

10. Prüfung von optischen Systemen –cont.

10.1 Test-Targets, MTF

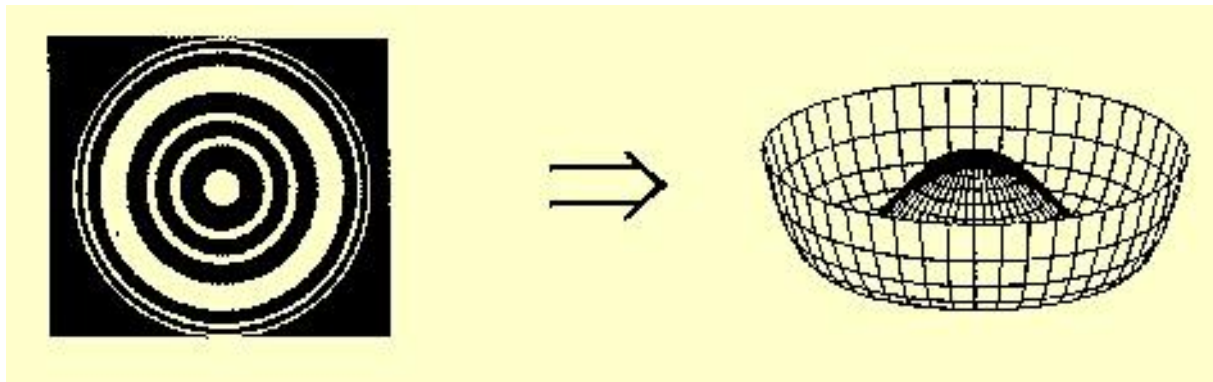
10.2 Interferometrie - Allgemein

10.3 Interferometer-Typen

10.4 Bestimmung der Wellenfront

10.5 Zerlegung der Wellenfront nach Zernike

**10.6 Messung der Wellenfront ohne Interferometer
(Hartmann-Shack)**



Interferogramm

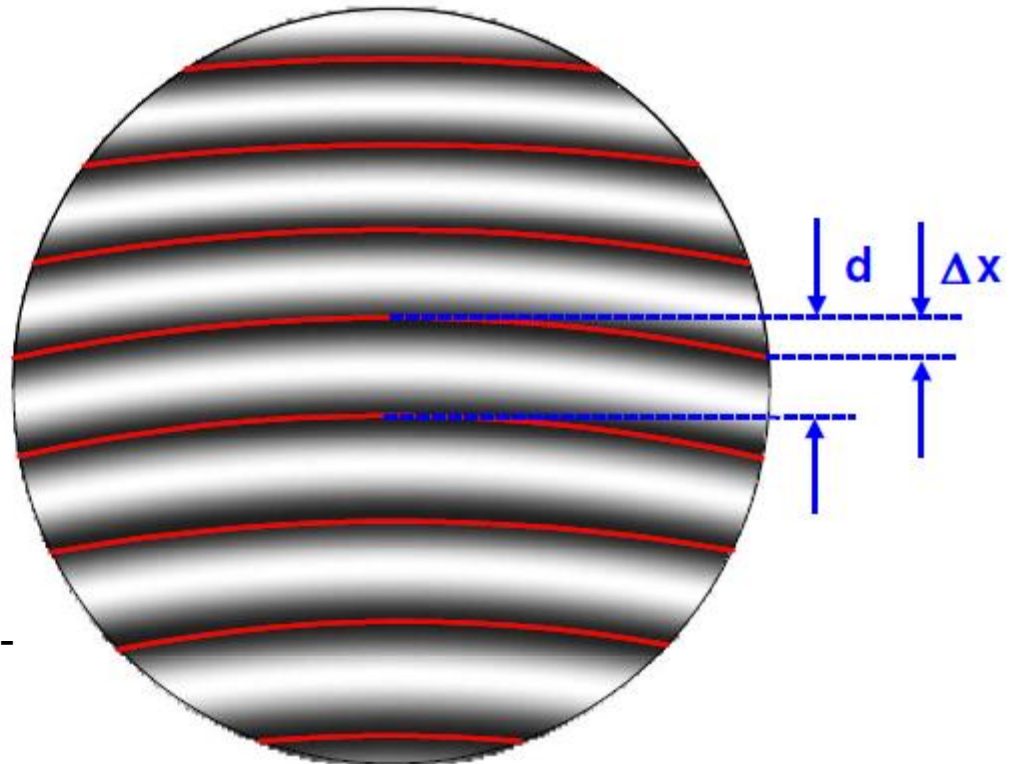
Wellenfläche oder
Oberflächenabweichung

- Streifenabstand d
Streifendurchbiegung Δx
- Konturfehler auf dem Prüfling :

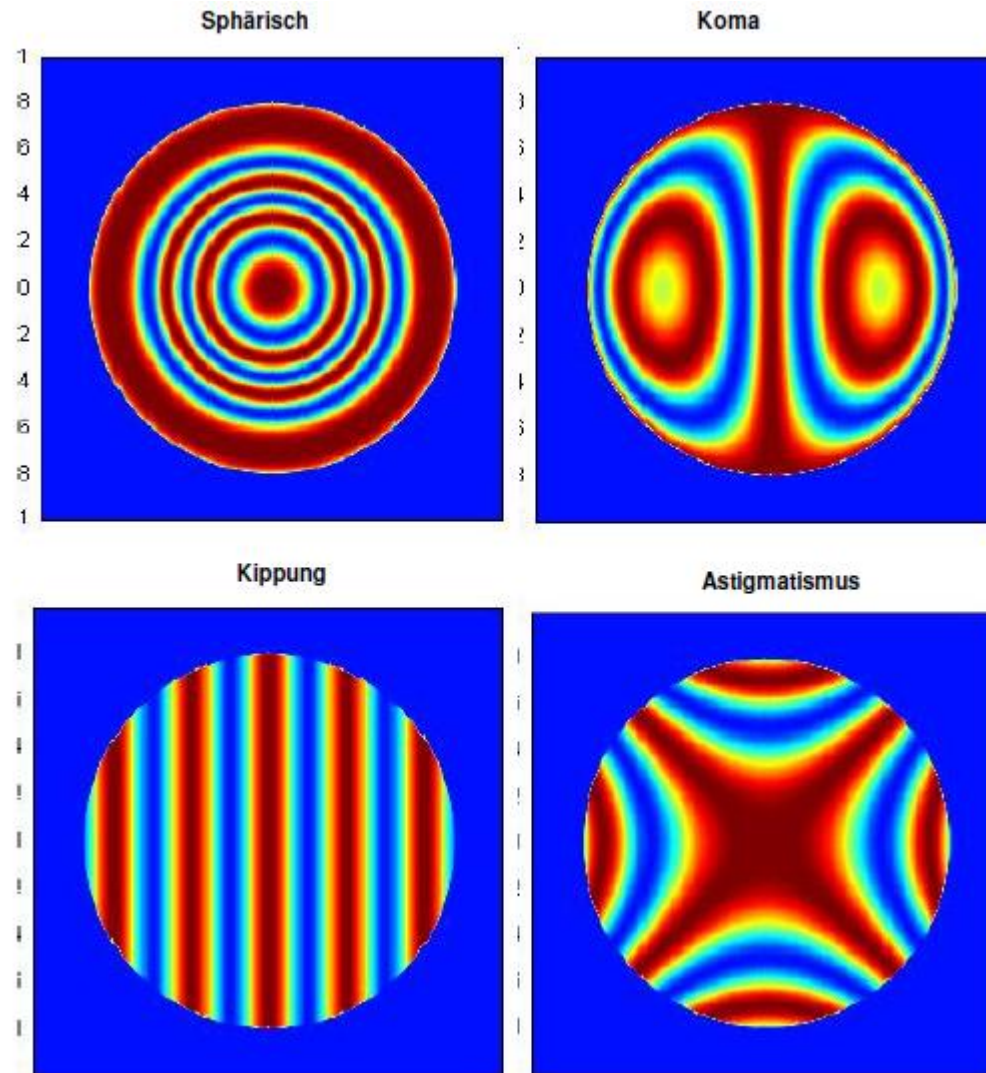
$$\Delta z = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\Delta x}{d}$$

Das Streifenbild ist meist von Kipp und Defokus durch Interferometer-Einstellung überlagert.

→ Kipp und Fokus sind nicht relevant für die Oberflächen-Abweichung und dürfen meist Abgezogen werden.



