

## Robuste Regelung

Bevor wir uns der Reglersynthese zuwenden, müssen wir klären, welche Eigenschaften vom geschlossenen Kreis erwartet werden. In diesem Kapitel werden wir diese gewünschten Eigenschaften an den Kreis definieren und in mathematischer Form quantitativ formulieren, wobei Kapitel und bis eine Wiederholung des Stoffes aus der Vorlesung *Einführung in die Regelungstechnik* darstellt. Dazu betrachten wir in Abb. 1 den *Standardregelkreis* mit der Strecke  $G(s)$  und dem Regler  $K(s)$ .

Dabei sind:

|                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| $y$ ... Regelgröße      | $y'$ ... Streckenausgang   |
| $u$ ... Stellgröße      | $u'$ ... Reglerausgang     |
| $r$ ... Führungsgröße   | $z_1$ ... Ausgangsstörung  |
| $\eta$ ... Messrauschen | $z_2$ ... Eingangsstörung. |

Alle Signale sollen skalare Größen sein. Die Größe

$$e = r - y \quad (1)$$

wird als *Regelfehler* bezeichnet. Dieser Standardregelkreis kann durch unterschiedliche Erweiterungen ergänzt werden, z.B.

- Führungsgröße vorfiltern („Two-degree-of-freedom design“)
- Störgrößen beeinflussen die Regel- bzw. Stellgröße nicht additiv, sondern werden durch sogenannte Störübertragungsfunktionen auf die Regelgröße geschaltet.
- Störungen können unter Umständen gemessen werden. Durch geeignetes Aufschalten auf die Stellgröße (Störgrößenaufschaltung) lassen sich so verbesserte Eigenschaften erreichen (feed-forward).

Wir stellen drei Hauptforderungen an den geschlossenen Kreis, die in den folgenden Kapiteln näher erläutert werden:

1. Stabilität
2. gutes Regelverhalten
3. Robustheit der Stabilität

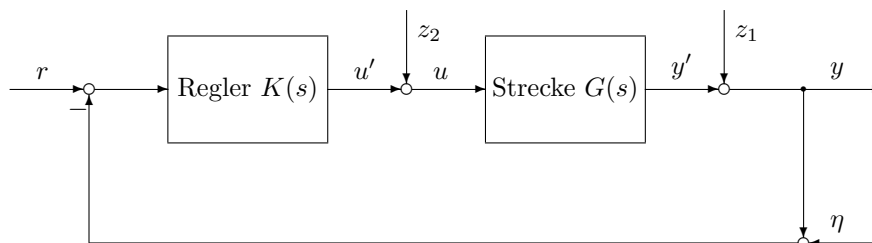


Abbildung 1: Standardregelkreis.

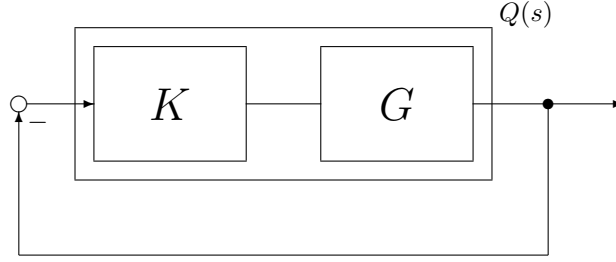


Abbildung 2: Regelkreis für Small-Gain-Theorem.

## Nominelle Stabilität

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass das Modell der Regelstrecke  $G(s)$  mit der wirklichen Regelstrecke übereinstimmt und wir untersuchen die Stabilität des geschlossenen Kreises. Dieser Fall wird als *nominelle Stabilität* bezeichnet, im Unterschied zur *robusten Stabilität*, die in Kapitel IV.3 behandelt wird.

An mehreren Stellen wird vorausgesetzt, dass  $G(s)$  streng proper und  $K(s)$  proper sind. Diese Annahmen stellen in der Praxis keine große Einschränkung dar.

Zusätzlich zum bereits bekannten Nyquistkriterium wollen wir hier ein weiteres wichtiges Stabilitätskriterium behandeln, nämlich das sogenannte *Small-Gain-Theorem*. Der große Vorteil dieses Stabilitätstests ist seine sehr allgemeine Formulierung, die sogar auf nichtlineare Systeme übertragen werden kann.

Wir betrachten den Regelkreis in Abbildung 2 und setzen voraus, dass der offene Kreis  $Q = GK$  stabil ist.

**Satz 1** ((Small-Gain-Theorem)). *Der geschlossene Kreis ist dann asymptotisch stabil, wenn*

$$\|Q(j\omega)\|_{ind} < 1 \quad \forall \omega. \quad (2)$$

Man beachte, dass das Small-Gain-Theorem lediglich ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium darstellt.

$\|\cdot\|_{ind}$  kann jede induzierte Norm sein. Wenn speziell die  $\mathcal{L}_2$ -induzierte Norm gewählt wird, entspricht Gl. (2) der Forderung, dass die maximale Energie-Verstärkung des offenen Kreises kleiner als eins sein muss, also alle Signale abklingen müssen.

