

I. Stabilität im Sinne von Lyapunov

Wir betrachten im Folgenden Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (0.1)$$

Dabei sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein einmal stetig differenzierbares Vektorfeld (kurz: $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$). Ein Punkt x^* heißt Ruhelage (RL) von $\dot{x} = f(x)$ wenn $f(x^*) = 0$. Ohne Einschränkung kann man annehmen dass $x^* = 0$.

Zeigen!(HA)

Definition 1:

Sei x^* eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und bezeichne $s(t, x_0)$ die Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert x_0 .

x^* heißt stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt so dass gilt:

$$|x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad |s(t, x_0)| < \epsilon \quad (0.2)$$

Eine Ruhelage die nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist, heißt instabil.

Die Ruhelage x^* heißt attraktiv (anziehend), wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x_0) = 0 \quad (0.3)$$

Eine Ruhelage heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.

Die Ruhelage heißt exponentiell stabil, falls es Konstanten $c, k, \alpha > 0$ gibt, so dass für alle $|x_0| < c$ gilt $|s(t, x_0)| \leq k|x_0|e^{-\alpha t}$

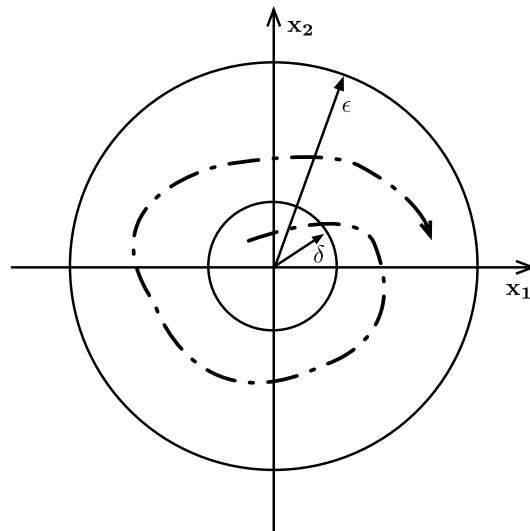


Abbildung 0.1.: Phasenpotrait

Stabilität und Attraktivität sind zwei unterschiedliche Konzepte. Genauer eine Ruhelage kann attraktiv und gleichzeitig instabil sein.

Beispiel 2(Vinograd)

Sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachte

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{r^2(1+r^4)} \quad \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{r^2(1+r^4)}$$

Man kann zeigen:

- Jede Lösung konvergiert in den Ursprung (d.h. 0)
- Für $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ gilt: für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $x_0 \in B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \delta\}$ so dass $s(t, x_0)$ die Menge $B_{\frac{1}{2}}(0)$ verlässt. (Dh die Ruhelage ist nicht stabil)

Beispiel 3(Harmonischer Oszillator)

Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (0.4)$$

Die Eigenwerte der charakteristischen Gleichung $(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$ sind $\pm i\omega$. D.h. die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t) \quad (0.5)$$

Mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ ergibt sich unmittelbar $a_1 = x_0$ und $a_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$. D.h. in der $x - \dot{x}$ -Ebene sind die Lösungen konzentrische Kreis. Startet man in ϵ -Entfernung vom Ursprung, bleibt man immer ϵ entfernt. Somit ist die Ruhelage 0 mit $\delta = \epsilon$ stabil. Der Ursprung ist aber nicht attraktiv.

Sei $\dot{x} = f(x)$ eine Differentialgleichung mit einer asymptotisch stabilen Linearisierung um die Ruhelage x^* . Zuerst schreiben wir die Differentialgleichung um.

