

Konzepte der Regelungstechnik

Vorlesung 1 und 2

Gerd Simon Schmidt

Institute for Systems Theory and Automatic Control
University of Stuttgart

28. Oktober 2013



Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein einmal stetig differenzierbares (kurz $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$) Vektorfeld. Wir betrachten im Folgenden Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x).$$

x^* heißt Ruhelage (RL) von $\dot{x} = f(x)$ wenn $f(x^*) = 0$.

Ohne Einschränkung gilt $x^* = 0$.

Eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert x_0 wird mit $t \mapsto x(t; x_0)$ bezeichnet.



Definition

Sei $x^* = 0$ RL von $\dot{x} = f(x)$. $x^* = 0$ heißt *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 : |x(t; x_0)| < \varepsilon.$$

Eine RL die nicht stabil ist heißt *instabil (i.S.v. Lyapunov)*.

Die RL $x^* = 0$ heißt *anziehend (attraktiv)*, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0.$$

Ist die RL $x^* = 0$ stabil und attraktiv, dann heißt sie *asymptotisch stabil*. Die RL $x^* = 0$ heißt *exponentiell stabil*, falls es $c, k, \alpha > 0$ gibt so dass für alle $|x_0| < c$ und alle $t \geq 0$ gilt

$$|x(t; x_0)| \leq k |x_0| e^{-\alpha t}.$$

Beispiel nach Vinograd (1957)



Sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachte

$$\dot{x} = \frac{x^2(y - x) + y^5}{r^2(1 + r^4)}$$

$$\dot{y} = \frac{y^2(y - 2x)}{r^2(1 + r^4)}.$$

$x^* = 0$ ist die einzige Ruhelage.

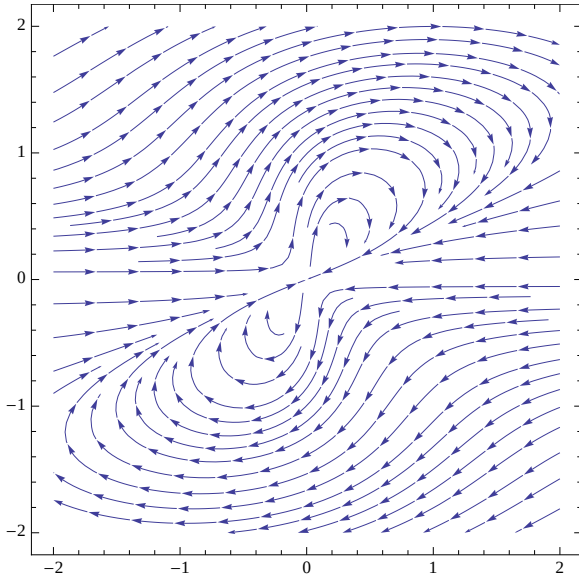
Man kann zeigen (Meiss, Differential Dynamical Systems, p.120):

- Jede Lösung konvergiert in den Ursprung.
- Für $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ gilt: für jedes $\delta > 0$ gibt es $x_0 \in B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < \delta\}$ so dass $t \mapsto x(t, x_0)$ die Menge $B_{\frac{1}{2}}(0)$ verlässt.

Details, siehe Hahn, Stability of Motion, §40, p.191ff.

RL $x^* = 0$ is attraktiv aber instabil.

Beispiel nach Vinograd (1957)





Indirekte Methode von Lyapunov.

Satz

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Setze

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^*} \right)_{i,j}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- Ist der Realteil aller Eigenwerte λ_k von A negativ, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil.
- Gibt es einen Eigenwert λ_k von A dessen Realteil positiv ist, dann ist die Ruhelage instabil.



Weil f stetig differenzierbar ist, gilt wegen des Satzes von Taylor und wegen des Mittelwertsatzes, dass für jedes $a > 0$ ein $k(a) > 0$ gibt mit

$$|y| \leq a \Rightarrow |g(y)| \leq k(a) |y|^2. \quad (1)$$

Weil der Realteil aller Eigenwerte der Linearisierung kleiner als Null ist, gibt es ein $\lambda > 0$ so dass für alle Eigenwerte σ gilt

$$\operatorname{Re}(\sigma) < -\lambda < 0.$$

Des Weiteren gilt, für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es $C > 1$ so dass

$$|e^{tA}v| \leq C |v| e^{-\lambda t} \quad (2)$$

für $t \geq 0$ ist. Sei nun $\delta > 0$ fest, so dass $\delta < a$ und $Ck\delta - \lambda < 0$ gilt. Definiere $\alpha = \lambda - Ck\delta$, d.h. $\alpha > 0$. Weiterhin definiere $b = \frac{\delta}{C}$, d.h. $b > 0$ und $b < \delta < a$.



Betrachte nun die Lösung von $\dot{y} = Ay + g(y)$ für eine Anfangsbedingung y_0 mit $|y_0| < b$. Dann gibt es ein nichtleeres Intervall $J = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t < \tau\}$ so dass die Lösung $t \mapsto y(t; y_0)$ mit $y(0; y_0) = y_0$ existiert und die Ungleichung

$$|y(t; y_0)| < \delta$$

für alle $t \in J$ gilt. Wegen $\delta < a$ und (1) gilt

$$|g(y(t; y_0))| \leq k(a) |y(t; y_0)|^2 \leq k(a) \delta |y(t; y_0)| \quad (3)$$

für alle $t \in J$. Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten ist die Lösung von $\dot{y} = Ay + g(y)$ gegeben durch

$$y(t; y_0) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(y(s; y_0)) ds.$$



Aus (3) und (2) folgt

$$|y(t; y_0)| \leq C e^{-\lambda t} |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} |y(s; y_0)| ds.$$

Sei $\xi(t) = |y(t; y_0)| e^{\lambda t}$. Dann gilt für $t \in J$ die Ungleichung

$$\xi(t) \leq C |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t \xi(s) ds. \quad (4)$$

Verwenden das Lemma von Gronwall um (4) abzuschätzen:

$$\xi(t) \leq C |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t \xi(s) ds \Rightarrow \xi(t) \leq C |y_0| e^{C k(a) \delta t}.$$

Damit gilt für $t \in J$ die Abschätzung

$$\Rightarrow |y(t; y_0)| \leq C |y_0| e^{(C k(a) \delta - \lambda) t} \leq C |y_0| e^{-\alpha t}.$$



D.h. solange $|y_0| < \delta$ und $|y(t; y_0)| \leq \delta$ für alle $t \in J$ gilt, dann gilt

$$|y(t; y_0)| \leq C |y_0| e^{-\alpha t}$$

für alle $t \in J = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t < \tau\}$. Man kann mittels der Fortsetzbarkeit von Lösungen zeigen, dass τ nicht endlich sein kann, also gilt $J = [0, \infty)$. Somit haben wir plausibilisiert, warum die Ruhelage einer Differentialgleichung asymptotisch stabil ist, wenn die Eigenwerte der Linearisierung an einer Ruhelage negativen Realteil haben.



Lemma

Sei $g, k : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a > 0$ und $k(t) \geq 0$ für $t \in [0, a]$.
Angenommen für g gilt die Ungleichung

$$g(t) \leq c + \int_0^t k(s)g(s)ds \quad (5)$$

für alle $0 \leq t \leq a$. Dann gilt für alle $t \in [0, a]$

$$g(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}.$$



Definiere $G : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $G(t) = c + \int_0^t k(s)g(s)ds$. Wegen (5) gilt sofort $g(t) \leq G(t)$ für alle $t \in [0, a]$. Es gilt $G(0) = c$. Weil g, k stetig sind, ist G stetig diffbar. Differentiation von G gibt

$$\dot{G}(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t)$$

d.h. $\dot{G} - kG \leq 0$. Multiplikation mit $e^{-\int_0^t k(s)ds}$ ergibt

$$e^{-\int_0^t k(s)ds}(\dot{G} - kG) = \frac{d}{dt} \left(G(t)e^{-\int_0^t k(s)ds} \right) \leq 0.$$

Integration liefert

$$G(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}.$$

Weil $g \leq G$ ist, gilt die Behauptung.



Löse $\dot{y} = Ay + g(y)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar.

Lemma

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y} = Ay + g(y)$ mit Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$y(t; y_0) = \exp(At)y_0 + \int_0^t \exp A(t - \tau)g(y(\tau; y_0))d\tau.$$



Lösung von $\dot{y} = Ay$ mit AB y_0 ist $t \mapsto \exp(At)y_0$.

Sei $t \mapsto y(t; y_0)$ Lösung von $\dot{y} = Ay + g(y)$, definiere $z(t; y_0) = \exp(-At)y(t; y_0)$, dann gilt:

$$\left(\frac{d}{dt} \exp(At)\right)z(t; y_0) + \exp(At)\dot{z}(t; y_0) = Ay(t; y_0) + g(y(t; y_0))$$

$$\frac{d}{dt} \exp(At) \underset{\Rightarrow}{=} A \exp(At)$$

$$\dot{z}(t; y_0) = \exp(-At)g(y(t; y_0)).$$

Mit $z(0; y_0) = \exp(A0)y(0; y_0) = y_0$ und Integration von $\dot{z}(t; y_0) = \exp(-At)g(y(t; y_0))$ folgt

$$z(t; y_0) - y_0 = \int_0^t \exp(-A\tau)g(y(\tau; y_0))d\tau$$

Mit $y(t; y_0) = \exp(At)z(t; y_0)$ ergibt sich die Behauptung.

Konzepte der Regelungstechnik

Vorlesung 3

Gerd Simon Schmidt

Institute for Systems Theory and Automatic Control
University of Stuttgart

3. November 2013



Bemerkung 5

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Sind die Realteile aller Eigenwerte kleiner oder gleich Null und gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage $x^* = 0$ gemacht werden.

Beispiel 6



Betrachte $\dot{x} = -x^3$ und $\dot{x} = x^3$. Die RL 0 ist in beiden Fällen die einzige RL. Die Lösungen $t \mapsto x(t; x_0)$ zur AB x_0 von $\dot{x} = -x^3$ erfüllen

$$(x(t; x_0))^2 = \frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2 t},$$

d.h. die Lösungen mit $x_0 > 0$ ($x_0 < 0$) sind streng monoton abnehmende (zunehmende) Funktionen von t und alle Lösungen konvergieren gegen die RL. Somit ist die RL asymptotisch stabil.

Die Lösungen $t \mapsto x(t; x_0)$ zur AB x_0 von $\dot{x} = x^3$ erfüllen

$$(x(t; x_0))^2 = \frac{x_0^2}{1 - 2x_0^2 t},$$

d.h. alle Lösungen mit $x_0 \neq 0$ sind in endlicher Zeit unbeschränkt. Damit ist die RL instabil.

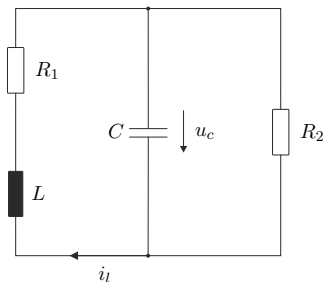
Die Linearisierung an der RL hat im ersten Fall die Systemmatrix

$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = -3x^2|_{x=0} = 0$ und im zweiten Fall die Systemmatrix

$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = 3x^2|_{x=0} = 0$. Somit In beiden Fällen ist die Linearisierung an der RL gegeben durch

$$\dot{y} = 0.$$

Beispiel 7: elektrischer Schaltkreis



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}i_l &= \frac{1}{L}(-u_c - R_1 i_l) \\ \frac{d}{dt}u_c &= \frac{1}{C}\left(i_l - \frac{u_c}{R_2}\right)\end{aligned}$$

Im System gespeicherte Energie (Kapazität und Induktivität):

$$V(i_l, u_c) = \frac{1}{2}Li_l^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2.$$

Beispiel 7: elektrischer Schaltkreis



Wie ändert sich V mit der Zeit?

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(i_l(t), u_c(t)) &= Li_l(t)\frac{d}{dt}i_l(t) + Cu_c(t)\frac{d}{dt}u_c(t) \\ &= i_l(t)(-u_c(t) - R_1i_l(t)) + u_c(t)(i_l(t) - \frac{u_c(t)}{R_2}) \\ &= -R_1(i_l(t))^2 - \frac{1}{R_2}(u_c(t))^2 \\ &= -\frac{R_1}{L}L(i_l(t))^2 - \frac{1}{R_2C}C(u_c(t))^2 \\ &\leq -2\underbrace{\max(\frac{R_1}{L}, \frac{1}{R_2C})}_{\alpha} V(i_l(t), u_c(t)).\end{aligned}$$

$\alpha > 0$, $V(i_l(t), u_c(t)) \leq ce^{-2\alpha t}$ mit $c = |(\frac{1}{2}Li_l(0), \frac{1}{2}Cu_c(0))|^2$.

Also nimmt V monoton ab und $V(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$. Somit ist die RL $u_c = i_l = 0$ asymptotisch stabil.



$V(i_l(t), u_c(t)) = \frac{1}{2}Li_l(t)^2 + \frac{1}{2}Cu_c(t)^2$ ist die im Schaltkreis (also der Kapazität und der Induktivität) zum Zeitpunkt t gespeicherte Energie. Zu einem gegebenen Anfangsstrom $i_l(0)$ und einer gegebenen Anfangsspannung $u_c(0)$ hat das System eine bestimmte Energie $V(0) = \frac{1}{2}Li_l(0)^2 + \frac{1}{2}Cu_c(0)^2$. Alle möglichen Werte, die von den Zuständen des Systems angenommen werden können, liegen bei gegebener Systemenergie auf einer Höhenlinie von V . Wir wissen, dass die Energie des Systems mit der Zeit streng monoton abnimmt. D.h., die möglichen Werte der Zustände liegen mit fortschreitender Zeit auf Höhenlinien mit kleinerem Wert. Liegen die Werte der Zustände zu einem Zeitpunkt in einer beliebigen durch eine Höhenlinie festgelegten Umgebung der Ruhelage, so können die Werte zu einem späteren Zeitpunkt niemals außerhalb dieser Umgebung liegen. Deswegen ist die Ruhelage stabil. Weil durch den Wert der Energiefunktion festgelegt ist, welche Zustände das System einnehmen kann, der Wert gegen Null konvergiert und die Energie nur Null werden kann, wenn beide Zustände Null werden, ist die Ruhelage Null attraktiv. Somit ist die Ruhelage asymptotisch stabil.



Definition 8

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0. Eine Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal positiv definit* wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) V ist stetig differenzierbar, also $V \in C^1(U, \mathbb{R})$,
- (ii) $V(0) = 0$ und
- (iii) $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$.

V heißt *lokal positiv semidefinit* wenn statt (iii) gilt

- (iii') $V(x) \geq 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$.

Ist $U = \mathbb{R}^n$ so sprechen wir von positiv definiten bzw. positiv semidefiniten Funktionen. Negativ definit und negativ semidefinit definiert man analog.



Sei

$$\dot{x} = f(x)$$

eine Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem Vektorfeld $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $t \mapsto x(t; x_0)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangsbedingung x_0 . Es gilt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}V(x(t; x_0)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt}x(t; x_0) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x(t; x_0)). \quad (1)$$

Wir definieren die *Lie-Ableitung* $L_f V : U \rightarrow \mathbb{R}$ von V in Richtung von f durch

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f.$$

Man schreibt wegen (1) auch oft $\dot{V}$ statt $L_f V$.



Satz 9

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und D eine offene Umgebung von 0. Gibt es ein positiv definites $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $L_f V$ negativ semidefinit auf D ist, dann ist $x^* = 0$ stabil. Ist $L_f V$ negativ definit, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Bemerkung 10

Sind diese Bedingungen erfüllt heißt V *Lyapunovfunktion*.

Definition 11

Sei x^* eine asymptotisch stabile RL von $\dot{x} = f(x)$. Die Menge

$$R = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*\} \quad (2)$$

heißt der *Einzugsbereich* von x^* . Gilt $R = \mathbb{R}^n$, dann heißt x^* *global asymptotisch stabil*.

Beispiel 12 nach Barbashin und Krasovskii



Sei $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$.

Betrachte das System

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} L_f V &= \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \left(-6\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \right) + 2x_2 \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \\ &= -\frac{12x_1^2}{(1+x_1^2)^4} + \frac{4x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} - \frac{4x_2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \\ &= -\frac{4}{(1+x_1^2)^2} \left(\frac{3x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2 \right). \end{aligned}$$

Beispiel 12 nach Barbashin und Krasovskii



D.h. V ist positiv definit, $L_f V$ negativ definit. D.h. die (einzige) Ruhelage des Systems ist asymptotisch stabil. Betrachte die Kurve $x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}$. Es gilt

$$\lim_{x_1 \downarrow \sqrt{2}} \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}} = \infty, \quad \lim_{x_1 > \sqrt{2}, x_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}} = 0.$$

Die Steigung der Tangenten entlang der Kurve ist

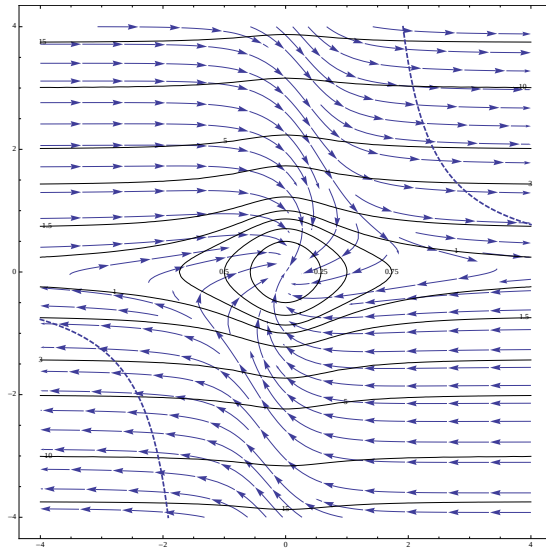
$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{1}{1 - \sqrt{2}x_1 + \frac{x_1^2}{2}}.$$

Entlang der Kurve gilt

$$\left. \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \right|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} = - \frac{1}{1 + 2\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2}.$$

D.h. entlang der Kurve ist der Winkel zwischen der Tangente und den Vektoren positiv, d.h. die Lösungen der Dgl verlaufen in dem durch die Kurve abgetrennte Gebiet und können dieses nicht in Richtung der Achsen verlassen. Damit gibt es Lösungen die nicht in den Ursprung konvergieren. Das heißt obwohl V positiv definit ist, 0 die einzige Ruhelage ist, diese asymptotisch stabil ist, gibt es Lösungen die nicht gegen 0 konvergieren. Damit ist 0 nicht global asymptotisch stabil.

Beispiel 12 nach Barbashin und Krasovskii





Definition 13

Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

dann heißt V *radial unbeschränkt*.

Satz 14

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Existiert ein positiv definites, radial unbeschränktes $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $L_f V$ negativ definit ist, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.



Bemerkung 15

Eine (untere) Abschätzung des Einzugsbereichs erhält man wie folgt. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Sei $D \subset U$ ein Gebiet mit $x^* \in D$ auf dem $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und $L_f V$ negativ definit ist. Jede beschränkte Niveaumenge $H_c = \{x \in D | V(x) \leq c\}$ ist eine Abschätzung für den Einzugsbereich.

Konzepte der Regelungstechnik

Vorlesung 4

Gerd Simon Schmidt

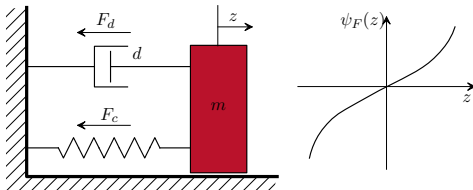
Institute for Systems Theory and Automatic Control
University of Stuttgart

14. November 2013

Beispiel 16



Feder-Masse-Schwinger mit linearer Dämpferkraft $F_d = d\dot{z}$ mit $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$ und Federkraft $F_c = \psi_F(z)$ mit $k_1 z \leq \psi_F(z) \leq k_2 z$ und $0 < k_1 < k_2$.



Die Bewegungsgleichungen lauten $m\ddot{z} + d\dot{z} + \psi_F(z)$. In ZRD mit $v = \dot{z}$:

$$\dot{z} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m} \left(\psi_F(z) + dv \right).$$

Die einzige Ruhelage des Systems ist bei $(0, 0)$. Die im System gespeicherte kinetische und potentielle Energie ist

$$V(v, z) = \frac{1}{2}mv^2 + \int_0^z \psi_F(\zeta)d\zeta.$$

V ist positiv definit.

Beispiel 16



Nun gilt $L_f V = -dv^2$. D.h. $L_f V$ ist negativ semidefinit und damit nach Lyapunov stabil. Ist die Feder linear, dann ist die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil. Wie sieht es im nichtlinearen Fall aus? Sei also $t \mapsto (v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0)))$ eine Lösung. Ist $v(t; (v_0, z_0)) \neq 0$, gilt

$$\dot{V}(v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0))) = -d \left(v(t; (v_0, z_0)) \right)^2.$$

D.h. $t \mapsto V(t) := V(v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0)))$ nimmt ab wenn $v(t; (v_0, z_0)) \neq 0$ ist. Weil $t \mapsto V(t)$ aber nicht kleiner als Null werden kann, muss $t \mapsto V(t)$ es ein $T > 0$ geben, so dass gilt $V(t) = \text{const.}$ für alle $t \geq T$. Dann ist zwangsläufig $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für $t \geq T$. Was kann dann passieren? Betrachten wir also eine Lösung, bei der $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für $t \geq 0$ (wir schreiben auch $v(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$) gilt. Einsetzen in die DGL liefert $\psi_F(z(t; (v_0, z_0))) \equiv 0$, das gilt aber nur wenn $z(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$ gilt. D.h. wir können $v(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$ nur erreichen wenn gleichzeitig auch $z(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$ gilt. Weil zwangsläufig $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für alle $t \geq T$ erreicht wird, konvergieren wir also gegen die einzige Ruhelage. Somit ist die Ruhelage asymptotisch stabil.



Bemerkung 17

Im Feder-Masse-Beispiel wissen wir, dass alle Lösungen innerhalb einer beschränkten Niveaumenge H_c von V verlaufen. Weiterhin konvergiert jede Lösung gegen die Menge $\{x \in H_c | L_f V(x) = 0\}$. Wir wollen ausschließen, dass es eine weitere Lösung neben der Ruhelage gibt, die in der Menge $\{x \in H_c | L_f V(x) = 0\}$ verläuft.

Satz 18 (Invarianzprinzip nach Krasovskii-LaSalle)

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Sei weiterhin $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunovfunktion um die Stabilität der Ruhelage $x^* = 0$ nachzuweisen. Sei $E = \{x \in U | L_f V(x) = 0\}$. Liegt kein Vorwärtssorbit vollkommen in E , d.h. gilt für alle $x_0 \in U \setminus \{0\}$ dass $\{x(t; x_0) \in U | t \geq 0\} \cap E = \emptyset$, dann ist 0 asymptotisch stabil.



Satz 19 (Chetaev)

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\} \subset U$, und $W \subseteq B_\varepsilon$ eine offene Menge so dass gilt:

- $0 \in \partial W$,
- $V(x) = 0$ für $x \in \partial W \cap B_r$
- $V(x) > 0$ für $x \in W$.
- $L_f V(x) > 0$ for $x \in W$.

Dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ instabil.



Definition 21

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn $x^T P x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Ist $x^T P x \geq 0$ so nennt man P positiv semidefinit.

Definition 22

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Hurwitzmatrix*, wenn für alle Eigenwerte λ_k von A gilt

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0. \quad (1)$$



Satz 23

Die Matrix A ist genau dann eine Hurwitz-Matrix, wenn die Gleichung

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (2)$$

für jedes positiv definite Q eine eindeutige, positiv definite Lösung P besitzt.

Bemerkung 24

Somit gilt, ist $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil, dann gibt es auch eine quadratische Lyapunovfunktion $V(x) = x^T P x$.

Positiv Definite Matrizen und Funktionen

Definitheit von Matrizen

Definition 1. Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv semi-definit** wenn P symmetrisch ist und $x^\top P x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2. Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv definit** wenn P symmetrisch ist und $x^\top P x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Bemerkung. Wir beschränken uns hier auf die positive Definitheit von symmetrischen Matrizen, aufgrund folgender Tatsache. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann lässt sich A als Summe einer schief-symmetrischen und symmetrischen Matrix schreiben:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^\top)}_{\text{schief-symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^\top)}_{\text{symmetrisch}}.$$

Außerdem ist $x^\top A x = \frac{1}{2}x^\top (A - A^\top)x + \frac{1}{2}x^\top (A + A^\top)x = \frac{1}{2}x^\top (A + A^\top)x$. Somit spielt nur der symmetrische Anteil eine Rolle.

Bemerkung. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semi-definit. Die Matrix P ist genau dann positiv definit, wenn P invertierbar ist.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse gezeigt, mit deren Hilfe man die positive Definitheit von Matrizen überprüfen kann.

Satz 3 (Seite 1 in [1]). Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- P ist positiv (semi-) definit.
- Alle Eigenwerte von P sind (nichtnegativ) positiv.
- Alle Hauptminoren der Matrix P sind (nichtnegativ) positiv.

Die Hauptminoren k -ter Ordnung einer symmetrischen Matrix

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

sind definiert als die Determinanten der $k \times k$ -Matrizen, die durch Wegstreichen von denselben $n - k$ Zeilen und Spalten entsteht, d.h., wenn die i -te Zeile weggestrichen wird, muss auch die i -te Spalte weggestrichen werden.

Beispiel. Sei

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Die Hauptminoren erster Ordnung von P sind die Determinanten der Matrizen

$$H_{1,1} = 2, \quad H_{1,2} = 0, \quad H_{1,3} = 0.$$

Die Hauptminoren zweiter Ordnung von P sind die Determinanten der Matrizen

$$H_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Hauptminor dritter Ordnung von P ist die Determinante der Matrix P selbst. Da $\text{Det}(H_{2,2}) < 0$ gilt mit Satz 3, dass P nicht (semi-)definit ist. Die Eigenwerte von P sind $\lambda(P) = \{0, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$.

Satz 4 (Satz 7.2.5 in [4]). *Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre **führenden Hauptminoren** positiv sind.*

Die **führenden Hauptminoren** der Matrix P aus (1) sind definiert als:

$$h_1 = \text{Det}(p_{11}), \quad h_2 = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \right), \quad h_3 = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \right), \quad \dots$$

Bemerkung. Für positiv semi-definite Matrizen gilt nur eine Richtung des Satzes 4! Das heißt, wenn P positiv semi-definit ist, sind alle ihre führenden Hauptminoren nicht-negativ, aber nicht umgekehrt. Dies sieht man an dem oben gezeigten Beispiel. Man kann leicht nachrechnen, dass $h_1 = \text{Det}(H_{1,1}) = 2 > 0$, $h_2 = \text{Det}(H_{2,1}) = 0 \geq 0$, $h_3 = \text{Det}(P) = 0 \geq 0$, allerdings ist, wie schon gezeigt, P indefinit.

Satz 5. *Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semi-definit, wenn sie geschrieben werden kann als $P = B^\top B$ mit $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ferner ist P genau dann positiv definit, wenn B nichtsingulär (also auch quadratisch, $m = n$) ist.*

Satz 6 (Seite 398 in [4]). *Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn P positiv (semi-) definit ist, dann sind die Einträge auf ihrer Hauptdiagonalen (nichtnegativ) positiv. Ferner ist die Spur und die Determinante von P (nichtnegativ) positiv.*

Bemerkung. Demnach gilt, wenn die Hauptdiagonale von P mindestens einen negativen Eintrag enthält, dann ist die Matrix nicht positiv (semi-) definit.

Bemerkung. Äquivalent zur positiven Definitheit von Matrizen kann man auch die negative Definitheit von Matrizen definieren. Eine Matrix P ist genau dann negativ (semi-) definit, wenn $-P$ positiv (semi-) definit ist.

Nützliches

Satz 7. *Für jede reelle, symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq x^\top A x \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2 \quad (2)$$

wobei $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert und $\lambda_{\max}(A)$ der größte Eigenwert von A sind.

Satz 8 (Beweis folgt aus Satz 1.2.12 in [4]). *Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit reellen Eigenwerten. Die Eigenwerte von A sind genau dann positiv wenn $\text{Spur}(A) > 0$ und $\text{Det}(A) > 0$.*

Bemerkung. Dieser Satz gilt im Allgemeinen **nur für 2×2 -Matrizen!**

Satz 9 (S. 39 in [4]). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige obere oder untere Dreiecksmatrix, d.h. A (oder $A^\top$) ist von der Form

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dann sind die Einträge auf der Diagonalen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auch die Eigenwerte von A .

Satz 10 (S. 62 in [4]). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $A^\top$) ist von der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

dann sind die Eigenwerte von A , die Vereinigung der Eigenwerte der Matrizen A_{11} und A_{22} .

Satz 11. Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann gilt

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Definitheit von Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Definition 12. Die Funktion f ist **lokal positiv (semi-)definit** wenn $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ ($f(x) \geq 0$) für alle $x \in U \setminus \{0\}$.

Definition 13. Sei $U = \mathbb{R}^n$. Die Funktion f ist **positiv (semi-)definit** wenn $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ ($f(x) \geq 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definition 14. Sei $U = \mathbb{R}^n$. Die Funktion f ist **radial unbeschränkt** wenn

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ für } |x| \rightarrow \infty$$

(d.h. für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$).

Satz 15. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle quadratische, symmetrische Matrix. Die Funktion $g(x) = x^\top P x$ ist genau dann positiv (semi-) definit wenn die Matrix P positiv (semi-) definit ist.

Satz 16. Die Funktion f ist lokal positiv definit, wenn $f(0) = 0$ und eine positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass

$$x^\top P x \leq f(x), \quad \forall x \in U.$$

Die Funktion ist positiv definit, wenn $U = \mathbb{R}^n$. Ferner ist f dann auch radial unbeschränkt.

Satz 17 (Folgt aus Satz 2.16 in [2]). Sei f zwei mal stetig differenzierbar. Ferner gilt, dass $f(0) = 0$ und $\nabla f(0) = 0$. Wenn die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(0)$ positiv (semi-) definit ist, dann ist die Funktion f ist lokal positiv (semi-) definit.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nur in folgender Form: Sei f wie im vorhergehenden Satz. Wenn f positiv (semi-) definit ist, dann ist die Hesse Matrix $\nabla^2 f(0)$ positiv semi-definit.

Beispiel: $f(x) = x^4$. Diese Funktion erfüllt alle Anforderungen, d.h. $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$ und die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(0) = 0$. Jedoch ist diese Funktion positiv definit und ihre Hesse-Matrix positiv semi-definit.

Literatur

- [1] R. Bhatia. *Positive Definite Matrices*. Hindustan Book Agency, 2007.
- [2] K. H. Elster. *Nichtlineare Optimierung*. Harri Deutsch, 1978.
- [3] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [4] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, 2002.
- [6] J. L. Willems. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Nelson and Sons, 1970.

Linear-Quadratische Optimalsteuerungsprobleme und Kalman-Bucy-Filter

Endlicher Zeithorizont

Definition 1. Ein *Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont* ist ein Optimalsteuerungsproblem der Form:

$$\begin{aligned} J^*(x_0, 0, t_f) &= \min_u \int_0^{t_f} x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dt + x(t_f)^\top S x(t_f) \\ \text{s.d. } \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u(t) &\in \mathbb{R}^m, t \in [0, t_f]. \end{aligned}$$

Wobei $Q, S, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ferner, $Q = C^\top C$ positiv semi-definit, S positiv semi-definit und R positiv definit.

Satz 1 ([1, 3]). Betrachtet wird ein **Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont**. Es existiert eine eindeutige Lösung zu dem Problem mit optimalen Kosten $J^*(x_0, 0, t_f) = x_0^\top P^*(0) x_0$, optimalem Eingang $u^*(t) = -R^{-1} B^\top P^*(t) x^*(t)$ und die optimale Lösung erfüllt $\dot{x}^* = (A - B R^{-1} B^\top P^*(t)) x^*$, mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ wobei $P^*(t)$ die Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\dot{P}^* &= P^* A + A^\top P^* - P^* B R^{-1} B^\top P^* + Q \\ P^*(t_f) &= S \end{aligned} \tag{1}$$

ist.

Bemerkung. Wir beschränken uns als Suchraum für den optimalen Eingang auf die Menge der stückweise stetigen Funktionen.

Bemerkung. Die Gleichung (1) wird auch als Riccatische Matrix-Differentialgleichung bezeichnet.

Unendlicher Zeithorizont

Definition 2. Ein *Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont* (hier: LQR = Linear Quadratic Regulator) ist ein Optimalsteuerungsproblem der Form:

$$\begin{aligned} J^*(x_0, 0) &= \min_u \int_0^\infty x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dt \\ \text{s.d. } \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u(t) &\in \mathbb{R}^m, t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Wobei $Q, S, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ferner, $Q = C^\top C$ positiv semi-definit, R positiv definit.

Bemerkung. Auch hier, beschränken wir uns als Suchraum für den optimalen Eingang auf die Menge der stückweise stetigen Funktionen.

Satz 2 ([2, 7]). *Betrachtet wird ein **Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont (LQR-Problem)**. Wenn (A, B) steuerbar und (A, C) beobachtbar sind, dann existiert eine eindeutige, positiv definite Lösung P^* der Matrixgleichung*

$$P^*A + A^\top P^* - P^*BR^{-1}B^\top P^* + Q = 0 \quad (2)$$

so dass

1. $J^*(x_0, 0) = x_0^\top P^* x_0$ und
2. $(A - BR^{-1}B^\top P^*)$ Hurwitz ist.

Ferner ist dann die optimale Zustandstrajektorie die Lösung von $\dot{x}^* = (A - BR^{-1}B^\top P^*)x^*$ mit $x^*(0) = x_0$ und der optimale Eingang ist $u^*(t) = -R^{-1}B^\top P^*x^*(t)$.

Bemerkung. Die Gleichung (2) wird auch als Algebraische Riccati Gleichung (ARE) bezeichnet.

Stabilität mit positiv definitem P^* Es lässt sich recht einfach nachvollziehen, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil. Die Idee ist, die optimalen Kosten $V(x) = J^*(x)$ als Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion zu nehmen. Dies ist möglich, da P^* positiv definit ist und somit $x^\top P^* x$ positiv definit ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} L_{(A-BR^{-1}B^\top P^*)x} V(x) &= 2x^\top P^* \dot{x} \\ &= 2x^\top P^* (A - BR^{-1}B^\top P^*)x \\ &= 2(x^\top P^* A x - x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x) \\ &= x^\top (P^* A + A^\top P^*)x - 2x^\top (P^* B R^{-1} B^\top P^*)x \\ &= -x^\top Q x - x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x. \end{aligned}$$

Da $Q \geq 0$ ist also V also eine Lyapunov Funktion. Demnach ist der Ursprung stabil. Der letzte Schritt folgt mit Hilfe von Krasovskii-LaSalle's Satz. D.h. wir betrachten die größte Invariante Menge in $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_{(A-BR^{-1}B^\top P^*)x} V(x) = 0\}$. Sei $y = Cx$. Da sowohl $x^\top Q x$ als auch $x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x$ nichtnegativ sind, müssen sie unabhängig voneinander identisch null sein. Mit $x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x = x^\top P^* B R^{-1} R R^{-1} B^\top P^* x = u^\top R u \equiv 0$ folgt nun dass $u \equiv 0$. Und ferner aus $y^\top y \equiv 0$ folgt

$$\begin{aligned} y &= Cx = 0 \\ \dot{y} &= CAx = 0 \\ \ddot{y} &= CA^2x = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da nun (A, C) beobachtbar ist hat die Matrix $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \end{bmatrix}$ vollen Rang. Demnach ist $x \equiv 0$ die einzige invariante Lösung in der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_{(A-BR^{-1}B^\top P^*)x} V(x) = 0\}$. Daraus folgt, dass der Ursprung asymptotisch stabil ist. Da das System linear ist, ist es auch global asymptotisch und sogar global exponentiell stabil.

Herleitung von u^* Bisher wurde davon ausgegangen, dass der optimale Eingang u^* die Form $u^*(t) = -R^{-1}B^\top P x(t)$ hat. Wir wollen nun klären, warum das so sein **muss**.

- Betrachte

$$x_0^\top P^* x_0 = \int_0^\infty x^\top Q x + u^\top R u dt.$$

- Wir addieren $0 = \int_0^\infty x^\top (P^* A + A^\top P^* - P^* B R^{-1} B^\top P^* + Q) x dt$ sowie $0 = \int_0^\infty u^\top B^\top P^* x - u^\top B^\top P^* x + x^\top P^* B u - x^\top P^* B u dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_0^\top P^* x_0 = \int_0^\infty & x^\top Q x + u^\top R u - x^\top (P^* A + A^\top P^* - P^* B R^{-1} B^\top P^* + Q) x \\ & - u^\top B^\top P^* x + u^\top B^\top P^* x - x^\top P^* B u + x^\top P^* B u dt. \end{aligned}$$

- Nach Umschreiben erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0^\top P^* x_0 = \int_0^\infty & u^\top R u - x^\top P^* (A x + B u) - (A x + B u)^\top P^* x - x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x \\ & + u^\top B^\top P^* x + x^\top P^* B u dt. \end{aligned}$$

- Ersetzen von $A x + B u$ durch $\dot{x}$ ergibt

$$\begin{aligned} x_0^\top P^* x_0 = \int_0^\infty & u^\top R u - x^\top P^* \dot{x} - \dot{x}^\top P^* x - x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x \\ & + u^\top B^\top P^* x + x^\top P^* B u dt. \end{aligned}$$

- Da nun P^* positiv definit ist, und wir gezeigt haben, dass $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, gilt ferner dass $\int_0^\infty \dot{x}^\top P^* x + x^\top P^* \dot{x} dt = -x(0)^\top P^* x(0) = -x_0^\top P^* x_0$, demnach

$$0 = \int_0^\infty u^\top R u - x^\top P^* B R^{-1} B^\top P^* x + u^\top B^\top P^* x + x^\top P^* B u dt.$$

- Der Integrand ist nun eine quadratische Gleichung und lässt sich schreiben als

$$0 = \int_0^\infty (u + R^{-1} B^\top P^* x)^\top R (u + R^{-1} B^\top P^* x) dt.$$

Da nun $R > 0$ muss also gelten, dass $u^*(t) = -R^{-1} B^\top P^* x(t)$, was genau der angegebene optimale Eingang ist.

Robustheit des LQR-Reglers Wir schreiben den offenen Kreis (s. Abb.1) eines SISO Systems mit LQR-Regler wie folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= \frac{1}{r} B^\top P x \end{aligned}$$

als Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{r} B^\top P (sI - A)^{-1} B.$$

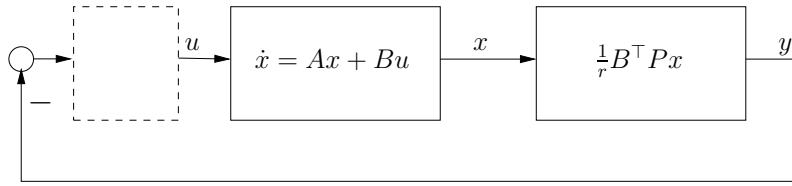


Abbildung 1: LQR-Regelkreis

Welche Eigenschaften darf eine Unsicherheit haben, die zwischen Reglerausgang und Systemeingang geschaltet ist? Die Ortskurve des offenen Kreises befindet sich für alle $r > 0$ und alle $Q \geq 0$ außerhalb eines Kreises mit **Mittelpunkt** $-1 + 0j$ und **Radius** 1.

$$\begin{aligned}
 |1 + G(j\omega)|^2 &= (1 + G(j\omega))^* (1 + G(j\omega)) = 1 + G^T(-j\omega) + G(j\omega) + G^T(-j\omega)G(j\omega) \\
 &= 1 + \frac{1}{r} B^T (-j\omega I - A)^{-T} P B + \frac{1}{r} B^T P (j\omega I - A)^{-1} B \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} B^T (-j\omega I - A)^{-T} P B B^T P (j\omega I - A)^{-1} B \\
 &= 1 + \frac{1}{r} B^T (-j\omega I - A)^{-T} \left[P (j\omega I - A) + (-j\omega I - A)^T P \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r} P B B^T P \right] (j\omega I - A)^{-1} B \\
 &= 1 - \frac{1}{r} B^T (-j\omega I - A)^{-T} \underbrace{\left[P A + A^T P - \frac{1}{r} P B B^T P \right]}_{=-Q} (j\omega I - A)^{-1} B \\
 &= 1 + \frac{1}{r} ((j\omega I - A)^{-1} B)^* Q ((j\omega I - A)^{-1} B) \\
 &\geq 1
 \end{aligned}$$

Die Ortskurve dringt somit nicht in den Kreis um $-1 + 0j$ mit Radius 1 ein. D.h. die Unsicherheit

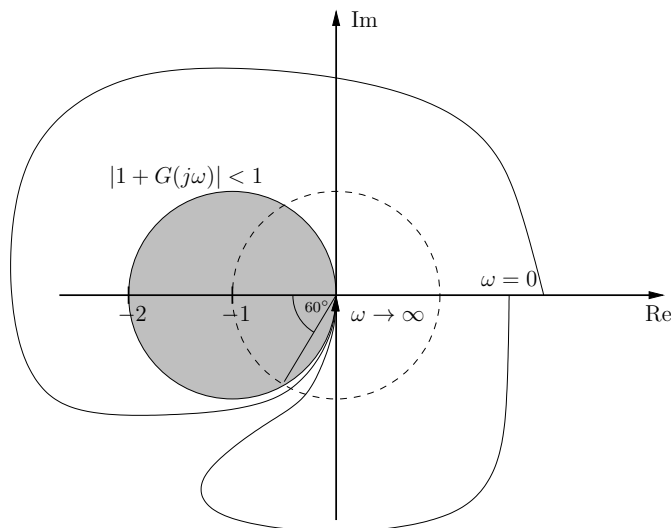


Abbildung 2: Nyquist - LQR

darf den Reglerausgang um den Faktor $\frac{1}{2} < k < \infty$ Verstärken (Abschwächen) und darf die Phase um den Wert $-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ verändern.

Weitere Ergebnisse

Satz 3 ([5, 6, 8]). *Betrachtet wird ein **Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont (LQR-Problem)**. Sei (A, B) stabilisierbar. Es existiert (mind.) eine positiv semi-definite Lösung P der Matrixgleichung*

$$PA + A^\top P - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0.$$

Ferner existiert eine positiv semi-definite Lösung P^ so dass*

1. $J^*(x_0, 0) = x_0^\top P^* x_0$ und
2. $(A - BR^{-1}B^\top P^*)$ Hurwitz ist,

genau dann wenn (A, C) entdeckbar ist. Die optimale Zustandstrajektorie ist dann die Lösung von $\dot{x}^ = (A - BR^{-1}B^\top P^*)x^*$ mit $x^*(0) = x_0$ und der optimale Eingang ist $u^*(t) = -R^{-1}B^\top P^*x^*(t)$.*

Bemerkung. Es existiert immer nur maximal eine positiv semi-definite Lösung, für die $(A - BR^{-1}B^\top P^*)$ Hurwitz ist. Falls eine Lösung P existiert so dass $(A - BR^{-1}B^\top P^*)$ Hurwitz ist, dann ist P die größte aller Lösungen. Im Allgemeinen kann es mehrere Lösung der Riccati-Gleichung geben. Die Lösung, für die gilt $J^*(x_0, 0) = x_0^\top P^* x_0$, ist nicht immer diejenige, die zu einem stabilisierenden LQR-Regler führt. Grundsätzlich gilt: Stabilität des geschlossenen Kreises überprüfen.

Satz 4 ([4]). *Es existiert eine positiv definite Lösung P_s der Matrixgleichung*

$$P_s A + A^\top P_s - P_s B R^{-1} B^\top P_s + Q = 0$$

so dass $(A - BR^{-1}B^\top P_s)$ Hurwitz ist genau dann wenn (A, B) stabilisierbar ist und $(-A, C)$ entdeckbar ist.

Kalman-Bucy-Filter

Satz 5. *Gegeben sei ein System der Form*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

mit $y(t) \in \mathbb{R}^m$. Außerdem sind die Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $Q = BB^\top$ positiv semi-definit sowie $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ positiv definit, gegeben. Sei (A, C) entdeckbar und (A, B) stabilisierbar, dann existiert eine eindeutige positiv semi-definite Matrix P^ , die die Algebraische Riccati-Gleichung*

$$P^* A^\top + A P^* - P^* C^\top R^{-1} C P^* + Q = 0 \quad (3)$$

löst. Ferner ist das System

$$\dot{e} = (A - P^* C^\top R^{-1} C) e, \quad e(0) = e_0 \in \mathbb{R}^n$$

global asymptotisch stabil, wobei $e = x - \hat{x}$ mit

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} - P^* C^\top R^{-1} (C \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Das System (4) mit P^* aus (3) wird **Kalman-Bucy-Filter** genannt.

Bemerkung. Die Kombination eines LQR-Reglers mit einem Kalman-Bucy-Filter als Zustandsbeobachter wird LQG-Regler genannt. Aufgrund des Separationsprinzips ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil, hat jedoch **keine** garantierten Robustheitseigenschaften.

Literatur

- [1] A. Bressan and B. Piccoli. *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, volume 2. American Institute for Mathematical Sciences, 2007.
- [2] R. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [3] R. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5(2):102 – 119, 1960.
- [4] H. Kano. Existence condition of positive-definite solutions for algebraic matrix Riccati equations. *Automatica*, 23(3):393–397, 1987.
- [5] V. Kučera. A review of the matrix Riccati equation. *Kybernetika*, 9(1), 1973.
- [6] B. P. Molinari. The time-invariant linear-quadratic the time-invariante linear-quadratic optimal control problem. *Automatica*, 13:347 – 357, 1977.
- [7] M. L. Ni. Existence condition on solutions to the algebraic riccati equation. *Acta Automatica Sinica*, 34(1):85–87, 2008.
- [8] W. M. Wonham. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *Siam Journal on Control*, 6(4):681 – 697, 1968.