Die zweite wichtige Anforderung an den Regelkreis betrifft die Regelgüte. Wir betrachten wieder den Standardregelkreis in Abbildung 1 und bestimmen den Einfluss von Störungen  $z_1$  bzw.  $z_2$ , Messrauschen  $\eta$  und der Führungsgröße  $r$  auf den Regelfehler

$$e = r - y.$$

Aus dem Blockdiagramm lesen wir direkt ab

$$y = z_1 + G(z_2 + K(r - \eta - y))$$

woraus

$$y = (1 + GK)^{-1} \{z_1 + Gz_2 + GKr - GK\eta\}$$

folgt. Damit ergibt sich als Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises:

$$\begin{aligned} e &= r - y \\ &= r - (1 + GK)^{-1}GKr - (1 + GK)^{-1}z_1 - (1 + GK)^{-1}Gz_2 + (1 + GK)^{-1}GK\eta \\ &= \underbrace{-(1 + GK)^{-1}z_1}_{=:S} + (1 + GK)^{-1}r - (1 + GK)^{-1}Gz_2 + \underbrace{(1 + GK)^{-1}GK\eta}_{=:T}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Definition 1.** Die Übertragungsfunktion

$$S = (1 + GK)^{-1}$$

heißt Sensitivität.

**Definition 2.** Die Übertragungsfunktion

$$T = (1 + GK)^{-1}GK = GK(1 + GK)^{-1} \quad (4)$$

heißt komplementäre Sensitivität.

Die Sensitivität  $S$  gibt die „Empfindlichkeit des Regelkreises“ auf Ausgangsstörungen bzw. Sollwertänderungen an. Die komplementäre Sensitivität  $T$  beschreibt den Einfluss von Messrauschen auf den Regelfehler.

Wie man bereits aus der obigen Gleichung sieht, ergeben sich für das Führungsverhalten (bzgl.  $r$ ) und für die Unterdrückung von Messrauschen (bzgl.  $\eta$ ) unterschiedliche Anforderungen für die Auslegung des geschlossenen Kreises.

In den folgenden Abschnitten sollen nun nacheinander die verschiedenen Anteile der obigen Gleichung genauer untersucht werden. Wir führen dazu folgende Abkürzungen ein:

$$e = \underbrace{-Sz_1}_{e_{z_1}} + \underbrace{Sr}_{e_r} + \underbrace{-SGz_2}_{e_{z_2}} + \underbrace{T\eta}_{e_\eta}. \quad (5)$$

## Führungsverhalten

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_r(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega). \quad (6)$$

Wir wollen, dass der Einfluss von Sollwertänderungen auf den Regelfehler gering ist. Somit soll die Übertragungsfunktion  $S$  „klein“ sein.

Im SISO-Fall gilt

$$|e_r(j\omega)| = |S(j\omega)r(j\omega)| = |S(j\omega)||r(j\omega)| \quad (7)$$

D.h. die Amplitudenverstärkung  $|S(j\omega)|$  der Sensitivität muss klein sein, um gutes Führungsverhalten zu erzielen.

Somit läßt sich diese Forderung wie folgt quantifizieren: Soll im Frequenzbereich  $[0, \omega_r]$  gutes Führungsverhalten erreicht werden, so muss gelten:

$$|S(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad 0 \leq \omega \leq \omega_r. \quad (8)$$

Soll speziell nach einer sprungförmigen Änderung der Führungsgröße die *bleibende Regelabweichung* verschwinden, so folgt aus dem Grenzwertsatz der Laplacetransformation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

was nur erfüllt ist, wenn:

$$|S(0)| = 0 \quad (10)$$

## Störverhalten

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_{z_1}(j\omega) = -S(j\omega)z_1(j\omega). \quad (11)$$

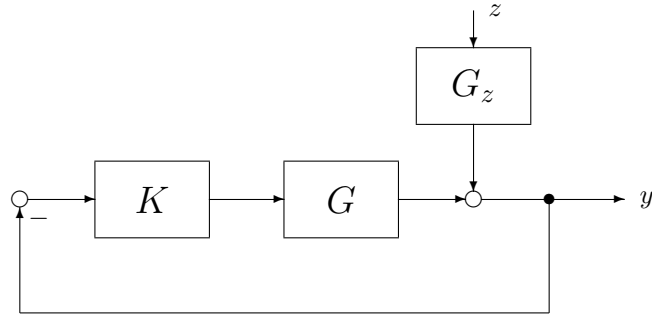


Abbildung 3: Regelkreis mit StörÜbertragungsfunktion  $G_z$ .

Somit enthält die Forderung nach gutem Störverhalten bzgl. Ausgangsstörungen im Frequenzbereich  $[0, \omega_z]$ :

$$|S(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad 0 \leq \omega \leq \omega_z. \quad (12)$$

Natürlich ist nicht nur das Übertragungsverhalten von Ausgangsstörungen  $z_1$  auf den Regelfehler interessant. Genauso wichtig ist z.B. das Übertragungsverhalten von Eingangsstörungen  $z_2$  auf den Regelfehler

$$e = -SGz_2 \quad (13)$$

oder der Einfluss von Störungen auf die Stellgröße

$$u = -KSz_1 \quad (14)$$

$$\text{bzw.} \quad u = (1 + KG)^{-1}z_2. \quad (15)$$

Daraus ergeben sich analoge Forderungen an die Übertragungsmatrizen des geschlossenen Kreises:

$$|SG| \ll 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_z \quad (16)$$

$$\text{bzw.} \quad |KS| \ll 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_z. \quad (17)$$

Oft wirkt die Störung auch nicht unmittelbar auf die Regelgröße, sondern wird durch eine Störübertragungsmatrix  $G_z$  gefiltert (Abbildung 3). Mit

$$e = -SG_z z \quad (18)$$

folgt damit als Forderung an den geschlossenen Kreis

$$|SG_z| \ll 1. \quad (19)$$

Dies ist *nicht* identisch mit der Forderung  $|S(j\omega)| \ll 1$  für  $\omega \in [0, \omega_z]$ , da hier  $S$  für diejenigen Frequenzen „groß“ sein darf, für die  $G_z$  „klein“ ist. Es ist dadurch meist ein besserer Kompromiss zwischen Anforderungen an  $S$  bzw.  $T$  möglich.

