

Positiv Definite Matrizen

Definition 1. Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv semi-definit** wenn P symmetrisch ist und $x^\top P x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2. Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv definit** wenn P symmetrisch ist und $x^\top P x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Bemerkung. Wir beschränken uns hier auf die positive Definitheit von symmetrischen Matrizen, aufgrund folgender Tatsache. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann lässt sich A als Summe einer schief-symmetrischen und symmetrischen Matrix schreiben:

$$A = \frac{1}{2} \underbrace{(A - A^\top)}_{\text{schief-symmetrisch}} + \frac{1}{2} \underbrace{(A + A^\top)}_{\text{symmetrisch}}.$$

Außerdem ist $x^\top A x = \frac{1}{2} x^\top (A - A^\top) x + \frac{1}{2} x^\top (A + A^\top) x = \frac{1}{2} x^\top (A + A^\top) x$. Somit spielt nur der symmetrische Anteil eine Rolle.

Bemerkung. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semi-definit. Die Matrix P ist genau dann positiv definit, wenn P invertierbar ist.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse gezeigt, mit deren Hilfe man die positive Definitheit von Matrizen überprüfen kann.

Satz 3 (Seite 1 in [1]). Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- P ist positiv (semi-) definit.
- Alle Eigenwerte von P sind (nichtnegativ) positiv.
- Alle Hauptminoren der Matrix P sind (nichtnegativ) positiv.

Die Hauptminoren k -ter Ordnung einer symmetrischen Matrix

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

sind definiert als die Determinanten der $k \times k$ -Matrizen, die durch Wegstreichen von $n - k$ Zeilen und Spalten entsteht.

Beispiel. Sei

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Die Hauptminoren erster Ordnung von P sind die Determinanten der Matrizen

$$H_{1,1} = 2, \quad H_{1,2} = 0, \quad H_{1,3} = 0.$$

Die Hauptminoren zweiter Ordnung von P sind die Determinanten der Matrizen

$$H_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Hauptminor dritter Ordnung von P ist die Determinante der Matrix P selbst. Da $\text{Det}(H_{2,2}) < 0$ gilt mit Satz 3, dass P nicht (semi-)definit ist. Die Eigenwerte von P sind $\lambda(P) = \{0, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$.

Satz 4 (Satz 7.2.5 in [4]). *Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre **führenden Hauptminoren** positiv sind.*

Die **führenden Hauptminoren** der Matrix P aus (1) sind definiert als:

$$h_1 = \text{Det}(p_{11}), \quad h_2 = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \right), \quad h_3 = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \right), \quad \dots$$

Bemerkung. Für positiv semi-definite Matrizen gilt nur eine Richtung des Satzes 4! Das heißt, wenn P positiv semi-definit ist, sind alle ihre führenden Hauptminoren nicht-negativ, aber nicht umgekehrt. Dies sieht man an dem oben gezeigten Beispiel. Man kann leicht nachrechnen, dass $h_1 = \text{Det}(H_{1,1}) = 2 > 0$, $h_2 = \text{Det}(H_{2,1}) = 0 \geq 0$, $h_3 = \text{Det}(P) = 0 \geq 0$, allerdings ist, wie schon gezeigt, P indefinit.

Satz 5. *Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semi-definit, wenn sie geschrieben werden kann als $P = B^\top B$ mit $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ferner ist P genau dann positiv definit, wenn B nichtsingulär (also auch quadratisch, $m = n$) ist.*

Satz 6 (Seite 398 in [4]). *Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn P positiv (semi-) definit ist, dann sind die Einträge auf ihrer Hauptdiagonalen (nichtnegativ) positiv. Ferner ist die Spur und die Determinante von P (nichtnegativ) positiv.*

Bemerkung. Demnach gilt, wenn die Hauptdiagonale von P mindestens einen negativen Eintrag enthält, dann ist die Matrix nicht positiv (semi-) definit.

Bemerkung. Äquivalent zur positiven Definitheit von Matrizen kann man auch die negative Definitheit von Matrizen definieren. Eine Matrix P ist genau dann negativ (semi-) definit, wenn $-P$ positiv (semi-) definit ist.

Nützliches

Satz 7. *Für jede reelle, symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq x^\top A x \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2 \quad (2)$$

wobei $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert und $\lambda_{\max}(A)$ der größte Eigenwert von A sind.

Satz 8 (Beweis folgt aus Satz 1.2.12 in [4]). *Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Die Eigenwerte von A sind genau dann positiv wenn $\text{Spur}(A) > 0$ und $\text{Det}(A) > 0$.*

Bemerkung. Dieser Satz gilt im Allgemeinen **nur für 2×2 -Matrizen!**

Satz 9 (S. 39 in [4]). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige obere oder untere Dreiecksmatrix, d.h. A (oder $A^\top$) ist von der Form

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dann sind die Einträge auf der Diagonalen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auch die Eigenwerte von A .

Satz 10 (S. 62 in [4]). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $A^\top$) ist von der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

dann sind die Eigenwerte von A , die Vereinigung der Eigenwerte der Matrizen A_{11} und A_{22} .

Literatur

- [1] R. Bhatia. *Positive Definite Matrices*. Hindustan Book Agency, 2007.
- [2] K. H. Elster. *Nichtlineare Optimierung*. Harri Deutsch, 1978.
- [3] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [4] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, 2002.
- [6] J. L. Willems. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Nelson and Sons, 1970.