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit, Entdeckbarkeit und Dualität

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit, Entdeckbarkeit

Wir betrachten lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx\end{aligned}$$

und $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^k$.

Definition 1. Das Paar (A, B) heißt **steuerbar**, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\text{Rang}([B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]) = n$$

vollen Rang hat.

Definition 2. (Hautus-Test für Stabilisierbarkeit) Das Paar (A, B) heißt **stabilisierbar**, wenn

$$\text{Rang}[\lambda I - A \mid B] = n \quad \forall \lambda(A) : \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0.$$

Satz 1. Das Paar (A, B) ist stabilisierbar, genau dann wenn ein $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, so dass die Matrix $A - BK$ Hurwitz ist.

Beispiel: Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Dreiecksstruktur, sind die Eigenwerte der Matrix A auf der Diagonalen und sind somit $\lambda(A) = \{-2, 4\}$. Somit muss die Stabilisierbarkeit nur für $\lambda = 4$ überprüft werden.

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 = n$$

Somit ist (A, B) stabilisierbar.

Satz 2. Wenn (A, B) steuerbar ist, dann ist (A, B) auch stabilisierbar.

Definition 3. Das Paar (A, C) heißt **beobachtbar**, wenn

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n.$$

Definition 4. (Hautus-Test für Entdeckbarkeit) Das Paar (A, C) heißt **entdeckbar**, wenn

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda(A) : \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0.$$

Satz 3. Das Paar (A, C) ist entdeckbar, genau dann wenn ein $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ existiert, so dass die Matrix $A - LC$ Hurwitz ist.

Beispiel: Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Dreiecksstruktur, sind die Eigenwerte der Matrix A auf der Diagonalen und sind somit $\lambda(A) = \{-2, 4\}$. Somit muss die Entdeckbarkeit nur für $\lambda = 4$ überprüft werden.

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \right) = 1 < n$$

Somit ist (A, C) nicht entdeckbar.

Satz 4. Wenn (A, C) beobachtbar ist, dann ist (A, C) auch entdeckbar.

Wir betrachten hier eine alternative Charakterisierung von Beobachtbarkeit mit Hilfe der Moden des Systems. Die Moden

$$x_k(t) = v_k e^{\lambda_k t}$$

ergeben sich aus der Eigenwertgleichung des Systems:

$$(\lambda_k I - A)v_k = 0. \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung des autonomen Systems setzt sich aus einer Linearkombination der Moden zusammen. Wir betrachten das System $\dot{x} = Ax$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Transformation mit der Modalmatrix T auf Diagonalform ergibt:

$$z = T^{-1}x, \quad x = Tz \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \Lambda z, \quad z_0 = T^{-1}x_0.$$

Dabei bilden die Rechtseigenvektoren v_i bzw. die Linkseigenvektoren w_i^T die gesuchte Transformationsmatrix

$$T = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad \text{bzw.} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}.$$

Bei Λ handelt es sich um eine Diagonalmatrix (wir setzen der einfacheren Darstellung wegen voraus, daß keine mehrfachen Pole/Eigenwerte auftreten).

Die Lösung des transformierten Systems berechnet sich leicht zu

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} z_0. \quad (2)$$

Die Rücktransformation ergibt

$$x(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0 = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} w_1^T \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} w_n^T \end{bmatrix} x_0. \quad (3)$$

Mittels der Summenschreibweise sieht man sofort, daß die Lösung eine Linearkombination der Moden ist:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{v_i e^{\lambda_i t}}_{\text{Mode}} \underbrace{(w_i^T x_0)}_{\text{Skalar}}. \quad (4)$$

Ist ein Mode am Ausgang nicht „sichtbar“, so gilt mit $y = Cx$

$$Cv_k e^{\lambda_k t} = 0$$

woraus sich durch Division mit $e^{\lambda_k t} \neq 0$

$$Cv_k = 0 \quad (5)$$

ergibt. Aus Gleichung (1) und (5) ergibt sich also als Bedingung, daß ein Mode nicht beobachtbar ist:

$$\begin{bmatrix} \lambda_k I - A \\ C \end{bmatrix} v_k = 0 \quad \begin{array}{l} \longleftarrow (\lambda_k, v_k) \text{ ist Mode} \\ \longleftarrow \text{Mode ist nicht beobachtbar.} \end{array}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist der entsprechende Mode nicht beobachtbar.

Satz 5 ([3, 2]). *Für jedes lineare, zeitinvariante System existiert eine Zustandstransformation, so dass das System wie folgt geschrieben werden kann (**Kalman Dekomposition**):*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0] x$$

wobei

$$(A_{11}, B_1), \left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$$

steuerbar sind und

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_3] \right), (A_{33}, C_3)$$

beobachtbar sind.

Satz 6. *Ein lineares, zeitinvariantes System ist genau dann Hurwitz, wenn jede der Matrizen A_{11} , A_{22} , A_{33} und A_{44} ihrer Kalman Dekomposition Hurwitz ist.*

Der Satz folgt daraus, dass die Eigenwerte einer Block-Dreiecksmatrix die Eigenwerte der Blöcke auf der Hauptdiagonalen sind, s. S. 62 in [1].

Bemerkung. Für lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

gelten die gleichen Definitionen und Sätze bzgl. Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit und hängen somit nicht von der Durchgriffsmatrix D ab.

Dualität

Definition 5. *Das System*

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= A^\top x' + C^\top u', & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y' &= B^\top x'\end{aligned}$$

mit $u'(t) \in \mathbb{R}^k$, $y'(t) \in \mathbb{R}^m$ heißt das **duale System** zu einem linearen, zeitinvarianten System.

Satz 7. *Folgende Beziehungen gelten zwischen einem linearen, zeitinvarianten System und dem dazugehörigen dualen System.*

1. *System ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ duales System ist asymptotisch stabil.*
2. *System ist steuerbar $\Leftrightarrow$ duales System ist beobachtbar.*
3. *System ist beobachtbar $\Leftrightarrow$ duales System ist steuerbar.*
4. *System ist stabilisierbar $\Leftrightarrow$ duales System ist entdeckbar.*
5. *System ist entdeckbar $\Leftrightarrow$ duales System ist stabilisierbar.*

Literatur

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [2] J. Lygeros and F. Ramponi. *Lecture Notes on Linear System Theory*. ETH Zürich.
- [3] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, et al. *Robust and optimal control*. Prentice Hall New Jersey, 1996.

Einige wichtige Sätze zur Stabilitätstheorie von Lyapunov

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \in U$. Wir betrachten im folgenden Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar ist. Ohne Einschränkung sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von (1), d.h. $f(0) = 0$. Eine Lösung von (1) mit Anfangswert x_0 wird mit $t \mapsto x(t; x_0)$ bezeichnet. Sei $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$, dann ist die Linearisierung der Differentialgleichung (1) um die Ruhelage 0 gegeben durch

$$\dot{y} = Ay. \quad (2)$$

x^* heißt *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0 : |x(t, x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Eine Ruhelage die nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist heißt *instabil (im Sinne von Lyapunov)*. Eine Ruhelage x^* heißt *anziehend (attraktiv)*, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0.$$

Ist die Ruhelage x^* stabil und attraktiv, dann heißt die Ruhelage *asymptotisch stabil*.

Die Ruhelage x^* heißt *exponentiell stabil*, falls es Konstanten $c, k, \alpha > 0$ gibt so dass für alle $|x_0| < c$ gilt, dass

$$|x(t; x_0)| \leq k |x_0| e^{-\alpha t}$$

gilt. Ist x^* eine asymptotisch stabile Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, dann heißt die Menge

$$R = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*\} \quad (3)$$

der *Einzugsbereich von x^** . Gilt $R = \mathbb{R}^n$, dann heißt x^* *global asymptotisch stabil*.

Eine einmal stetig differenzierbare Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal positiv definit (semidefinit)*, wenn $V(0) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$ ($V(x) \geq 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$). Ist $U = \mathbb{R}^n$ und ist V lokal positiv definit (semidefinit), so sagt man V ist *positiv definit (positiv semidefinit)*. Analog definiert man lokal negativ definit (semidefinit) und negativ definit (semidefinit).

Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \quad (4)$$

dann heißt V *radial unbeschränkt*.

Die *Lieableitung* $L_f V$ von V (Ableitung von V in Richtung des Vektorfeldes f) ist definiert durch

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f.$$

Wir schreiben $\dot{V}$ für $L_f V$.

Satz 1 (Indirekte (erste) Methode von Lyapunov). *Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Dann gilt:*

- a) Falls der Realteil aller Eigenwerte von A negativ ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil.
- b) Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ instabil.

Bemerkung 2. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die Ruhelage gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Sind die Realteile aller Eigenwerte λ von A nichtpositiv, also gilt $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ von A , und gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil gleich Null ist, so kann mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage $x^* = 0$ gemacht werden.

Satz 3 (Direkte (zweite) Methode von Lyapunov). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal positiv definit. Dann gilt:

- a) Falls $\dot{V}$ lokal negativ semidefinit ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ stabil.
- b) Falls $\dot{V}$ lokal negativ definit ist, dann ist die Ruhelage $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Eine (untere) Abschätzung des Einzugsbereichs einer Ruhelage erhält man wie folgt:

Bemerkung 4. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ mit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $D \subset U$ ein Gebiet mit $x^* \in D$ auf dem $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und $\dot{V}$ negativ definit ist. Jede beschränkte Niveaumenge $H_c = \{x \in U \mid V(x) \leq c\}$ mit $H_c \subseteq D$ ist eine (untere) Abschätzung für den Einzugsbereich.

Satz 5 (Barbashin-Krasovskii). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit und radial unbeschränkt. Ist $\dot{V}$ negativ definit, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

Satz 6 (Invarianzprinzip nach Krasovskii und LaSalle). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$. Weiterhin sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal positiv definit, und $\dot{V}$ sei lokal negativ semidefinit in U . Falls es keine nichttriviale Lösung $t \mapsto x(t; x_0)$ (nichttrivial heißt es gibt ein $t \geq 0$ mit $x(t; x_0) \neq 0$) gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; x_0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Bemerkung 7. Das Invarianzprinzip nach Krasovskii und LaSalle besagt also, wenn die triviale Lösung $t \mapsto x(t; x^*) = x(t; 0)$ mit $x(t; 0) = 0$ für $t \geq 0$ die einzige Lösung ist, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; 0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

Satz 8. Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, radial unbeschränkt und $\dot{V}$ sei negativ semidefinit. Falls es keine nichttriviale Lösung $t \mapsto x(t; x_0)$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $x(t; x_0) \in E = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

Satz 9 (Instabilitätsatz nach Chetaev). Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, $V : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $V(0) = 0$, $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\} \subset U_1$ und $\Omega = \{x \in U_1 \mid |x| \leq \varepsilon, V(x) > 0\}$. Wenn $\dot{V}(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ und wenn für jedes offene $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U_2$ gilt

$$U_2 \cap \{x \in U_1 \mid V(x) > 0\} \neq \emptyset,$$

dann ist $x^* = 0$ instabil.

Satz 10 (Lyapunov-Gleichung). Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $x^* = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle positiv definiten $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein positiv definites $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass gilt

$$A^T P + P A = -Q.$$

Literatur

- [1] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [2] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2001.
- [3] S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, 1999.
- [4] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM, 2002.

Entwurf nichtlinearer Regelungen

herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. S. Engell, Universität Dortmund

mit Beiträgen von

Dipl.-Ing. F. Allgöwer, Dr.-Ing. T. Birkhölzer, G. Che,
Prof. Dr.-Ing. S. Engell, Prof. Dr.-Ing. E. D. Gilles,
Prof. Dr. A. H. Glattfelder, Dr.-Ing. R. Guth,
Dr.-Ing. P. Hippe, Prof. Dr. H. Kiendl,
Dipl.-Ing. K.-U. Klatt, Prof. Dr.-Ing. M. Köhne,
Prof. Dr.-Ing. G. Kreißelmeier, Dipl.-Ing. A. Kremling,
Dipl.-Ing. A. Kugi, Prof. Dr. P. C. Müller,
Dipl.-Ing. R. Rothfuß, Dipl.-Ing. J.-J. Rüger,
Dipl.-Ing. J. Schaffner, Prof. Dr. W. Schaufelberger,
Prof. Dr. K. Schlacher, Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz,
Priv. Doz. Dr.-Ing. F. Svaricek, Dipl.-Ing. T. Wey,
Dipl.-Ing. F. Wienand, Dr.-Ing. J. Wochnik,
Priv. Doz. Dr.-Ing. C. Wurmthaler,
Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz, Dr. G. Zimmer

Mit 191 Bildern

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1995

Einführung in die exakte und näherungsweise Linearisierung nichtlinearer Systeme

Frank Allgöwer, Ernst Dieter Gilles

1. Einleitung

Nichtlinearitäten spielen eine zentrale Rolle für das dynamische Verhalten vieler technischer Systeme. Dennoch werden modellbasierte Regler zumeist auf der Grundlage vereinfachter *linearer* Modelle ausgelegt, die nur in der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes ausreichende Genauigkeit besitzen. In vielen Fällen resultieren aus dieser Vereinfachung ein nicht prädizierbares dynamisches Regelverhalten, schlechte Regelgüte bei Störungen und Sollwertänderungen und Stabilitätsprobleme. Der Entwicklung von Methoden zum Entwurf von Reglern auf der Basis nichtlinearer Modelle wurde und wird deswegen, parallel zur Entwicklung von Verfahren zur robusten linearen Regelung, große Beachtung geschenkt. Als besonders aktive Gebiete sind hier sliding mode control (siehe z. B. [72, 37]), die prädiktiven Regelverfahren (siehe z. B. [61, 64]) und nicht zuletzt die nichtlineare geometrische Regelungstheorie (siehe z. B. [41, 62]) zu nennen. Der Nachteil der meisten dieser Verfahren ist allerdings ihr sehr hoher Entwurfsaufwand. Dieser Aufwand muß meist iterativ wiederholt werden, um zu einem Regler mit den gewünschten Eigenschaften zu kommen. Damit wird der Entwurf nichtlinearer Regler in vielen Fällen zu aufwendig, um als Alternative zu linearen (robusten) Reglerentwürfen dienen zu können.

Die nichtlineare geometrische Regelungstheorie, die aus der linearen geometrischen Regelungstheorie [75] hervorgegangen ist, stellt ein vielfältiges Instrumentarium an Methoden zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme zur Verfügung [41, 62]. Neben den klassischen Problemen der Stör- und Eingangs/Ausgangs-Entkopplung wurden auch die Grundlagen der exakten Linearisierung in der geometrischen Regelungstheorie gelegt. Dieser Artikel gibt eine Einführung und einen Überblick über den Entwurf nichtlinearer Regler auf der Grundlage der Methode der exakten Linearisierung.

Im Gegensatz zur üblichen Arbeitspunktlinearisierung, bei der Terme höherer Ordnung in der Taylor-Reihenentwicklung vernachlässigt werden, wird bei der exakten Linearisierung kein Approximationsfehler gemacht. Das nichtlineare System wird mittels einer nichtlinearen Koordinatentransformation und eines nichtlinearen Rückführgesetzes *exakt* in ein lineares System überführt. Für dieses exakt lineare System kann in einem zweiten Schritt ein linearer Regler mit den bekannten Methoden der linearen

Regelungstheorie entworfen werden, so daß Stabilität gesichert und Anforderungen an die Regelgüte erfüllt werden. Nur der erste Schritt, die exakte Linearisierung, bedarf eines großen Entwurfsaufwandes. Dieser Schritt muß jedoch bei jedem Entwurf nur einmal durchgeführt werden. Die Iterationen, die zum Erreichen der gewünschten Regelgüte notwendig sind, betreffen nur den zweiten Schritt, nämlich die Auslegung eines geeigneten linearen Reglers für das exakt linearisierte System. Dadurch ist der Gesamtaufwand bei der exakten Linearisierung im allgemeinen kleiner als bei anderen nichtlinearen Reglerentwurfsverfahren.

Das der Entwicklung der nichtlinearen geometrischen Regelungstheorie, und damit den exakten Linearisierungstechniken, zugrunde liegende mathematische Werkzeug ist in erster Linie die Differentialgeometrie. Die meisten Veröffentlichungen zur Theorie der exakten Linearisierung sind in der Sprache der Differentialgeometrie verfaßt, die eine genaue und elegante Darstellung der mathematischen Sachverhalte mit abstrakten Begriffen, wie Mannigfaltigkeiten und Distributionen, erlaubt. Da die meisten Ingenieure über keine vertieften Kenntnisse in Differentialgeometrie verfügen, soll in dieser Arbeit gänzlich auf eine geometrische Argumentation und Ausdrucksweise verzichtet werden. Den Schwerpunkt dieses Artikels sehen wir nicht in der peniblen Wiedergabe möglichst vieler mathematischer Sätze. Es soll stattdessen versucht werden, dem Leser in einer verständlichen Sprache die zugrundeliegenden Ideen und die Entwurfsphilosophie der exakten Linearisierung nahezubringen und eine Einschätzung der Methoden vorzunehmen.

Im Rahmen dieses Aufsatzes werden wir uns, aus Gründen der klareren Darstellung, zumeist auf Eingrößensysteme, also Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang, beschränken. Die Theorie läßt sich vollständig auf Mehrgrößensysteme übertragen. Dies werden wir bei der Diskussion der Ergebnisse berücksichtigen. Um diesen Sachverhalt zu unterstreichen, werden die zur Veranschaulichung der Theorie gewählten Beispiele zum Teil Mehrgrößensysteme sein. Wir setzen außerdem voraus, daß alle auftretenden Funktionen genügend oft differenzierbar sind.

Prinzipiell werden zwei Arten von exakter Linearisierung unterschieden: die *exakte Zustands-Linearisierung* und die *exakte Eingangs/Ausgangs-Linearisierung*, oft auch nur *Eingangs/Ausgangs-Linearisierung* genannt. Bei der exakten Zustands-Linearisierung wird ein nichtlineares System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}$, in ein lineares System gleicher Ordnung, aber mit einem neuen Eingang v

$$\dot{z} = Az + bv \quad (2)$$

überführt. Die Theorie der exakten Linearisierung setzt meist voraus, daß der Eingang u , wie in (1), affin in die rechte Seite der nichtlinearen Differentialgleichung eingeht.

Falls das zu regelnde System in allgemeiner nichtlinearer Form

$$\dot{x} = f(x, u)$$

vorliegt, kann es zum Beispiel durch eine zusätzliche Integration des Eingangs ($\dot{u} = w$) in ein System mit (neuem) affinem Eingang w überführt werden

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, u) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w.$$

Bei der exakten Zustands-Linearisierung wird der Einfluß des Eingangs auf die Zustände linearisiert. Bei der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung (E/A-Linearisierung) wird ein nichtlineares System mit Ausgang y

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3)$$

in ein System überführt, das lineares Eingangs/Ausgangs-Verhalten zeigt. Im Frequenzbereich besteht also zwischen dem Laplace-transformierten Ein- bzw. Ausgang ein linearer Zusammenhang, der zum Beispiel mittels einer Übertragungsfunktion $G(s)$ beschrieben werden kann

$$y(s) = G(s)v(s).$$

Es wird nur lineares Eingangs/Ausgangs-Verhalten gefordert. Der Einfluß des Eingangs auf die Zustände darf bei der exakten E/A-Linearisierung weiterhin nichtlinear sein.

Gemäß der Unterscheidung in exakte Zustands- und E/A-Linearisierung, ist dieser Beitrag in zwei Teile gegliedert. Zuerst wird das Prinzip der exakten Zustands-Linearisierung erläutert und diskutiert. Am Beispiel des in verschiedenen Beiträgen in diesem Band benutzten und im Anhang genauer beschriebenen Testbeispiels Rührkesselreaktor wird diese Vorgehensweise veranschaulicht und die Grenzen des Verfahrens aufgezeigt. Über unterschiedliche Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung wird ein Überblick gegeben. Im zweiten Teil werden Vorgehensweise und Grundlagen der exakten E/A-Linearisierung vorgestellt. Vor- und Nachteile des Verfahrens werden hier am Beispiel der Regelung einer Zweistoffdestillationskolonne erläutert. Abschließend wird ein Überblick über Näherungsverfahren zur E/A-Linearisierung gegeben. Zwei Differentialoperatoren, die Lie-Ableitung und die Lie-Klammer, die eine wesentlich kompaktere Schreibweise erlauben, werden im Anhang definiert.

Der vorliegende Beitrag ist im wesentlichen eine Überarbeitung eines anläßlich des VDI-GMA Aussprachetages „Nichtlineare Regelung“ (13./14.5.93) in Langen veröffentlichten Aufsatzes [1].

2. Reglerentwurf mittels exakter Zustands-Linearisierung

Die Stabilisierung des nichtlinearen Systems (1) in einer ausreichend großen Umgebung des Arbeitspunktes ist das Hauptziel beim Reglerentwurf durch exakte Zustands-Linearisierung. Die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften und der Entwurf stabilisierender Regler für nichtlineare Systeme ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Wenn allerdings das System (1) in einem ersten Schritt durch exakte Zustands-Linearisierung in ein lineares steuerbares System (2) überführt wird, kann Stabilität durch eine lineare Zustandsrückführung

$$v = -k^T z \quad (4)$$

einfach erreicht werden. Die Rückführung k kann zum Beispiel mittels Verfahren zur Polvorgabe bestimmt werden.

2.1 Prinzip der exakten Zustands-Linearisierung

Es ist eine bekannte Tatsache, daß manche Nichtlinearitäten ihren Ursprung in einer ungünstigen Wahl des Koordinatensystems haben. So können zum Beispiel viele rotatorische Bewegungen durch ein lineares Differentialgleichungssystem beschrieben werden, wenn der Modellierung Polarkoordinaten zugrundegelegt werden. Wenn die gleiche dynamische Bewegung in kartesischen Koordinaten beschrieben wird, erhält man hochgradig nichtlineare Gleichungen. Die Identifizierung derjenigen Koordinaten, die eine Beschreibung durch lineare Differentialgleichungen erlauben, ist allerdings im allgemeinen eine nichttriviale Aufgabe. In den wenigsten Fällen werden solche Koordinaten überhaupt existieren. Falls das nichtlineare System (1) durch eine nichtlineare glatte und invertierbare Koordinatentransformation

$$z = T(x) ; \quad x = T^{-1}(z) \quad (5)$$

in ein lineares System (2) überführt werden kann, heißen die beiden Systeme *zustandsäquivalent*. Bedingungen, unter denen eine solche Transformation existiert und wie man diese berechnet, wurden zuerst in [51] angegeben. Wie man vermuten kann, existiert allerdings fast nie eine solche exakt linearisierende Transformation. Man kann die Klasse der linearisierbaren Systeme allerdings wesentlich vergrößern, wenn man zusätzlich zur Koordinatentransformation (5) noch ein nichtlineares statisches Rückführgesetz

$$u = \alpha(z) + \beta(z)v \quad (6)$$

zuläßt. Dieses Rückführgesetz besteht aus einem reinen Feedback-Anteil $\alpha(z)$ und einem Term $\beta(z)v$, der eine Art Eingangstransformation darstellt. Wenn das nichtlineare System (1) durch eine Transformation (5) und ein Rückführgesetz (6) in ein lineares System (2) mit neuem Eingang v überführt werden kann, heißt das System (1) *rückführ- oder feedback-äquivalent* zum linearen System (2). Die Linearisierung mittels Rückführung und Transformation wird als exakte Zustands-Linearisierung oder Feedback-Linearisierung bezeichnet. Bedingungen, unter welchen ein nichtlineares

System feedback-äquivalent zu einem linearen ist und eine Vorgehensweise, wie die linearisierende Transformation und Rückführgesetz berechnet werden kann, wurden in allgemeinsten Form zuerst unabhängig voneinander in [39] und [44] angegeben. Für spezielle Klassen von Systemen wurden Lösungen bereits in [8] und [23] veröffentlicht.