## Unterdrückung von Messrauschen

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_\eta(j\omega) = T(j\omega)\eta(j\omega). \quad (20)$$

Messrauschen im Frequenzbereich  $[\omega_\eta, \infty]$  wird unterdrückt, falls gilt:

$$|T(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad \text{für } \omega_\eta \leq \omega < \infty. \quad (21)$$

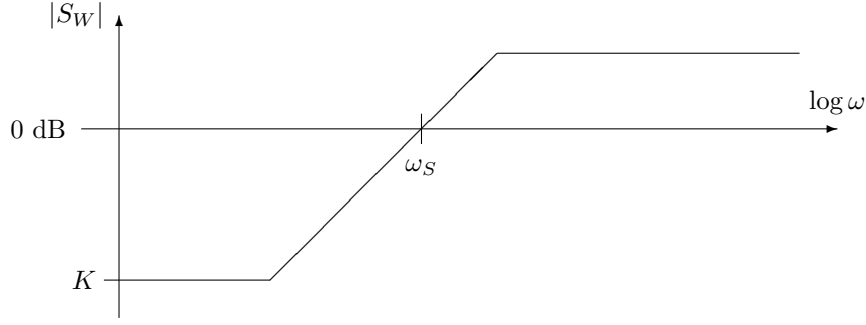


Abbildung 4: Asymptotischer „Wunschverlauf“ für die maximale Amplitude von  $S$ .

## Widersprüchliche Anforderungen

Normalerweise wollen wir gleichzeitig gutes Störverhalten und gute Rauschunterdrückung. Es sollen also sowohl die Sensitivität  $S$  wie auch die komplementäre Sensitivität  $T$  klein sein für möglichst große Frequenzbereiche. Beide Anforderungen lassen sich jedoch nicht gleichzeitig realisieren.

**Satz 2.** Für alle Frequenzen  $\omega$  gilt:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega. \quad (22)$$

*Beweis.*

$$S + T = (1 + GK)^{-1} + (1 + GK)^{-1}GK = (1 + GK)^{-1}(1 + GK) = 1.$$

□

Daraus folgt direkt das *Fundamentale Dilemma der Regelungstechnik*:

Für eine feste Frequenz  $\omega$  weist der Standardregelkreis entweder gutes Führungs- und Störverhalten

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad (23)$$

oder weitgehende Unterdrückung des Messrauschens

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad (24)$$

auf, aber nie beides.

Dieses Dilemma ist in der Praxis oft kein unüberwindbares Hindernis, da Führungs- und Störgrößen in der Regel niederfrequent sind, Messrauschen hingegen hochfrequent ist. D.h. die Anforderungen an  $S$  bzw.  $T$  gelten für unterschiedliche Frequenzbereiche.

## Quantisierung der Anforderungen

Die bisher behandelten Anforderungen wie  $|S(j\omega)| \ll 1$  für  $\omega < \omega_{rz}$  sind vorwiegend qualitativer Natur. Oft können wir genauer angeben, was wir erreichen wollen. Abbildung 4 gibt beispielhaft einen möglichen „Wunschverlauf“ für den Amplitudengang der Sensitivität an. Ein SISO-System  $S_W$  dessen Amplitudengang den Wunschverlauf hat lässt sich leicht finden:

$$S_W = K \cdot \frac{T_z s + 1}{T_p s + 1}. \quad (25)$$

Dabei bestimmt  $|S_W(0)| = |K|$  die maximal erlaubte bleibende Regelabweichung.  $|S_W(\infty)| = |K \frac{T_z}{T_p}|$  gibt die größtmögliche (schlimmste) Verstärkung einer Störung an. Die Zeitkonstante  $T_z$  (zusammen mit  $K$ ) bestimmt die Frequenz  $\omega_S$ , die eng mit der Bandbreite  $\omega_B$  zusammenhängt. Diese Größe gibt die Schnelligkeit des geschlossenen Kreises an. Mit ihr wird der Kompromiß zwischen Führungs-/Störverhalten und Rauschunterdrückung geschlossen.

Wir wollen erreichen, dass die Sensitivität  $S$  des geschlossenen Kreises unterhalb des vorgegebenen gewünschten Verlaufes liegt

$$|S(j\omega)| < |S_W(j\omega)| \quad \forall \omega. \quad (26)$$

Daraus folgt mit  $W_p(s) = S_W^{-1}(s)$

$$|W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \quad (27)$$

beziehungsweise

$$\|W_p S\|_\infty < 1, \quad (28)$$

wobei  $W_p(s)$  und  $S(s)$  hier als stabile Systeme angenommen werden<sup>1</sup>. Das System  $W_p(s)$ , das dem inversen Wunschverlauf für die Amplitude von  $S$  entspricht, wird als *Performancegewicht* bezeichnet.

Wenn wir also überprüfen wollen, ob ein Regler  $K(s)$  die Strecke  $G(s)$  zufriedenstellend regelt, müssen wir folgendermaßen vorgehen:

- Festlegen einer tolerierbaren bleibenden Regelabweichung, einer maximaler Störverstärkung und einer gewünschter Bandbreite. Daraus ergibt sich der Wunschverlauf  $|S_W(j\omega)|$  für  $|S(j\omega)|$ .
- Überprüfen, ob  $|S(j\omega)| \leq |S_W(j\omega)|$  für alle Frequenzen gilt.

