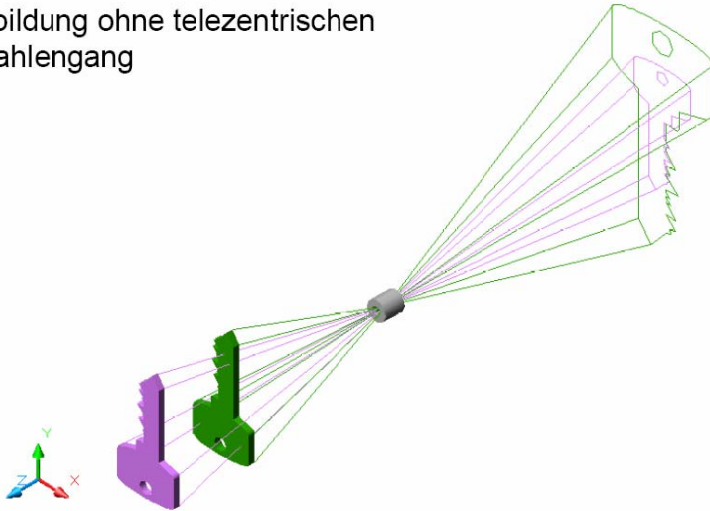
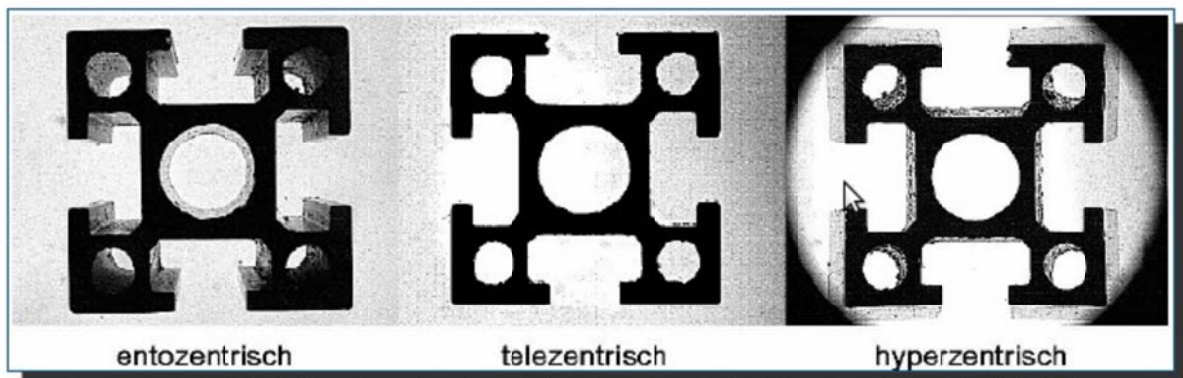
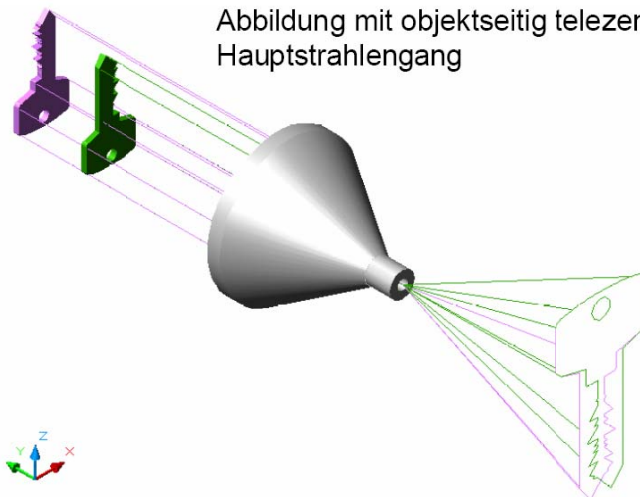


Abbildung mit objektseitig telezentrischem Hauptstrahlengang



Aufnahme eines Profils 25x25x24 mm³ mit verschiedenen Perspektiven

Strahlenoptische Darstellung der unterschiedlichen Perspektiven

(ento-, tele- und hyperzentrische Perspektive)

Wir können also die geometrische Perspektive eines Bildes allein durch Verschieben der bündelbegrenzenden Blende in weiten Grenzen verändern. So weit der Schauversuch.

