

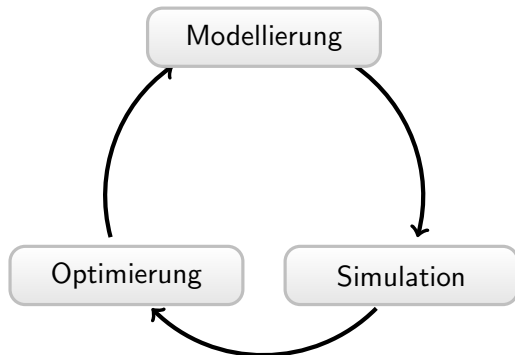
Modellierung, Simulation und Optimierungsverfahren II

Dr. Colin W. Glass

Institut für Höchstleistungsrechnen

09.04.2014

Modellierung – Simulation – Optimierung



Optimierung

Eine Handlung, Verfahren oder Methode um ein Problem so gut wie möglich zu lösen.

Problem

Ein Problem existiert, wenn eine Disparität zwischen dem gewünschten und dem tatsächlichen Zustand festgestellt ist. Lösungen wiederum sind Wege, die verfügbaren Ressourcen zuzuweisen, um diese Disparität zu minimieren. [Z. Michalewicz, D. Fogel: How to solve it]

Gedankenexperiment: Ein triviales Optimierungsproblem

Ein Tischler hat 10 Einheiten Holz, aus jeder Einheit kann er einen Tisch tischlern. Pro Tisch macht er 5 Einheiten Gewinn. Wie viele Tische muss der Tischler tischlern, um seinen Gewinn zu maximieren?

In ein paar Jahren wird das vermutlich "Google Solve" lösen können.

Gedankenexperiment: Ein schwierigeres Optimierungsproblem

Ein Ingenieur möchte ein Bauteil entwerfen, welches möglichst wenig wiegt, jedoch eine Lebensdauer von mindestens zwei Jahren hat.

Gedankenexperiment: Ein schwierigeres Optimierungsproblem

Schwierigkeit:

Das Kriterium Lebensdauer ist aufwendig zu messen (eine Messung dauert Jahre).

Gedankenexperiment: Ein schwierigeres Optimierungsproblem

Mögliches Vorgehen:

- Ein korreliertes Kriterium bestimmen, z.B. Biegesteifigkeit.
- Die minimale Lebensdauer in eine minimale Biegesteifigkeit übersetzen (mit Sicherheitsfaktor ...).
- Verschiedene Bauteile entwerfen.
- Das zulässige Bauteil (minimale Biegesteifigkeit erfüllt) mit minimalem Gewicht wählen.

Dieses Vorgehen kann als (rudimentäre) Optimierung betrachtet werden.

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Ich möchte den bestmöglichen Urlaub machen. In die Evaluierung fließt ein:

- Spass
- Kosten
- Reisezeit
- Facebookprofilwertung
- Erholung
- ...

Offensichtlich ist es sehr schwierig, daraus eine Güte zu formulieren.

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Schwierigkeiten:

Die Kriterien sind nicht präzise quantifizierbar

- Spass (subjektiv, erst im Nachhinein "messbar")
- Kosten (grobe Approximation)
- Reisezeit (je nach Route ungenau, z.B. Stau beim Gotthard)
- Facebookprofilaufwertung (subjektiv, neideinflössende Photo-ops sind im Auge des Betrachters)
- Erholung (subjektiv, erst im Nachhinein "messbar")
- ...

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Schwierigkeiten:

Die Gewichtung der Kriterien ist sehr schwierig (Gehen wir davon aus es soll eine Zahl rauskommen).

- Die Kriterien sind unterschiedlicher Natur.
- Exemplarisch: Wie viel mehr Reisezeit bin ich bereit zu investieren für "3" mehr Spass?

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Schwierigkeiten:

Sowohl die Quantifizierung als auch die Gewichtung ändern sich mit der Zeit (Stresslevel, Gemütslage . . .)

- Exemplarisch: Ich quantifiziere heute den Wert von Erholung, die ich erst in einem Monat einkassieren werde.

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Schwierigkeiten:

Die Quantifizierung der Kriterien ist verrauscht.

- Exemplarisch: Ich bewerte die Erholung einer Urlaubsmöglichkeit mehrmals und erhalte unterschiedliche Ergebnisse ohne triftigen Grund (z.B. hab ich grad Hunger und bewerte ein kulinarisch hochwertiges Land ungleich höher).

Gedankenexperiment: Urlaubsoptimierung

Mögliches Vorgehen:

- Kriterien bestimmen
- Ausschlusskriterien aufstellen (z.B. Verhältnis Reisezeit zu Aufenthaltsdauer, Budget)
- Priorisierung anstelle von Gewichtung (z.B. Spass hat Priorität)
- Diverse zulässige Urlaubsmöglichkeiten erforschen.
- Jeweils zwei vergleichen und eine verwerfen, bis nur eine übrig bleibt.