Setze $A = Df(x^*) \left(= Jf(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x^*} \right)$, $g(x) := f(x) - A(x - x^*)$ und $y = x - x^*$, dann gilt:

$$\dot{y} = Ay + g(y) \quad (0.6)$$

Weil f stetig diffbar ist, gilt wegen des Satzes von Taylor, dass für jedes $\gamma > 0$ ein $\delta(\gamma) > 0$ existiert, so dass $|y| \leq \delta(\gamma) \Rightarrow |g(y)| \leq \gamma|y|$. Mit Hilfe der Variation der Konstanten erhalten wir:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(y(s))ds \quad (L)$$

Weil $Re(\lambda_i) < 0$ für alle EW λ_i gilt $\exists \alpha > 0$:

$$Re(\lambda) < -\alpha < 0$$

Des weiteren gilt, für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $K > 0$ so dass gilt:

$$|e^{tA}v| \leq Ke^{-\alpha t}|v| \text{ fuer } t \geq 0 \quad (*)$$

Es gilt $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ sei v ein Eigenvektor, dh $Av = \lambda v$, dann folgt (*) sofort durch einsetzen.

Falls $|y| \leq \delta$ ist, gilt mit ? und (*) aus (L) folgt

$$|y(t)| \leq Ke^{-\alpha t}|y_0| + Ky \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|y(s)|ds \quad (0.7)$$

Setze $\xi(t) = e^{-\alpha t|y(t)|}$. Dann gilt

$$\xi(t) \leq K\delta + K\gamma \int_0^t \xi(s)ds \quad (**)$$

Lemma 4(Gronwall)

Sei $g, k : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $a > 0$ $k(t) \geq 0$.
Angenommen

$$g(t) \leq c + \int_0^t k(s)g(s)ds \quad (0.8)$$

für alle $0 \leq t \leq a$. Dann gilt für alle $t \in [0, a]$

$$g(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds} \quad (0.9)$$

Beweis:

$G(t) := c + \int_0^t k(s)g(s)ds$ g, k stetig $\Rightarrow G$ stetig diffbar, $G(0) = c$ Es gilt: $\frac{d}{dt}G(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t)$ d.h. $\dot{G} - kG \leq 0$

Multiplikation mit $e^{-\int_0^t k(s)ds}$ gibt:

$$e^{-\int_0^t k(s)ds} \left(\dot{G} - kG \right) = \frac{d}{dt} \left(G(t)e^{-\int_0^t k(s)ds} \right) \leq 0 \quad (0.10)$$

Integration liefert: $G(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}$, weil $g(t) \leq G(t)$ gilt die Behauptung.

Wir verwenden Lemma 4 um (**) abzuschätzen:

$$\xi(t) \leq K\delta + K\gamma \int_0^t \xi(s)ds \Rightarrow \xi(t) \leq K\delta e^{K\gamma t} \Rightarrow |y(t)| \leq \delta e^{-(\alpha - K\gamma)t} \quad (0.11)$$

D.h. solange $\gamma < \frac{\alpha}{K}$, gilt $|y(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $y(t)$ bleibt durch $K\delta$ beschränkt für alle $t \geq 0$.
Ist $|y_0| < \delta$, dann gilt $|y(t)| < K\delta =: \epsilon$

Satz 5:

Sei f einmal stetig differenzierbar und bezeichne A die Matrix der Linearisierung um x^* . Angenommen die Realteile der Eigenwerte von A sind negativ, dann ist x^* asymptotisch stabil.

II. Direkte Methode von Lyapunov

Beispiel 6()

Gegeben sei der folgende Schaltkreis Die zugehörigen Differentialgleichungen sind:

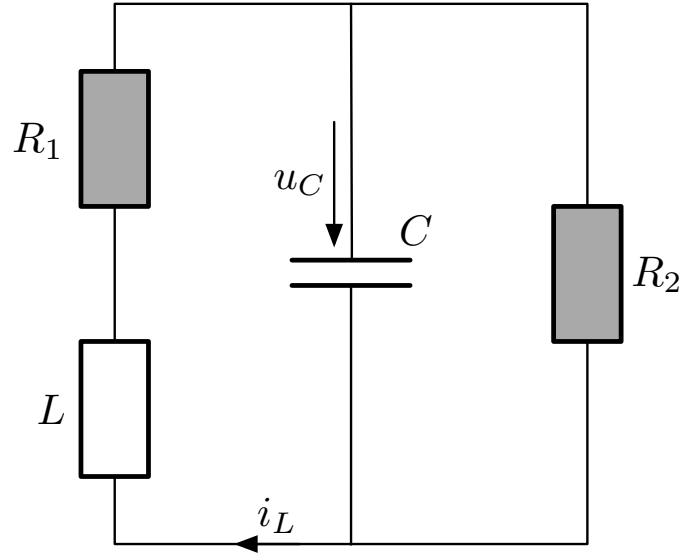


Abbildung 0.2.: Schaltung

$$\frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}(-u_C - R_1 i_L) \quad (0.12)$$

$$\frac{d}{dt}u_C = \frac{1}{C}(i_L - \frac{u_C}{R_2}) \quad (0.13)$$

Das System hat eine Ruhelage in $(0, 0)$.

Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L - CR_L \pm \sqrt{(L + CR_2)^2 - 4CLR_2(1 + R_1R_2)}}{2CLR_2} \quad (0.14)$$

Man sieht nach kurzer Rechnung dass das System für alle positiven Parameter R_1, R_2, L asymptotisch stabil ist. **Energiebetrachtung**

Sei $V = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2$ die Energie die in der Kapazität und der Induktivität gespeichert ist. Es gilt:

$$\frac{d}{dt}V(i_L(t), u_C(t)) = Li_L \frac{d}{dt}i_L + Cu_C \frac{d}{dt}u_C \quad (0.15)$$

$$= -\frac{R_1}{L}Li_L^2 - \frac{1}{R_2C}Cu_C^2 \quad (0.16)$$

$$\leq -2 \max\left(\frac{R_1}{L}, \frac{1}{R_2C}\right) V \quad (0.17)$$

$$\underbrace{\quad}_{:=\alpha(>0)} = -2\alpha V \quad (0.18)$$

Es folgt direkt:

$$V(t) \leq ce^{-2\alpha t} \text{ mit } c = \left| \left(\frac{1}{2} Li_L(0) \right) \right| \quad (0.19)$$

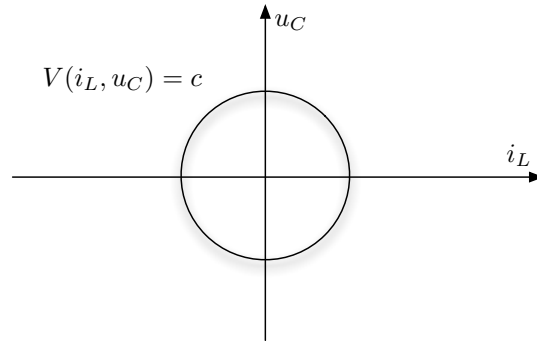


Abbildung 0.3.: ???

Definition 7: S

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von O . Eine Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal positiv definit wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) V ist stetig diffbar, als $V \in C^1(U, \mathbb{R})$
- ii) $V(0) = 0$
- iii) $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$

V heißt lokal positiv semidefinit wenn statt iii) gilt:

- iii') $V(x) \geq 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$

Ist $U = \mathbb{R}^n$ so sprechen wir von positiv definiten bzw. positiv semidefiniten Funktionen. Negativ definit und negativ semidefinit werden analog definiert.

Ist V weder positiv noch negativ semidefinit, dann heißt V indefinit. ($\exists x_1, x_2 V(x_1) > 0$ und $V(x_2) < 0$)

Beispiel 8(Energiefunktion)

Im elektrischen Schaltkreis haben wir die Änderung der Energiefunktion V mit der Zeit betrachtet. Das können wir weiter formalisieren.

Sei also $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und V eine stetig diffbare Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $s(t; x_0)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ dann gilt:

$$\frac{d}{dt} V(s(t, x_0)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} s(t, x_0) = \frac{\partial V}{\partial x} f(s(t, x_0)) \quad (*)$$

(Ableitung von V entlang dem Vektorfeld von f)

Wir definieren die **Lie-Ableitung von V in Richtung f** durch

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f \quad (0.20)$$

Bemerkung 9:

Man schreibt wegen (*) auch oft $\dot{V}$ statt $L_f V$

Satz 10: S

ei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und D eine offene Umgebung von O . Gibt es ein auf D positiv definites $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $L_f V$ negativ semidefinit auf D ist dann ist $x^* = 0$ stabil. Ist $L_f V$ auf D negativ definit, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Mittels Widerspruch, Details in NL-Control.