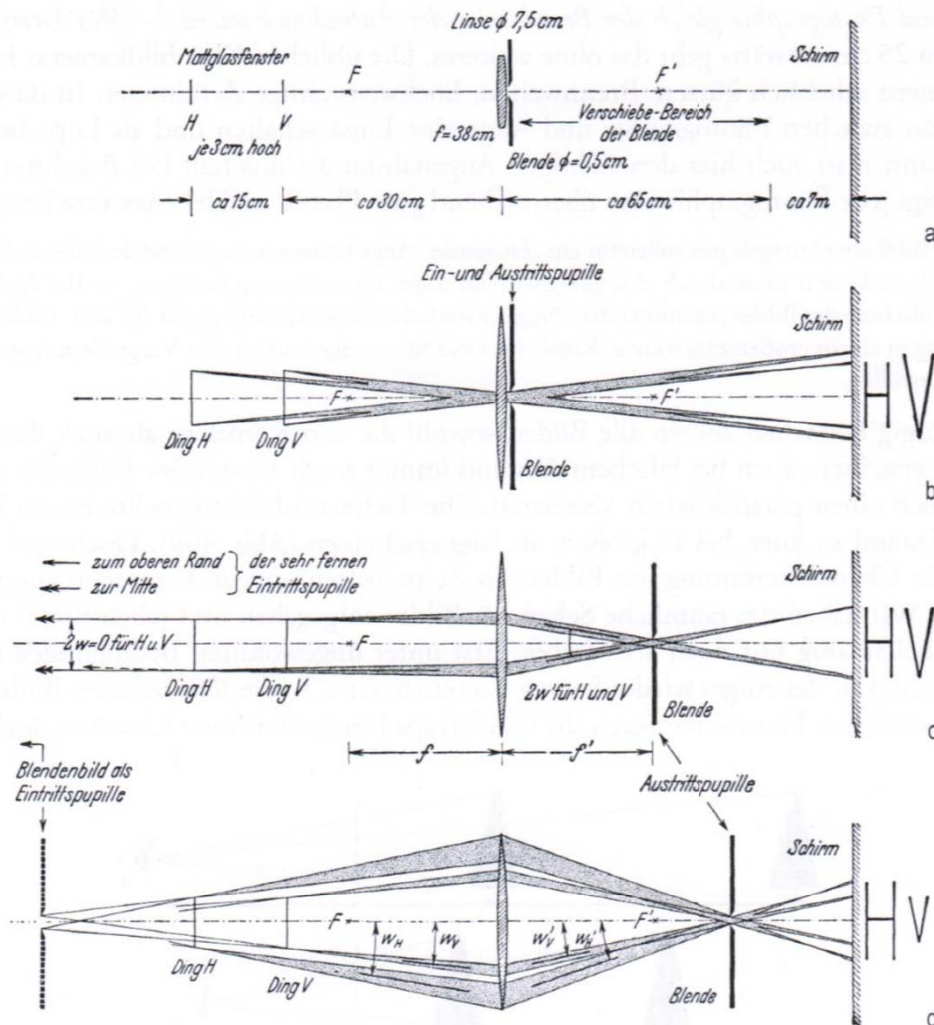


Abb. 408. Einfluß der Lichtbündelbegrenzung auf die Perspektive. — a: Versuchsanordnung. Das eine Fenster ist etwas vor, das andere Fenster etwas hinter der Papierebene zu denken. — b - d: Das Größenverhältnis zwischen **H** und **V** wird nur durch Verschiebung der bündelbegrenzenden Blende geändert. Dingseitig dient jedesmal der Mittelpunkt der Eintrittspupille als Projektionszentrum. Von ihm aus „bezieht sich die Linse“ die Dinge **H** und **V**. In Teilbild c ist der Übersichtlichkeit halber nur das von **V** oben und von **H** unten ausgehende Bündel gezeichnet. In den Zwischenstellungen zwischen b und c liegt die Eintrittspupille als virtuelles Bild rechts von der Blende. (**Videofilm 21**) — Ein guter Freihandversuch zur umgestülpten Perspektive in Teilbild d: Man halte eine Linse von etwa 10 cm Durchmesser und etwa 20 cm Brennweite (Leseglas) etwa 30 cm vor das Auge und besehe sich eine Streichholzschachtel. Dann sieht man die fernen Kanten größer als die nahen.

Quelle:

Lüders; Pohl: „Pohls Einführung in die Physik - Elektrizitätslehre und Optik“ 22. Aufl. S. 255

Aufgabe zur Telezentrie: Digitalkamera

Das Messobjekt, aus der Aufgabe „Schärfentiefe“, soll nun wieder mit einer Linse ($f' = 10 \text{ mm}$) auf den 2/3" - CCD-Sensor (Breite: 8,8 mm; Höhe: 6,6 mm) formatfüllend abgebildet werden. Die zu vermessende Objektstruktur beträgt $y = 2 \text{ mm}$. Der Objektstand sei zunächst $a = -60 \text{ mm}$.

a) Wo liegt das Bild des Objektdetails und wie groß ist es?

Die Lage des CCD-Sensors (Messebene) bleibt im Folgenden konstant. Der Objektstand kann sich aber aufgrund von Führungstoleranzen um bis zu 2 mm verringern.

b) Wo würde das neue Bild bei minimalen Abstand entstehen und wie groß wäre dieses?

c) Welcher systematische Messfehler $\Delta y'$ ergibt sich in der Sensor-/Messebene? (Höhenunterschied der Durchstoßpunkte der Hauptstrahlen in der Messebene)?

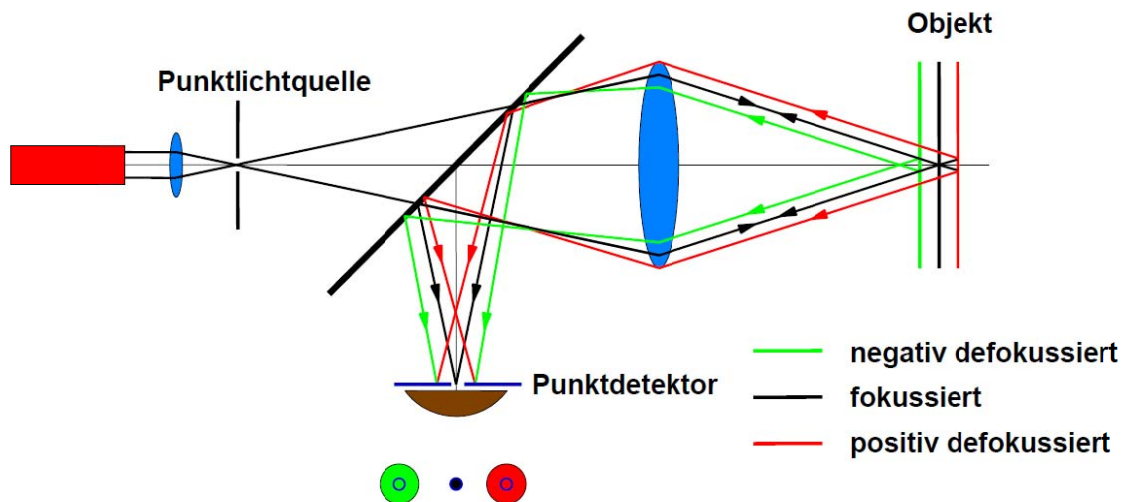
d) Wohin soll die telezentrische Blende positioniert werden und was bewirkt sie?