Dieses Vorgehen kann als (rudimentäre) Optimierung betrachtet werden.

Gedankenexperiment: Gesellschaftsoptimierung (Politik)

Ein Politiker möchte die bestmögliche Gesellschaft herbeiführen. In die Evaluierung fließt ein:

- Zufriedenheit der Bürger
- Freiheit der Bürger
- Wohlstand der Bürger
- Entwicklung der Umwelt
- Entwicklung der Wirtschaft
- ...

Gedankenexperiment: Gesellschaftsoptimierung (Politik)

Nebst der Schwierigkeit, die Kriterien zu quantifizieren, zeigt sich eine weitere, sehr zentrale Schwierigkeit:

Die Zusammenhänge zwischen Massnahmen (z.B. Kampf gegen Korruption oder Terrorismus, Steuersatz, Subventionen) und deren Auswirkungen auf die Kriterien sind derart komplex, dass sie niemand zuverlässig vorhersagen kann.

Gedankenexperiment: Gesellschaftsoptimierung (Politik)

Ein möglicher Ansatz - Divide and Conquer:

- Es wird davon ausgegangen, das Problem sei separabel (Verschiedene Massnahmen beeinflussen sich nicht gegenseitig).
- Die Auswirkungen einer Massnahme werden (qualitativ) postuliert - z.B. Beamtenstatus verringert Korruption und fördert dadurch die Entwicklung der Wirtschaft.

Gedankenexperiment: Gesellschaftsoptimierung (Politik)

Korrespondierendes Vorgehen:

- Das momentan relevanteste Kriterium festlegen.
- Die Massnahme ergreifen, die darauf die grösste (positive) Auswirkung hat.

Dieses Vorgehen kann als (rudimentäre) Optimierung betrachtet werden.

Gedankenexperiment: Gesellschaftsoptimierung (Politik)

Weitere Schwierigkeit: Jede Massnahme ändert das System.

- Exemplarisch: Eine Massnahme ergreifen und wieder rückgängig machen führt nicht zum Ausgangssystem.

Disparität minimieren $\hat{=}$ Güte maximieren

Aus dem eigenen Alltag sind wir alle mit der Frage vertraut:
Was ist besser?

P.s: Eine Grösse die sich auf die Güte auswirkt, sei ein **Kriterium**.

P.p.s: Die Bestimmung der Güte sei die **Evaluierung**.

Leicht quantifizierbare Güte

Glücklicherweise ist die Güte manchmal leicht zu quantifizieren.

Beispielsweise wenn wir nur genau eines der folgenden Kriterien beachten:

- Leistung
- Effizienz
- Kosten
- Gewinn
- Grösse
- Festigkeit
- Gewicht
- . . .

Schwierigkeiten der Gütebestimmung

Nach nur wenigen Gedankenexperimenten haben sich bereits diverse potentielle Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Güte gezeigt.

- Kriterien quantifizieren.
- Kriterien gewichten (gegeneinander abwägen).
- Kriterien sind nicht bekannt (z.B. kennen wir nur eine Grösse, die mit dem Kriterium korreliert ist)
- Kriterien messen (z.B. liegt in der Zukunft, oder ist zu aufwendig)
- Kriterien sind verrauscht
- Kriterien sind zeitabhängig.

Güte quantifizieren: Die Evaluierungsfunktion

Soll eine Optimierung stattfinden, muss es jedoch möglich sein, die Güte einer Lösung zu quantifizieren (zur Not kann auch mit einer Vergleichbarkeit jeweils zweier Lösungen gearbeitet werden).

Die Abbildung einer Lösung auf einen (oder mehrere) Wert(e) sei die **Evaluierungsfunktion**. Dieser Wert sei die **Fitness** der Lösung.

P.s: Es ist grundsätzlich freigestellt, wie diese Abbildung zustandekommt (Formel, Simulation, Experiment, Umfrage, persönliche Meinung ...).

Modellierung der Güte

Wir halten fest:

- Die Evaluierungsfunktion modelliert die Güte von Lösungen, die Fitness.
- Eine Optimierung sucht die beste Lösung gemäss der Evaluierungsfunktion, also die Lösung mit der besten Fitness.

Es wird folglich immer hinsichtlich des Modells optimiert.

Modellierung des Problems: Repräsentation

Um eine systematische Herangehensweise an ein Problem zu ermöglichen, bedarf es einer einheitlichen Darstellung von Lösungen, die **Repräsentation**.

Die Repräsentation ist ein Modell des Problems. Es werden Variablen festgelegt, die das Problem beschreiben (Menge, Art, Wertebereich).

Eine Lösung ist folglich ein Set an Werten - ein Wert für jede Variable des Problems.