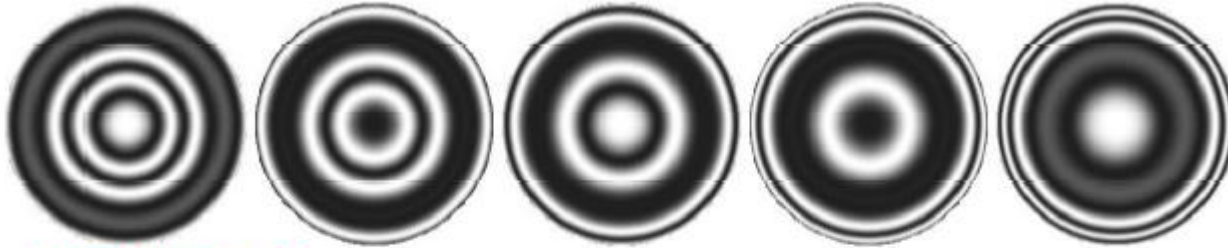
Interpretation eines Interferograms



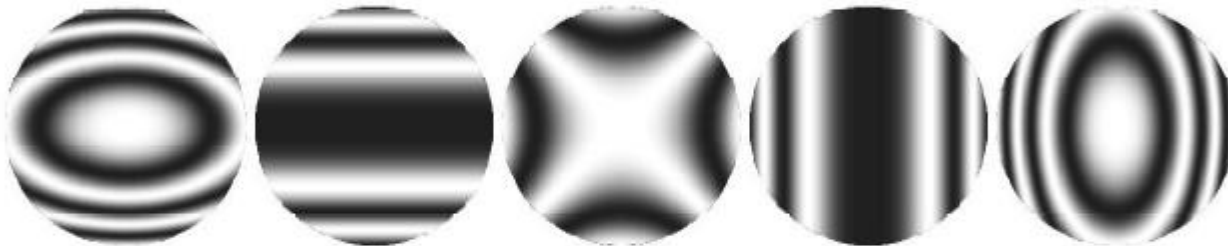
Interpretation eines Interferograms

Änderung des Streifenmusters bei Fokussierung:

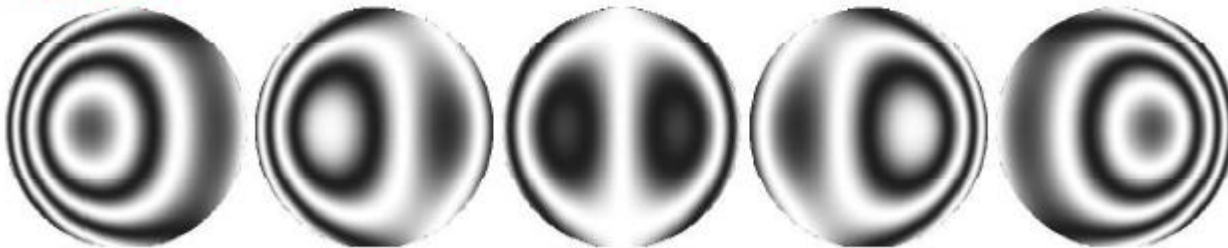
Sphärische Aberration 1λ



Astigmatismus 1λ



Koma 1λ



-1

-0.5

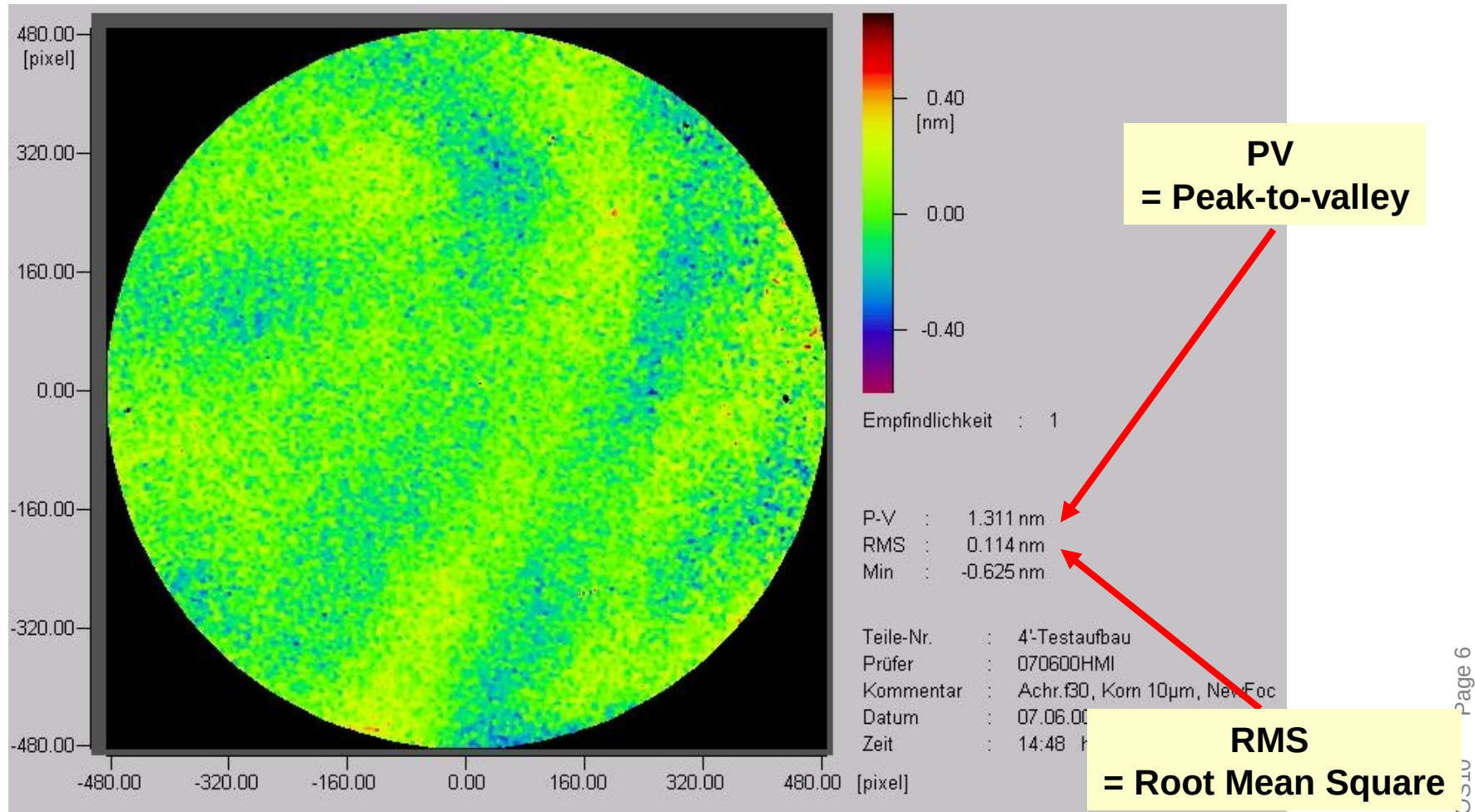
0

+0.5

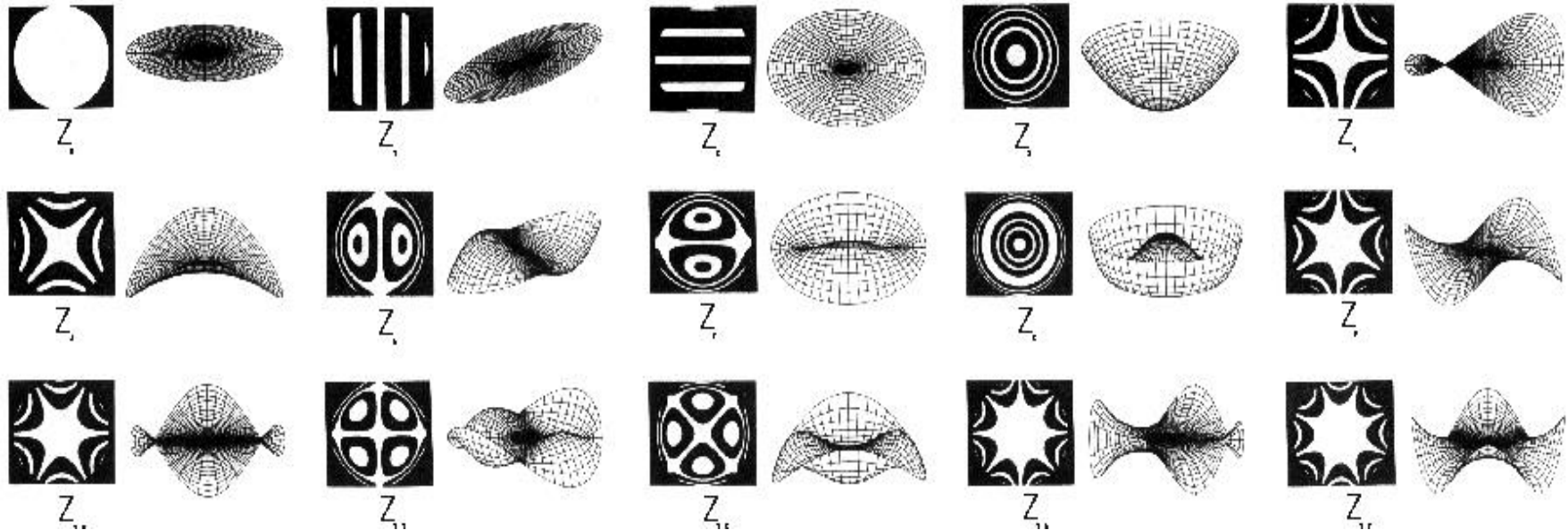
+1

Defokussierung in λ

Komplexere Wellenfrontfehler



Die Wellenfront kann (für runde Pupille) nach Zernike-Polynomen zerlegt werden



- Einer der **Vorteile** der Zernike-Polynome liegt in der Ortho-Normalität :
 - Numerisch stabile Berechnung
 - Entkopplung
 - Direkter Bezug zu den klassischen Aberrationen
 - Minimal-Eigenschaft / Balance niedrigerer Ordnungen
 - Schnelle Berechnung von Rms-Wert und Definitionshelligkeit
- **Voraussetzungen** für die Orthogonalität :
 - Kreisförmige Pupille
 - Homogene Ausleuchtung
 - Keine Diskretisierungseffekte
- Es sind verschiedene **Indizierungen, Skalierungen, Vorzeichen und Koordinatensysteme** üblich :
 - Fringe-Darstellung (Peakwert normiert)
 - Standard-Darstellung (Rms-Wert normiert)
 - Original-Formulierung (nach Zernike)
 - DIN - ISO - 10110 - Darstellung

- Beschreibung der Wellenfront auf einer kreisförmigen Öffnung (normiert auf 1) in Polarkoordinaten :

Radialteil $R(r)$, Azimutwinkels φ

$$Z_n^m(r, \varphi) = R_n^m(r) \cdot \begin{cases} \sin m\varphi & \text{für } m > 0 \\ \cos m\varphi & \text{für } m < 0 \\ 1 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

- Index n : radiale Ordnung

Index m : azimutale Ordnung

n und m sind entweder beide gerade oder beide ungerade, es ist stets $m \leq n$:

- Orthonormalitätsrelation auf dem Einheitskreis

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_{n'}^{m'*}(r, \varphi) d\varphi r dr = \frac{\pi(1+\delta_{m0})}{2(n+1)} \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

- Wellenfront $W(r, \varphi)$ nach Zernikepolynomen entwickelt

$$W(r, \varphi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n c_{nm} Z_n^m(r, \varphi)$$

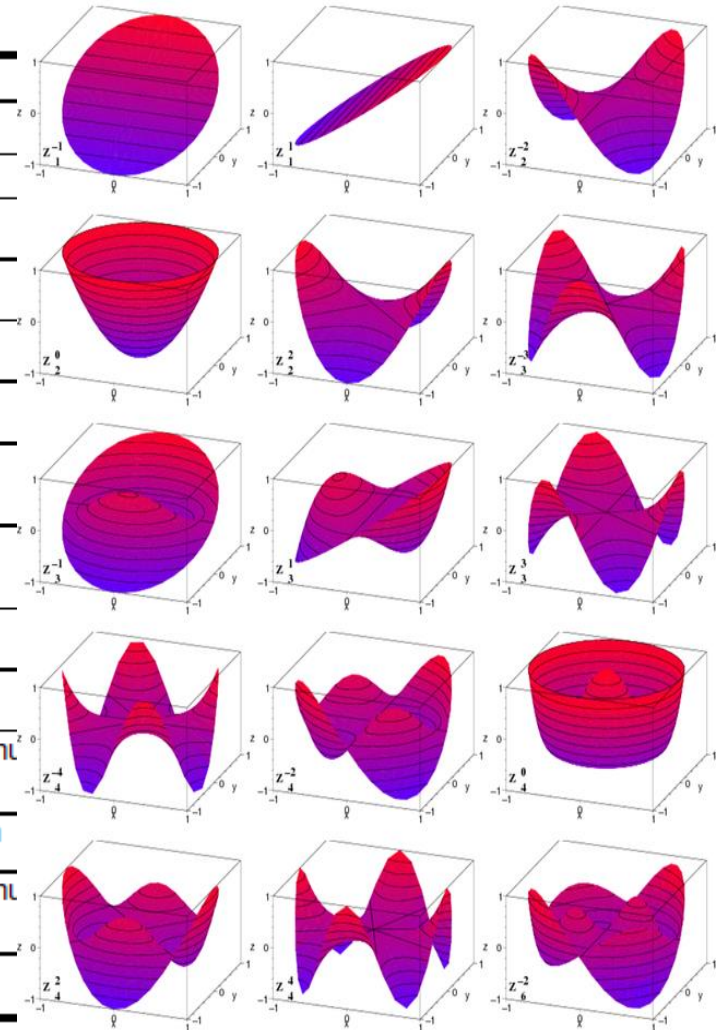
- Koeffizienten aus Überlappintegral

$$c_{nm} = \frac{2(n+1)}{\pi(1+\delta_{m0})} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(r, \varphi) Z_n^{m*}(r, \varphi) d\varphi r dr$$