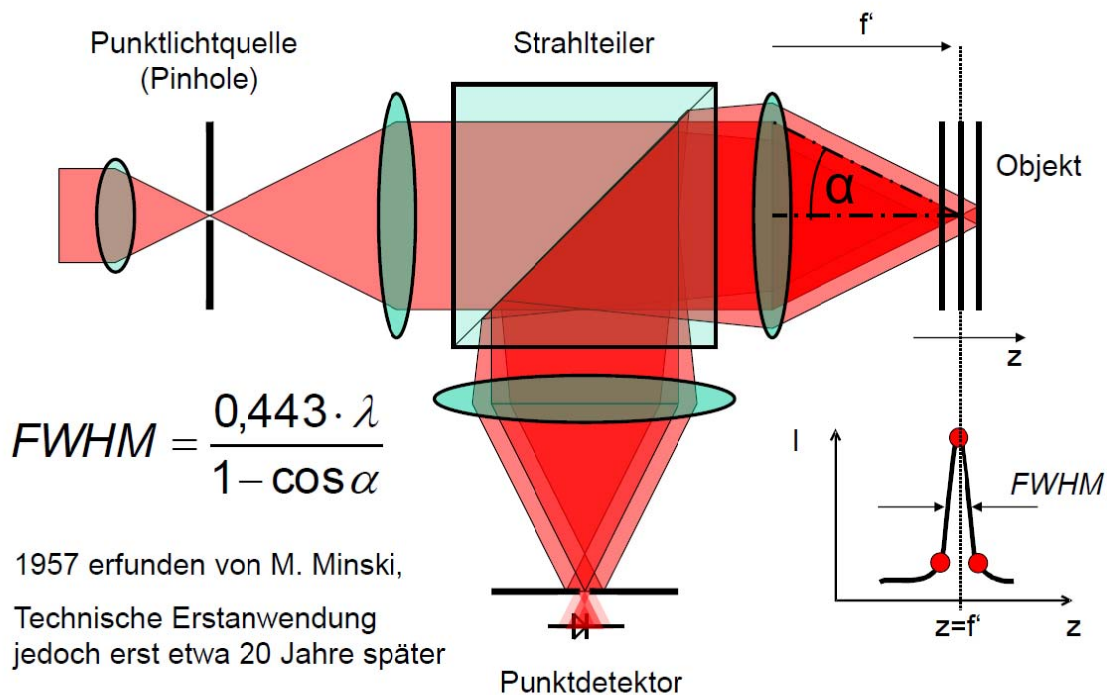
Beispiele für Telezentrische Objektive aus: <http://www.winlens.de/>

Mikroskopische Messtechnik am Beispiel der konfokalen Mikroskopie

Konfokales Detektionsprinzip



Konfokales Verfahren



Aufgabe zum konfokalen Messprinzip (Teil 2)

Der ausgeleuchtete Messfleck (Durchmesser $2\text{ }\mu\text{m}$) wird über die Linse L_2 , den Strahlteiler und Linse L_3 auf die Detektorblende B_2 abgebildet.

- e) Wie groß muss der Durchmesser der Blende B_2 beim Detektor nach geometrischer Optik sein, damit das Bild des Messflecks gerade erfasst wird? Die Brennweite der Linse L_3 betrage $f'_3 = 80\text{ mm}$.

Hinweis: Das Messobjekt befindet sich im Brennpunkt der Linse L_2 .

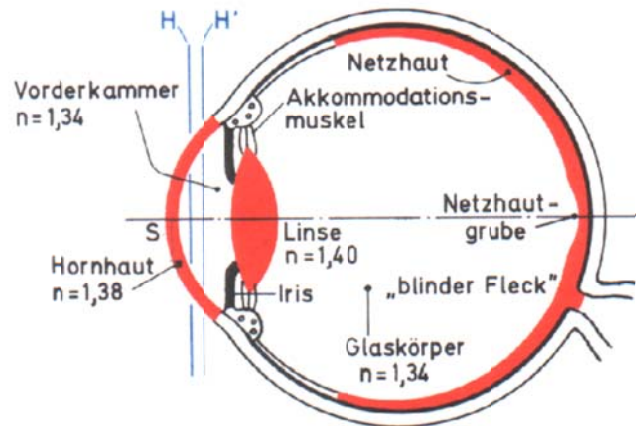
Bei einer Höhenvariation des Objektes in z-Richtung ergibt sich am ortsfesten Detektor ein Signalverlauf mit einem Intensitätsmaximum und einer vom Aperturwinkel und der Wellenlänge abhängigen Halbwertsbreite HWB (engl. Full Width at Half Maximum = FWHM) $= 2\Delta z$.

- f) Wie groß ist die Defokussierung Δz des Objektpunktes, wenn die Intensität im Detektor auf die Hälfte fällt?

Optische Instrumente

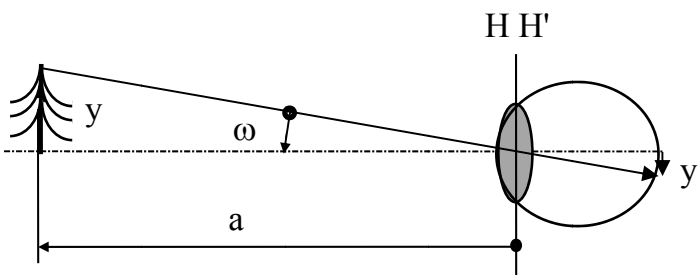
Das Auge

- die optische Abbildung wird durch die gekrümmte Hornhaut und die verformbare Positivlinse erreicht
- das Scharfstellen des Bildes bei veränderter Objektweite geschieht durch Verändern der Brennweite der Augenlinse bei festem Abstand Linse -Netzhaut (Akkommodation)



Der Sehwinkel

Beim **Auge** ist also die Größe y' des wahrgenommenen Bildes auf der Netzhaut ist proportional zum Sehwinkel ω

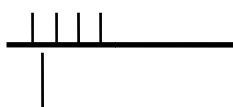


Bei endlicher Objektentfernung gilt:

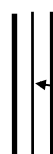
$$\tan \omega = \frac{y}{-a} = \omega \text{ (nach Gauß)}$$

Winkelauflösung des Auges bei

Noniuseinfang: (15 bsec)



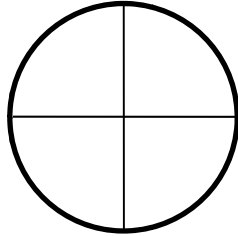
Symmetrieeinfang: (5 bsec)



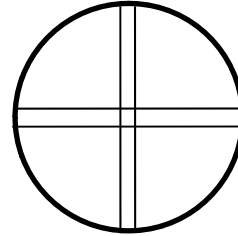
Strichmarke
symmetrisch zum
Doppelstrich (fett)

Messtechnisches Beispiel für Symmetrieeinfang:

a) *Fadenkreuz*
wird abgebildet
auf das
Doppelfaden-
kreuz



b) *Doppel-
Fadenkreuz*
zum
Symmetrieein-
fang von a) in
x- und y-
Richtung



Funktion der optischen Instrumente

Die Aufgabe der optischen Instrumente besteht darin, den *Sehwinkel* zu vergrößern.