Die exakte Linearisierung wird in zwei Schritten erreicht: zuerst wird das System (1) in nichtlineare Regelungsnormform [53, 76]

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \gamma(z) + \delta(z)u \end{aligned} \quad (7)$$

transformiert. Diese Normalform zeichnet sich dadurch aus, daß die ersten $(n-1)$ Koordinaten in Form einer Integratorkette zusammenhängen und die Nichtlinearitäten und der Eingang u nur in der n -ten Koordinate auftreten. Die Nichtlinearitäten in System (7) können dann in einem zweiten Schritt durch die Rückführung

$$u = \frac{1}{\delta(z)} \left(-\gamma(z) + v \right)$$

kompensiert werden. Das exakt linearisierte System liegt anschließend in Brunovsky-Form [9]

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \quad (8)$$

vor. Durch ein lineares Rückführgesetz der Form (4) können die Pole von (8) beliebig festgelegt werden. Der folgende Satz [39] gibt Bedingungen an, unter denen ein nichtlineares System in Brunovsky-Form überführt werden kann.

Satz 1 (Exakte Zustands-Linearisierung)

Genau dann, wenn

- (i) $\text{rang} [g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(x)] = n$
- (ii) die Menge $\{g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x)\}$ involutiv ist

kann das nichtlineare System (1) durch die Koordinatentransformation

$$z = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ L_f T_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} T_1(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

in nichtlineare Regelungsnormform (7) überführt werden. Die Funktion $T_1(x)$ ist dabei die Lösung des linearen homogenen partiellen Differentialgleichungssystems

erster Ordnung

$$\begin{aligned} L_g T_1(x) &= 0 \\ L_{ad_f^1 g} T_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ L_{ad_f^{n-2} g} T_1(x) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Das statische Rückführgesetz

$$u = \frac{v - L_f^n T_1(x)}{L_g L_f^{n-1} T_1(x)} \quad (11)$$

kompensiert die Nichtlinearitäten und überführt (7) in Brunovsky-Form (8).

Die Differentialoperatoren L und ad beschreiben die Lie-Ableitung, bzw. Lie-Klammer-Operation und sind im Anhang definiert. Bedingung (ii) bedeutet, daß die Lie-Klammer von je zwei beliebigen Elementen der Menge eine Linearkombination der Elemente der betrachteten Menge selbst sein muß:

$$[ad_f^i g(x), ad_f^j g(x)] = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l(x) ad_f^l g(x) \quad \text{für jedes } i, j.$$

Neben den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein nichtlineares System exakt zustandslinearisiert werden kann, gibt dieser Satz eine Berechnungsvorschrift für die linearisierende Transformation und Rückführung: Um die nichtlineare Koordinatentransformation zu berechnen, muß ein System von n linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen (PDGLn) erster Ordnung analytisch gelöst werden. Die Lösbarkeit der PDGLn (10) ist durch Bedingungen (i) und (ii) garantiert und die Gleichungen können, zum Beispiel mit dem Charakteristikenverfahren, prinzipiell gelöst werden. Dennoch ist dies in den meisten Fällen praktisch kaum möglich. Bedingung (i) wird oft als eine Art Steuerbarkeitsbedingung interpretiert [62, 41], und ist im allgemeinen nicht sehr einschränkend. Die Involutivitätsbedingung (ii) ist dagegen sehr restriktiv. Nur eine kleine Klasse von dynamischen Systemen kann demzufolge exakt zustandslinearisiert werden. Die Überprüfung der beiden Bedingungen und die Lösung der PDGLn wird man im allgemeinen rechnergestützt mit Hilfe sogenannter Computer-Algebra-Systeme, wie z. B. Macsyma oder Maple durchführen (z. B. [21, 7]). Die Aufsätze von Schlacher/Kugi und Rothfuß/Zeitz in diesem Buch gehen näher auf diese Problematik ein.

2.2 Regelung eines Rührkesselreaktors mittels exakter Zustands-Linearisierung

Die exakte Zustands-Linearisierung durch Transformation (9) und Rückführung (11) kann nicht immer global erreicht werden. Sie gilt nur in dem Bereich des Zustandsraumes, in dem (9) invertierbar ist und in dem (11) keine Singularitäten aufweist. Am Beispiel der Regelung des im Anhang beschriebenen Rührkesselreaktors zur

Cyclopentenol-Synthese soll ein Gefühl für die Einschränkungen durch Bedingungen (i) und (ii) und für den notwendigen Aufwand zur Reglerberechnung vermittelt werden.

Der Rührkesselreaktor wird durch ein nichtlineares System von vier Differentialgleichungen beschrieben (siehe Gln. (1)-(4) in [48]). Als Stellgrößen stehen die Raumgeschwindigkeit $\frac{\dot{V}}{V_R}$ und die Kühlleistung $\dot{Q}_K$ zur Verfügung. Der Rührkesselreaktor ist folglich ein Mehrgrößensystem. Die Berechnung von Lie-Ableitungen und Lie-Klammern mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen ist prinzipiell kein Problem. Ohne Schwierigkeiten können deshalb die zustandsabhängige 4x4 Matrix in Bedingung (i) und die Menge in Bedingung (ii) berechnet werden. Wesentlich aufwendiger ist hingegen die Untersuchung der Rang- und der Involutivitätsbedingung in der für das dynamische Verhalten relevanten Umgebung des Arbeitspunktes. Im Falle des vollständigen Rührkesselreaktormodells ist eine Untersuchung auf Involutivität mit vernünftigen Rechenaufwand auch nicht unter Zuhilfenahme von Computer-Algebra-Systemen, möglich. Daraus kann man bereits auf die „Hoffnungslosigkeit“ schließen, eine Lösung des PDGL-Systems (10) zu berechnen. Dies ist durchaus typisch für ein nichtlineares System vierter oder höherer Ordnung. Im Falle des Rührkesselreaktors kann jedoch aus physikalischen Überlegungen eine Transformation auf Regelungsnormalform hergeleitet werden:

$$z = \begin{pmatrix} \frac{c_B}{c_{A0} - c_A} \\ c_A \\ \frac{\vartheta - \vartheta_0}{c_{A0} - c_A} \\ \vartheta_k \end{pmatrix}.$$

Das System vierter Ordnung kann also mit den beiden Stellgrößen $\frac{\dot{V}}{V_R}$ und $\dot{Q}_K$ exakt zustandslinearisiert werden, wenn alle Zustandsgrößen meßbar sind. Wenn aber nur eine Stellgröße $\frac{\dot{V}}{V_R}$ oder $\dot{Q}_K$ zur Verfügung steht, ist dies nicht mehr möglich, obwohl das System mit jeder dieser beiden Stellgrößen steuerbar ist.

2.3 Einschätzung der exakten Zustands-Linearisierung

Wie bereits aus der obigen Diskussion folgt, ist eine exakte Zustands-Linearisierung eines nichtlinearen Systems nur in wenigen Fällen möglich. Speziell die Involutivitätsbedingung ist nur für eine sehr kleine Klasse von Systemen erfüllt. Selbst wenn für eine Anwendung Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind, ist es im allgemeinen für Systeme der Ordnung vier und höher extrem aufwendig, wenn nicht unmöglich, eine analytische Lösung zu finden. Die Unterstützung durch Computer-Algebra-Systeme ist dabei zumeist unverzichtbar. In Spezialfällen können auch Systeme höherer Ordnung exakt zustandslinearisiert werden (siehe z. B. [28]). Die Transformationsbeziehungen und das Rückführgesetz werden dann aber zumeist extrem komplex. Die Implementierung der Rückführgleichungen kann leicht, wie in [28], mehrere tausend Seiten Computercode erfordern. Wie im Beispiel des Rührkesselreaktors kann in vielen Fällen die Lösung

$T_1(x)$ der partiellen Differentialgleichung (10) direkt aus physikalischen Überlegungen gefunden werden. Hilfreich ist dabei die Interpretation von $T_1(x)$ als „linearisierender Ausgang“ von System (1) (vergleiche Abschnitt 3.1).

Das statische Rückführgesetz (11) setzt die Meßbarkeit des gesamten Zustands voraus. Nur in wenigen praktischen Fällen ist diese Voraussetzung erfüllt, so daß im allgemeinen ein Beobachter zur Rekonstruktion der Zustände eingesetzt werden muß. Die Berechnung von Beobachtern für nichtlineare Systeme ist ein nichttriviales Problem (siehe z. B. den nachfolgenden Beitrag von Schaffner und Zeit). Zudem kann aus der Stabilität von Zustandsrückführung und aus der Stabilität des Beobachters im Nichtlinearen auch nicht auf die Stabilität des Gesamtsystems geschlossen werden. Außerdem wird statt der exakten Linearisierung des Gesamtsystems im allgemeinen auch nur eine asymptotische exakte Linearisierung erreicht, da der Beobachter nur asymptotisch auf die korrekten Zustandswerte einschwingen wird.

Für praktische Anwendungen nichtlinearer Reglerentwurfstechniken sind Robustheitseigenschaften von zentraler Bedeutung. Wenn Modellunsicherheiten, zum Beispiel in Form unsicherer Parameter, vorhanden sind, kann hier keine Robustheit garantiert werden. Diese fehlende Robustheitsgarantie bezieht sich zum einen auf die Stabilität des Systems. Zum anderen wird auch die exakte Linearisierung nicht robust erreicht: Kleine Fehler in den der exakten Linearisierung zugrundeliegenden Modellgleichungen können die Linearität des kompensierten Systems vollständig zerstören. Für bestimmte Fehlerklassen können jedoch zum Teil Stabilitätsaussagen gemacht werden. In [13] wird zum Beispiel ein linearer Reglerentwurf für die exakt linearisierten Systeme vorgeschlagen, der Stabilität trotz normbeschränkter Modellfehler garantiert.

Um die Darstellung kompakt zu halten, wurde die exakte Zustands-Linearisierung nur für Eingrößensysteme vorgestellt. Die Theorie ist leicht auf Systeme mit mehreren Eingängen zu übertragen [41, 62, 69]. Durch zusätzliche dynamische Anteile im linearisierenden Rückführgesetz kann im Falle von Mehrgrößensystemen die Klasse der linearisierbaren Systeme vergrößert werden [17]. Bei Eingrößensystemen ist dies nicht der Fall.

In vielen praktischen Fällen ist man außer an der Stabilität des Regelsystems zusätzlich am Regelverhalten ausgewählter Regelgrößen interessiert. Am Beispiel der Regelung des Rührkesselreaktors ist speziell das dynamische Verhalten der Konzentration c_B von Cyclopentenol von Bedeutung. Im transformierten Koordinatensystem ist die interessierende Regelgröße im allgemeinen eine nichtlineare Funktion der transformierten Zustände. Deshalb ist der Entwurf von Reglern, die eine gewünschte Regelgüte garantieren, trotz der Linearität der Zustände nicht einfach.

Zusammenfassend kommt der exakten Zustands-Linearisierung, wegen der restriktiven Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit und dem hohen Aufwand zur Berechnung der Transformation und des Rückführgesetzes, keine große praktische Bedeutung zu. Weitere Nachteile dieses Verfahrens sind die im allgemeinen hohe Komplexität des

Rückführgesetzes und das beschränkte Ziel der ausschließlichen Stabilisierung des Systems. Die theoretische Bedeutung der exakten Zustands-Linearisierung muß aber herausgestellt werden. So erlaubt die zugrundeliegende Theorie zum Beispiel eine Klassifizierung nichtlinearer Systeme und hat zur Definition wichtiger Systemeigenschaften für nichtlineare Systeme geführt.

2.4 Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung

In den vergangenen Jahren wurden Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung vorgeschlagen, die die Praktikabilität dieser Methode erhöhen sollen. Durch die Aufgabe des Exaktheitsanspruches soll in erster Linie die Klasse der linearisierbaren Systeme vergrößert werden. Zusätzlich wird eine Vereinfachung der Reglerberechnung angestrebt. Im folgenden wird ein Überblick über vier Verfahren zur näherungsweisen Zustands-Linearisierung gegeben: die Poincaré-Linearisierung, Extended Linearization, Pseudo-Linearisierung und die Uniform System Approximation. Für „Extended Linearization“ und „Uniform System Approximation“ haben sich keine deutschen Begriffe durchgesetzt.

Poincaré-Linearisierung

Die Poincaré-Linearisierung geht auf [52] zurück. Dieses Verfahren hat seinen Namen in Anlehnung an Arbeiten von H. Poincaré erhalten, der sich zu Beginn dieses Jahrhunderts mit Normalformen für dynamische Systeme beschäftigt hat [65].

Bei der exakten Zustands-Linearisierung werden die Nichtlinearitäten vollständig kompensiert. Stellt man sich das kompensierte System als in einer Taylor-Reihe entwickelt vor, werden *alle* nichtlinearen Terme ab dem quadratischen Glied durch Transformation und Rückführung exakt kompensiert. Dagegen werden bei der Poincaré-Linearisierung nicht alle Terme höherer Ordnung kompensiert sondern nur die ersten nichtlinearen Glieder der Taylor-Reihe. Die Arbeiten zu diesem Gebiet (z. B. [56, 47, 54]) beschränken sich darauf, die quadratischen und kubischen Terme zu kompensieren. Eine Erweiterung dieser Verfahren zur Kompensation von nichtlinearen Termen beliebiger Ordnung ist ohne Probleme möglich.

Wir betrachten System (1), das in eine Taylor-Reihe entwickelt wird

$$\dot{x} = Ax + bu + f^{[2]}(x) + g^{[1]}(x) \cdot u + O^{[3+]}(x, u).$$

Die Entwicklung wird nach dem Glied zweiter oder dritter Ordnung abgebrochen, je nachdem, ob eine Kompensation der quadratischen oder auch der kubischen Terme erreicht werden soll. Die in Klammern hochgestellten Indices geben die Ordnung der entsprechenden Terme an. So ist zum Beispiel der Ausdruck $f^{[2]}(x)$ eine quadratische Form

$$f^{[2]}(x) = x^T P x.$$

Im ersten Schritt wird auf der Basis des linearisierten Systems (A, b) ein linearer Regler

$$u = -k^T \cdot x$$

entworfen, so daß der um den Arbeitspunkt linearisierte geschlossene Kreis mit $F = A - bk^T$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. In den weiteren Schritten werden sukzessive die Terme zweiter bzw. dritter Ordnung kompensiert. Dazu wird das System durch die Transformation

$$z_1 = x - \phi^{[2]}(x) \quad (12)$$

in ein System überführt, dessen linearer Anteil durch die spezielle Form von (12) unverändert bleibt. Deshalb wird Transformation (12) in der englischsprachigen Literatur auch als *near identity transformation* bezeichnet. Die quadratische Funktion $\phi^{[2]}(x)$ wird dabei so gewählt, daß das transformierte System Regelungsnormalform besitzt, wenn nur Terme zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Man kann einfach zeigen, daß mit einem Rückführgesetz der Form

$$u = \frac{b_n v - \hat{\gamma}^{[2]}(x)}{b_n + \delta^{[1]}(x)}, \quad (13)$$

die nichtlinearen Terme zweiter Ordnung kompensiert werden, ohne den linearen Anteil zu verändern. Dabei stellt b_n die n-te Komponente des Eingangsvektors b dar. Transformation (12) und Rückführung (13) führen folglich auf ein System

$$\dot{z}_1 = F z_1 + b v + O^{[3+]}(z_1, v),$$

das keine nichtlinearen Terme zweiter Ordnung besitzt. Falls gewünscht, kann dieses System in einem weiteren Schritt durch eine Transformation

$$z_2 = z_1 - \phi^{[3]}(z_1) \quad (14)$$

und ein entsprechendes Rückführgesetz in ein System ohne quadratische und ohne kubische Terme überführt werden. Diese Vorgehensweise läßt sich bis zur gewünschten Genauigkeit fortführen.

Die exakte Zustands-Linearisierung ist in gewissem Sinne ein „globales“ Resultat, da die Linearisierung in einem unter Umständen sehr großen Bereich des Zustandsraumes exakt erreicht wird. Bei der Poincaré-Linearisierung betrachtet man die Taylor-Reihe um einen Arbeitspunkt. Die Linearisierung ist also zwangsläufig lokaler Natur und nur in der Umgebung dieses Arbeitspunktes gültig. Bei Änderungen der Führungsgröße oder bei Störungen, die das System weit aus seinem Arbeitspunkt auslenken, kann man daher keine näherungsweise Linearisierung des dynamischen Verhaltens erwarten.

Die Bedingungen, unter denen eine näherungsweise Linearisierung durch Kompensation von Gliedern höherer Ordnung möglich ist, sind wesentlich weniger restriktiv als bei der exakten Linearisierung. Die Rang- und Involutivitätsbedingungen der exakten Linearisierung müssen nur näherungsweise erfüllt sein, d. h. nur für Terme in der Taylorentwicklung bis zu der Ordnung, die kompensiert werden soll. Für das vollständige Rührkesselreaktormodell vierter Ordnung, für das die Bedingungen zur exakten Li-

nearisierung nicht mehr einfach überprüft werden können, ist eine näherungsweise Linearisierung zweiter bzw. dritter Ordnung auch für den mit nur einer Stellgröße gesteuerten Reaktor möglich. Wenn die Rang- und Involutivitätsbedingungen für eine bestimmte Ordnung nicht erfüllt sind, kann trotzdem eine näherungsweise linearisierende Lösung gefunden werden, die das Problem (im Sinne einer bestimmten Metrik) bestmöglich löst [54].

Die Berechnung der Transformationen (12), (14) usw. und der Rückführungen (13) usw. ist unkompliziert. Da für alle Terme $\phi^{[i]}(x)$, usw. die Struktur vorgegeben ist, müssen nur die Polynom-Koeffizienten berechnet werden. Mit Ausnahme der Berechnung der Taylor-Reihe, werden nur algebraische Operationen benötigt, die mit numerischen Programmen schnell und zuverlässig ausgeführt werden können. Von Krener und Mitarbeitern wurde ein Programm auf der Basis von MATLAB entwickelt [54], das diese Berechnungen bis zur Kompensation von Gliedern beliebiger Ordnung durchführt. Der Aufwand für Approximationen höherer Ordnung steigt allerdings kombinatorisch mit der Zahl der Polynomkoeffizienten in ϕ , $\hat{\gamma}$, δ usw. Den Autoren ist keine praktische Anwendung mit Näherungen höherer als dritter Ordnung bekannt.

Es ist eine große Stärke der Poincaré-Linearisierung, daß der Zustand des kompensierten Systems in linearer Näherung mit dem physikalischen Zustand des Originalsystems übereinstimmt, wodurch das kompensierte System ebenfalls physikalisch interpretiert werden kann.

Für Systeme mit gleichbleibendem Arbeitspunkt bietet die Poincaré-Linearisierung eine attraktive Alternative zur exakten Linearisierung. Durch Kompensation von quadratischen und kubischen Termen ist oft eine wesentliche Verbesserung des Regelverhaltens gegenüber rein linearen Entwürfen zu beobachten, ohne daß die einschränkenden Bedingungen der exakten Linearisierung erfüllt sein müssen. In manchen Fällen ist eine ausreichende Konvergenz der Lösung aber erst für sehr hohe Näherungsordnungen zu beobachten. Häufig ergeben sich dann auch sehr große Werte für die Polynom-Koeffizienten der Transformationen (12), (14) usw. und der Rückführung (13) usw. und eine Kompensation mit zu niedriger Näherungsordnung führt zu Stabilitätsproblemen und starken Einbußen in der Regelgüte.

Extended Linearization

Durch Variation des stationären Eingangs u_s verändert sich die Ruhelage x_s des Systems. Für ein nichtlineares System ist im allgemeinen die Arbeitspunktlinearisierung um jede dieser Ruhelagen verschieden. Bei der Extended Linearization [6, 68, 73] wird das nichtlineare System so geregelt, daß die Arbeitspunktlinearisierung um jede, durch Variation des stationären Eingangs erreichbare Ruhelage, dieselben Pole ergibt. Die charakteristische Gleichung des Systems ist demnach invariant gegenüber dem gewählten Arbeitspunkt. In der Umgebung jeder möglichen Ruhelage ergibt sich demzufolge ein dynamisches Verhalten, das durch dieselben Pole bestimmt ist.

Die Berechnung des Regelgesetzes erfordert die Parametrisierung aller möglichen Ruhelagen. Üblicherweise werden die Ruhelagen als Funktion des stationären Eingangs u_s berechnet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß keine mehrfach stationären Zustände existieren. Aus

$$0 = f(x_s) + g(x_s) \cdot u_s$$

kann dann

$$x_s = \tilde{f}(u_s) \quad (15)$$

bestimmt werden. Die Arbeitspunktlinearisierung des nichtlinearen Systems um jede Ruhelage wird in analoger Weise mit $x = x_s + \Delta x$ usw. parametrisiert und x_s durch (15) ersetzt. Das (Jacobi-)linearisierte System ist dann nur vom Wert des stationären Eingangs u_s abhängig:

$$\Delta \dot{x} = A(u_s) \Delta x + b(u_s) \Delta u. \quad (16)$$

Mit Hilfe der Ackermann-Formel, oder anderer Polvorgabeverfahren, kann dann ein lineares Rückführgesetz

$$\Delta u = -q^T(u_s) \cdot \Delta x$$

berechnet werden, für das die Pole des so geschlossenen linearisierten Kreises vorgegebene Werte annehmen

$$\det \left(\lambda I - A(u_s) + b(u_s) q^T(u_s) \right) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Die Rückführverstärkung $q(u_s)$ ist natürlich abhängig von u_s . Durch Integration kann nun ein nichtlineares Rückführgesetz $k(x)$ gefunden werden, dessen Linearisierung um jeden Arbeitspunkt gerade der Rückführverstärkung $q(u_s)$ entspricht

$$\left. \frac{\partial k^T(x)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{f}(u_s)} = q^T(u_s). \quad (17)$$

Man berechnet also eine Art kontinuierliches gain-scheduling Regelgesetz. In [6] wird gezeigt, daß die Integration von (17) genau dann möglich ist, wenn das linearisierte System (16) für alle Ruhelagen, d. h. für alle Parameterwerte u_s , steuerbar ist. Diese Bedingung stellt keine große Einschränkung dar. Die stärkste Einschränkung der praktischen Anwendbarkeit ergibt sich durch die notwendige Parametrisierung der Ruhelagen. Nur in wenigen Fällen wird die Funktion $\tilde{f}$ in (15) explizit berechnet werden können. Wegen der in den Differentialgleichungen auftretenden Exponentialfunktionen ist dies zum Beispiel für den Rührkesselreaktor vierter Ordnung nicht möglich. Allerdings kann in vielen Fällen die Parametrisierung für die interessierende Betriebsumgebung näherungsweise berechnet werden. Im Beispiel Rührkesselreaktor ist eine lineare Approximation der Exponentialfunktion ausreichend. Eine Parametrisierung durch die Temperatur T im Reaktor, anstelle des stationären Eingangs u_s , ist ebenfalls denkbar. Die weiteren Berechnungen, also die Lösung des Polvorgabeproblems und die Integration von (17), sind zwar aufwendig aber zumeist unkritisch. Baumann und

Rugh schlagen ein Näherungsverfahren auf Grundlage der Taylorentwicklung vor, um die Berechnung zu vereinfachen [6].

