

## Einige wichtige Sätze zur Stabilitätstheorie von Lyapunov

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $0 \in U$ . Wir betrachten im folgenden Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

wobei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  einmal stetig differenzierbar ist. Ohne Einschränkung sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von (1), d.h.  $f(0) = 0$ . Eine Lösung von (1) mit Anfangswert  $x_0$  wird mit  $s(t; x_0)$  bezeichnet. Sei  $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$ , dann ist die Linearisierung der Differentialgleichung (1) um die Ruhelage 0 gegeben durch

$$\dot{y} = Ay. \quad (2)$$

$x^*$  heißt *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass

$$|x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 : |s(t, x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Eine Ruhelage die nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist heißt *instabil (im Sinne von Lyapunov)*. Eine Ruhelage  $x^*$  heißt *anziehend (attraktiv)*, wenn es ein  $\eta > 0$  gibt, so dass gilt

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x_0) = 0.$$

Ist die Ruhelage  $x^*$  stabil und attraktiv, dann heißt die Ruhelage *asymptotisch stabil*.

Die Ruhelage  $x^*$  heißt *exponentiell stabil*, falls es Konstanten  $c, k, \alpha > 0$  gibt so dass für alle  $|x_0| < c$  gilt, dass

$$|s(t; x_0)| \leq k |x_0| e^{-\lambda t}$$

gilt. Ist  $x^*$  eine asymptotisch stabile Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$ , dann heißt die Menge

$$R := \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} s(t; x_0) = x^*\} \quad (3)$$

der *Einzugsbereich von  $x^*$* . Gilt  $R = \mathbb{R}^n$ , dann heißt  $x^*$  *global asymptotisch stabil*.

Eine einmal stetig differenzierbare Funktion  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *lokal positiv definit (semidefinit)*, wenn  $V(0) = 0$  und  $V(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{0\}$  ( $V(x) \geq 0$  für  $x \in U \setminus \{0\}$ ). Ist  $U = \mathbb{R}^n$  und ist  $V$  lokal positiv definit (semidefinit), so sagt man  $V$  ist *positiv definit (positiv semidefinit)*. Analog definiert man lokal negativ definit (semidefinit) und negativ definit (semidefinit).

Sei  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \quad (4)$$

dann heißt  $V$  *radial unbeschränkt*.

Die *Lieableitung*  $L_f V$  von  $V$  (Ableitung von  $V$  in Richtung des Vektorfeldes  $f$ ) ist definiert durch

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f.$$

Wir schreiben  $\dot{V}$  für  $L_f V$ .

**Satz 1. (Indirekte (erste) Methode von Lyapunov)** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch  $\dot{y} = Ay$ . Dann gilt:

- Falls der Realteil aller Eigenwerte von  $A$  negativ ist, dann ist die Ruhelage  $x^* = 0$  asymptotisch stabil.
- Gibt es einen Eigenwert von  $A$  dessen Realteil positiv ist, dann ist die Ruhelage  $x^* = 0$  instabil.

**Bemerkung 2.** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch  $\dot{y} = Ay$ . Sind die Realteile aller Eigenwerte  $\lambda_k$  von  $A$  nichtpositiv, also  $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$ , und gibt es einen Eigenwert von  $A$  dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage  $x^* = 0$  gemacht werden.

**Satz 3 (Direkte (zweite) Methode von Lyapunov).** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  und  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  lokal positiv definit. Dann gilt:

- Falls  $\dot{V}$  negativ semidefinit ist, dann ist die Ruhelage  $x^* = 0$  stabil.
- Falls  $\dot{V}$  negativ definit ist, dann ist die Ruhelage  $x^* = 0$  asymptotisch stabil.

Eine (untere) Abschätzung des Einzugsbereichs einer Ruhelage erhält man wie folgt:

**Bemerkung 4.** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $D \subset U$  ein Gebiet mit  $x^* \in D$  auf dem  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  positiv definit und  $\dot{V}$  negativ definit ist. Jede beschränkte Niveaumenge  $H_c = \{x \in D \mid V(x) \leq c\}$  ist eine (untere) Abschätzung für den Einzugsbereich.

**Satz 5 (Barbashin-Krasovskii).** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  und  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positiv definit und radial unbeschränkt. Ist  $\dot{V}$  negativ definit, dann ist  $x^* = 0$  global asymptotisch stabil.

**Satz 6 (Invarianzprinzip nach Krasovskii und LaSalle).** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$ . Weiterhin sei  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal positiv definit, und  $\dot{V}$  sei lokal negativ semidefinit in  $U$ . Falls es keine nichttriviale Lösung  $s(t; x_0) \not\equiv 0$  gibt, so dass für alle  $t \geq 0$  gilt  $s(t; x_0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , dann ist  $x^* = 0$  asymptotisch stabil.

**Satz 7 (Instabilitätsatz nach Chetaev).** Sei  $x^* = 0$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  und sei  $V : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U_2 \subseteq U_1$  stetig differenzierbar. Sei weiterhin  $W := \{x \in U_2 \mid V(x) > 0\}$ . Gilt

- $0 \in \partial W$  ( $\partial W$  bezeichnet den Rand von  $W$ ),
- $W$  ist in einem hinreichend kleinen Ball um  $x^*$  enthalten,
- und  $\dot{V} > 0$  für  $x \in W$ ,

dann ist  $x^*$  instabil.

**Satz 8 (Lyapunov-Gleichung).** Sei  $f(x) = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $x^*$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle positiv definiten  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ein positiv definites  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, so dass gilt

$$A^T P + PA = -Q.$$

## Literatur

- [1] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [2] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2001.
- [3] S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, 1999.
- [4] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, 2002.