Die Vergrößerung eines Instruments ist definiert durch das Verhältnis des Tangens des Sehwinkels mit Instrument zum Tangens des Sehwinkels ohne Instrument (unbewaffnetes Auge):

$$\Gamma = \frac{\tan \omega_M}{\tan \omega_O} = \frac{\omega_M}{\omega_O}$$

Merke: Durch optische Instrumente wird die Winkelauflösung (des Auges) um den Faktor der Vergrößerung des Instruments verbessert.

Der Tangens des Sehwinkels ohne Instrument wird dabei bei Lupe und Mikroskop bezogen auf die deutliche Sehweite von 250 mm. Somit gilt:

$$\tan \omega_O = \frac{y}{250} \quad (\omega_O > 0)$$

Lupe/ Okular

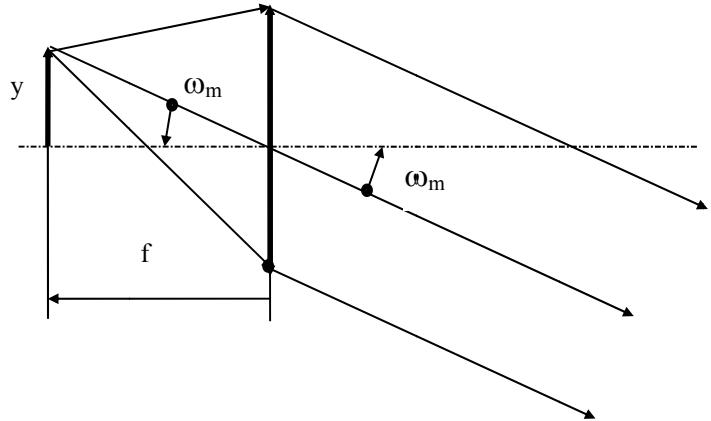
- Spezialfall zur Normung: der Gegenstand steht in der Brennebene der Linse steht
⇒ bildseitig parallele Strahlen ⇒ das Auge ist auf Unendlich akkommodiert
(entspanntes Beobachten)

⇒ Normalvergrößerung:

$$\Gamma_L = \frac{\tan \omega_M}{\tan \omega_O} = \frac{-y}{f} \cdot \frac{250}{y}$$

mit $f = -f'$ folgt:

$$\Gamma_L = \frac{250 \text{ mm}}{f_{\text{Lupe}}}$$



Fernrohre

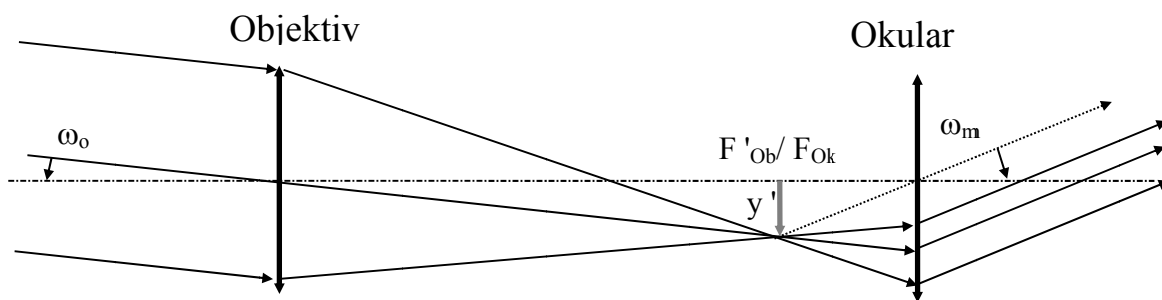
Fernrohre haben die Aufgabe bei großen, aber weit entfernten Gegenständen den Bildwinkel zu vergrößern. Dazu sind zwei Linsen erforderlich:

Das Objektiv erzeugt ein reelles, umgekehrtes Zwischenbild y' vom Objekt; das Okular wird als Lupe zur Betrachtung dieses Zwischenbildes benutzt.

In der Regel sind die Objekte so weit entfernt, dass das Zwischenbild in der bildseitigen Brennebene des Objektivs liegt. Das Okular bildet dieses Zwischenbild vergrößert ins Unendliche ab, so dass dieses mit entspanntem Auge beobachtet werden kann.

Bildseitiger Brennpunkt des Objektivs und objektseitiger Brennpunkt der Okulars fallen zusammen; dies wird als **afokales System** bezeichnet.

Beim **Keplerschen Fernrohr** ist das Okular eine Sammellinse => wir sehen die Objekte umgekehrt (also auf dem Kopf stehend und seitenvertauscht)



Vergrößerung der Fernrohre:

Das betrachtete Objekt erscheint dem Auge ohne Fernrohr unter dem Sehwinkel ω_o . Dies entspricht dem Verhältnis

$$\tan \omega_o = - \frac{y'}{f'_{Ob}}$$

Das Objekt erscheint mit Instrument unter dem Winkel ω_m

$$\tan \omega_m = - \frac{y'}{f_{Ok}} = \frac{y'}{f'_{Ok}}$$

Die Vergrößerung des Fernrohrs ergibt sich somit zu:
(bei Unendlich-Stellung)