Das Ziel der Extended Linearization ist wesentlich weniger ambitioniert als das der exakten Linearisierung oder auch anderer Näherungsverfahren; Durch Vorgabe der Pole kann das dynamische Verhalten des geschlossenen Kreises nur in beschränktem Umfang geformt werden. Die Pole des linearisierten Systems sind auch nur dann aussagekräftig, wenn sich das System in der Umgebung einer (wenn auch beliebigen) Ruhelage befindet und wenn die dynamischen Übergänge zwischen unterschiedlichen Ruhelagen langsam genug erfolgen. Die Stabilität des geschlossenen Kreises sollte stets getrennt untersucht werden. Der Vorteil gegenüber der Poincaré-Linearisierung, die nur Aussagen in der Umgebung eines Arbeitspunktes zuläßt, ist die globalere Betrachtungsweise. Im Beitrag von Klatt und Engell in diesem Band werden die Extended Linearization und weitere verwandte Vorgehensweisen ausführlich besprochen.

Pseudo-Linearisierung

Die Pseudo-Linearisierung, die unabhängig zur Extended Linearization von Champetier, Reboulet und Mitarbeitern [66, 15, 74, 16, 67] entwickelt wurde, ist vom Prinzip her eine Verallgemeinerung der Extended Linearization. Das zu berechnende Rückführgesetz soll nicht nur bewirken, daß die Pole des um jede Ruhelage linearisierten Systems immer dieselben sind, sondern das linearisierte System selbst soll das gleiche sein. Anders als bei der Extended Linearization wird das Ziel durch eine nichtlineare Koordinatentransformation und ein nichtlineares Rückführgesetz erreicht. Im ersten Schritt muß auch hier eine Parametrisierung der Ruhelagen, z. B. analog (15), berechnet werden. Die Transformation

$$z = T(x) \quad (18)$$

und das kompensierende Rückführgesetz

$$v = T_{n+1}(x, u) \quad (19)$$

werden hier durch Integration der Vektor-Funktionen α_i berechnet

$$dT_i|_s = \alpha_i. \quad (20)$$

Die Funktion α_1 ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\alpha_1^T \cdot A^{i-1} b = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

für jede Ruhelage. Das Paar (A, b) ist dabei analog (16) definiert. Die weiteren Funktionen α_i werden sukzessive aus

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_1^T \cdot A^{i-1} & i = 2, \dots, n \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n^T \cdot \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

berechnet. Transformation (18) und Rückführung (19) überführen das nichtlineare System in eine Form, deren Linearisierung, unabhängig vom Arbeitspunkt, Brunovsky-

Form ergibt.

Gleichung (21) ist mit $(n-1)$ Gleichungen für n Unbekannte unterbestimmt. Demzufolge existieren unendlich viele Lösungen für das Pseudo-Linearisierungsproblem. Falls das betrachtete System exakt zustandslinearisiert werden kann, gibt es eine Lösung α_1 von (21), die das exakte Linearisierungsproblem löst. Theoretisch kann diese Freiheit dazu genutzt werden, um zum Beispiel ein möglichst einfaches Regelgesetz zu finden. In der Praxis ist jedoch in den meisten Fällen nicht offensichtlich, welche Wahl von α_1 zu einer vereinfachten Berechnung oder zu einem vorteilhaften Regelgesetz führt.

Die Bedingungen für die Existenz einer pseudo-linearisierenden Transformation und Rückführung sind wenig restriktiv. Für Eingrößensysteme muß das Paar (A, b) steuerbar in der Umgebung jeder Ruhelage sein. Bei Mehrgrößensystemen müssen zusätzlich die Steuerbarkeitsindices des linearisierten Systems (A, b) für jeden Arbeitspunkt gleich sein. Gegenüber der Extended Linearization kommt, zusätzlich zu den Schwierigkeiten bei der Parametrisierung der Ruhelagen, der durch die Integration (20) bedingte Aufwand hinzu. Die Zielsetzung ist jedoch hier wesentlich anspruchsvoller, da nicht nur die Pole, sondern die gesamte linearisierte Dynamik betrachtet wird.

Die Pseudo-Linearisierung ist besonders interessant, wenn häufige Wechsel der Betriebsbedingungen und somit des Arbeitspunktes erfolgen. Rein lineare Entwürfe führen hier in den meisten Fällen zu unbefriedigendem Verhalten. Da keine Terme höherer Ordnung kompensiert werden, ist die Güte der Regelung im allgemeinen nur in der Nähe eines (wenn auch beliebigen) Arbeitspunktes zufriedenstellend.

Uniform System Approximation

Die in [29, 30] begründete Uniform System Approximation verbindet Ideen der Poincaré-Linearisierung und der Extended bzw. Pseudo-Linearisierung. Wie bei der Poincaré-Linearisierung werden Terme höherer Ordnung des in einer Taylor-Reihe entwickelten geschlossenen Kreises kompensiert. Dies erfolgt jedoch nicht nur in der Umgebung einer Ruhelage wie bei der Poincaré-Linearisierung, sondern in der Umgebung aller Ruhelagen. Die näherungsweise Linearisierung wird durch eine Transformation und ein Rückführgesetz derart erreicht, daß das kompensierte System

$$\dot{z} = Az + bv + O^{(r+)}(z, v) \quad \forall u_s = \tilde{f}(x_s)$$

näherungsweise linear in der Umgebung aller Ruhelagen ist und zusätzlich maximale Ordnung ρ der Fehlerterme $O^{(r+)}$ garantiert wird. Falls die Bedingungen für exakte Linearisierung erfüllt sind, ist die Lösung der Uniform System Approximation identisch mit der Lösung der exakten Linearisierung.

Im allgemeinen ist die Berechnung der näherungsweise linearisierenden Rückführung und der Transformation bei diesem Verfahren ähnlich aufwendig wie bei der exakten Zustands-Linearisierung. Die Berechnung erfordert die Lösung eines nichtlinearen (konzentrierten) Differentialgleichungssystems und die Invertierung nichtlinearer al-

gebraischer Gleichungen. Zusätzlich muß, wie bei der Extended Linearization und der Pseudo-Linearisierung, eine Parametrisierung der Ruhelagen gefunden werden. Theoretisch ist die Klasse der so näherungsweise linearisierbaren Systeme maximal. In der Praxis scheitert dieser Entwurf aber zumeist an der, auch mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen, nicht möglichen Berechnung. Die Uniform System Approximation ist darüber hinaus nur für Systeme mit einer skalaren Eingangsgröße beschrieben. Eine Erweiterung auf den Fall mehrere Eingangsgrößen erweist sich als recht schwierig.

3. Reglerentwurf mittels exakter Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Für die meisten praktischen Regelprobleme ist eine reine Stabilisierung der Strecke nicht ausreichend. Vielmehr hat der Anwender in der Regel eine relativ komplexe Vorstellung davon, wie sich der geschlossene Kreis dynamisch verhalten soll. Mathematisch wird dies im allgemeinen durch Anforderungen an spezielle Ausgänge, den Regelgrößen, ausgedrückt. Beim Reglerentwurf durch exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens können solche Anforderungen an die gewünschte Regelgüte in einfacher Weise berücksichtigt werden: Wird zuerst das Eingangs/Ausgangs-Verhalten exakt linearisiert, kann mit Hilfe der sehr weit entwickelten linearen Regelungstheorie in einem zweiten Schritt ein linearer Regler

$$v(s) = -K(s)y(s)$$

entworfen werden, der die Anforderungen an die Regelgüte erfüllt. Sich widersprechende Entwurfsanforderungen und die Notwendigkeit, die physikalischen Zielsetzungen in mathematische Entwurfsvorgaben zu übersetzen, bedingen, daß die meisten Reglerentwürfe iterativ erfolgen. Wenn die Regelstrecke zuerst E/A-linearisiert wird, können diese Iterationen vollständig im Linearen durchgeführt werden. Für Systeme mit linearem E/A-Verhalten sind die Entwurfsschritte mit relativ geringem Aufwand verbunden und es existiert eine Vielzahl von Methoden, um eine vorgegebene Regelgüte zu erreichen. Der aufwendige Linearisierungsschritt ist nur einmal durchzuführen. Dies stellt den größten Vorteil des Reglerentwurfs durch exakte E/A-Linearisierung gegenüber anderen nichtlinearen Verfahren dar.

3.1 Prinzip der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Die exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens dynamischer Systeme kann mit unterschiedlichen Ansätzen erreicht werden. Neben der Linearisierung durch Immersion [18] und auf der Basis von Volterra-Reihen [43], spielt vor allem der geometrische Ansatz eine zentrale Rolle [49]. Für eine spezielle Klasse von Systemen wird die Methode der E/A-Linearisierung bereits in [23] beschrieben. In diesem Aufsatz werden wir uns auf die Darstellung und Diskussion des geometrischen Ansatzes beschränken.

Um die Lösung des exakten E/A-Linearisierungsproblems angeben zu können, benötigen wir die Definition des relativen Grades eines nichtlinearen dynamischen Systems [34].

Definition 1 Der relative Grad eines Systems der Form (3) ist die kleinste natürliche Zahl r , für die

$$L_y L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (22)$$

gilt. Falls keine solche Zahl existiert ist $r = \infty$.

Diese formale Definition kann einfach interpretiert werden: Der relative Grad r ist diejenige zeitliche Ableitung des Ausgangs y , die erstmals vom Eingang u explizit abhängt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} &= L_f^{r-1} h(x) \\ \frac{d^r y}{dt^r} &= L_f^r h(x) + L_y L_f^{r-1} h(x) u. \end{aligned}$$

Für lineare Systeme entspricht der relative Grad der Differenzordnung zwischen Nenner- und Zählerpolynom der Übertragungsfunktion. Bei nichtlinearen Systemen ist der Ausdruck (22) eine Funktion des Zustands x und muß in einer Umgebung des stationären Punktes verschieden von null sein. Wenn $L_y L_f^{r-1} h(x)$ ungleich null in der Umgebung des Arbeitspunktes aber gleich null am Arbeitspunkt ist, spricht man von einem *nicht wohl-definierten* relativen Grad.

Die Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens ist, wie bei der exakten Zustands-Linearisierung, das Ergebnis eines zweistufigen Vorgehens: Zuerst wird das System in eine geeignete Normalform transformiert und im zweiten Schritt werden die Nichtlinearitäten im E/A-Verhalten kompensiert. Die betrachtete Normalform ist die sogenannte Byrnes-Isidori-Normalform [11] eines Systems (3) mit relativem Grad r :

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= a(z) + b(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z). \end{aligned} \quad (23)$$

Wie bei der Regelungsnormform sind die ersten r Koordinaten ausschließlich durch Integratoren verknüpft. Der Ausgang entspricht genau der ersten Koordinate z_1 . Der

Eingang u beeinflusst nur die r -te Koordinate. Die letzten $(n-r)$ Koordinaten sind im allgemeinen nichtlineare Funktionen des gesamten transformierten Zustands z . Anhand dieser Darstellung kann der relative Grad r auch als die Anzahl der Integratoren gedeutet werden, die der Eingang u zumindest „durchlaufen“ muß, bevor er den Ausgang y beeinflusst. Der relative Grad r ist somit ein Maß für die Mindestverzögerung im E/A-Verhalten. Für jedes nichtlineare Eingrößensystem mit relativem Grad r existiert lokal eine Transformation $z = T(x)$ auf Byrnes-Isidori-Normalform, die durch

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (24)$$

gegeben ist. Dabei können die Funktionen $\phi_i(x)$ immer so gewählt werden, daß die Linearisierung von (24) um den Arbeitspunkt vollen Rang hat und, daß bei Eingrößensystemen zusätzlich die Funktionen $q_i(z)$ in (23) nicht von u abhängen. Anhand Normalform (23) kann die Nulldynamik eines nichtlinearen Systems definiert werden [10].

Definition 2 Für ein nichtlineares Systems (3) werden die letzten $(n-r)$ Gleichungen des in Normalform (23) transformierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) |_{z=[0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n]^T} \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) |_{z=[0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n]^T} \end{aligned} \quad (25)$$

als *Nulldynamik* von System (3) bezeichnet, wenn die ersten r Koordinaten $z_i, i = 1, \dots, r$ in (25) zu null gesetzt werden.

Mit den ersten r Koordinaten ist auch der Ausgang identisch gleich null und die Nulldynamik kann folglich als nichtlineares Äquivalent der Nullstellen eines linearen Systems gedeutet werden [45, 11]. In Analogie zur linearen Systemtheorie heißt ein nichtlineares System *minimalphasig*, wenn es eine stabile Nulldynamik besitzt, d.h. das System (25) stabil ist.

Aus der Normalform (23) sieht man sofort, daß die Nichtlinearitäten im E/A-Verhalten zum Beispiel mit Hilfe des Rückführgesetzes

$$u = \frac{v - a(z)}{b(z)} \quad (26)$$

kompensiert werden können. Im Kreis verbleibt die nichtlineare Nulldynamik, die das E/A-Verhalten jedoch nicht beeinflusst, da sie nicht beobachtbar ist. Interne Stabilität des geschlossenen Kreises ist somit nur gewährleistet, wenn das System minimalphasig ist.

Satz 2 (Exakte Eingangs/Ausgangs-Linearisierung [49])

Wenn das nichtlineare System (3)

- (i) einen wohl-definierten relativen Grad r besitzt
- (ii) minimalphasig ist

wird das Eingangs/Ausgangs-Verhalten von (3) durch die statische Zustandsrückführung

$$u = \frac{v - L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (27)$$

linearisiert. Das E/A-Verhalten wird dann durch

$$G(s) = \frac{1}{s^r + \beta_{r-1}s^{r-1} + \beta_1 s + \beta_0} \quad (28)$$

beschrieben, und das exakt linearisierte System ist genau dann stabil, wenn (28) stabil ist.

Der erste Term in (27) entspricht der Rückführung (26) und überführt, für sich allein genommen, das E/A-Verhalten in eine Serienschaltung von r Integratoren. Die Pole des E/A-linearisierten Systems können zusätzlich über den zweiten Term durch Wahl der skalaren Koeffizienten β_i vorgegeben werden.

Die Ordnung von (28) ist gleich dem relativen Grad r und ist damit kleiner als die Ordnung von (3). Dies erklärt sich durch die zusätzlich im Kreis verbleibende nicht beobachtbare Nulldynamik.

Bei Mehrgrößensystemen muß zusätzlich zu Bedingungen (i) und (ii) die sogenannte Entkopplungsmatrix der betrachteten Strecke nichtsingulär sein, um mit der angegebenen Vorgehensweise lineares E/A-Verhalten zu erzielen [41]. Falls diese Bedingung verletzt ist, kann unter Umständen durch ein dynamisches Rückführgesetz E/A-Linearität erreicht werden [40].

Zwischen Zustands- und E/A-Linearisierung besteht eine enge Verwandtschaft: Wenn die Ausgangsfunktion $h(x)$ in (3) so beschaffen ist, daß der relative Grad r gleich der Ordnung n des Systems ist, hat das System keine Nulldynamik. Die Transformation (24) ist dann identisch mit der Transformation (9) und überführt das nichtlineare System in Regelungsnormalform. Als Alternative zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (10) kann folglich auch eine fiktive Ausgangsfunktion $y = T_1(x)$ gesucht werden, für die der relative Grad r der Systemordnung n entspricht. Die Ausgangsfunktion $T_1(x)$ nennt man dann einen *linearisierenden Ausgang* für System (1). Falls die natürliche Ausgangsfunktion $h(x)$ zu einem relativen Grad führt, der gerade der Systemordnung entspricht, können gleichzeitig das Zustands- und das E/A-Verhalten linearisiert werden. Man spricht dann von *totaler* oder *vollständiger exakter Linearisierung* [38, 71]. Die Bedingungen für die totale Linearisierung sind extrem einschränkend. Dennoch sind einige praktische Anwendungen bekannt (z. B. [36]).

Die Theorie der exakten E/A-Linearisierung läßt sich mit Einschränkungen auch auf diskrete Systeme (z. B. [58]) und Differential-Algebra Systeme [27] erweitern.

3.2 Regelung einer Destillationskolonne mittels exakter E/A-Linearisierung

Um einen Eindruck von der Leistungsfähigkeit und vom notwendigen Aufwand für den Entwurf eines Reglers mittels E/A-Linearisierung für eine praxisnahe Anwendung zu geben, soll hier die Regelung einer Zweistoffdestillationskolonne untersucht werden. In einer Zweistoffdestillationskolonne wird ein Gemisch aus zwei flüssigen Stoffen in seine Bestandteile aufgetrennt. Eine Destillationskolonne kann hier als ein Mehrgrößensystem mit zwei Eingängen u_1 und u_2 und zwei zu regelnden Temperaturen T_1 und T_2 behandelt werden. Beispielhaft betrachten wir die Trennung der beiden Alkohole Methanol und Propanol in einer Kolonne mit 40 Böden. Die wichtigsten dynamischen Vorgänge werden durch ein nichtlineares Modell 42ter Ordnung gut erfaßt [5]. Die Berechnung der Lie-Ableitungen in (27) führt auf das statische Rückführgesetz

$$u_1 = \frac{1}{\Delta_A(x)} \cdot ((K_{29x}x_{29} - K_{28x}x_{28}) \cdot v_1 + (K_{14x}x_{14} - K_{15x}x_{15}) \cdot v_2 + (x_{27} - x_{28})(K_{15x}x_{15} - K_{14x}x_{14}) \cdot w_1) \quad (29)$$

$$u_2 = \frac{1}{\Delta_A(x)} \cdot ((x_{28} - x_{27}) \cdot v_1 + (x_{13} - x_{14}) \cdot v_2 + (x_{27} - x_{28})(x_{14} - x_{13}) \cdot w_1) \quad (30)$$

mit

$$\Delta_A(x) = (x_{13} - x_{14})(K_{29x}x_{29} - K_{28x}x_{28}) - (x_{27} - x_{28})(K_{15x}x_{15} - K_{14x}x_{14}) \quad (31)$$

und

$$K_{ix} = \frac{\alpha}{1 + (1 - \alpha)x_i} \quad (32)$$

Die Größen x_i in (29)–(32) sind die Zustände des Kolonnenmodells (Konzentrationen auf dem i -ten Boden), die gemessen werden müssen, w_1 ist die stationäre Zulaufmenge und α ist die relative Flüchtigkeit von Methanol und Propanol, die als konstant angenommen wird. Dieses Rückführgesetz überführt das System 42ter Ordnung in zwei entkoppelte (lineare) Integratoren, die das E/A-Verhalten beschreiben. Die nicht beobachtbare Nulldynamik ist stabil und von 40ter Ordnung. Die Komplexität der Rückführung (29)–(32) ist trotz der hohen Systemordnung des Kolonnenmodells nicht sehr groß. Dies ist eine direkte Folge des niederen relativen Grades von eins für jeden der beiden Ausgänge. Nur sechs der 42 Zustände werden in (29)–(32) zurückgeführt. Dies vereinfacht den Meßaufwand wesentlich. Für das E/A-linearisierte System werden zwei dezentrale PI-Regler (Bild 1) entworfen, um die geforderten Spezifikationen an die Regelgüte zu erfüllen. Das Regelverhalten des geschlossenen Kreises bei einer sprungförmigen Zulaufstörung zum Zeitpunkt $t = 2h$ ist in Bild 2 dargestellt. In den Simulationen wird die Kolonne durch ein detailliertes Modell 320ter Ordnung repräsentiert. Dadurch können Aussagen über die Robustheit der Regelung gemacht werden. Die durchgezogene Kurve in Bild 2 zeigt das Verhalten des auf E/A-Linearisierung basierenden Reglers. Die gestrichelte Kurve zeigt das Verhalten eines linearen H_∞ -optimalen Reglers mit gleicher Bandbreite [4]. Das bessere Regelverhalten durch

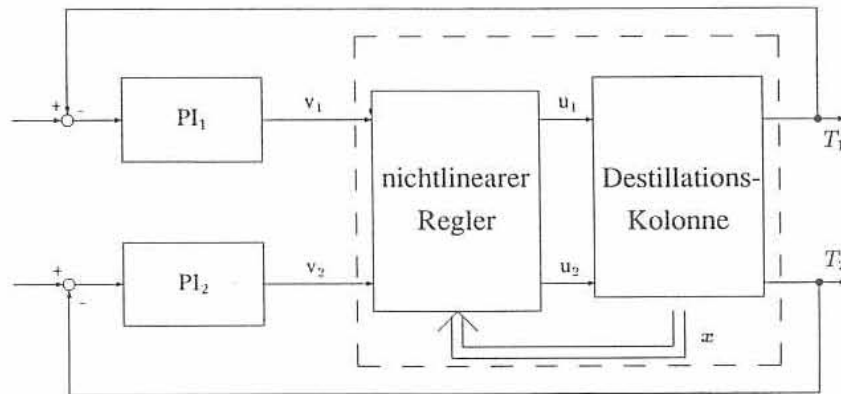
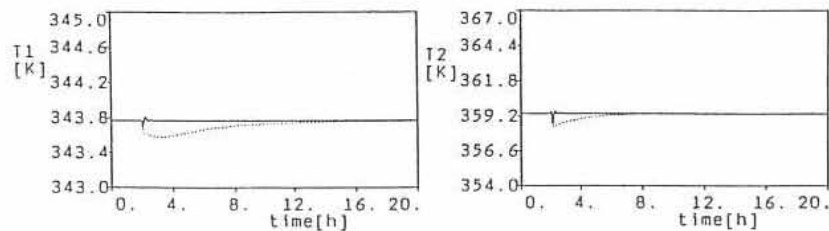
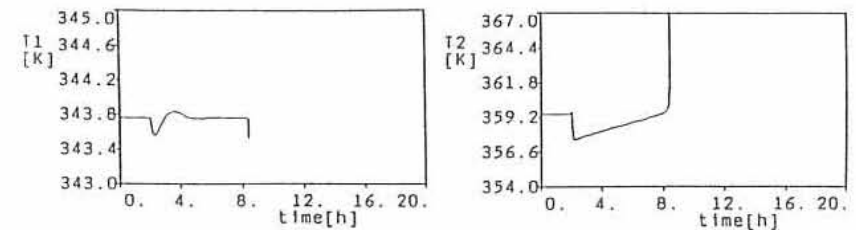


Bild 1: Regelungsstruktur für Destillationskolonnenregelung.

die nichtlineare Kompensation ist deutlich zu erkennen. Die linearen PI-Regler in Bild 1 sind so ausgelegt, daß eine gute lineare Stabilitätsreserve garantiert ist. Man könnte nun folgendermaßen argumentieren: Das nichtlineare Modell, auf dem der Reglerentwurf basiert, ist potentiell sehr ungenau. Deshalb müßte eine Vergrößerung der linearen Stabilitätsreserve die Robustheit der Stabilität des nichtlinearen Kreises erhöhen. Bild 3 zeigt das Verhalten des geschlossenen Kreises, wenn der nichtlineare E/A-linearisierende Regler in Bild 1 beibehalten wird, aber die PI-Regler so ausgelegt werden, daß sie eine größere lineare Stabilitätsreserve bewirken. Die Vergrößerung der linearen Stabilitätsreserve bewirkt aber die Destabilisierung des Kreises. Der Grund für dieses, auf den ersten Blick überraschende, Verhalten sind die nach der E/A-Linearisierung im Kreis verbleibenden Nichtlinearitäten, die auf Modellfehler zurückzuführen sind. Diese Nichtlinearitäten wirken destabilisierend. Die Vergrößerung der linearen

Bild 2: Dynamisches Verhalten der geregelten Destillationskolonne nach einer sprungförmigen Störung in der Kolonnenzulaufkonzentration um 15% ($\omega_B = 50 \frac{1}{h}$).Bild 3: Dynamisches Verhalten der geregelten Destillationskolonne nach einer sprungförmigen Störung in der Kolonnenzulaufkonzentration um 15% ($\omega_B = 5 \frac{1}{h}$).