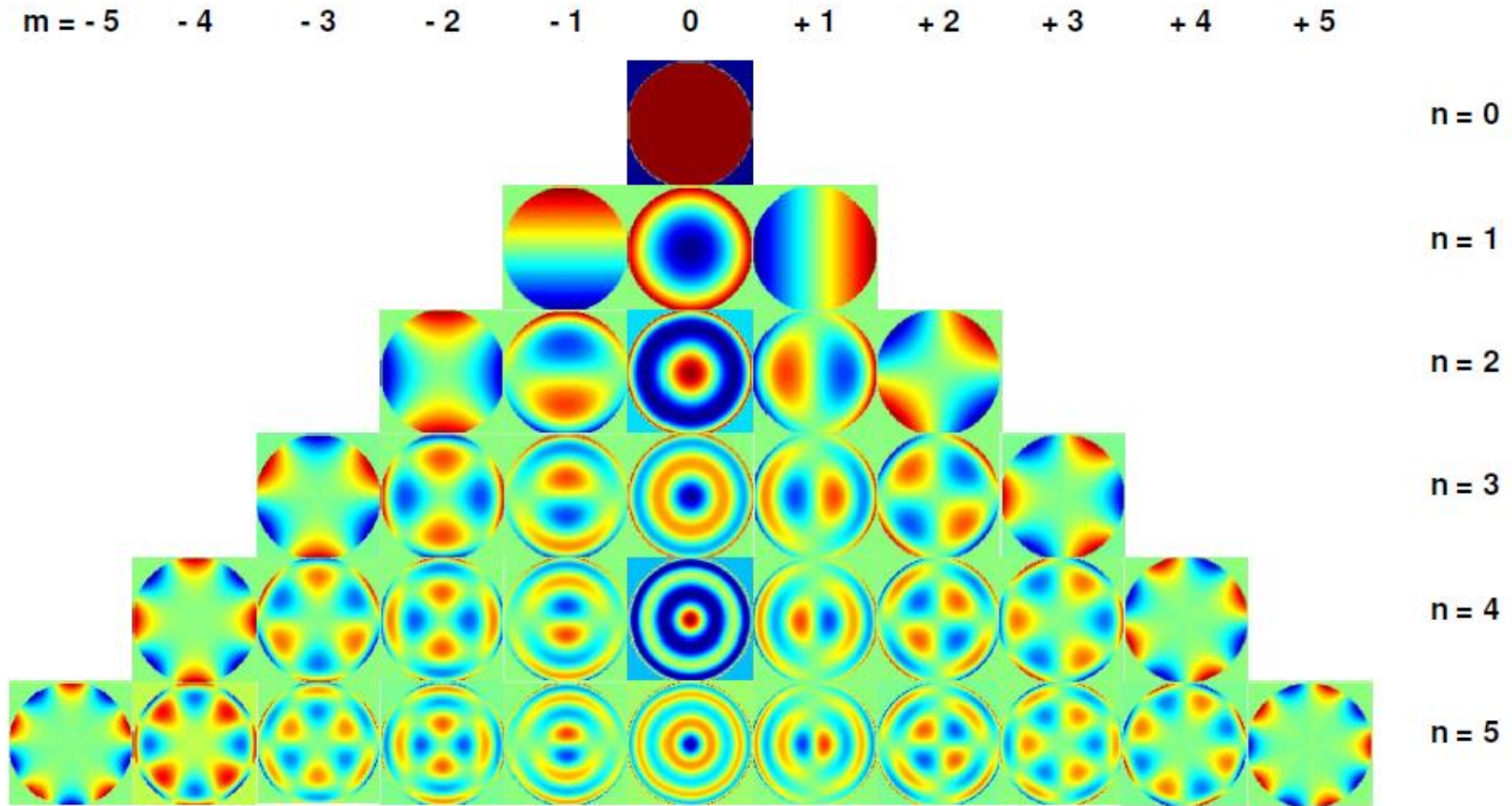
Zernike-Polynome



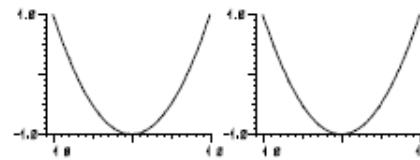
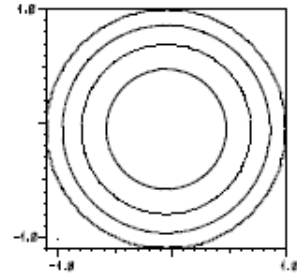
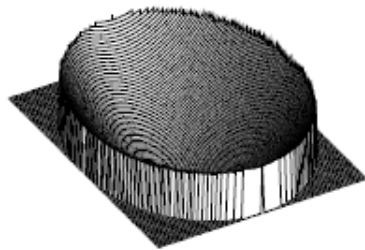
n	m	Polardarstellung	Bedeutung
0	0	1	Konstante
1	1	$r \sin \varphi$	Kippung x-Richtung
1	-1	$r \cos \varphi$	Kippung y-Richtung
2	2	$r^2 \sin 2\varphi$	Astigmatismus 45 °
2	0	$2r^2 - 1$	Defokussierung
2	-2	$r^2 \cos 2\varphi$	Astigmatismus 0 °
3	3	$r^3 \sin 3\varphi$	Dreiblattfehler 30 °
3	1	$(3r^3 - 2r) \sin \varphi$	Koma x-Schnitt
3	-1	$(3r^3 - 2r) \cos \varphi$	Koma y-Schnitt
3	-3	$r^3 \cos 3\varphi$	Dreiblattfehler 0 °
4	4	$r^4 \sin 4\varphi$	4-Blattfehler 22.5°
4	2	$(4r^4 - 3r^2) \sin 2\varphi$	Sekundär-Astigmatismus
4	0	$6r^4 - 6r^2 + 1$	Sphärische Aberration
4	-2	$(4r^4 - 3r^2) \cos 2\varphi$	Sekundär-Astigmatismus
4	-4	$r^4 \cos 4\varphi$	4-Blattfehler 0 °



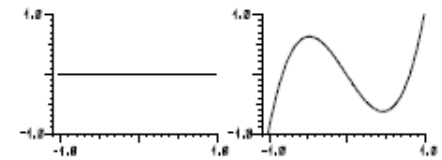
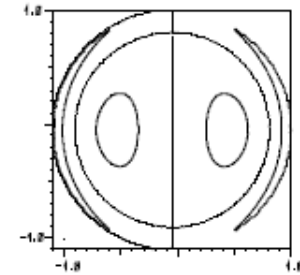
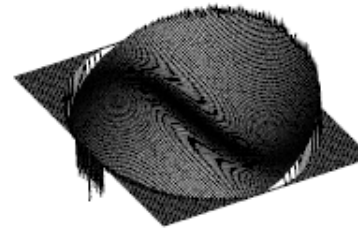
Zernike-Polynome



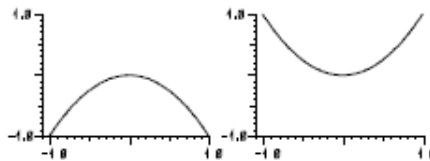
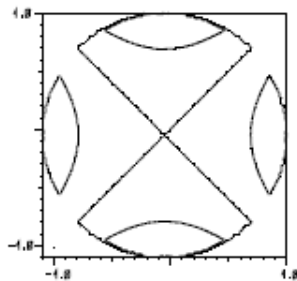
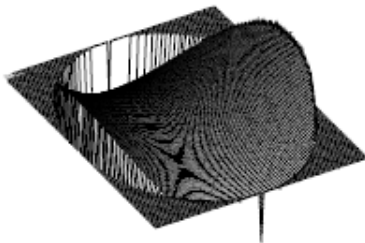
Defokus



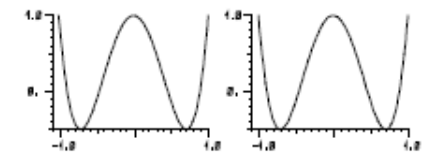
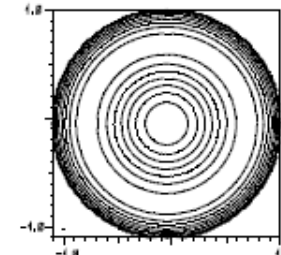
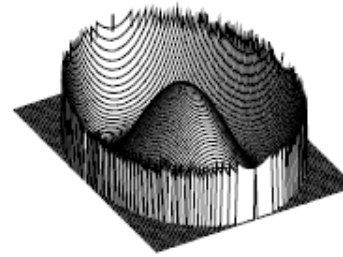
Koma



Astigmatismus



Sphärische Aberration



- Mittlere quadratische Wellenfrontdeformation (W_{Rms} , root mean square)

$$W_{\text{rms}} = \sqrt{\langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{A_{\text{Exp}}} \iint [W(x_p, y_p) - W_{\text{mean}}(x_p, y_p)]^2 dx_p dy_p}$$

Dabei ist

$$A_{\text{Exp}} = \iint dx dy$$

die Fläche der Austrittspupille (in normierten Koordinaten bei kreisförmiger Öffnung : Wert π)

- Peak-valley-Wert W_{pv} : maximale Differenz

$$W_{\text{pv}} = \max [W_{\text{max}}(x_p, y_p) - W_{\text{min}}(x_p, y_p)]$$

- Es gilt für den Rms-Wert bei gegebenen Zernikekoeffizienten angenähert:

$$W_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n,m} c_{nm}^2 \cdot \frac{1 + \delta_{m0}}{2(n+1)}} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{c_{n0}^2}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{c_{nm}^2}{n+1}}$$

Aus der Definition und der Normierung der Zernike-Polynome ergibt sich folgender **Zusammenhang zwischen PV und RMS**

aberration type		definition	mean W_{mean}	peak- valley W_{PV}	root mean square W_{rms}
defocus	Zernike	$c_{20} \cdot (2r_p^2 - 1)$	0	$2c_{20}$	$\frac{c_{20}}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot c_{20}$
spherical aberration	Zernike	$c_{40} \cdot (6r_p^4 - 6r_p^2 + 1)$	0	$\frac{3c_{40}}{2}$	$\frac{c_{40}}{\sqrt{5}} = 0.447 \cdot c_{40}$
astigmatism	Zernike	$c_{22} (2r_p^2 \cos^2 \theta - r_p^2)$	0	$2c_{22}$	$\frac{c_{22}}{\sqrt{6}} = 0.408 \cdot c_{22}$
coma	Zernike	$c_{31} (3r_p^3 - 2r_p) \cos \theta$	0	$2c_{31}$	$\frac{c_{31}}{2\sqrt{2}} = 0.353 \cdot c_{31}$

Das Rayleigh-Kriterium sagt ganz pauschal aus, daß ein System als beugungsbegrenzt und somit gut korrigiert gilt, wenn der pv-Wert der Wellenaberration die Bedingung erfüllt.

$$|W_{PV}| \leq \frac{\lambda}{4} \quad \text{mit} \quad W_{PV} = 2 \cdot c_{20} \quad \Rightarrow \quad c_{20} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Für andere Aberration ergibt sich für das Rayleigh $\lambda/4$ Kriterium:

Aberration	Zernike Koeffizient
Defokus	$C_{20}=0.125$
Spärische Aberration	$C_{40}=0.167$
Astigmatismus	$C_{22}=0.125$
Koma	$C_{31}=0.125$

$$RMS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c_{20}$$

Für Defokussierung führt das Rayleigh-Kriterium auf den Rms-Wert

$$W_{rms}^{Rayleigh} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{192}} = \frac{\lambda}{13.856} \approx \frac{\lambda}{14}$$