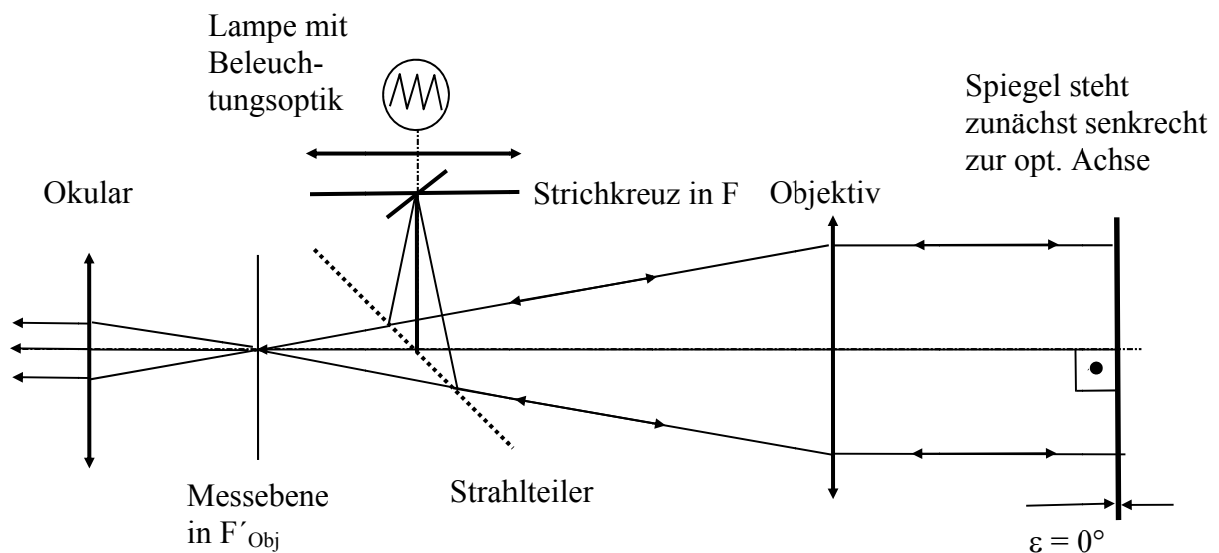
$$\Gamma_{\infty} = \frac{\tan \omega_m}{\tan \omega_o} = - \frac{f'_{Ob}}{f'_{Ok}}$$

Autokollimationsfernrohr

Im Autokollimationsfernrohr sind Kollimator (Beleuchtung) und Fernrohr (Abbildung) in einem Gerät zusammengefasst. Dies lässt sich durch einen Strahlteiler erreichen, welcher die Hälfte der auftreffenden Strahlungsenergie reflektiert und die andere transmittieren lässt.

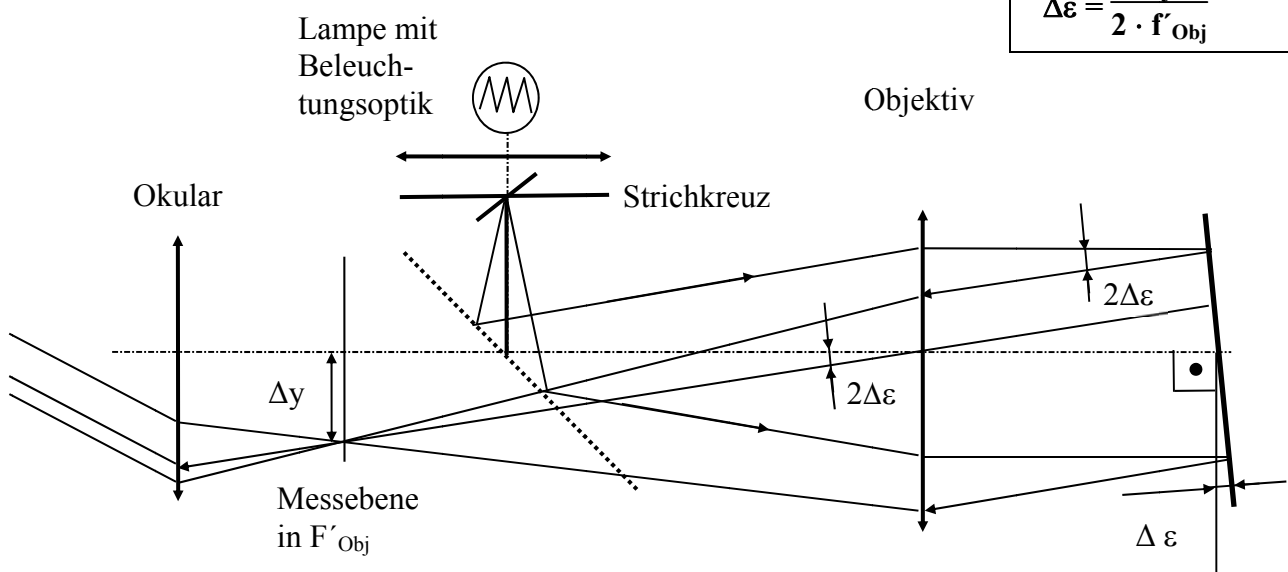
Die Marke M wird aus dem Brennpunkt F des Objektivs über die teildurchlässige Platte T nach Unendlich projiziert. Der am Messobjekt befestigte Spiegel reflektiert das Strahlenbündel in das Objektiv, in dessen Brennebene F' es in die Messskala abgebildet wird.

Prinzipskizze:



AKF-Grundgleichung:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta y}{2 \cdot f'_{\text{Obj}}}$$