Stabilitätsreserve, die hier eine Reduktion der Bandbreite bewirkt, führt dazu, daß die nichtlinearen Effekte gegenüber den linearen Effekten überwiegen und verursacht somit die Destabilisierung. Dieses Beispiel zeigt deutlich, daß lineare Robustheitsargumente beim Entwurf der linearen Regler für den E/A-linearisierten Kreis mit Vorsicht gebraucht werden müssen.

3.3 Einschätzung der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Anders als bei der exakten Zustands-Linearisierung sind die Bedingungen, unter denen das E/A-Verhalten eines dynamischen Systems linearisiert werden kann, für eine große Klasse von Systemen erfüllt. Die Forderung nach Minimalphasigkeit ist dabei die einschränkendste Voraussetzung. So hat zum Beispiel der, im Kapitel über Zustands-Linearisierung behandelte Rührkesselreaktor eine instabile Nulldynamik und kann damit nicht exakt E/A-linearisiert werden. Die Berechnung des Rückführgesetzes (27) ist unkompliziert (Berechnung von Lie-Ableitungen), kann aber unter Umständen aufwendig sein. Im allgemeinen empfiehlt sich die Verwendung von Computer-Algebra-Systemen. Anders als bei der exakten Zustands-Linearisierung ist es hier jedoch nicht nötig die Transformation (24) explizit zu berechnen.

Das Rückführgesetz (27) setzt die Meßbarkeit des gesamten Zustands voraus. Wie im Falle der Zustands-Linearisierung wird dadurch die Praktikabilität des Verfahrens eingeschränkt. Mit dem Verfahren der asymptotisch exakten Linearisierung [25, 24, 27] kann das E/A-Verhalten durch eine Ausgangsrückführung asymptotisch exakt linearisiert werden. Die Grundlage dieser Vorgehensweise bildet dabei die exakte Linearisierung eines hinreichend genauen Modells unter Echtzeitbedingungen, dessen Zustände natürlich „gemessen“ werden können. In einem zweiten Schritt, der nur die Messung der Prozeßausgänge voraussetzt, wird unabhängig von der exakten Linearisierung des Modells die Konvergenz des realen Prozesses gegen das Prozeßmodell sichergestellt.

Unter Umständen werden große Amplituden der Stellgröße benötigt um ein lineares E/A-Verhalten zu erreichen. Dies ist eine direkte Konsequenz der Forderung nach Linearität: Auch in den „Richtungen“, in denen das System von Natur aus eine geringe Verstärkung besitzt, zwingt man der Strecke eine lineare Verstärkung der Eingangssignale auf. Das Verfahren der exakten Linearisierung kann eine solche „Direktionalität“ eines nichtlinearen Systems nie berücksichtigen oder gar ausnutzen. Vielmehr wird, auf Kosten der Stellgröße, ein lineares und damit vollständig gleichförmiges Verhalten erzwungen. Da der Ausgang dieser Regler nur eine reglerinterne Größe (die Eingangsgröße v) ist, können Stellgrößenbeschränkungen (oder eine Gewichtung der Stellgröße) auch beim Entwurf der linearen Regler für das E/A-linearisierte System nicht explizit berücksichtigt werden.

Neben den Stellgrößen u wirken im allgemeinen Störungen d auf das System, die im Modell berücksichtigt werden können

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)d \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Analog zum relativen Grad r_u der Stellgröße u , kann auch der relative Grad r_d der Störgröße d definiert werden. Durch Transformation des um die Störungen erweiterten Systems auf Byrnes-Isidori-Normalform sieht man sofort, daß Störungen mit relativem Grad $r_d > r_u$ durch das linearisierende Rückführgesetz (27) vollständig entkoppelt werden. Falls Störungen mit $r_d = r_u$ gemessen werden können, kann durch eine zusätzliche Störgrößenaufschaltung deren vollständige Entkopplung erreicht werden [35, 42]. Störungen, die nicht automatisch entkoppelt werden, beeinflussen die Dynamik nach der Linearisierung des E/A-Verhaltens im Regelfall in einer nichtlinearen Weise. Das folgende einfache Beispiel zeigt mögliche Probleme.

Beispiel:

Wir betrachten die durch

$$\dot{x} = (1 + x^2)(u + d)$$

beschriebene nichtlineare skalare Strecke. Die Störgröße d greift direkt am Streckeneingang an. Mit Gleichung (27) berechnet man leicht eine linearisierende Rückführung

$$u = -\frac{x}{1 + x^2}, \quad (33)$$

die den Pol des geschlossenen Kreises zu $s = -1$ bestimmt. Eine kurze Rechnung zeigt aber, daß der mit (33) geschlossene Kreis für Störungen $|d| > \frac{1}{2}$ instabil ist (sogar in endlicher Entweichzeit). Dies ist eine direkte Folge der E/A-Linearisierung. Wie man leicht zeigen kann, stabilisiert dagegen die einfache lineare Rückführung

$$u = -x$$

die Strecke für alle Störungen d . Das destabilisierende Verhalten der E/A-linearisierenden Rückführung kann als eine Verletzung des Inneren-Modell-Prinzips [22]

gedeutet werden: Nach der Linearisierung des E/A-Verhaltens verbleibt im Kreis keine Dynamik, die der „stärker als linear“ eingreifenden Störung $((1 + x^2)d)$ entgegenwirken könnte.

Über Robustheitseigenschaften der Methode der exakten E/A-Linearisierung können keine allgemeinen Aussagen gemacht werden. Dies ist aber für fast alle nichtlinearen Entwurfstechniken der Fall und liegt vor allem an der fehlenden systematischen Beschreibungsmöglichkeit von nichtlinearen dynamischen Unsicherheiten. Unter der Voraussetzung, daß bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sind, können hinreichende Bedingungen für robuste Stabilität angegeben werden [12]. Die so gefundenen Abschätzungen können aber beliebig konservativ sein. Wie das Beispiel der Kolonnenregelung zeigt, müssen die bekannten Robustheitsaussagen aus der linearen Systemtheorie mit großer Vorsicht beurteilt werden, wenn die betrachteten Systeme nichtlinear sind.

Trotz der genannten Einschränkungen kann eine Anwendung der exakten E/A-Linearisierung in vielen Fällen zu sehr guten Ergebnissen führen (z. B. [5, 59, 70, 27]). Der Hauptvorteil der exakten Linearisierung liegt, wie bereits erwähnt, darin, daß die notwendigen Entwurfsiterationen zum Erreichen der gewünschten Regelgüte ohne großen Aufwand im Linearen durchgeführt werden können.

3.4 Näherungsweise Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Die Bedingungen, unter denen eine exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens erreicht werden, sind wesentlich weniger einschränkend als bei der exakten Zustands-Linearisierung. Dennoch sind eine Vielzahl technisch wichtiger Systeme bekannt, für die der relative Grad nicht wohl-definiert ist, oder die eine instabile Nulldynamik besitzen. Im Falle eines nicht wohl-definierten relativen Grades ist der Nenner des exakt E/A-linearisierenden Rückführgesetzes (27) am Arbeitspunkt null und folglich das Rückführgesetz singulär. Auch für Systeme mit wohl-definiertem relativen Grad kann es im Arbeitsbereich des Regelungssystems Zustände geben, für die (27) singulär wird. Die meisten Ansätze zur näherungsweisen Linearisierung solcher Systeme erweitern den Nenner heuristisch durch eine Art Störfunktion $\epsilon(x)$

$$u = \frac{v - L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x) + \epsilon(x)} + \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x) + \epsilon(x)},$$

um unbeschränkte Stellamplituden an Singularitäten zu vermeiden. Der Kompromiß zwischen Linearisierung und großer Stellamplitude kann durch unterschiedliche Wahl von $\epsilon(x)$ erreicht werden [60, 33, 14]. Alternative Verfahren, die auf einer Erweiterung der Byrnes-Isidori-Normalform beruhen, werden in [31, 46] beschrieben.

Für Systeme mit instabiler Nulldynamik ist die Berechnung einer näherungsweise linearisierenden Rückführung meist wesentlich aufwendiger. Ein möglicher Ansatz beruht auf einer näherungsweisen Aufspaltung des Systems in einen nichtlinearen

Allpaßanteil und einen nichtlinearen Phasenminimumanteil, der dem Reglerentwurf zugrunde gelegt wird [20, 19]. Eine zweite in [20] vorgeschlagene Vorgehensweise basiert auf einer Faktorisierung der Nulldynamik in einen stabilen und einen antistabilen Anteil. Für spezielle Klassen von Systemen sind weitere Verfahren bekannt [32, 50, 26]. Es soll jedoch ausdrücklich erwähnt werden, daß mit den zitierten Ansätzen nicht in allen Fällen ausreichend lineares Verhalten erreicht werden kann.

Auch wenn die Voraussetzungen zur exakten Linearisierung des E/A-Verhaltens erfüllt sind, ist es aus Anwendersicht in vielen Fällen nicht notwendig, eine exakte Linearisierung anzustreben. Durch Beschränkung auf die Kompensation der Hauptnichtlinearitäten wird im allgemeinen die Rückführung weniger komplex und in vielen Fällen kann dadurch eine Verkleinerung der benötigten Stellamplitude erreicht werden. Schwache Nichtlinearitäten, gewünschte Nichtlinearitäten, oder Nichtlinearitäten, deren Beschreibung unsicher ist, verbleiben im Kreis. Die Berechnung der näherungsweise linearisierenden Rückführung kann zum Beispiel auf eine polynomiale Approximation des nichtlinearen Modells gestützt werden [63], oder auf Näherungen für das exakt linearisierende Rückführgesetz. Alternativ ist eine Lösung durch Approximation von E/A-Operatoren denkbar. In [3] wird eine Lösung über Minimierung sogenannter Nichtlinearitätsmaße vorgeschlagen. Die Nichtlinearitätsmaße quantifizieren die „Größe“ der Nichtlinearität im E/A-Verhalten und erlauben so, neben der Synthese näherungsweise linearisierender Regler, auch deren Analyse. Diese Entwurfsmethode wird in diesem Band in [2] genauer behandelt.

4. Zusammenfassung

Die exakten Linearisierungstechniken erlauben einen systematischen Entwurf von Reglern für eine allgemeine Klasse von nichtlinearen Systemen. Prinzipiell werden die exakte Linearisierung des Zustands- und des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens unterschieden. Die exakte Zustands-Linearisierung stellt ein elegantes Verfahren zur Stabilisierung nichtlinearer Regelstrecken dar. Darüber hinausgehende Anforderungen an die Regelgüte können allerdings nur schwer berücksichtigt werden. Wegen der eingeschränkten Klasse exakt zustands-linearisierbarer Systeme, und wegen der teilweise aufwendigen Berechnung exakt zustands-linearisierender Regler, kommt den Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung in der Praxis eine größere Bedeutung zu als dem exakten Verfahren. Diese Näherungsmethoden versuchen einen Brückenschlag zwischen der relativen Einfachheit rein linearer Entwürfe und der aufwendigen exakten Linearisierung zu erreichen. Speziell die Poincaré-Linearisierung, die die ersten nichtlinearen Terme in der Taylorentwicklung kompensiert, stellt eine attraktive Alternative zur exakten Linearisierung dar, wenn die Regelung um einen festen Arbeitspunkt erfolgt. Ein durch Extended Linearization oder durch Pseudo-Linearisierung kompensiertes System zeigt in linearer Näherung gleiches Verhalten unabhängig

von Arbeitspunkt. Dadurch wird im allgemeinen eine Vergrößerung des Stabilitätsgebietes erreicht. Durch die Uniform System Approximation wird eine bestmögliche Kompensation der Nichtlinearitäten in der Umgebung aller Arbeitspunkte erreicht. Durch den hohen Berechnungsaufwand kommt dieser Technik jedoch hauptsächlich theoretische Bedeutung zu.

Die Zustands-Linearisierungstechniken können auch zum Entwurf nichtlinearer Beobachter herangezogen werden [55, 57]. Die Beobachterkorrektur wird dabei so entworfen, daß sich eine exakt bzw. näherungsweise lineare Beobachterfehlerdynamik ergibt, deren Stabilität und Einschwingdynamik leicht beeinflußt werden kann.

Mit dem Verfahren der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung können Regler gezielt im Hinblick auf gutes Regelverhalten entworfen werden. Die besondere Attraktivität dieser Methode erklärt sich aus der Anwendbarkeit auf eine große Klasse nichtlinearer Systeme und aus der eleganten Möglichkeit, Anforderungen an die Regelgüte durch den Entwurf linearer Regler zu erfüllen. Eine vollständige exakte Linearisierung des E/A-Verhaltens ist in der Praxis oft nicht notwendig und zum Teil auch nicht erwünscht. Die Entwicklung von Verfahren zur näherungsweisen Linearisierung des E/A-Verhaltens ist gegenwärtig ein Gebiet intensiver Forschung.

In vielen Fällen ist eine exakte Linearisierung des Zustands- oder E/A-Verhaltens nur zu erreichen, wenn man große Stellamplituden in Kauf nimmt. Falls die benötigte Stellenergie nicht aufgebracht werden kann, oder dies nicht erwünscht ist, kann durch die diskutierten Näherungsverfahren ein Kompromiß zwischen Stellenergie und Linearität erzielt werden.

Obwohl die exakten Linearisierungstechniken mit großem Erfolg an realen Regelungsproblemen getestet wurden, ist ihre Anwendung nicht in allen Fällen möglich und sinnvoll. Neben ihrem Wert als praktikabler Entwurfsmethode, stellt die zugrundeliegende Theorie zusätzlich einen wichtigen Schritt auf dem Weg zur Entwicklung einer allgemeinen Regelungstheorie nichtlinearer Systeme dar.

Anhang

Definition 3 Die Ableitung einer skalaren zustandsabhängigen Funktion $\lambda(x)$ entlang einer zustandsabhängigen Vektorfunktion $f(x)$ wird Lie-Ableitung genannt und ist definiert als

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x).$$

Die Lie-Ableitung $L_f \lambda(x)$ ist wieder eine skalare Größe. Demzufolge kann dieser Differentialoperator wiederholt angewandt werden: Beispielsweise kann zuerst entlang einer Vektorfunktion $f(x)$ und anschließend entlang einer Vektorfunktion $g(x)$

abgeleitet werden

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x).$$

Die mehrfache Ableitung entlang derselben Funktion $f(x)$ ist natürlich ebenfalls möglich und wird in der Notation durch einen hochgestellten Index ausgedrückt:

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x).$$

Definition 4 Die Lie-Klammer zweier Vektorfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist definiert durch

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g.$$

Die Lie-Klammer $[f, g]$ wird oft auch als $ad_f g$ geschrieben. Das Ergebnis der Lie-Klammer-Operation ist wieder eine Vektorfunktion. Folglich ist eine sukzessive Anwendung möglich. Dies wird durch die folgende Standardnotation ausgedrückt:

$$ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g].$$

Zusätzlich wird vereinbart, daß $ad_f^0 g = g$ gilt.

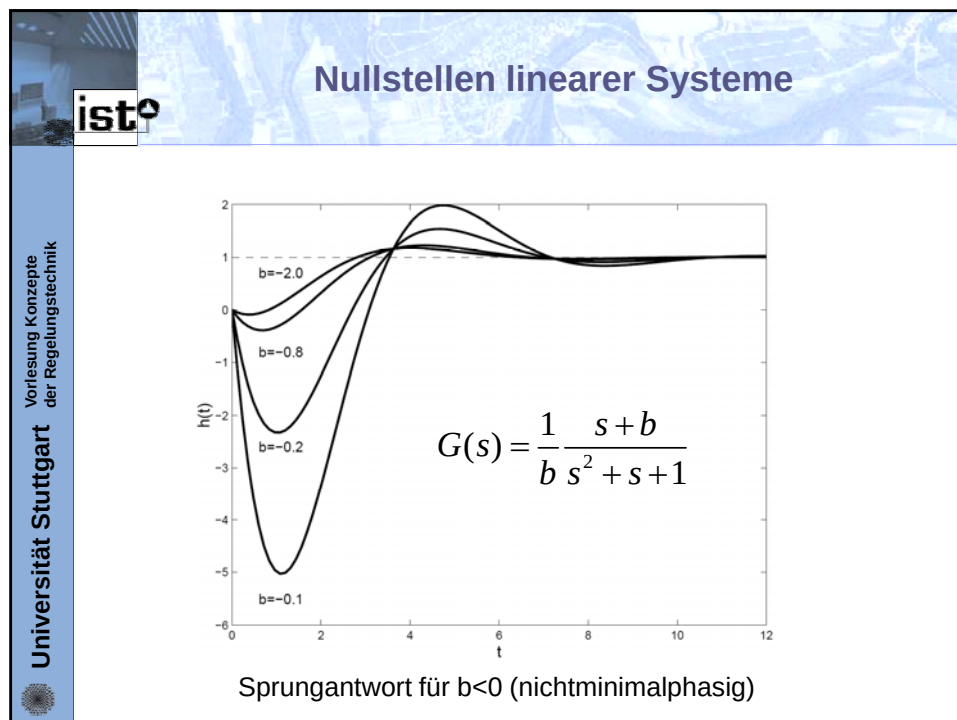
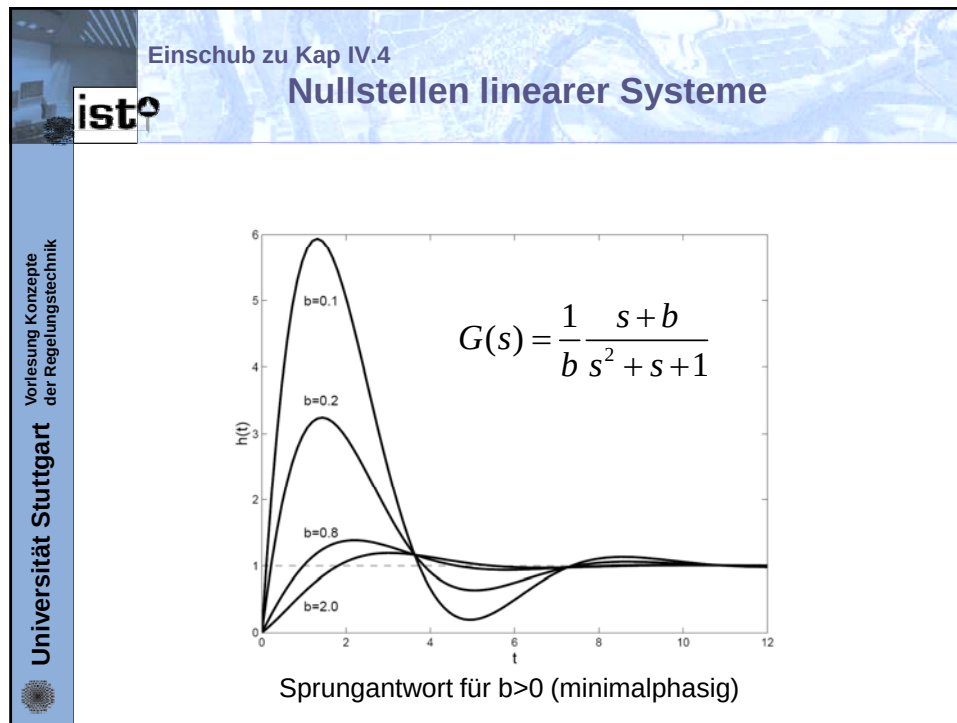
Literatur