Alternativ können wir auch aus  $|S_W(j\omega)|$  das Performancegewicht  $W_p$  berechnen und müssen dann überprüfen, ob

$$\|W_p S\|_\infty \leq 1. \quad (29)$$

Von der zweiten Vorgehensweise machen wir in Verbindung mit dem  $H_\infty$ -Reglerentwurf Gebrauch. In analoger Weise können Anforderungen an andere Kenngrößen des geschlossenen oder offenen Kreises (z.B. an  $T$ ,  $SG_z$  oder  $GK$ ) ebenfalls quantisiert werden. Wenn mehrere Anforderungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, führt dies zum Beispiel zum sogenannten *Mixed-Sensitivity-Design*.

## Robustheit

Bei unseren seitherigen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, dass das Modell  $G(s)$  die wirkliche Regelstrecke exakt beschreibt. Wenn wir diese Annahme fallen lassen, werden die in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Untersuchungen zu Stabilität und Regelgüte nicht mehr aussagekräftig sein. Eine kleine Veränderung in  $G(s)$  kann zu Instabilität oder zu signifikant anderen Verläufen von z.B.  $|S|$  führen. Im folgenden wollen wir annehmen, dass  $G(s)$  die wirkliche Regelstrecke  $G_{\text{real}}(s)$  nur fehlerhaft wiedergibt und wollen Bedingungen herleiten, unter denen Stabilität und gutes Regelverhalten auch für das reale System garantiert werden können, wenn der Regler auf der Basis des nominellen Systems  $G(s)$  entworfen wurde.

Dazu definieren wir den Begriff der Robustheit.

**Definition 3.** Eine systemtheoretische Eigenschaft  $E$  des geschlossenen Kreises heißt robust gegenüber einem bestimmten Modellfehler  $F$ , wenn diese Eigenschaft trotz des Fehlers erhalten bleibt.

**Beispiel 1.** Robustheit der Eigenschaft Stabilität gegenüber einer falschen Streckenzeitkonstanten.

**Beispiel 2.** Robustheit der Stabilität gegenüber Ausfällen in Informationskanälen (Messgliedausfall: eine Zeile der Matrix  $C$  ist nur mit Nullen besetzt; Stellgliedausfall: eine Spalte der Matrix  $B$  ist nur mit Nullen besetzt). Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als Integrität.

<sup>1</sup>Es sei hier darauf hingewiesen, dass nur für stabile SISO-Systeme die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm  $\|G\|_\infty$  dem Supremum des Amplitudengangs  $G(j\omega)$  entspricht.

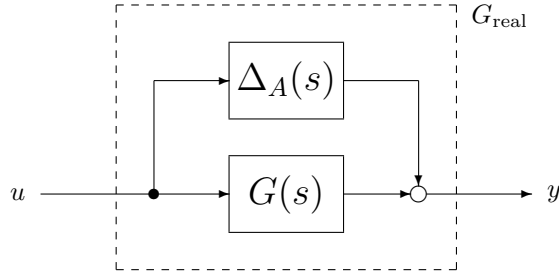


Abbildung 5: System mit additiver Modellunsicherheit.

## Beschreibung von Modellunsicherheiten

Das wahre  $G_{\text{real}}$  ist unbekannt (wenn es bekannt wäre, könnten wir natürlich  $G_{\text{real}}$  als Modell für unsere Regelkreisuntersuchung und für den Reglerentwurf zugrunde legen). Üblicherweise geht man davon aus, dass der Unterschied zwischen nominellen Modell  $G(s)$  und realer Strecke  $G_{\text{real}}$  nicht beliebig groß sein wird. Das kann man mathematisch so ausdrücken, dass die unsichere reale Strecke ein Element aus einer Klasse von mögliche Streckenbeschreibungen ist. Durch unterschiedliche Festlegung dieser Modellklassen werden nun unterschiedliche Unsicherheitsbeschreibungen definiert. Ein typisches Beispiel sind *Parameterunsicherheiten*.

**Beispiel 3.** Das Modell eines beladenen Fahrzeugs kann sehr einfach durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_i.$$

Dabei sei die exakte Gesamtmasse  $m$  des Fahrzeugs nicht bekannt. Man kann nur eine obere bzw. untere Schranke angeben:  $m_u \leq m \leq m_o$ .

Allgemein gibt man bei derartigen Fehlern Parameterintervalle für den unsicheren Parameter  $a_i$  an:  $a_i \in [a_{iu}, a_{io}]$ .

Je größer die Modellklasse ist, desto schwieriger ist i.a. Robustheit zu erreichen.

Eine sehr wichtige Klasse von Modellunsicherheiten sind sogenannte *unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen im Frequenzbereich*. Dabei geht man davon aus, dass sich die reale Strecke aus einem nominellen Modell  $G(s)$  und einem Fehlerterm  $\Delta(s)$  zusammensetzt. Die Unsicherheit  $\Delta(s)$  kann ein dynamisches System beliebiger Ordnung sein. Wir nehmen nur eine obere Schranke für die „Größe“ dieses Fehlers an, die durch die Amplitude von  $\Delta(s)$  über die Frequenz ausgedrückt wird:

$$|\Delta(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega. \quad (30)$$

Anhand der strukturellen Abhängigkeit der realen Strecke vom Fehler unterscheidet man innerhalb dieser unstrukturierten Unsicherheiten weitere Unterklassen:

- **Additive Fehler:** Die Unsicherheit ist parallel zum nominellen Modell  $G(s)$  geschaltet (Abbildung 5). Die reale Strecke ist also ein (unbekanntes) Element der folgenden Modellklasse:

$$\begin{aligned} G_{\text{real}} &\in \{G^* : G^*(s) = G(s) + \Delta_A(s) \text{ mit } \Delta_A(s) \in F\} \\ F &= \{\Delta_A(s) : |\Delta_A(j\omega)| \leq l_A(\omega) \forall \omega\}. \end{aligned} \quad (31)$$

- **Multiplikative Ausgangsfehler:** Die reale Strecke ist eine Hintereinanderschaltung des nominellen Modells und eines Fehlerterms (Abbildung 6):

$$G_{\text{real}} \in \{G^* : G^*(j\omega) = (1 + \Delta_M(j\omega))G(j\omega) \text{ mit } |\Delta_M(j\omega)| \leq l_M(\omega) \forall \omega\}. \quad (32)$$

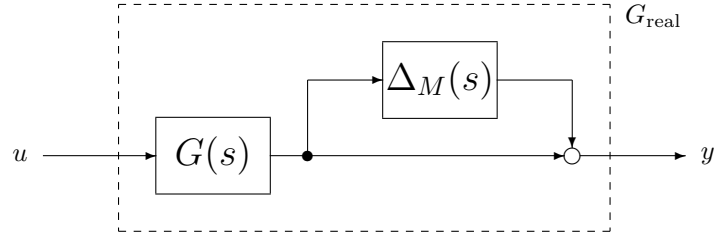


Abbildung 6: System mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit.

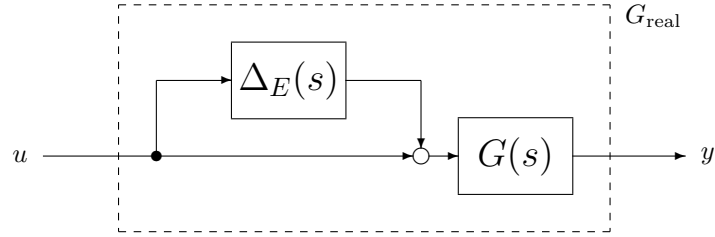


Abbildung 7: System mit multiplikativer Eingangsunsicherheit.

- **Multiplikative Eingangsfehler:** Mehrgrößensysteme sind in der Regel nicht kommutativ. Deshalb ergibt sich eine weitere Fehlerklasse, wenn wir die multiplikative Unsicherheit am Eingang der Strecke annehmen (Abbildung 7):

$$G_{\text{real}} \in \{G^* : G^*(j\omega) = G(j\omega)(1 + \Delta_E(j\omega)) \text{ mit } |\Delta_E(j\omega)| \leq l_E(\omega) \forall \omega\}. \quad (33)$$

Für die hier betrachteten Eingrößensysteme sind die Klassen der multiplikativen Ein- und Ausgangsfehler äquivalent.

Dies sind die gebräuchlichsten Unsicherheitsbeschreibungen. Wie wir sehen werden, können dafür relativ einfach hinreichende und notwendige Kriterien für die Robustheit der Eigenschaft Stabilität hergeleitet werden.

Die beschriebenen Fehler heißen *unstrukturiert*, da nur *eine* „Quelle“ für die Unsicherheit angenommen wird und diese Unsicherheit ein beliebiges normbeschränktes System von passender Dimension sein kann.

Üblicherweise wird durch unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen die Klasse der möglichen Streckenbeschreibungen unnötig vergrößert. Es sind also Systembeschreibungen in dieser Klasse, die nicht auftreten können. Deshalb werden die Robustheitsaussagen übervorsichtig sein. Man spricht dann von *konservativen* Robustheitsaussagen. Regler, die für diese zu große Klasse von Systemen Stabilität bzw. Regelgüte garantieren, werden als „konservativ“ bezeichnet.

Betrachten wir im folgenden beispielhaft die Beschreibung durch multiplikative Ausgangsfehler, die auch häufig relative Fehler genannt werden, etwas genauer. Ein in der Praxis typisches  $\Delta_M(s)$  ist in Abbildung 8 angegeben.

Für niedrige Frequenzen kennen wir das dynamische Verhalten häufig verhältnismäßig genau, d.h. der relative Fehler ist klein. Für hohe Frequenzen wird der relative Fehler zunehmend größer und überschreitet meist sogar den Wert Eins. D.h. der Einfluss des Fehlerterms  $\Delta(s)$  kann dann sogar größer sein als der Beitrag des nominellen Systems. Das dynamische Verhalten ist damit „vollständig“ unsicher.

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes betrachten wir ein einfaches Beispiel.

**Beispiel 4.** Eine SISO-Regelstrecke sei durch folgendes Modell exakt wiedergegeben:

$$G_{\text{real}} = \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{(T_2 s + 1)^2} \quad T_1 = 1, T_2 = 0.1. \quad (34)$$

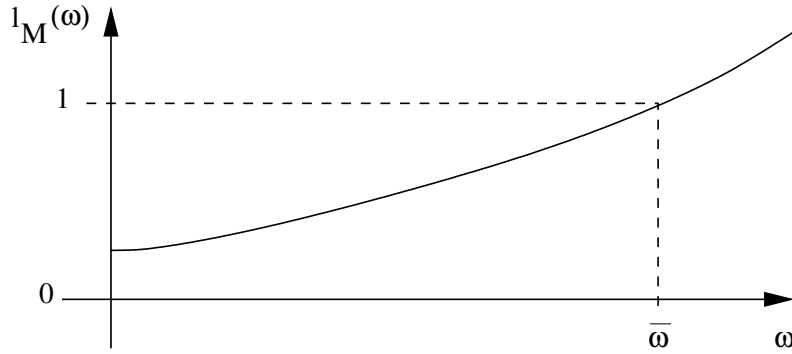


Abbildung 8: Typischer Verlauf der Schranke  $l_M(\omega)$  einer multiplikativen Modellunsicherheit.

