

Einige wichtige Sätze zur Stabilitätstheorie von Lyapunov

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \in U$. Wir betrachten im folgenden Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar ist. Ohne Einschränkung sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von (1), d.h. $f(0) = 0$. Eine Lösung von (1) mit Anfangswert x_0 wird mit $t \mapsto x(t; x_0)$ bezeichnet. Sei $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$, dann ist die Linearisierung der Differentialgleichung (1) um die Ruhelage 0 gegeben durch

$$\dot{y} = Ay. \quad (2)$$

x^* heißt *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 : |x(t, x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Eine Ruhelage die nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist heißt *instabil (im Sinne von Lyapunov)*. Eine Ruhelage x^* heißt *anziehend (attraktiv)*, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0.$$

Ist die Ruhelage x^* stabil und attraktiv, dann heißt die Ruhelage *asymptotisch stabil*.

Die Ruhelage x^* heißt *exponentiell stabil*, falls es Konstanten $c, k, \alpha > 0$ gibt so dass für alle $|x_0| < c$ gilt, dass

$$|x(t; x_0)| \leq k |x_0| e^{-\alpha t}$$

gilt. Ist x^* eine asymptotisch stabile Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, dann heißt die Menge

$$R = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*\} \quad (3)$$

der *Einzugsbereich von x^** . Gilt $R = \mathbb{R}^n$, dann heißt x^* *global asymptotisch stabil*.

Eine einmal stetig differenzierbare Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal positiv definit (semidefinit)*, wenn $V(0) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$ ($V(x) \geq 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$). Ist $U = \mathbb{R}^n$ und ist V lokal positiv definit (semidefinit), so sagt man V ist *positiv definit (positiv semidefinit)*. Analog definiert man lokal negativ definit (semidefinit) und negativ definit (semidefinit).

Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \quad (4)$$

dann heißt V *radial unbeschränkt*.

Die *Lieableitung* $L_f V$ von V (Ableitung von V in Richtung des Vektorfeldes f) ist definiert durch

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f.$$

Wir schreiben $\dot{V}$ für $L_f V$.

Satz 1 (Indirekte (erste) Methode von Lyapunov). *Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Dann gilt:*

- a) Falls der Realteil aller Eigenwerte von A negativ ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil.
- b) Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ instabil.

Bemerkung 2. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Sind die Realteile aller Eigenwerte λ von A nichtpositiv, also gilt $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ von A , und gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage $x^* = 0$ gemacht werden.

Satz 3 (Direkte (zweite) Methode von Lyapunov). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal positiv definit. Dann gilt:

- a) Falls $\dot{V}$ lokal negativ semidefinit ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ stabil.
- b) Falls $\dot{V}$ lokal negativ definit ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Eine (untere) Abschätzung des Einzugsbereichs einer Ruhelage erhält man wie folgt:

Bemerkung 4. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ mit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $D \subset U$ ein Gebiet mit $x^* \in D$ auf dem $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und $\dot{V}$ negativ definit ist. Jede beschränkte Niveaumenge $H_c = \{x \in U \mid V(x) \leq c\}$ mit $H_c \subseteq D$ ist eine (untere) Abschätzung für den Einzugsbereich.

Satz 5 (Barbashin-Krasovskii). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und radial unbeschränkt. Ist $\dot{V}$ negativ definit, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

Satz 6 (Invarianzprinzip nach Krasovskii und LaSalle). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Weiterhin sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal positiv definit, und $\dot{V}$ sei lokal negativ semidefinit in U . Falls es keine nichttriviale Lösung $t \mapsto x(t; x_0)$ (nichttrivial heißt es gibt ein $t \geq 0$ mit $x(t; x_0) \neq 0$) gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; x_0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Bemerkung 7. Das Invarianzprinzip nach Krasovskii und LaSalle besagt also, wenn die triviale Lösung $t \mapsto x(t; x^*) = x(t; 0)$ mit $x(t; 0) = 0$ für $t \geq 0$ die einzige Lösung ist, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; 0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Satz 8. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, radial unbeschränkt und $\dot{V}$ sei negativ semidefinit. Falls es keine nichttriviale Lösung $t \mapsto x(t; x_0)$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; x_0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

Satz 9 (Instabilitätsatz nach Chetaev). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, $V : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $V(0) = 0$, $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\} \subset U_1$ und $\Omega = \{x \in U_1 \mid |x| \leq \varepsilon, V(x) > 0\}$. Wenn $\dot{V}(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ und wenn für jedes offene $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U_2$ gilt

$$U_2 \cap \{x \in U_1 \mid V(x) > 0\} \neq \emptyset,$$

dann ist $x^* = 0$ instabil.

Satz 10 (Lyapunov-Gleichung). Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $x^* = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle positiv definiten $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein positiv definites $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass gilt

$$A^T P + P A = -Q.$$

Literatur

- [1] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [2] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2001.
- [3] S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, 1999.
- [4] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, 2002.