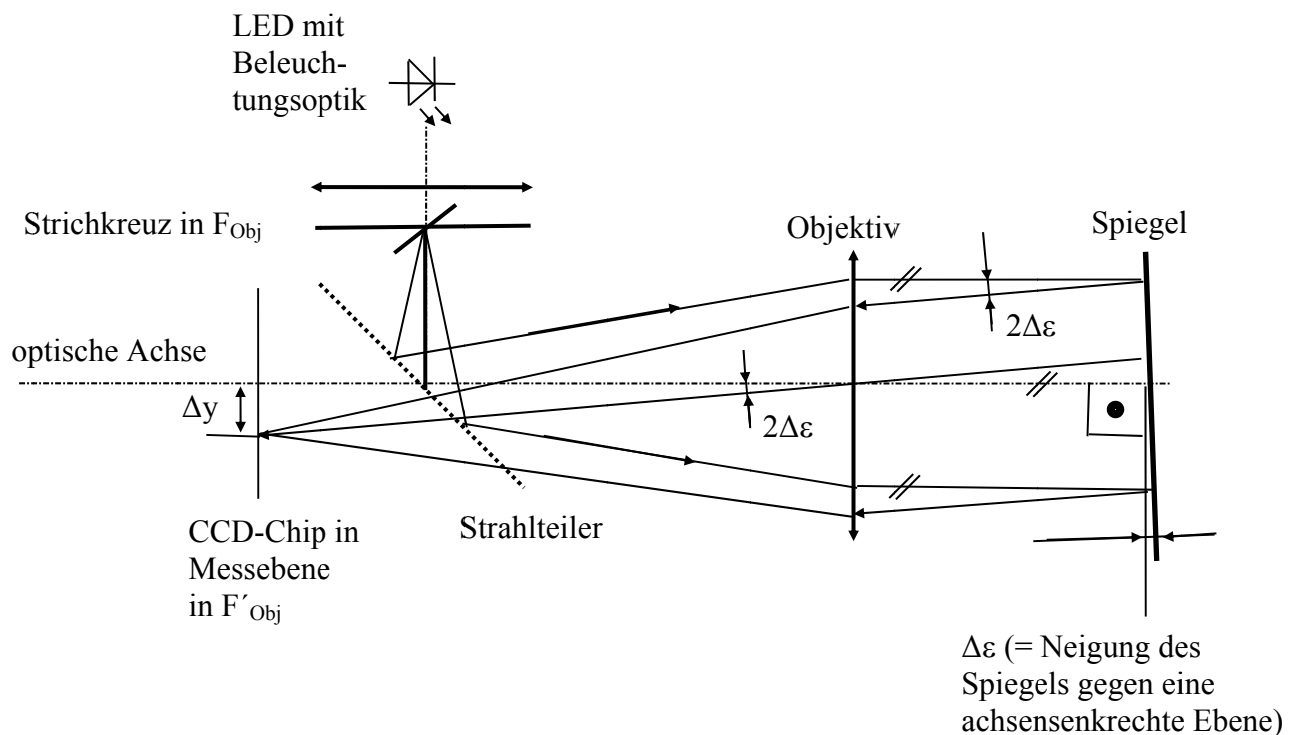


Aufgabe: Winkelmessung

Zur Vermessung des Keilfehlers einer Planparallelplatte soll ein elektronischer Autokollimator mit einem rechteckigen CCD-Sensor eingesetzt. Der Mittenabstand der einzelnen Pixel beträgt $4\ \mu\text{m}$.

Die Brennweite des Kollimatorobjektivs ist $f'_{\text{Obj}} = 500\ \text{mm}$, dessen Durchmesser $50\ \text{mm}$.

Grundprinzip des elektronischen Autokollimators zur Winkelmessung:



- a) Wie lässt sich aus der Verschiebung Δy des Strichkreuzbildes auf dem CCD-Chip auf die Spiegelneigung $\Delta\epsilon$ schließen? Geben Sie die zugehörige Gleichung an.

Die Verschiebung Δy sei **1,26 mm** bei einer Brennweite des Objektivs von **$f'_{\text{Obj}} = 500\ \text{mm}$** .

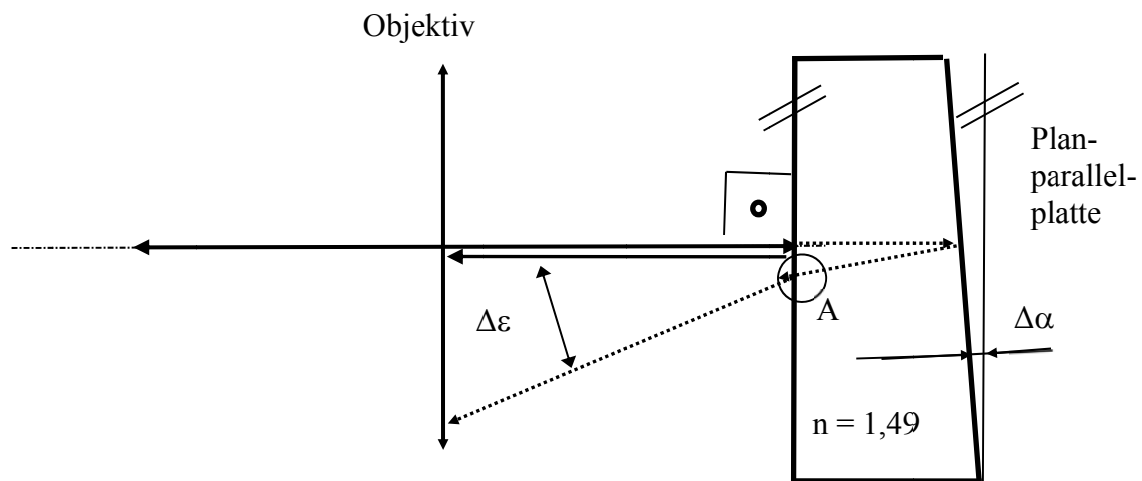
- b) Berechnen Sie die Spiegelneigung $\Delta\epsilon$ in Bogenmaß und im Gradmaß.
c) Wie groß ist die Winkelauflösung des Autokollimators $\Delta\epsilon_{\text{min}}$ in Winkelsekunden, wenn der **Pixelmittenabstand** auf dem CCD-Sensor **$4\ \mu\text{m}$** beträgt. Die genaue Strichkreuzposition kann mit einer Genauigkeit **von einem Fünftel des Pixelmittenabstandes** (Subpixeling) ermittelt werden.

Die Messaufgabe besteht nun darin den sogenannten Keilwinkel einer planparallelen Glasplatte zu bestimmen. Dabei nutzt man die beiden Strichkreuzbilder, die durch Reflexion an der Vorder- und Rückseite der Platte entstehen.

(Anm. Beim Übergang Luft-Glas sowie Glas-Luft werden jeweils ca. 4% der Intensität reflektiert.)

Für die Reflexion an der Rückseite muss die Brechung an der Vorderseite berücksichtigt werden. Zur Berechnung der Ablenkung ist die Brechzahl des Glases nötig, die hier mit $n = 1,49$ angenommen werden kann.