Wenn wir als nominelles Modell

$$G = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad (35)$$

wählen, können wir explizit den relativen Fehler zwischen nominellem und realem System berechnen und plotten. Üblicherweise ist das reale Modell nicht bekannt, so dass eine solche Untersu-

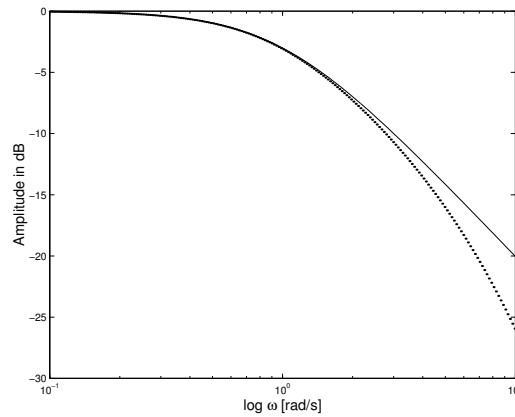


Abbildung 9: Amplitudengang von realer Strecke (gestrichelt) und nominellem Modell (durchgezogen).

chung natürlich nicht möglich ist. Abbildung 9 zeigt den Amplitudengang von realer Strecke und nominellem Modell. Aus

$$G_{\text{real}} = (1 + \Delta_M)G \quad (36)$$

läßt sich der Fehler  $\Delta_M$  formal berechnen:

$$\Delta_M = \frac{G_{\text{real}} - G}{G} \quad (37)$$

Der Verlauf des Amplitudengangs des Fehlers ist in Abbildung 10 dargestellt. Man sieht, dass der relative Fehler für Frequenzen oberhalb  $\omega \approx 10$  rad/sec ungefähr eins wird, obwohl der absolute Fehler wie aus Bild 9 ersichtlich, sehr klein ist.

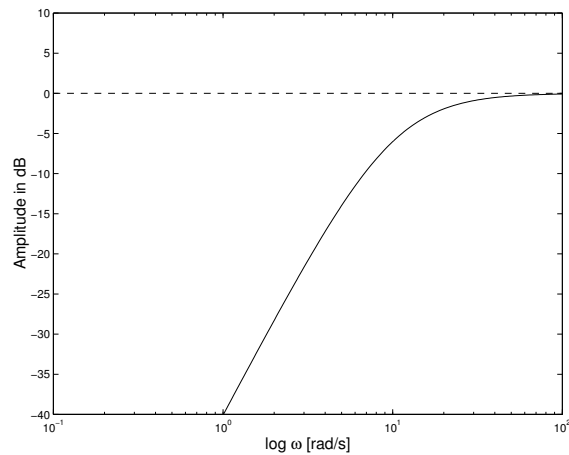


Abbildung 10: Amplitudengang des Fehlers.

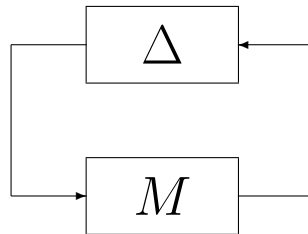


Abbildung 11:  $M$ - $\Delta$ -Struktur.

## Die $M$ - $\Delta$ -Struktur

Wir wollen Robustheitskriterien für unterschiedliche Unsicherheitsklassen herleiten. Es sollen aber verallgemeinerte Betrachtungen bleiben, die nicht von einer speziellen unstrukturierten Unsicherheitsbeschreibung abhängen.

Dazu formen wir den Regelkreis mit Strecke, Unsicherheit und Regler mit der einen, unstrukturierten Unsicherheit so um, dass er die in Abbildung 11 dargestellte Form hat, wobei  $\Delta$  der jeweilige Unsicherheitsterm ist und  $M$  eine zu berechnende Übertragungsfunktion darstellt, die keine Unsicherheiten mehr enthalten soll.

**Beispiel 5.** Wir betrachten den Regelkreis in Abbildung 12 (multiplikative Ausgangsunsicherheit). Zur Berechnung von  $M$  müssen wir das Übertragungsverhalten zwischen  $\downarrow^{\textcircled{1}}$  und  $\uparrow^{\textcircled{2}}$  betrachten.

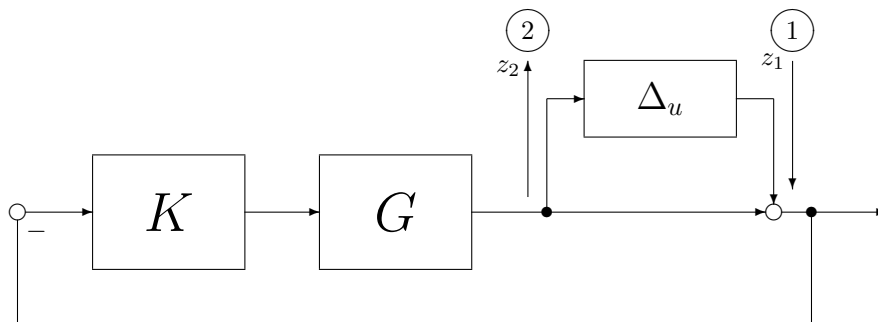


Abbildung 12: Geschlossener Kreis mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit.