Man verallgemeinert diesen Grenzwert auch auf andere Bildfehler :

aberration type		coefficient
		.
defocus	Zernike	$c_{20} = \frac{1}{8} = 0.125$
		.
spherical aberration	Zernike	$c_{40} = \sqrt{\frac{5}{192}} = 0.1614$
		.
astigmatism	Zernike	$c_{22} = \frac{1}{\sqrt{32}} = 0.1768$
		.
coma	Zernike	$c_{31} = \frac{2}{\sqrt{91}} = 0.2097$

Ein ähnlicher Zusammenhang ergibt sich für die Strehl-Definition

$$D_s = 1 - 4\pi^2 \left(\frac{W_{rms}}{\lambda} \right)^2 \quad D_s = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \left[\sum_{n=1}^N \frac{c_{n0}^2}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{c_{nm}^2}{n+1} \right]$$

Im Fall einer reinen Defokussierung führt das Rayleighkriterium mit einer PV-Wellenaberration von $\lambda / 4$ auf die Definitionshelligkeit

$$D_s = \frac{8}{\pi^2} = 0.8106 \approx 0.8$$

Man setzt daher näherungsweise das Rayleigh-Kriterium mit beugungsbegrenzter Korrektur der Forderung

$D_s > 80 \%$ gleich.

aberration type		coefficient	Marechal approximated Strehl	exact Strehl
defocus	Seidel	$a_{20} = 0.25$	0.7944	$\frac{8}{\pi^2} = 0.8106$
defocus	Zernike	$c_{20} = 0.125$	0.7944	0.8106
spherical aberration	Seidel	$a_{40} = 0.25$	0.7807	0.8003
spherical aberration	Zernike	$c_{40} = 0.167$	0.7807	0.8003
astigmatism	Seidel	$a_{22} = 0.25$	0.8458	0.8572
astigmatism	Zernike	$c_{22} = 0.125$	0.8972	0.9021
coma	Seidel	$a_{31} = 0.125$	0.9229	0.9260
coma	Zernike	$c_{31} = 0.125$	0.9229	0.9260

Aus der Forderung
 $D_s > 80 \%$ ergibt sich

aberration type		coefficient for Strehl in Marechal approximation	coefficient for exact Strehl ratio
defocus	Seidel	$a_{20} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} = 0.2251$	$a_{20} = 0.2576$
defocus	Zernike	$c_{20} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = 0.1125$	$c_{20} = 0.1288$
spherical aberration	Seidel	$a_{40} = \frac{3}{4\pi} = 0.2387$	$a_{40} = 0.2502$
spherical aberration with defocus		$b_{40} = \frac{3}{\pi} = 0.9549$	$b_{40} = 1.001$
spherical aberration	Zernike	$c_{40} = \frac{1}{2\pi} = 0.1592$	$c_{40} = 0.1668$
astigmatism	Seidel	$a_{22} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} = 0.3676$	$a_{22} = 0.3010$
astigmatism with defocus		$b_{22} = \frac{\sqrt{6}}{\pi\sqrt{5}} = 0.2191$	$b_{22} = 0.3675$
astigmatism	Zernike	$c_{22} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi\sqrt{5}} = 0.1095$	$c_{22} = 0.1837$
coma	Seidel	$a_{31} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{5}} = 0.2013$	$a_{31} = 0.2137$
coma with tilt		$b_{31} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi\sqrt{5}} = 0.6040$	$b_{31} = 0.6351$
coma	Zernike	$c_{31} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{5}} = 0.2013$	$c_{31} = 0.2117$

Aufgrund des einfachen Zusammenhangs zwischen Zernike-Koeffizienten und

- RMS
$$W_{rms} = \sqrt{\sum_{n,m} c_{nm}^2 \cdot \frac{1 + \delta_{m0}}{2(n+1)}} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{c_{n0}^2}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{c_{nm}^2}{n+1}}$$

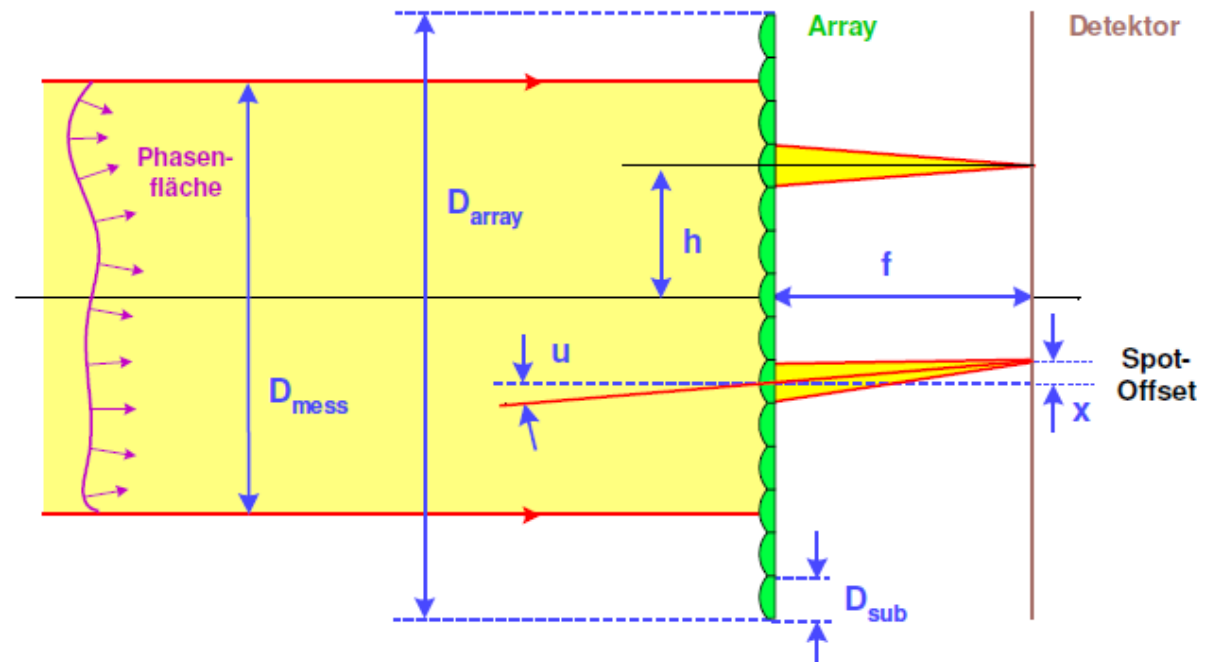
- Strehl
$$D_s = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \left[\sum_{n=1}^N \frac{c_{n0}^2}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{c_{nm}^2}{n+1} \right]$$

➔ Damit können relativ einfach Vorgaben zu erlaubten Zernike-Beiträgen generiert werden. Im Optik-Designprogramm können diese Grenzen dann in Sensitivitäten / Toleranzen übersetzt werden.