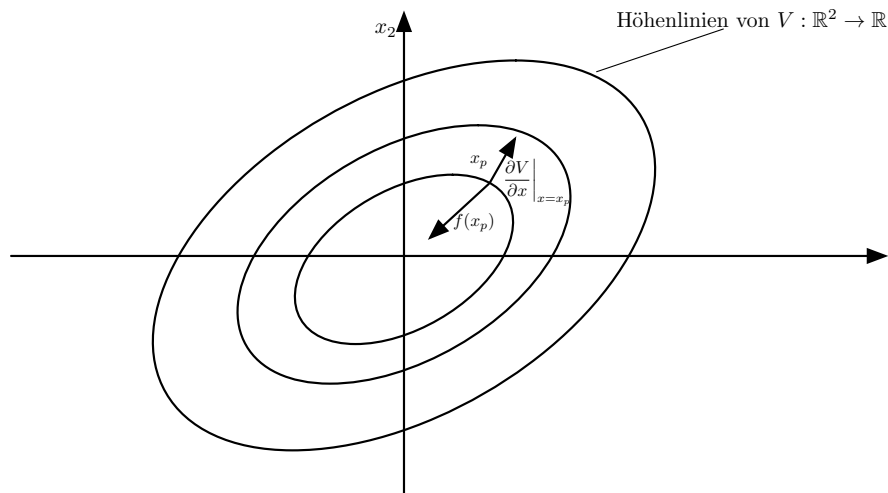


Abbildung 0.4.: ???

Beispiel 11(S)

ei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $V(0) = 0$ $V(x) > 0$ für $x \neq 0$ Betrachte $\dot{x} = \frac{\partial V^T}{\partial x}$ d.h. $f(x) = -\frac{\partial V^T}{\partial x}$ Weil V stetig diffbar ist und ein globales Minimum in $x = 0$ hat, d.h. $x^* = 0$ ist Ruhelage der Differentialgleichung. Untersuche die Stabilität von x^*

Wir untersuchen die Stabilität von $x^* = 0$ mit V

$$L_f V = L_{-\frac{\partial V^T}{\partial x}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \quad (0.21)$$

$$= - \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|^2 \quad (0.22)$$

Es gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \quad (0.23)$$

Somit gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \right)^2 = \left(\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (0.24)$$

Damit ist $L_f V$ lokal negativ definit und damit ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

III. Die indirekte Methode von Lyapunov

Satz 12:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $f \in \mathbf{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$. Setze

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0=x^*}$$

Es gilt:

1. Ist der Realteil aller EW λ_k von A negativ $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$, dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$, dann ist die Ruhelage instabil.

Bemerkung 13:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um x^* gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Gibt es einen EW von A , dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage gemacht werden.

IV. Einzugsbereich

Bis jetzt können wir die Stabilität einer Ruhelage feststellen. Allerdings wissen wir nur das die Auslenkungen (oder r Störungen) der Lösungen um die Ruhelage x^* klein sein müssen. Um dies besser zu quantifizieren definieren wir:

Definition 14: Einzugsbereich

Sei x^ eine asymptotisch stabile Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Dann heißt die Menge*

$$R = \{x_0 \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x_0) = x^*\} \quad (0.25)$$

der Einzugsbereich von x^ . Gilt $\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ dann heißt x^* global asymptotisch stabil.*

V. Invarianzprinzip

VI. Instabilitätssatz nach Chetaer

Bisher können wir nur die Stabilität einer Ruhelage überprüfen. In manchen Fällen möchte man die Stabilität einer Ruhelage ausschließen.

Satz 15:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $V : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U_2 \subseteq U_1$ eine Funktion und $W := \{x \in U_2 | V(x) > 0\}$ so dass gilt:

- $0 \in \partial W$ (∂W heißt Rand von W)
- W ist in einem hinreichend kleinen Ball um $x^* = 0$ enthalten
- $L_f V > 0$ für $x \in W$

Dann ist $x^* = 0$ instabil.