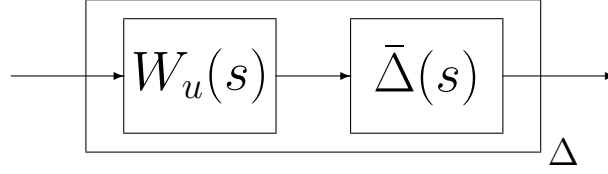


Abbildung 13: Aufspaltung der Unsicherheit  $\Delta$  in Unsicherheitsgewicht  $W_u$  und normierter Unsicherheit  $\bar{\Delta}$ .

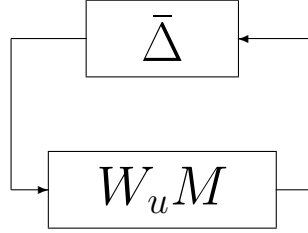


Abbildung 14:  $M$ - $\Delta$ -Struktur mit Unsicherheit  $\bar{\Delta}$ .

Mit den Hilfsgrößen  $z_1$  und  $z_2$  erhält man:

$$\begin{aligned} z_2 &= -GK(z_1 + z_2) \\ &= \underbrace{-GK(1 + GK)^{-1}}_M z_1. \end{aligned} \quad (38)$$

In diesem Fall entspricht  $M$  also der negativen komplementären Sensitivität.

Entsprechend verlaufen die Umformungen für andere Systembeschreibungen. Diese Struktur wird  $M$ - $\Delta$ -Struktur genannt.

Wir wollen noch weiter verallgemeinern bzw. normalisieren. Bei den bisherigen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, dass die Größe des Fehlers eine frequenzabhängige obere Schranke besitzt:

$$|\Delta(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega. \quad (39)$$

Wir können die Unsicherheit noch weiter normalisieren und damit erreichen, dass diese Schranke für alle Frequenzen gleich eins wird:

$$\Delta(\omega) = \bar{\Delta}(\omega)l(\omega) \quad \text{mit} \quad |\bar{\Delta}(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (40)$$

Wir können  $l(\omega)$  als dynamisches Gewicht interpretieren, wenn wir ein stabiles und nichtminimalphasiges dynamisches SISO-System  $W_u(j\omega)$  finden, das  $l(\omega)$  als Amplitudengang besitzt:  $|W_u(j\omega)| = l(\omega)$ . Die Unsicherheit  $\Delta$  hat also die in Abbildung 13 gezeigte Struktur. Das Unsicherheitsgewicht  $W_u(s)$  ist bekannt. Deshalb können wir es mit der Übertragungsfunktion  $M$  zusammenfassen

$$\bar{M} = W_u M \quad (41)$$

und können dann annehmen, dass die verbleibende Unsicherheit auf den Betrag eins beschränkt ist, also  $|\bar{\Delta}(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$  gilt (Abbildung 14). Im Weiteren wollen wir die betreffenden Matrizen  $M$  und  $\Delta$  (nicht  $\bar{M}$  bzw.  $\bar{\Delta}$ ) nennen, aber in Zukunft annehmen, dass  $W_u$  in  $M$  enthalten ist und  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  gilt.

Für diese allgemeine  $M$ - $\Delta$ -Struktur können wir Aussagen über die Robustheit der Stabilität machen.

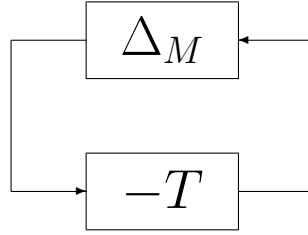


Abbildung 15:  $M$ - $\Delta$ -Struktur resultierend aus einer multiplikativen Ausgangsunsicherheit.

**Satz 3** ((Robuste Stabilität, unstrukturierte Unsicherheiten)). *Unter der Annahme, dass  $M$  und  $\Delta$  stabil sind und  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  gilt, ist der geschlossene Kreis genau dann robust asymptotisch stabil, wenn gilt*

$$|M| < 1 \quad \forall \omega \quad (42)$$

oder äquivalent

$$\|M\|_\infty < 1. \quad (43)$$

**Bemerkung 1:** Satz 3 gilt auch bei vertauschten Annahmen zu  $M$  und  $\Delta$ . Also unter der Annahme, dass  $M$  und  $\Delta$  stabil sind und  $\|\Delta\|_\infty < 1$  gilt, ist der geschlossene Kreis genau dann robust asymptotisch stabil, wenn gilt

$$|M| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (44)$$

oder äquivalent

$$\|M\|_\infty \leq 1. \quad (45)$$

**Bemerkung 2:** Die Annahme, dass  $\Delta$  stabil sein soll, ist eigentlich zu restriktiv. Der Satz gilt auch, wenn das nominelle und das unsichere System die gleiche Anzahl instabiler Pole haben ( $\Delta$  darf auch instabil sein). Man kann sogar zeigen, dass die Zahl der instabilen Pole unterschiedlich sein darf, wenn die instabilen Pole durch „Überqueren“ der imaginären Achse entstehen und nicht durch Pol/Nullstellen-Überdeckung.

Der hinreichende Teil von Satz 3 folgt direkt aus dem *Small-Gain Theorem*. Der Beweis der Notwendigkeit kann zum Beispiel nachgelesen werden in MORARI, M. ; ZAFIRIOU, E.: ROBUST PROCESS CONTROL. PRENTICE HALL, 1989.