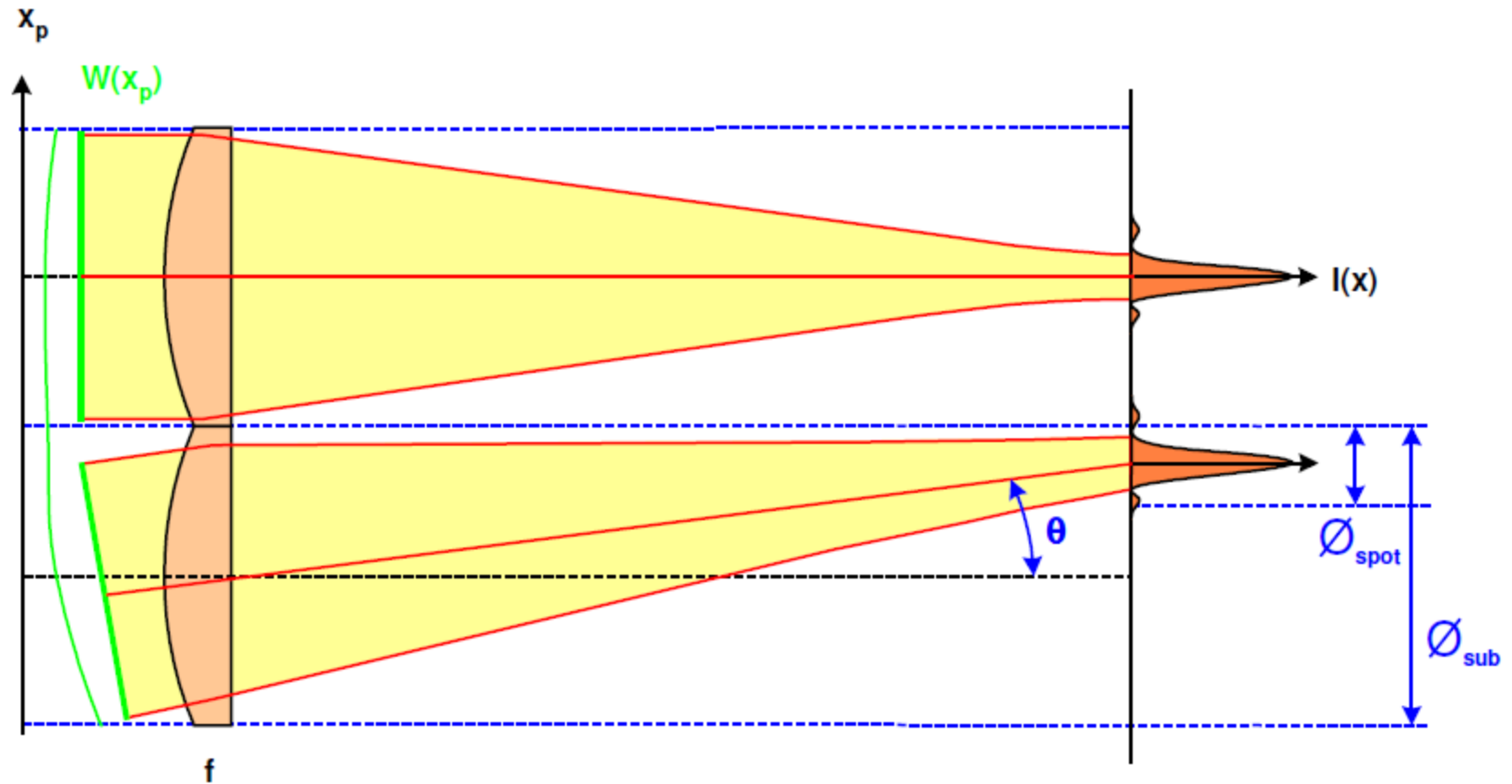
Manchmal ist eine Interferometrische Messung zu aufwändig oder nicht möglich

→ **Alternative: Hartmann-Shack**

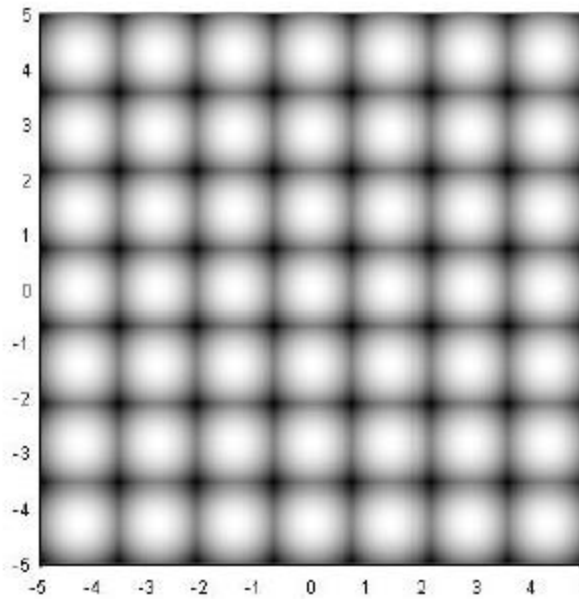
- Array von Subaperturen zerlegt die Wellenfront
- Jede Arraylinse erzeugt einen Spot
- Die Spotschwerpunkte erfahren eine Ablage bei lokaler Neigung der Wellenfläche
- Gradientenmatrix wird integriert :
Wellenfläche



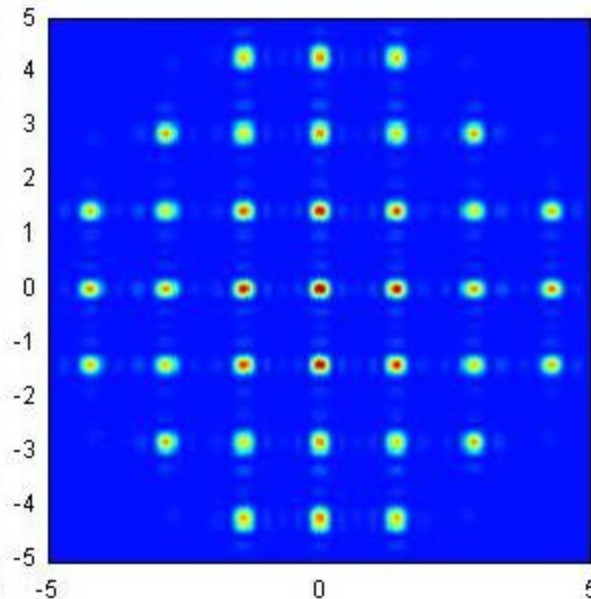
- Dynamikbereich : Verhältnis Spot- zu Subapertur-Durchmesser