Repräsentation

An den Gedankenexperimenten ist ersichtlich, eine Repräsentation festzulegen ist nicht immer einfach.

"Triviales Optimierungsproblem": Anzahl Tische
(ein Wert, ganze Zahlen: einfach)

"Schwierigeres Optimierungsproblem": Geometrie und Material des Bauteils
(kompliziert, jedoch parametrisierbar)

"Urlaub": ein Urlaubsplan
(schwierig: muss abstrahiert werden - z.B. Land, Reisemethode, Unterkunft ...)

"Politik": eine Gesellschaftsform
(sehr schwierig: muss sehr stark abstrahiert und vereinfacht werden - Politisches System, Gesetze, ...)

Gedankenexperiment: triviale Repräsentation

Viele Probleme lassen sich auf eine Parametrisierung zurückführen, z.B. die Parametrisierung eines Motors:

- Der Motor hat n Parameter
- Jeder Parameter hat einen zulässigen Wertebereich.
- Parameter des Motors sind Variablen der Optimierung.

Gedankenexperiment: triviale Repräsentation

Nehmen wir an, der Motor habe 7 Parameter. Jeder Parameter kann einen Wert $[1,10]$ annehmen.

- Das Problem lässt sich durch einen Vektor der Länge n repräsentieren.
- Die Position im Vektor bestimmt, um welchen Parameter es sich handelt.

Optimierungsverfahren

Ein Optimierungsverfahren legt fest, wie die Suche nach der bestmöglichen Lösung durchgeführt wird.

Ein Optimierungsverfahren stellt Lösungen gemäss der Repräsentation dar und verwendet die Evaluierungsfunktion, um deren Fitness zu bestimmen.

Es stellt sich die Frage, welche Möglichkeiten der Suche sich daraus ergeben.

Optimierungsverfahren: Verfügbare Information

Die einzige Information, die über ein beliebiges Problem mit Gewissheit verfügbar ist, besteht in den Fitnesswerten bereits evaluierter Lösungen.

Die meisten Optimierungsverfahren nutzen diese Information. Sie unterscheiden sich in erster Linie, wie diese genutzt wird und welche weiteren Annahmen getroffen werden.

Optimierungsverfahren: Nutzung von Information

Es geht immer darum, anhand einer Lösung und deren Fitness auf die Fitness anderer Lösungen zu schliessen. Beispielsweise können folgende Annahmen getroffen werden:

- Benachbarte Lösungen seien ähnlich gut.
- Die Fitness einer Lösung sei stark korreliert mit der "Güte" von Teilen dieser Lösung.
- ...

Optimierungsverfahren: Ableitung

Die wichtigste zusätzliche Information, die zur Verfügung stehen kann, sind Ableitungen der Fitness nach den Variablen der Repräsentation.

Wenn Ableitungen zur Verfügung stehen, so kann von jeder Lösung bestimmt werden, wie sich die Fitness in Abhängigkeit der Variablen (lokal) verändert.

Dies eröffnet zusätzliche Möglichkeiten, wie die Suche gestaltet werden soll.

Optimierungsverfahren: triviales Gedankenexperiment

Ableitung

Betrachten wir das "triviale Optimierungsproblem" ($k \hat{=}$ Anzahl Tische):

$$\text{Fitness} \hat{=} \text{Gewinn} = 5 * k$$

$$d\text{Fitness}/dk = 5$$

Die Ableitung ist konstant und positiv. Folglich müssen wir k stets erhöhen. k ist jedoch durch die verfügbaren Einheiten Holz limitiert - ein **Constraint**.

Optimierungsverfahren: numerische Ableitung

Lässt sich keine Ableitung bilden, so kann immer dann eine (sinnvolle) numerische Ableitung gebildet werden, wenn sich eine **Distanz** zwischen zwei Lösungen und eine (sinnvolle) Richtung bestimmen lässt.

P.s: Numerische Ableitungen reagieren sehr empfindlich auf Rauschen.

Zusammenfassung

Heute haben wir grundlegende Gedankenexperimente durchgeführt und die ersten Schritte einer (erfolgreichen) Optimierung (eines schwierigen Problems) betrachtet:

- ein Problem feststellen
- eine Repräsentation entwerfen
- eine Evaluierungsfunktion erarbeiten

Später werden wir sehen, dass dies erst die Grundlage bildet.

Ausblick

Wir werden uns dieses Semester mit Optimierung bzw. Optimierungsverfahren befassen.

Der Themenkomplex umfasst in erster Linie:

- Grundlagen der Optimierung
- Schwierigkeiten und Lösungsstrategien
- Übersicht gängiger Optimierungsverfahren
- Modellierung und Simulation im Kontext der Optimierung

Diese Themen werden von der Feststellung eines Problems bis hin zum fertigen (problemspezifischen) Optimierungsverfahren diskutiert.