Der Satz gibt hinreichende und notwendige Bedingungen für robuste Stabilität an. D.h. wenn z.B.  $\|M\|_\infty > 1$ , dann existiert ein  $\Delta$  mit  $|\Delta| \leq 1$ , so dass der Kreis instabil wird. Man sagt dann auch, dass dieses Robustheitskriterium *nicht konservativ* ist, d.h. nicht übervorsichtig.

Jetzt wollen wir diesen Satz auf die unterschiedlichen Unsicherheitsbeschreibungen anwenden, die wir seither kennengelernt haben. Für den Spezialfall der multiplikativen Ausgangsunsicherheit gilt:

$$G_{\text{real}} = (1 + \Delta_M)G, \quad |\Delta_M| \leq l_M(\omega). \quad (46)$$

Weiter oben wurde gezeigt, wie die Matrix  $M$  der  $M$ - $\Delta$ -Struktur (Abbildung 15) berechnet wird wobei  $|\Delta_M| \leq l_M(\omega) \forall \omega$  gilt.

Um den Robustheitssatz anwenden zu können, müssen wir die Unsicherheit normalisieren,

$$\Delta_M(j\omega) = \Delta(j\omega)W_u(j\omega) \quad \text{mit } |W_u(j\omega)| = l_M(\omega). \quad (47)$$

wobei nun  $|\Delta(j\omega)| \leq 1 \forall \omega$  (Abbildung 16).

Die Anwendung des Robustheitssatzes (3) liefert nun als notwendige und hinreichende Bedingung für robuste Stabilität die folgende Aussage:

**Corollar 1.** *Der geschlossene Kreis mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit nach Abb. 6 ist genau dann asymptotisch stabil für alle Unsicherheiten  $\Delta$  mit  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , wenn gilt*

$$\|W_u G K (1 + G K)^{-1}\|_\infty < 1. \quad (48)$$

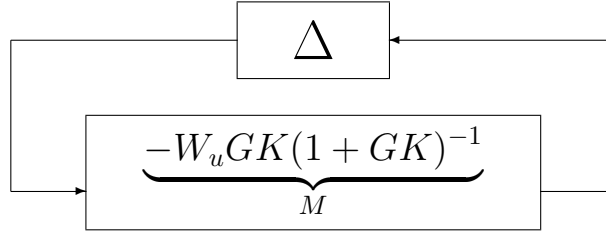


Abbildung 16:  $M$ - $\Delta$ -Struktur mit normalisierter Unsicherheit  $\Delta$  für multiplikative Ausgangsunsicherheit.

Mit  $|l_M(\omega)| = |W_u(j\omega)|$  kann man diese Bedingung noch umformen:

$$|GK(1 + GK)^{-1}l_M| < 1 \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad |T(j\omega)| < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad \forall \omega. \quad (49)$$

Wenn wir also robuste Stabilität bezüglich multiplikativer Ausgangsfehler fordern und  $l_M(\omega)$  als obere Grenze für den Fehler bekannt ist, müssen wir nur den Amplitudengang der komplementären Sensitivität des nominellen Kreises aufplotten und schauen, ob dieser kleiner als  $\frac{1}{l_M(\omega)}$  für alle Frequenzen ist. Also gibt es eine weitere Grenze für  $|T|$ , analog zur Rauschunterdrückung. Für hohe Frequenzen, für die auch  $l_M$  i.a. groß ist, gilt:

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_B : \quad |GK(1 + GK)^{-1}| &= |(1 + GK)(GK)^{-1}|^{-1} = |(GK)^{-1} + 1|^{-1} \\ &\approx |(GK)^{-1}|^{-1} = |GK| \\ &\Rightarrow |GK| < \frac{1}{l_M} \quad \text{für große } \omega. \end{aligned} \quad (50)$$

D.h. wenn die Unsicherheit groß ist, muss die Verstärkung klein sein. Man muss also „vorsichtig“ regeln. Wenn die Unsicherheit klein ist, dann kann man auch die Verstärkung groß wählen.

| Unsicherheitsbeschreibung              |                                                                            | Robustheitskriterium                                                   |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| multiplikative<br>Ausgangsunsicherheit | $G_{real} = (1 + \Delta_M)G$<br>$ \Delta_M  \leq l_M \quad \forall \omega$ | $ GK(1 + GK)^{-1}  =  T  < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad \forall \omega$ |
| multiplikative<br>Eingangsunsicherheit | $G_{real} = G(1 + \Delta_E)$<br>$ \Delta_E  \leq l_E \quad \forall \omega$ | $ KG(1 + KG)^{-1}  < \frac{1}{l_E(\omega)} \quad \forall \omega$       |
| additive<br>Unsicherheit               | $G_{real} = G + \Delta_A$<br>$ \Delta_A  \leq l_A \quad \forall \omega$    | $ K(1 + GK)^{-1}  =  KS  < \frac{1}{l_A(\omega)} \quad \forall \omega$ |

Tabelle 1: Robustheitskriterien für unterschiedliche Unsicherheitsbeschreibungen.

Das Auffinden von Robustheitskriterien für andere Unsicherheitsbeschreibungen erfolgt ganz analog. Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden (Tab. 1)

Es gibt noch weitere unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen in der Literatur, die aber oft nur für Spezialfälle interessant sind: z.B. inverse multiplikative Ausgangsunsicherheit oder additiv rückwirkende Unsicherheit. Mit dem allgemeinen Satz (3) kann man leicht die Robustheitskriterien für die entsprechenden Fälle herleiten.