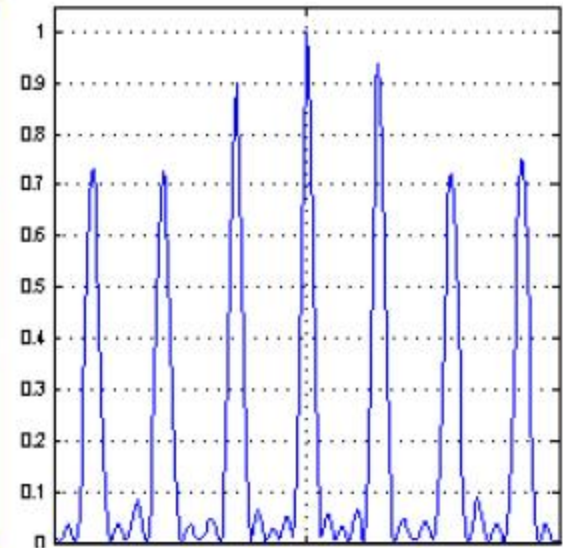
array of phase



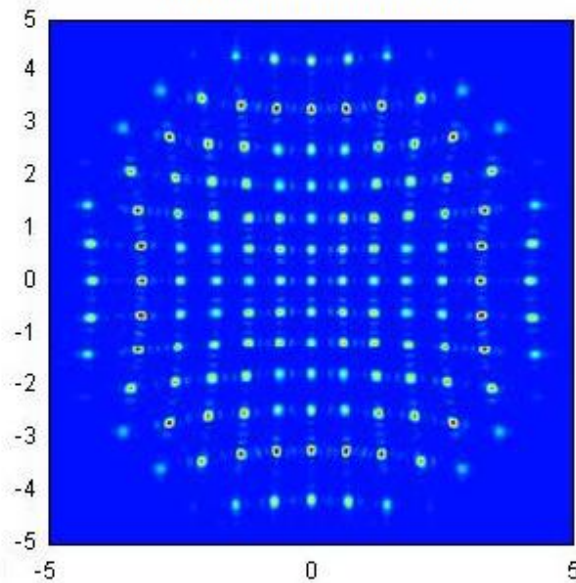
spot pattern



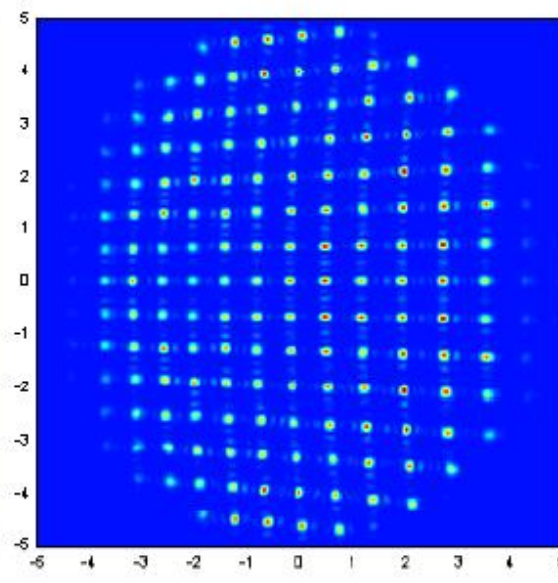
cross section of the spot pattern



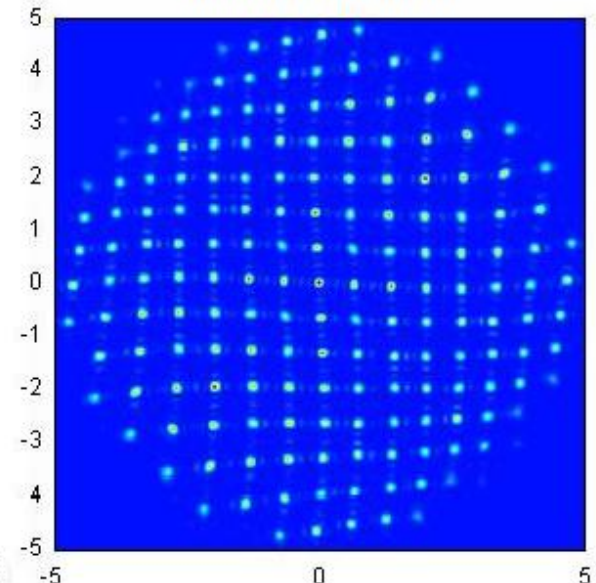
spherical aberration



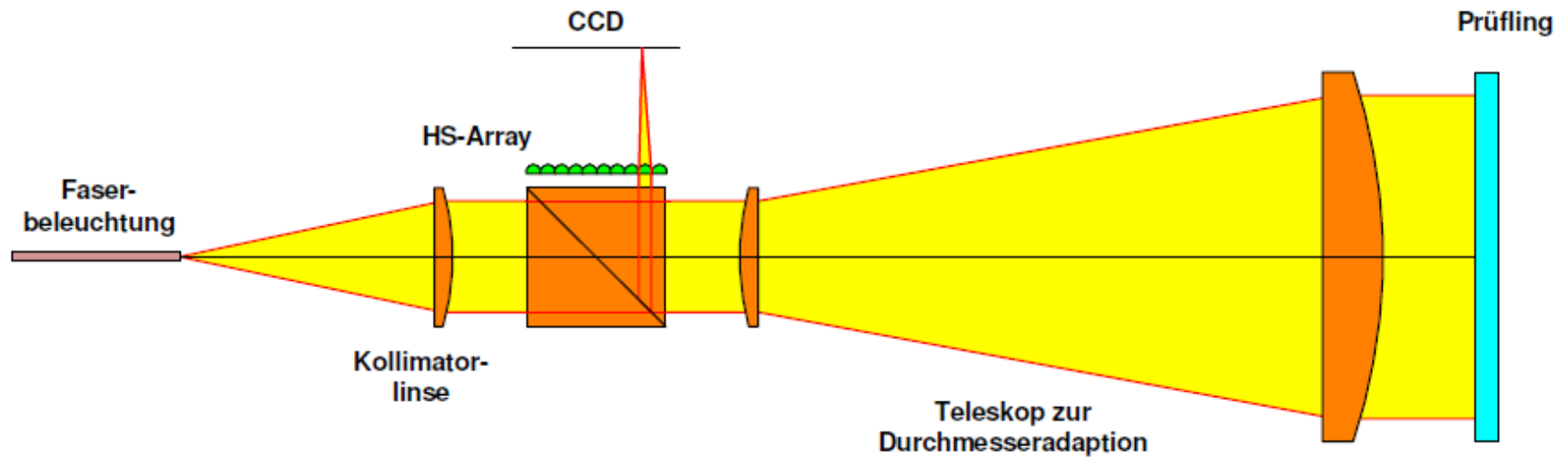
coma



trefoil aberration



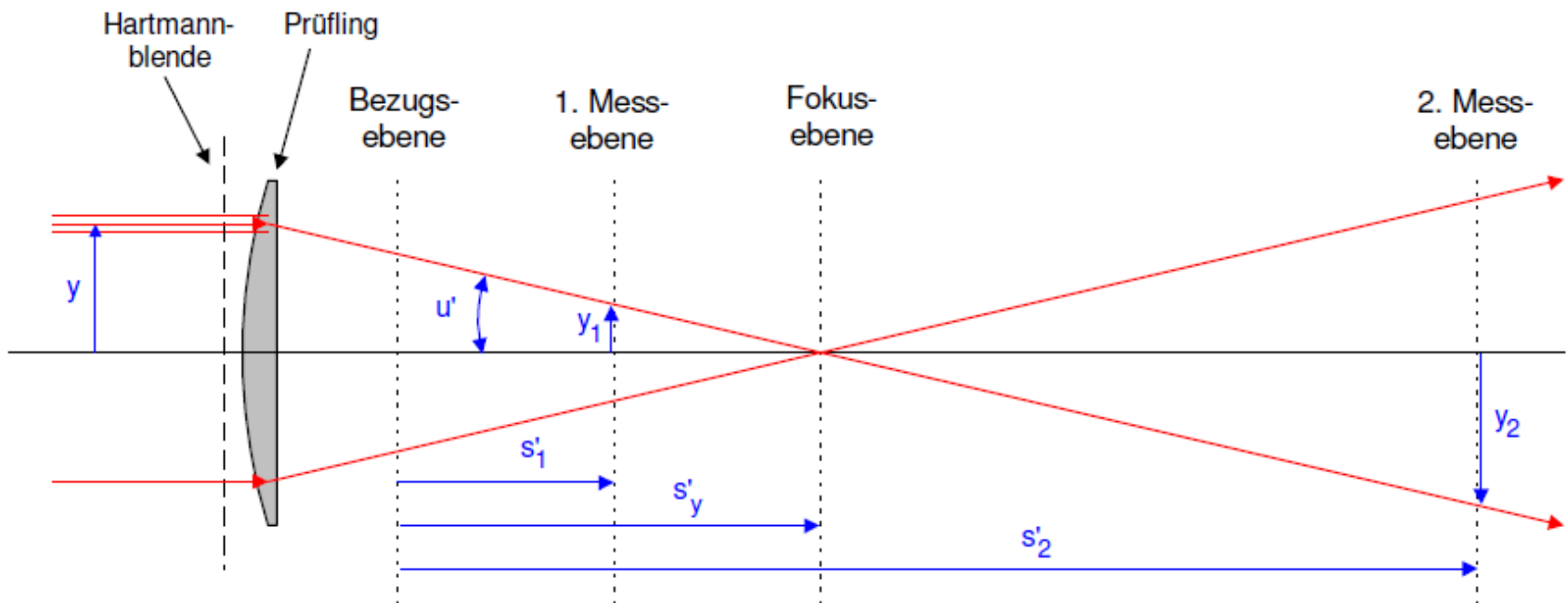
Typischer Aufbau für Komponentenprüfung



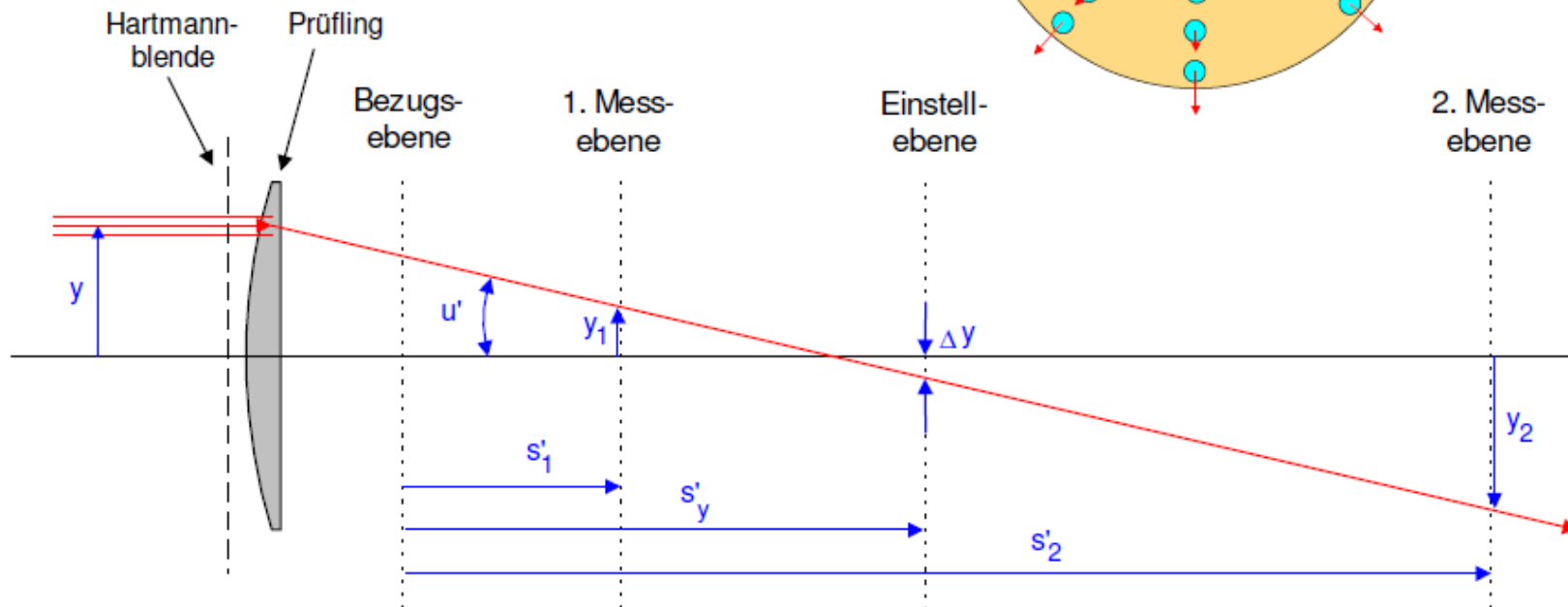
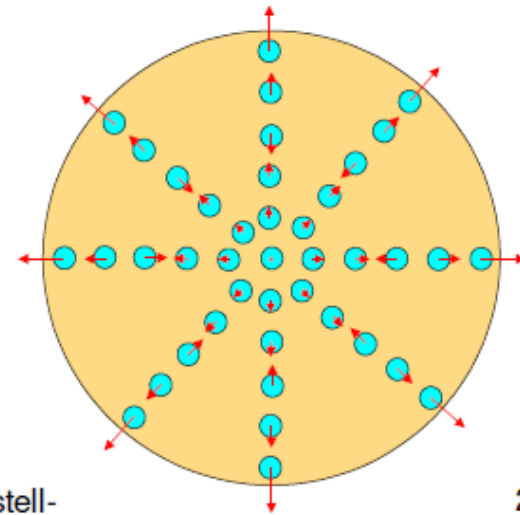
- Lochmaske mit Subaperturen in der Pupille
- Messung der Querabweichungen (Spotschwerpunkte) in zwei Ebenen