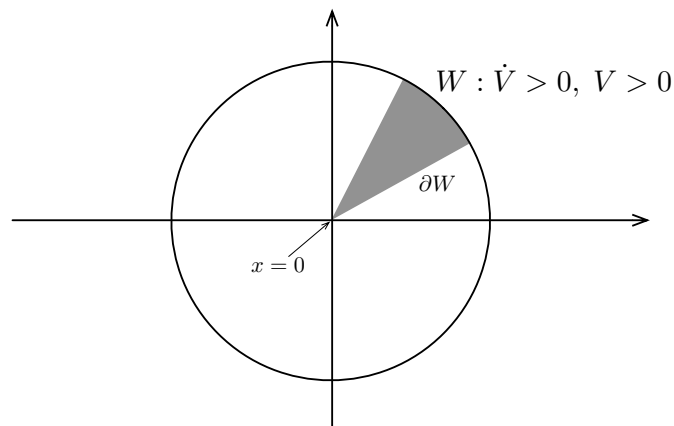


Abbildung 0.5.: Instabilitätssatz nach Chetaer

Beispiel 16()

Gegeben ist das System

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2^2 x_1 \quad (0.26)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_2 x_1^2 \quad (0.27)$$

Sei $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$. Es gilt $V > 0$, wenn $x_1^2 > x_2^2$, also ist

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x_1 > x_2 > -x_1 \right\} \quad (0.28)$$

Es gilt $0 \in \partial W$ und W ist in einem Ball um die Null enthalten.

$$L_f V = x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1^4 + \cancel{x_1^2 x_2^2} + x_2^4 - \cancel{x_2^2 x_1^2} = x_1^4 + x_2^4 \quad (0.29)$$

Also ist $L_f V(x) > 0$ für $x \in W$ und somit ist $x^* = 0$ instabil.

Beispiel 17(LaSalle)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g, h : (a, a) \rightarrow \mathbb{R}, g(0) &= 0, \quad x \, g(x) > 0 \text{ für } x \in (-a, a) \setminus \{0\} \\ h(0) &= 0, \quad x \, h(x) > 0 \text{ für } x \in (-a, a) \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Setze $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -a < x_1 < a, \quad -a < x_2 < a\}$

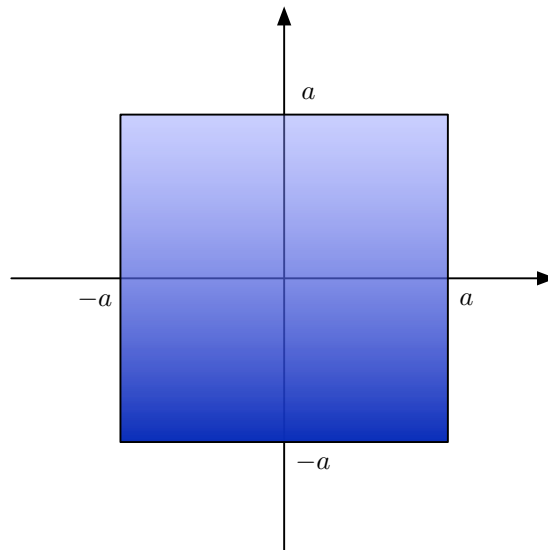


Abbildung 0.6.: ???

Für eine Ruhelage muss gelten $x_2 = 0$ und damit wegen $g(x_1) = -h(x_2)$ auch $x_1 = 0$.

- Untersuche die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$
- Verwende als Kandidat für die Lyapunovfunktion V , definiert durch

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(x) dx + \frac{x_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} = L_f V &= g(x_1) \dot{x}_1 = x_2 \dot{x}_2 \\ &= g(x_1) x_2 + x_2 (-g(x_1) - h(x_2)) \\ &= -x_2 h(x_2)\end{aligned}$$

Weil $-x_2 h(x_2)$ negativ für $x_2 \neq 0$ für $\dot{V}$ negativ semidefinit. Somit ist

$$\begin{aligned}E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V} = 0\} &= \{x \in D \mid h(x_2) x_2 = 0\} \\ &= \{x \in D \mid x_2 = 0\}\end{aligned}$$

Eine Lösung die identisch in E verläuft erfüllt als $x_2(t) \equiv 0$. Damit gilt auch $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, also $-g(x_1(t)) - h(x_2(t)) = -g(x_1(t)) \equiv 0$.
Somit muss auch $x_1(t) \equiv 0$ gelten. Damit ist $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

VII. Lyapunovtheorie und Lineare Systeme

Wir wollen die Erkenntnisse der Lyapunovtheorie auf lineare Systeme anwenden. Sei also im Folgenden die DGL

$$\dot{y} = Ay \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gegeben.