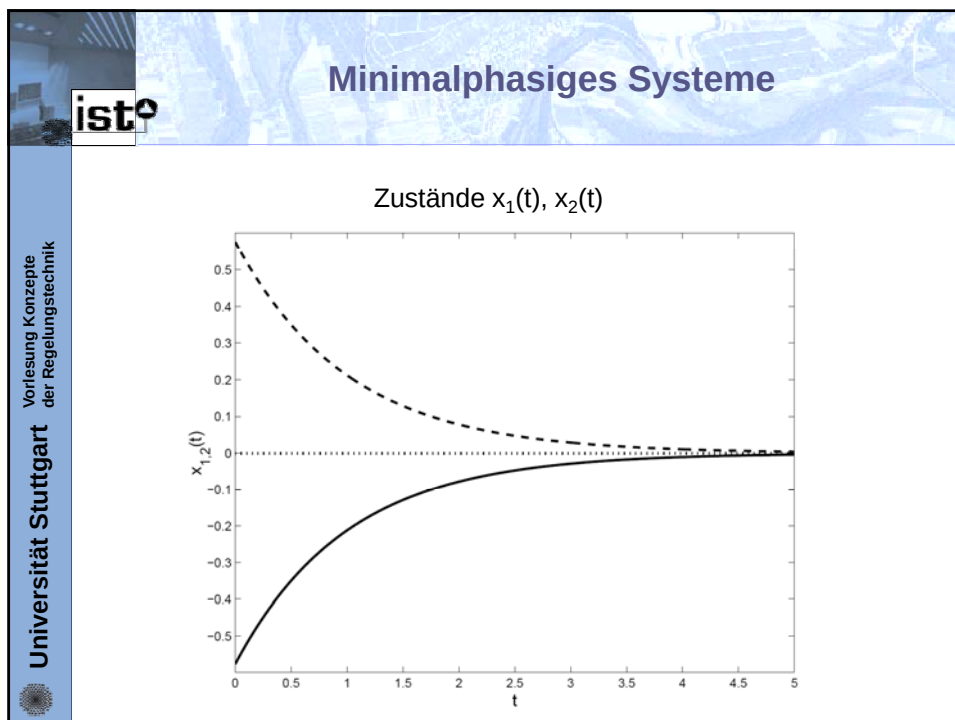
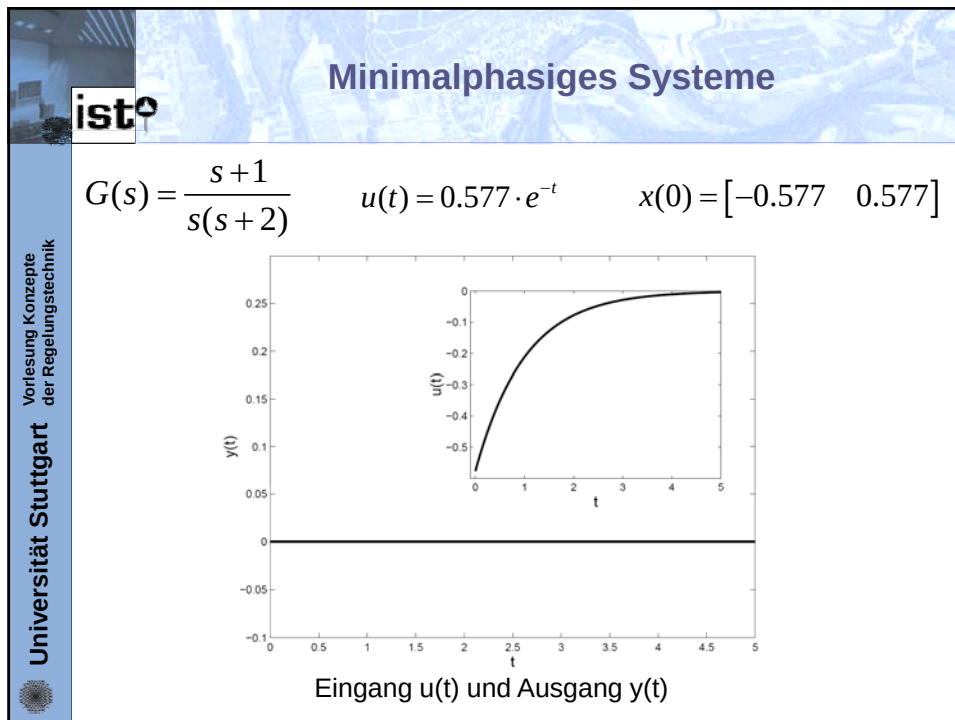
- [1] F. Allgöwer und E.D. Gilles. Nichtlinearer Reglerentwurf auf der Grundlage exakter Linearisierungstechniken. In: S. Engell, Hrsg., *Nichtlineare Regelung – Methoden, Werkzeuge, Anwendungen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
- [2] F. Allgöwer. Nichtlinearitätsmaße — Ein Werkzeug zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelkreise. In diesem Band.
- [3] F. Allgöwer und E.D. Gilles. Approximate input/output-linearization of nonlinear systems. AICHE Annual Meeting, Miami, FL, 1992.
- [4] F. Allgöwer und J. Raisch. Multivariable controller design for an industrial distillation column. In: N.K. Nichols und D.H. Owens, Hrsg., *The Mathematics of Control Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [5] F. Allgöwer, A. Sax, und E.D. Gilles. Nonlinear controller design for a binary distillation column by exact input/output linearization. AICHE Annual Meeting, San Francisco, CA, 1989.
- [6] W.T. Baumann und W.J. Rugh. Feedback control of nonlinear systems by Extended Linearization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 31 (1986), 40–46.
- [7] J. Birk und M. Zeitz. Program for symbolic and rule-based analysis and design of nonlinear systems. In: G. Jacob und F. Lamnabhi-Lagarigue, Hrsg., *Algebraic Computing in Control. Proc. of the First European Conference. Lecture Notes in Control and Information Science 165*, 115–128. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [8] R.W. Brockett. Feedback invariants for nonlinear systems. *Proc. 7th IFAC World Congress, Helsinki*, 1115–1120, 1978.
- [9] P. Brunovsky. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6 (1970), 173–188.
- [10] C.I. Byrnes und A. Isidori. A frequency domain philosophy for nonlinear systems. *Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr.*, Las Vegas, NV, 1569–1573, 1984.
- [11] C.I. Byrnes und A. Isidori. Global feedback stabilization of nonlinear systems. *Proc. 24th IEEE Conf. Decision Contr.*, Ft.Lauderdale, FL, 1031–1037, 1985.
- [12] J.-P. Calvet. A differential geometric approach for the nominal and robust control of nonlinear chemical processes. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 1989.
- [13] J.-P. Calvet und Y. Arkun. Robust control design for uncertain nonlinear systems under feedback linearization. *Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr.*, Tampa, FL, 102–106, 1989.
- [14] B. Castillo. Output tracking through singular points for a class of nonlinear systems. *Proc. 1st European Control Conference ECC '91*, Grenoble, 1496–1501, 1991.
- [15] C. Champetier, P. Mouyon, und C. Reboulet. Pseudolinearization of multi-input nonlinear systems. *Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr.*, Las Vegas, NV, 96–97, 1984.
- [16] C. Champetier, C. Reboulet, und P. Mouyon. A new approach to linearize nonlinear systems: The pseudolinearization. Comparison with classical methods. *Proc. 9th IFAC World Congress, Budapest*, 393–397, 1984.
- [17] B. Charlet, J. Levine, und R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Contr. Optim.*, 29 (1991), 38–57.
- [18] D. Claude, M. Fliess, und A. Isidori. Immersion, directe et par bouclage d'un système non linéaire dans un linéaire. *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris*, 296 (1983), 237–240.
- [19] F.J. Doyle III, F. Allgöwer, und M. Morari. A normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, accepted.
- [20] F.J. Doyle III, F. Allgöwer, S. Oliveira, E.D. Gilles, und M. Morari. On nonlinear systems with poorly behaved zero dynamics. *Amer. Contr. Conf.*, Chicago, IL, 2571–2575, 1992.
- [21] H. Ford. Numerical and symbolic methods for transforming control systems to canonical form. Ph.D. Thesis, Texas Tech. Univ., Lubbock, TX, 1983.
- [22] B.A. Francis und W.M. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12 (1976), 457–465.
- [23] E. Freund. The structure of decoupled nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 21 (1975), 443–450.

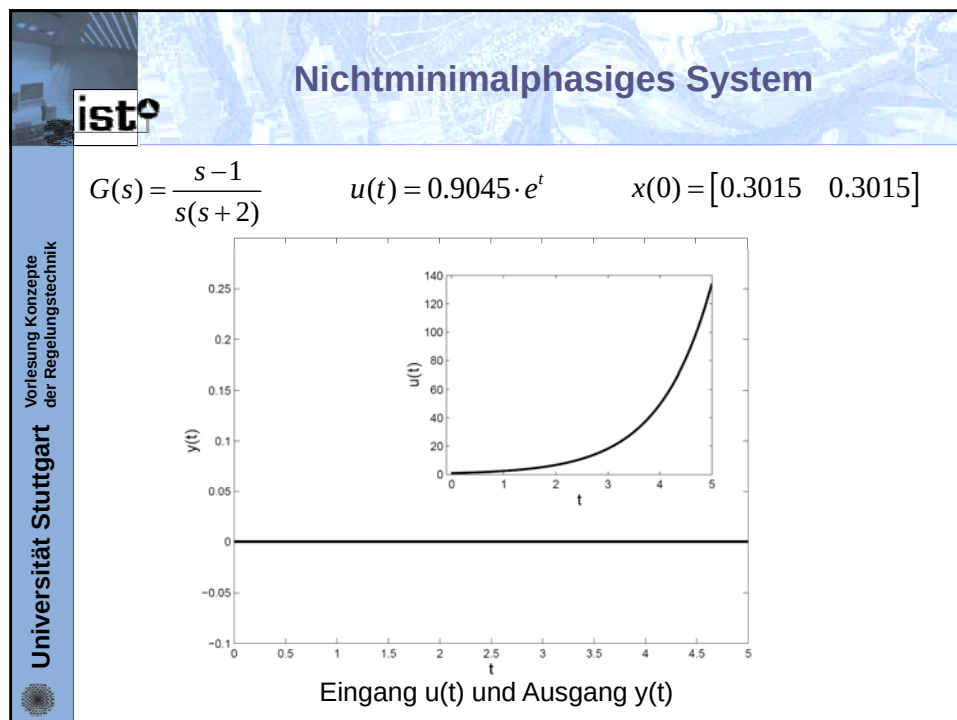
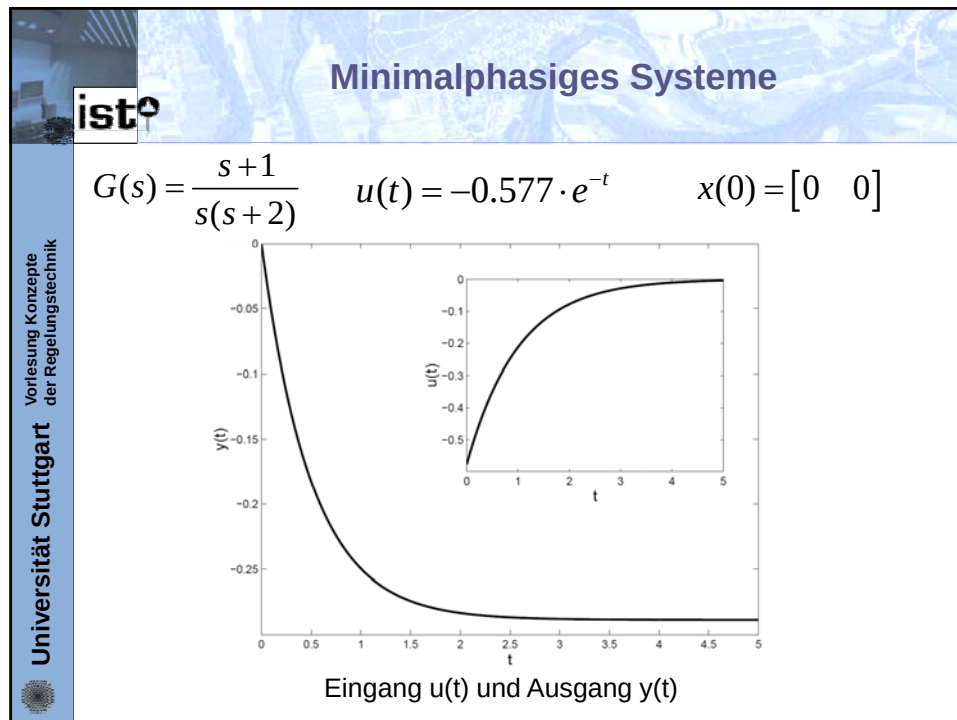
- [24] M. Friedrich, M. Storz, und E.D. Gilles. Asymptotisch exakte Linearisierung des Ein-/Ausgangsverhaltens nichtlinearer Systeme. *Automatisierungstechnik*, 42 (1994), 135–148.
- [25] M. Friedrich, M. Storz, und E.D. Gilles. Asymptotically exact linearization of chemical processes. In: J.G. Balchen, Hrsg., *Selected Papers from the 3rd IFAC Symposium DYCORS '92, College Park, MD*, 137–142. Pergamon Press, 1992.
- [26] S. Gopalswamy und J.K. Hedrick. Asymptotic tracking of non-minimum phase systems. Technical Report UCB-VDL/91/01, University of California, Berkeley, CA, 1991.
- [27] M. Groebel, F. Allgöwer, M. Storz, und E.D. Gilles. Nonlinear control of high-purity distillation columns. AIChE Annual Meeting, San Francisco, CA, 1994.
- [28] H. Hahn, K.D. Leimbach, und X. Zhang. Nonlinear control of a spatial multi-axis servo-hydraulic test facility. *Proc. 12th IFAC World Congress*, Sydney, 1993.
- [29] J. Hauser. Nonlinear control via uniform system approximation. *Syst. Contr. Lett.*, 17 (1991), 145–154.
- [30] J. Hauser. Higher order approximate feedback linearization about a manifold. *Proc. IFAC-Symposium Nonlinear Control System Design*, Bordeaux, 37–42, 1992.
- [31] J. Hauser, S. Sastry, und P. Kokotović. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. *Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr.*, Tampa, FL, 1987–1993, 1989.
- [32] J. Hauser, S. Sastry, und G. Meyer. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems — application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 28 (1992), 665–679.
- [33] M.A. Henson und D.E. Seborg. Input-output linearization of general nonlinear processes. *AIChE J.*, 36 (1990), 1753–1757.
- [34] R.M. Hirschorn. Invertibility of nonlinear control systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 17 (1979), 289–297.
- [35] R.M. Hirschorn. Output tracking in multivariable nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26 (1981), 593–595.
- [36] K.A. Hoo und J.C. Kantor. Global linearization and control of a mixed culture bioreactor with competition and external inhibition. *Math. Biosci.*, 82 (1986), 43–62.
- [37] J.Y. Hung, W.B. Gao, und J.C. Hung. Variable structure control - a survey. *IEEE Trans. Ind. Electr.*, 40 (1993), 2–22.
- [38] L.R. Hunt, M. Luksic, und R. Su. Exact linearization of input-output systems. *Int. J. Contr.*, 43 (1986), 247–255.
- [39] L.R. Hunt, R. Su, und G. Meyer. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 28 (1983), 24–31.
- [40] A. Isidori. Control of nonlinear systems via dynamic state feedback. In: M. Fliess und M. Hazewinkel, Hrsg., *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, 121–145. Reidel, Dordrecht, 1986.

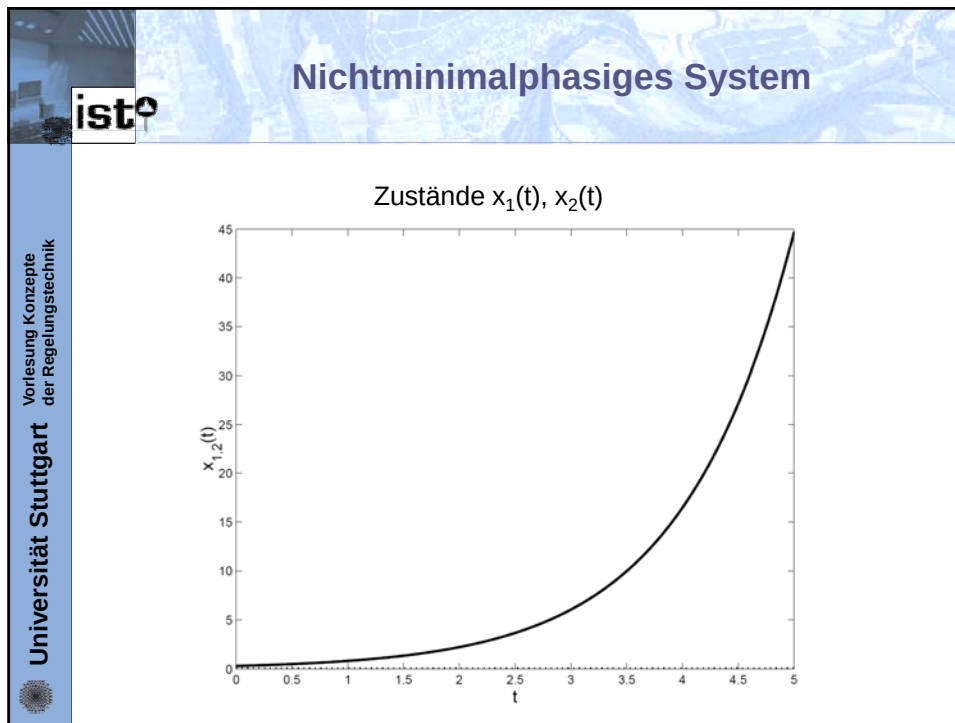
- [41] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1989.
- [42] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori Giorgi, und S. Monaco. Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26 (1981), 331–345.
- [43] A. Isidori und A. Ruberti. On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 4 (1984), 17–22.
- [44] B. Jacobczyk und W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 28 (1980), 517–522.
- [45] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [46] E. Kappos. A geometrical linearization theory. *Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr.*, Tampa, FL, 77–81, 1989.
- [47] S. Karahan. Higher degree approximations to nonlinear systems. Ph.D. Thesis, University of California, Davis, CA, 1988.
- [48] K.-U. Klatt, S. Engell, A. Kremling, und F. Allgöwer. Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion. In diesem Band.
- [49] C. Kravaris und C.-B. Chung. Nonlinear state feedback synthesis by global input/output linearization. *AIChE J.*, 33 (1987), 592–603.
- [50] C. Kravaris und R.A. Wright. Nonminimum-phase compensation for nonlinear processes. *AIChE J.*, 38 (1992), 26–40.
- [51] A.J. Krener. On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. *SIAM J. Contr.*, 11 (1973), 670–676.
- [52] A.J. Krener. Approximate linearization by state feedback and coordinate change. *Syst. Contr. Lett.*, 5 (1984), 181–185.
- [53] A.J. Krener. Normal forms for linear and nonlinear systems. In: M. Luksic, C. Martin, und W. Shadwick, Hrsg., *Differential Geometry: The Interface between Pure and Applied Mathematics*, 157–189. American Mathematical Society, 1987.
- [54] A.J. Krener. Nonlinear controller design via approximate normal forms. In: G. Jacob und F. Lamnabhi-Lagarrigue, Hrsg., *First European Conference on Algebraic Computing in Control*, Paris, 1991.
- [55] A.J. Krener und A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Contr. Lett.*, 3 (1983), 47–52.
- [56] A.J. Krener, S. Karahan, M. Hubbard, und R. Frezza. Higher order linear approximations to nonlinear control systems. *Proc. 27th IEEE Conf. Decision Contr.*, Athens, 519–523, 1987.
- [57] A.J. Krener und W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Contr. Optim.*, 23 (1985), 197–216.
- [58] H.G. Lee und S.I. Marcus. On input-output linearization of discrete-time nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 8 (1987), 249–259.
- [59] J. Levine und P. Rouchon. Quality control of binary distillation columns via nonlinear aggregated models. *Automatica*, 27 (1991), 463–480.

- [60] C.-Y. Lien und T.-W. Wang. Application of feedback linearization to bioreactor control. *Proc. American Control Conference, San Diego, CA*, 2161–2166, 1990.
- [61] D.Q. Mayne und H. Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35 (1990), 814–824.
- [62] H. Nijmeijer und A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, New York, 1990.
- [63] E. Paolini, J.A. Romagnoli, A.C. Desages, und A. Palazoglu. Approximate models for control of nonlinear systems. Technical Report UCD-EECS-SCR-91/1, University of California, Davis, CA, 1991.
- [64] A.A. Patwardhan, J.B. Rawlings, und T.F. Edgar. Nonlinear model predictive control. *Chem. Eng. Commun.*, 87 (1990), 123–141.
- [65] H. Poincaré. *Oeuvres I*, 95–114. Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [66] C. Reboulet und C. Champetier. A new method for linearizing non-linear systems: The pseudolinearization. *Int. J. Contr.*, 40 (1984), 631–638.
- [67] C. Reboulet, P. Mouyon, und C. Champetier. About the local linearization of nonlinear systems. In: M. Fliess und M. Hazewinkel, Hrsg., *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, 311–322. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [68] W.J. Rugh. The extended linearization approach for nonlinear system problems. In: M. Fliess und M. Hazewinkel, Hrsg., *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, 285–309. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [69] H. Schwarz. *Nichtlineare Regelungssysteme*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.
- [70] M. Soroush und C. Kravaris. Multivariable nonlinear control of a continuous polymerization reactor. *Proc. American Control Conference, Chicago, IL*, 1429–1432, 1992.
- [71] T.J. Tarn, D. Cheng, und A. Isidori. Pfaffian basis for affine nonlinear systems. *Proc. 26th IEEE Conf. Decision Contr.*, Los Angeles, CA, 493–504, 1987.
- [72] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [73] J. Wang und W.J. Rugh. Feedback linearization families for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 32 (1987), 935–940.
- [74] J. Wang und W.J. Rugh. On the pseudo-linearization problem for nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 12 (1989), 161–167.
- [75] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, NY, 1979.
- [76] M. Zeitz. Canonical forms for nonlinear systems. In: A. Isidori, Hrsg., *Nonlinear Control System Design. Selected papers from the IFAC-Symposium, Capri*, 33–38. Pergamon Press, Oxford, 1989.











Zusammenfassung der Vorgehensweise

- ① Festlegen des Unsicherheitstyps (z.B. multipl. Ausgangsunsicherheit).
- ② Bestimmen/Festlegen von Größe $(l(\omega))$ der Unsicherheit Δ .
- ③ M - Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln.
- ④ Δ normieren (bestimme Gewicht $W_{\Delta}(s)$).
- ⑤ $|W_{\Delta}(j\omega)M(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil.

Beispiel zur robusten Stabilität



Ziel

Untersuche Auswirkung des Unsicherheitstyps auf den Konservatismus.

Betrachte parametrisierten Regler

$$K(s) = \frac{k}{s} \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

Zulässige Reglerverstärkung für

- a) Additive Unsicherheit.
- b) Multiplikative Unsicherheit.
- c) Reale Strecke (kein Konservatismus).



Beispiel aus Einführungsvorlesung

$$\text{Reale Strecke } G_{real}(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{(0.1s+1)^2}$$

$$\text{Nominelle Strecke } G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Motivation

Für Reglerentwurf nominelle Strecke und Gewichte W_Δ niedriger Ordnung sinnvoll.

Schätze hochfrequente Dynamik in G_{real} durch Unsicherheit mit konstantem Gewicht W_Δ ab.

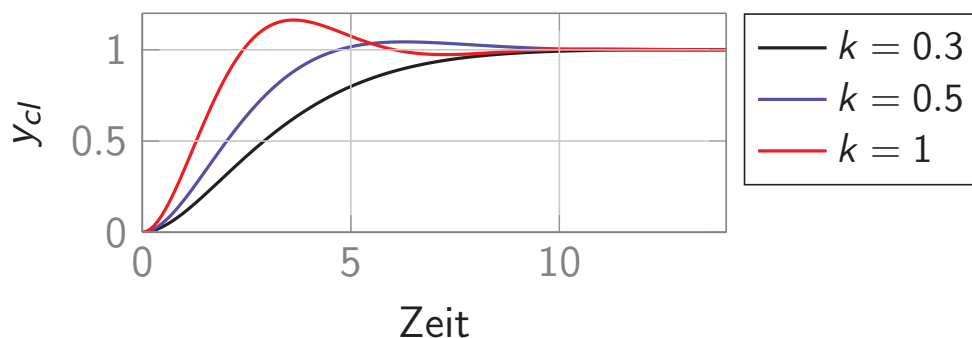
Nominelle Stabilität



Nomineller geschlossener Kreis

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{k}{s^2 + s + k} \text{ asy. stabil für } k > 0.$$

Sprungantwort



Gute Sprungantwort für $k \approx 0.5$.