Skizze zur Vermessung des Keilwinkels $\Delta\alpha$:

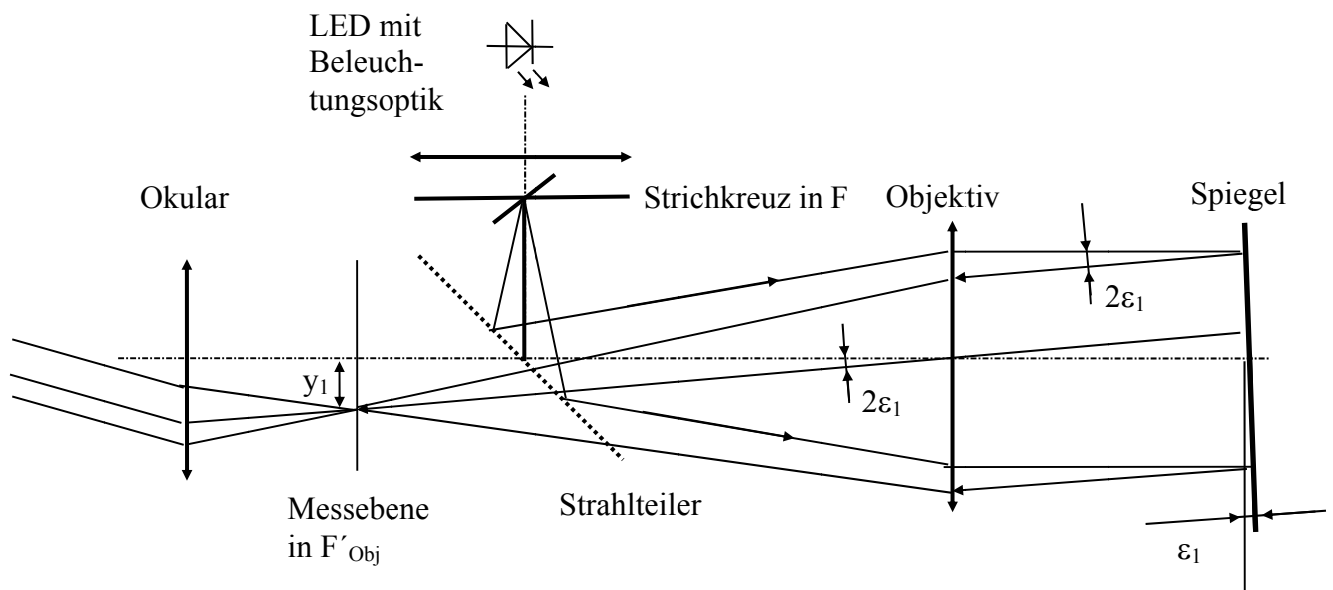


Die Winkeldifferenz der Markenbilder wird mit dem Autokollimator zu $\Delta\epsilon = 20''$ ermittelt.

- d) Wie groß ist der Keilwinkel $\Delta\alpha$, also die Abweichung von der Parallelität der beiden wirksamen Flächen der Planparallelplatte?
Hilfe: Stellen Sie zur Ermittlung des Keilwinkels das Brechungsgesetz an der Stelle A auf.

Statt der Bildaufnahme mit dem CCD-Sensor betrachtet man nun die Messebene vergrößert mit einem Okular der Brennweite $f'_{\text{Ok}} = 25 \text{ mm}$, die Brennweite des Objektivs sei weiterhin $f'_{\text{Obj}} = 500 \text{ mm}$.

- e) Wie groß ist die Okularvergrößerung?
- f) Wie groß ist die Fernrohrvergrößerung des Keplerfernrohrs?
- g) Welche Winkeländerung eines Spiegels kann bei visuellem Symmetrieeinfang mit diesem Autokollimationsfernrohr gerade noch erkannt werden?

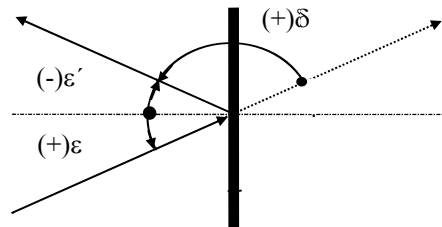


Planspiegel / Prismen

(basierend auf dem Reflexionsgesetz)

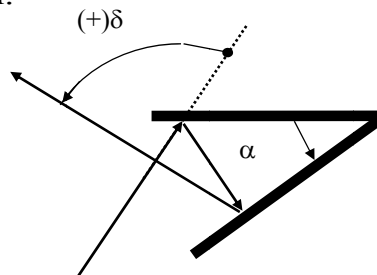
Ablenkung am Planspiegel:

$$\delta = 180^\circ - 2\varepsilon$$



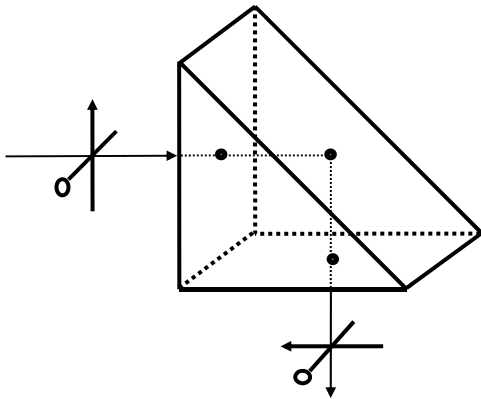
Ablenkung am Winkelspiegel oder bei reflektierenden Innenflächen von Prismen:

$$\delta = 2 \alpha$$

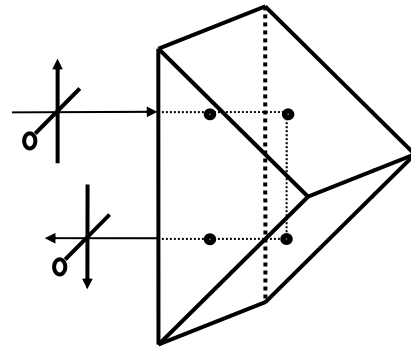


(α ist der eingeschlossene Winkel zwischen zwei komplanaren Spiegeln)