Rückrechnung auf die Längsabweichungen

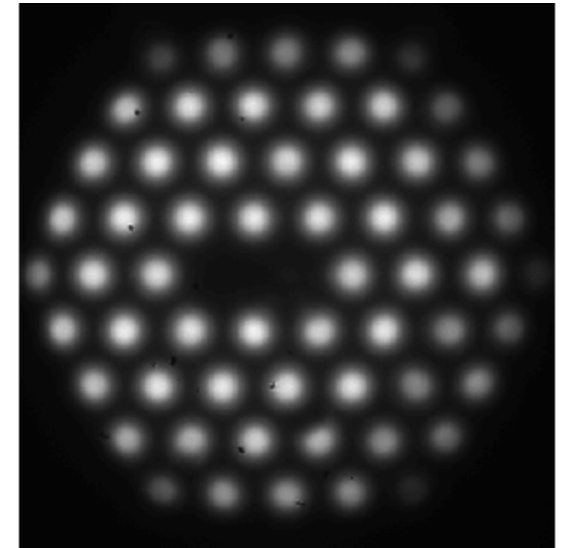
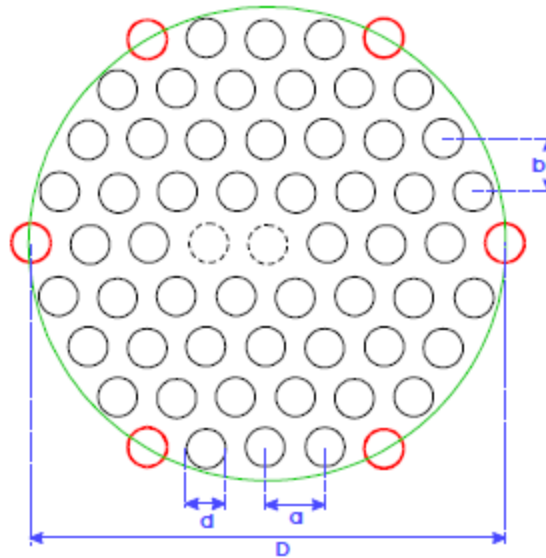
$$s'_y = s'_1 + (s'_2 - s'_1) \cdot \frac{y_1}{y_1 + y_2}$$



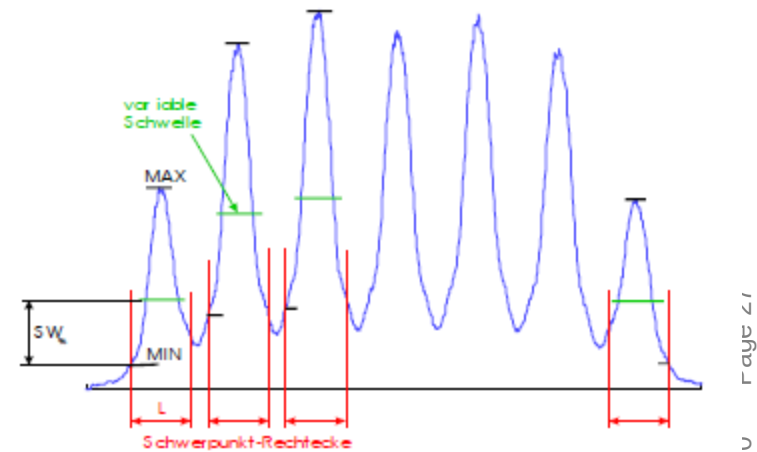
- Die Spotschwerpunkte wandern infolge von Querabweichungen
- Eine symmetrische Eingrenzung der Bildebene ist am günstigsten



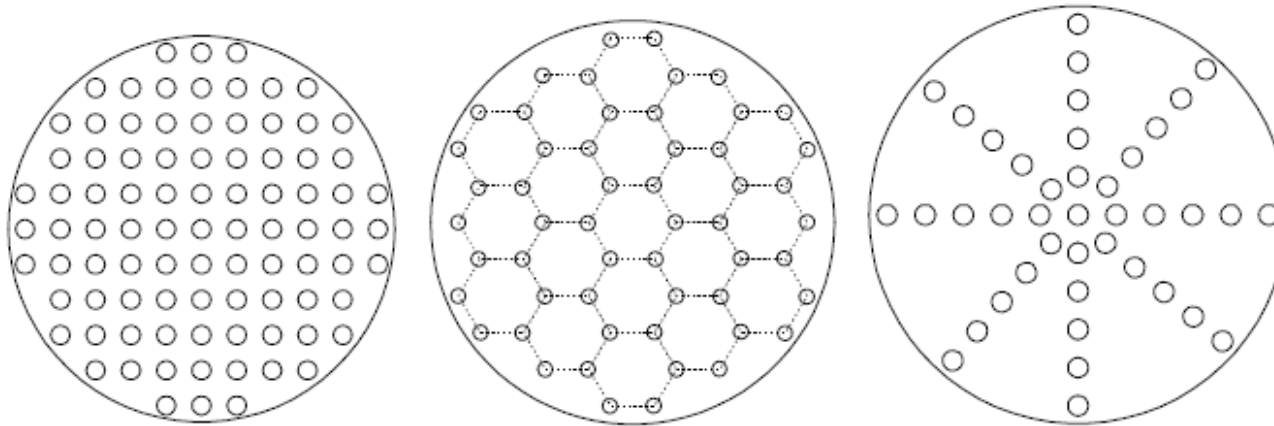
- Praktische Ausprägung der Subaperturen



- Kamerabild und gemessene Intensitätsverteilung



- Mögliche Lochgeometrien (Anzahl, Anordnung, Größe, Abstände) :
bestimmen Genauigkeit und Dynamikbereich



- Die z-Positionen der Meßebenen sind hinsichtlich der Spotgröße kritisch
- Keine Abhängigkeit von Spektralbereich und Polarisation
- Probleme mit der Kohärenz, wenn die Subaperturen phasenkorreliert sind und sich die Spots überlagern (großer Abstand der Meßebenen)
- Kein systematischer Fehler bei Strahlapodisierung
- Sehr stabile Schwerpunktlage, wirksame Mittelung

Eigenschaften von Zernike-Polynomen

- Orthogonale Polynome
- Beliebige kreisförmige Wellenfront lässt sich beschreiben
- Einfacher Zusammenhang zu PV und RMS und Strehl

Hartmann-Shack-Verfahren

- Alternative zu Interferometrie
- Wellenfrontmessung über Lochblende / Subaperturen
- Kommt ohne kohärente / monochromatische LQ aus
- Einfach für endliche Objekt / Bildabstände einsetzbar
- Einfach Messung im Feld