Definition 18:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit wenn $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Ist $x^T A x \geq 0$, so nennt man A positiv semidefinit.

HA zu zeigen: die Diagonalelemente positiver definiten Matrizen sind positiv

Sei nun $V(x) = x^T P x$ wobei P eine positiv definite Matrix ist.

$$\dot{V}(x) = L_{AX} V = x^T (PA + A^T P) x$$

Angenommen die Ruhelage 0 ist asymptotisch stabil, dann gilt $L_{AX} V$ ist negativ definit. Das heißt $PA + A^T P$ ist negativ definit. Das wiederum heißt es gibt ein positiv definites Q so dass

$$x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

gilt. Wir wollen die Beobachtung für ein neues Stabilitätskriterium für lineare Systeme verwenden.

Definition 19:

Eine Matrix A heißt Hurwitzmatrix, wenn für alle Eigenwerte λ_k von A gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$

Satz 20:

Eine Matrix A ist genau dann eine Hurwitzmatrix wenn die Gleichung

$$A^T P + PA + Q = 0$$

für jedes positiv definite Q eine eindeutige positiv definite Lösung P besitzt.

Beweis:

Wenn für jedes positiv definite Q eine eindeutige, positiv definite Lösung P existiert, dann ist nach der direkten Methode von Lyapunov II die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil. Dann sind aber auch die Realteile der Eigenwerte von A negativ.

Sei umgekehrt A eine Hurwitzmatrix. Seien λ_k die Eigenwerte von A . Weil A Hurwitz ist, gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$. Die Einträge von $e^{A^T t}$ und e^{At} sind von der Form $t^{m-1} e^{\lambda_k t}$. Dann existieren für ein positiv definites Q die Matrix P wie folgt.

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Ist Q positiv definit, dann auch P . Denn aus

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt$$

folgt $x^T P x > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
A^T P + P A &= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} A dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} Q e^{A t} - Q = -Q
\end{aligned}$$

Somit muss noch die Eindeutigkeit von P gezeigt werden.

Sei also $\bar{P}$ positiv definit und $A^T \bar{P} + \bar{P} A + Q = 0$.

Sei $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \mapsto X^T P X - X^T \bar{P} X = X^T (P - \bar{P}) X$. Für eine beliebige Lösung $s(t, x_0)$ von $\dot{X} = AX$ gilt

$$L_f F = \frac{d}{dt} F(s(t, x_0))$$

das heißt mit

$$\begin{aligned}
F(\dot{x}) &= \dot{X}^T (P - \bar{P}) X + X^T (P - \bar{P}) \dot{X} \\
&= X^T (A(P - \bar{P}) + (P - \bar{P})A) X \\
&= X^T (\underbrace{A^T P + P A}_{=Q} - \underbrace{(A^T \bar{P} + \bar{P} A)}_{=Q}) X = 0
\end{aligned}$$

Das heißt $F(x)$ bleibt konstant entlang von Lösungen von $\dot{X} = AX$. Nun ist $e^{A t}$ eine Lösung von $\dot{X} = AX$, das heißt für alle t gilt $F(e^{A t}) = \text{const.}$. Weiterhin ist $F(I) = P - \bar{P}$.

Weil F stetig ist gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(e^{A t}) = F(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A t}) = F(0) = 0$$

Damit folgt direkt $F(I) = F(0) = P - \bar{P} = 0$ also $P = \bar{P}$.

Bemerkung 21:

Somit gilt, ist $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil, dann gibt es auch eine quadratische Lyapunovfunktion, also ein positiv definites P mit $V(x) = x^T P x$.