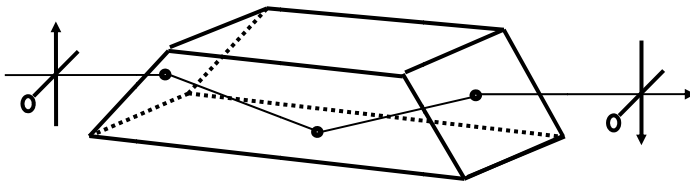
Verschiedene Typen von Reflexionsprismen



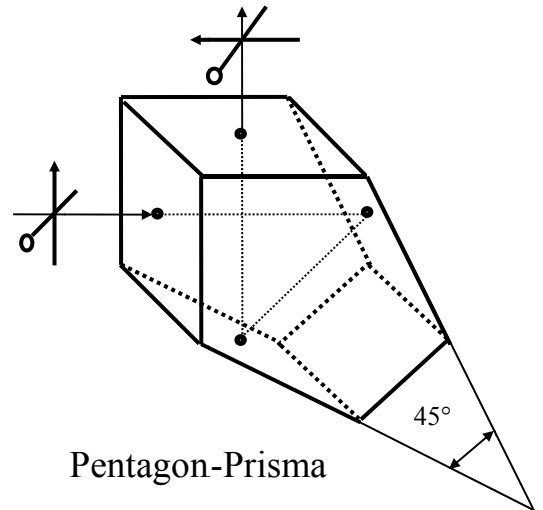
Rechtwinkliges Prisma
(90°-Prisma)



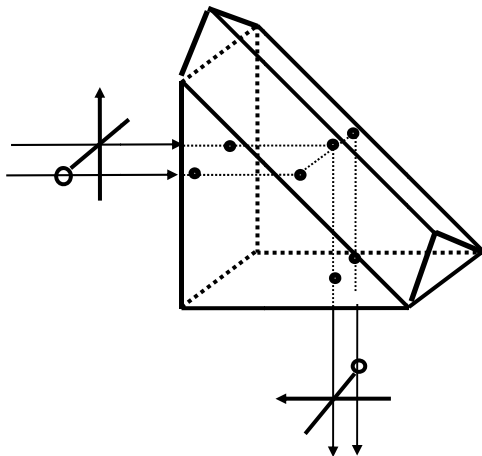
Porro-Prisma
(Dachkantprisma)



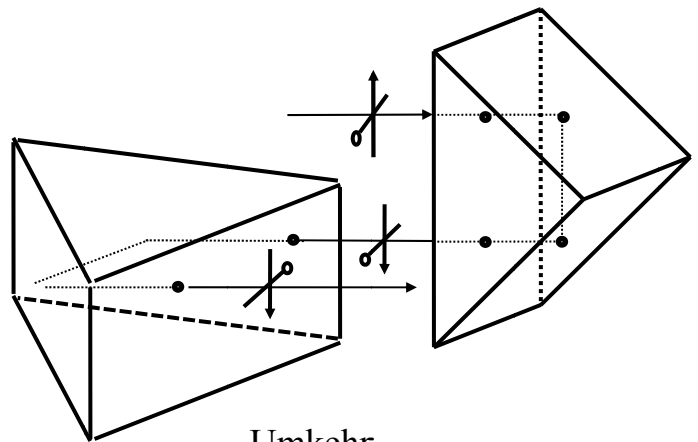
Dove-Prisma
(Wendeprisma)



Pentagon-Prisma



Amici-Prisma
(90°-Prisma mit
Dachkante)

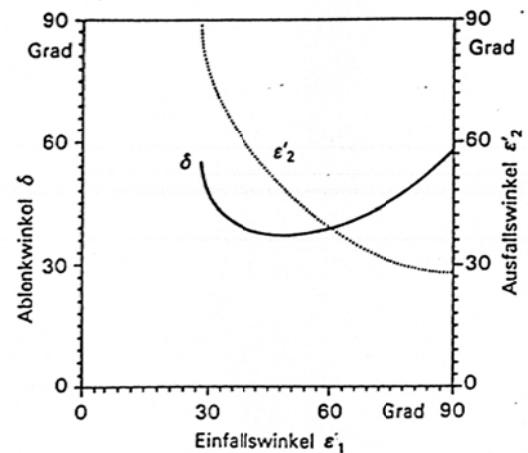
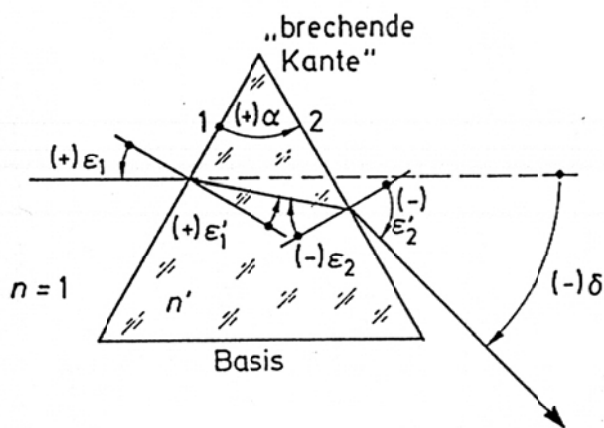


Umkehr-
Prismensystem
nach Porro

Prismen mit Bündelablenkung durch Brechung

Strahlablenkung δ für ein Prisma in Luft mit brechendem Winkel α , Brechzahl n , Einfallswinkel ε_1 und Ausfallswinkel ε'_2 :

$$\delta = \alpha - \varepsilon_1 + \arcsin (\cos \alpha \sin \varepsilon_1 - \sin \alpha \sqrt{ n'^2 - \sin^2 \varepsilon_1 })$$



Ablenkungswinkel δ und Austrittswinkel ε'_2 in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ε_1 bei der Brechung eines Lichtstrahls an einem Prisma; Brechungsindex $n'=1,5$, Prismenwinkel $\alpha=60^\circ$.

Prismenkeile:

bei kleinen brechenden Winkel α und kleinen Einfallswinkel zu einer einfachen Näherungsgleichung: mit $\cos \alpha \approx 1$, $\sin (\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon'_2) \approx \alpha, \varepsilon_1, \varepsilon'_2$; $\sin^2 \varepsilon_1 \approx 0$

erhalten wir für die Ablenkung an Prismenkeilen (für kleine Ablenkswinkel):

$$\delta = - \alpha (n' - 1)$$