Nomineller geschlossener Kreis asymptotisch stabil für $k > 0$.
Robuste Stabilität?

a) Additive Unsicherheit 1

1 Festlegen des Unsicherheitstyps:

additive Unsicherheit: $G_{\Delta}(s) = G(s) + \Delta_A(s)$

2 Größe der Unsicherheit:

$$I_A(\omega) = |\Delta_A(j\omega)| \text{ mit } \Delta_A(s) = -\frac{s}{s+1} \frac{s+20}{(s+10)^2}$$

Anmerkung

Im Beispiel: Reale Strecke als bekannt angenommen.

Im Allgemeinen: Reale Strecke durch Menge von Systemen beschrieben (z.B. unbekannte Parameter) $\Rightarrow \Delta_A$ ist Menge von Übertragungsfunktionen.

3 M- Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln:

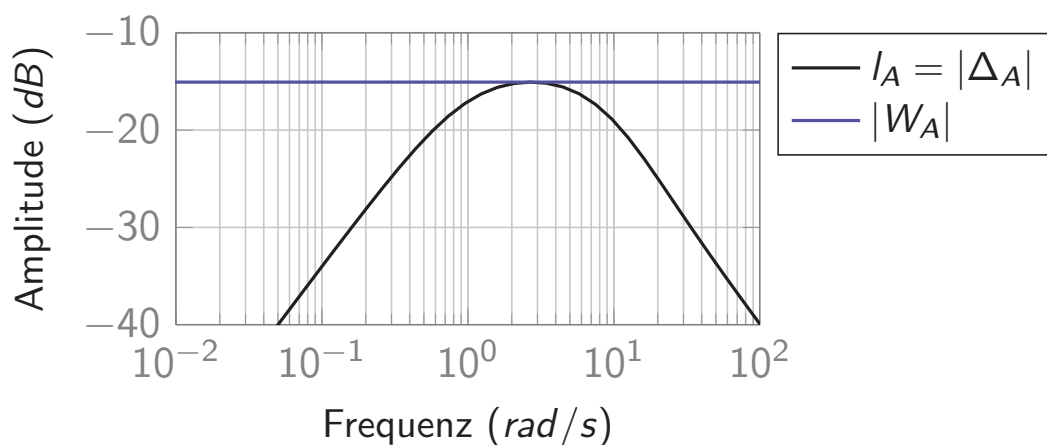
$$\dots \Rightarrow M_A(s) = -K(s)S(s)$$

a) Additive Unsicherheit 2

4 Δ normieren:

Finde stabiles, minimalphasiges System W_A mit $|W_A(j\omega)| > I_A(\omega)$.

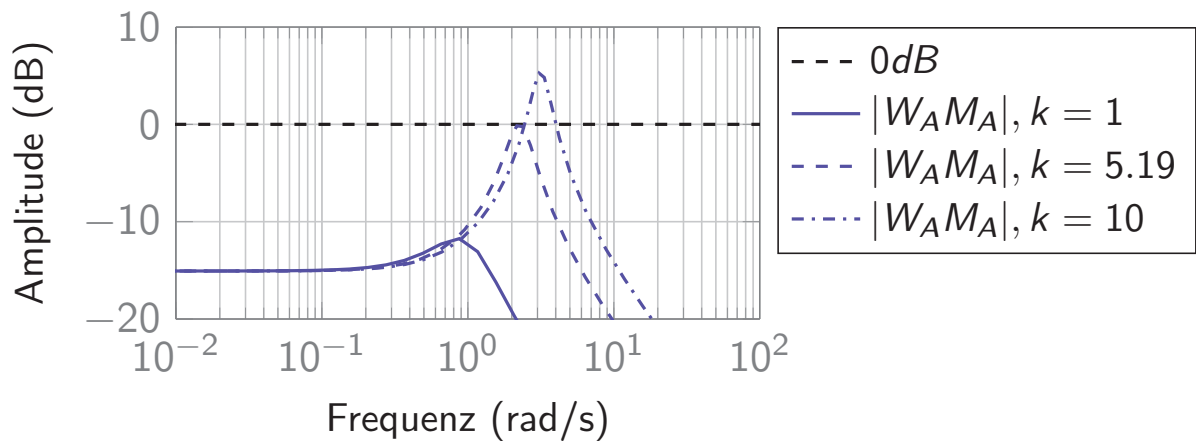
konstantes Gewicht $\Rightarrow W_A(s) = \max_{\omega} I_A(\omega)$



$$W_A(s) = 0.1764$$

a) Additive Unsicherheit 3

- ⑤ $|W_A(j\omega)M_A(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil:



$W_A(s)M_A(s) = -0.1764k \frac{s+1}{s^2+s+k}$ asymptotisch stabil für $k > 0$.

Für $k < 0$ Theorem über robuste Stabilität nicht anwendbar, da $W_A M_A$ instabil.

$\Rightarrow$ Bei additiver Unsicherheit robust stabil für $0 \leq k \leq k_A \approx 5.19$.

b) Multiplikative Unsicherheit 1

- ① Festlegen des Unsicherheitstyps:

multipl. Unsicherheit: $G_\Delta(s) = G(s)(1 + \Delta_M(s))$

- ② Größe der Unsicherheit:

$l_M(\omega) = |\Delta_M(j\omega)|$ mit $\Delta_M(s) = G_\Delta(s)/G(s) - 1 = -\frac{s(s+20)}{(s+10)^2}$

- ③ M - Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln:

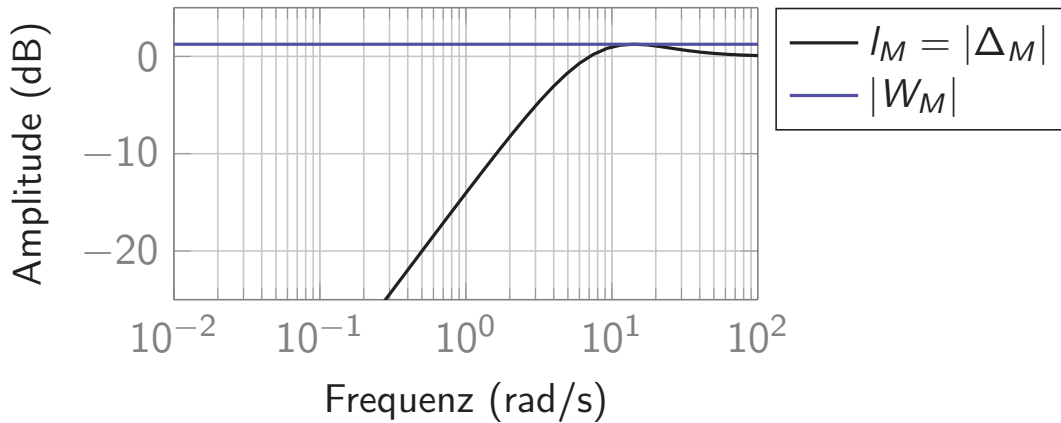
$\dots \Rightarrow M_M(s) = -T(s)$

b) Multiplikative Unsicherheit 2

4 Δ normieren:

Finde stabiles, minimalphasiges System W_M mit $|W_M(j\omega)| > I_M(\omega)$.

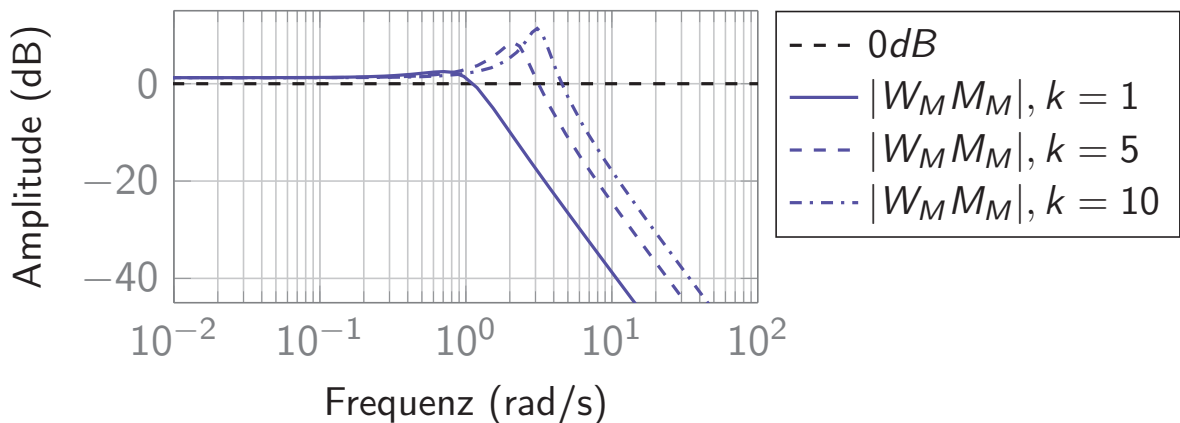
konstantes Gewicht $\Rightarrow W_M(s) = \max_{\omega} I_M(\omega)$



$$W_M(s) = 1.154$$

b) Multiplikative Unsicherheit 3

5 $|W_M(j\omega)M_M(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil:



$W_M(s)M_M(s) = -1.154k \frac{1}{s^2 + s + k}$ asympt. stabil für $k > 0$.

Für $k < 0$ Theorem über robuste Stabilität nicht anwendbar, da $W_M M_M$ instabil.

$\Rightarrow$ Bei multiplikativer Unsicherheit **nicht** robust stabil für $0 \leq k$.

Mit Gewicht der Ordnung 1 robuste Stabilität für multiplikative Unsicherheiten und k vergleichbar zu additiver Unsicherheit.

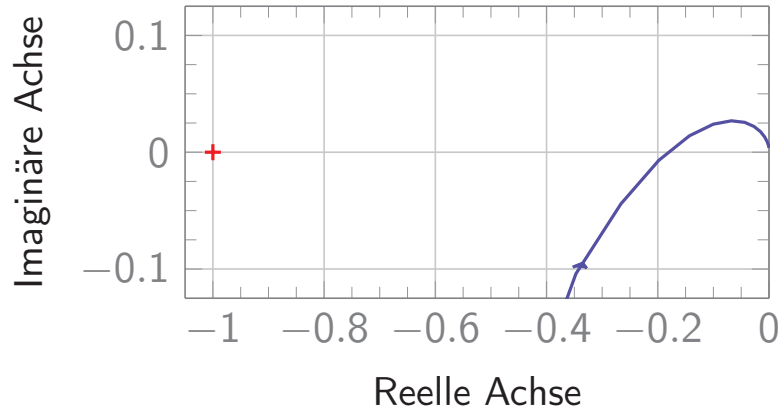
c) Keine Unsicherheit ($G(s) = G_{real}(s)$)



Offene Kreis

$$L(s) = G_{real}(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.1s+1)^2}$$

Nyquist Ortskurve von L für $k = 1$



Für $k \geq 0$ Phasendrehung von $\pi/2$.

Für $k < 0$ Phasendrehung von $-\pi/2$.

⇒ Geschlossener Kreis stabil für $0 \leq k < 5.55$.

Zusammenfassung



Maximale Reglerverstärkung

- ① Additive Unsicherheit: $0 \leq k \leq k_A \approx 5.19$
- ② Multiplikative Unsicherheit: keine robuste Stabilität für $0 \leq k$
- ③ Keine Unsicherheit: $0 \leq k < 5.55$

Additive Unsicherheit in diesem Beispiel wenig konservativ.

Multiplikative Unsicherheit

Für $k \geq 0$ gibt es ein $\Delta(s)$ mit $|\Delta(j\omega)| < |W_M(j\omega)|$, so dass geschlossener Kreis instabil.

Aber:

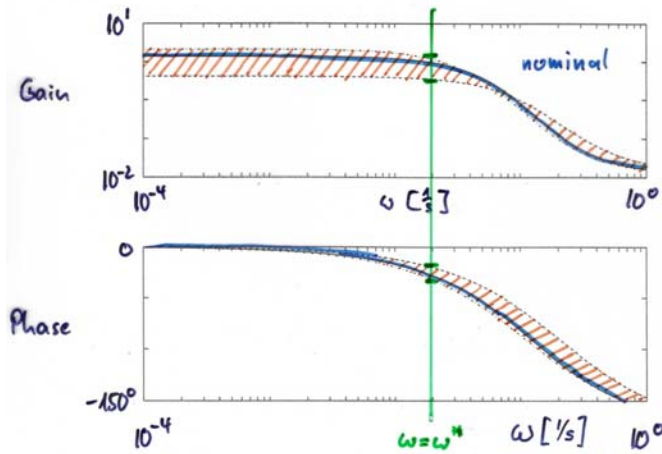
Geschlossener Kreis aus G_{real} und K stabil für $0 < k < 5.55$.

Multiplikative Unsicherheit hier konservativ für konstantes Gewicht.

Wahl des Unsicherheitstyps wichtig für Robustheitsuntersuchungen.

Bestimmung der Größe einer Unsicherheit –beispielhaft–

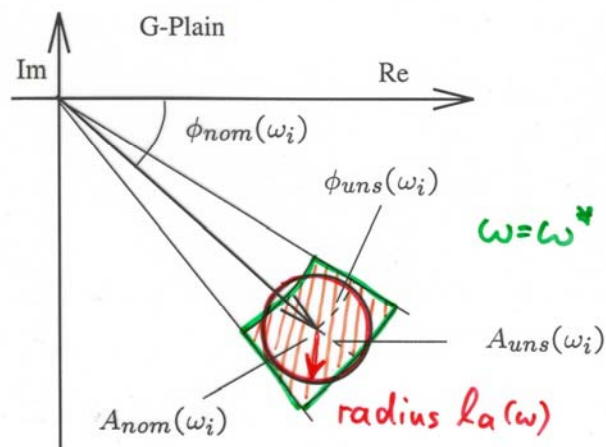
Mit unterschiedlichen Eingangssignalen identifizierte Frequenzgänge führen zu Band im Bodediagramm



ist

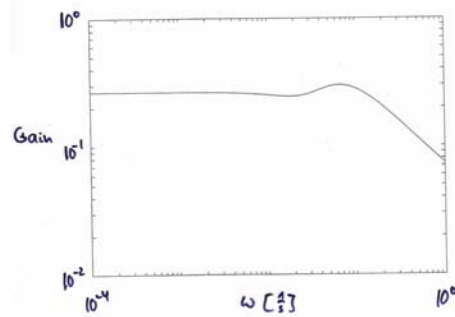
Bestimmung der Größe einer Unsicherheit

Darstellung mit Ortskurve:



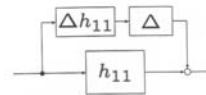
ist

Bestimmung der Größe einer Unsicherheit



conversion of l_a into dynamical weight $\Delta h_{11}(s)$:

$$\Delta h_{11}(s) = \frac{0.0161s^2 + 0.0014s + 0.0002}{1.0000s^2 + 0.0189s + 0.0011}$$



Charakterisierung der H_∞ -Norm eines lin. Systems

$$U_g: \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bd \\ z &= Cx \end{aligned}$$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) U_g ist asy. stabil

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt \quad \forall d \in L_2 \quad x(0) = 0$$

(iii) Es existiert $P = P^T > 0$ so, dass

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Bounded Real Lemma

ist

Beweis des Bounded Real Lemmas

Hinreichender Teil, d.h. (iii) $\Rightarrow$ (i):

$$\begin{bmatrix} x^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} < 0$$

mit: $V(x) = x^T P x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (x^T A^T + d^T B^T) P x + x^T P (A x + B d) \\ &= \begin{bmatrix} x^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\leadsto \dot{V}(x) + \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} < 0$$

ist

Bounded Real Lemma (proof. continued)

$$\leadsto \dot{V}(x) + \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} < 0$$

Integration von $t=0$ nach $t=\infty$:

$$\underbrace{V(x(\infty))}_{=0 \text{ wg. Stab.}} - \underbrace{V(x(0))}_{=0} + \int_0^\infty \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} dt < 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(\frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - \gamma d^T(t) d(t) \right) dt < 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt.$$

w.z.bw.

ist

Alternative Darstellung d. Bounded Real Lemma

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\text{"A"}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} C^T \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{"B"}} \cdot \underbrace{(-I)}_{\text{"C"}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} C & 0 \end{bmatrix}}_{\text{"D"}} < 0$$

aus Schur komplement Formel:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & \frac{1}{\gamma} C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ \frac{1}{\gamma} C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

ist

Bounded Real Lemma – Alternative Darstellung

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & \frac{1}{\gamma} C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ \frac{1}{\gamma} C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

mit $T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix}$ folgt $T^T [Y.] T < 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{hat Lösung } P > 0$$

$$\Leftrightarrow \|u_g\|_{\infty} < \gamma \quad \& \quad u_g \text{ asy. stabil}$$

Standardform des
Bounded Real Lemmas

ist

Bounded Real Lemma

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$u_g: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bd \\ z = Cx \end{cases}$$

(i) u_g ist asy. stabil

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} \|d(t)\|^2 dt \quad \forall d \in L_2 \quad x(0) = 0$$

(ic) $A^T X + X A + C^T C + \frac{1}{\gamma^2} X B B^T X = 0$
hat eine eindeutige Lösung mit $X = X^T \geq 0$
 $(A + \frac{1}{\gamma^2} B B^T X)$ ist asy. stabil

(iic) Es existiert $P = P^T > 0$ so, dass

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Bounded Real Lemma

ist

Bounded Real Lemma



=> 2 Ansätze:

- via algebraischen Riccati Gleichungen
- via Linear Matrix Inequalities (LMIs)

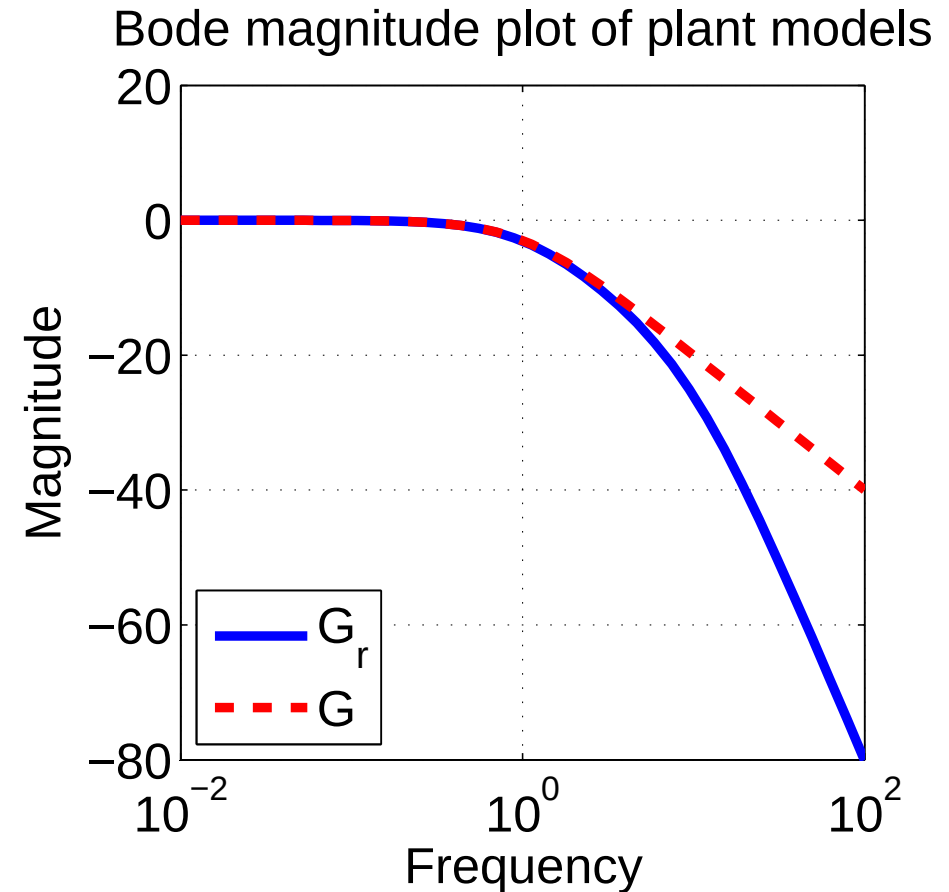
Motivating Example

Real system:

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{(0.1s+1)^2}$$

Approximation:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



Idea: Bode plots are similar, differences only for large freqs.

Place poles far from stability border in left half-plane to be on safe side

Motivating Example

Controller:

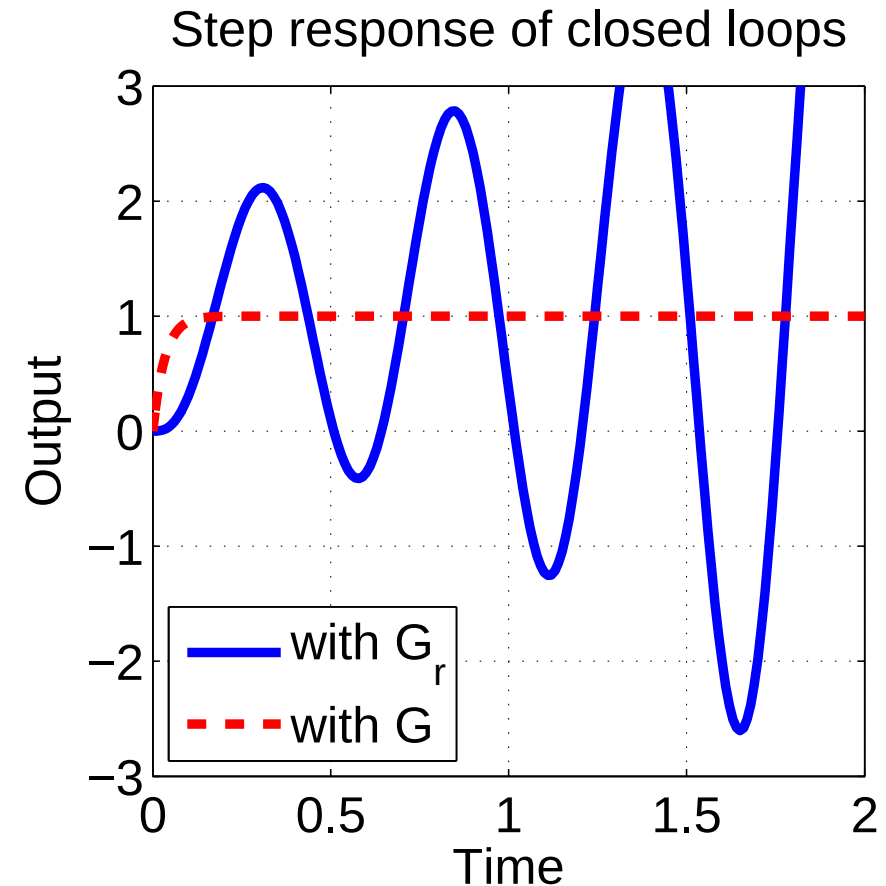
$$K(s) = \frac{30(s+1)}{s}$$

achieves

$$G_{cl}(s) = \frac{GK}{1+GK} = \frac{30}{s+30}$$

i.e. pole at $s = -30$

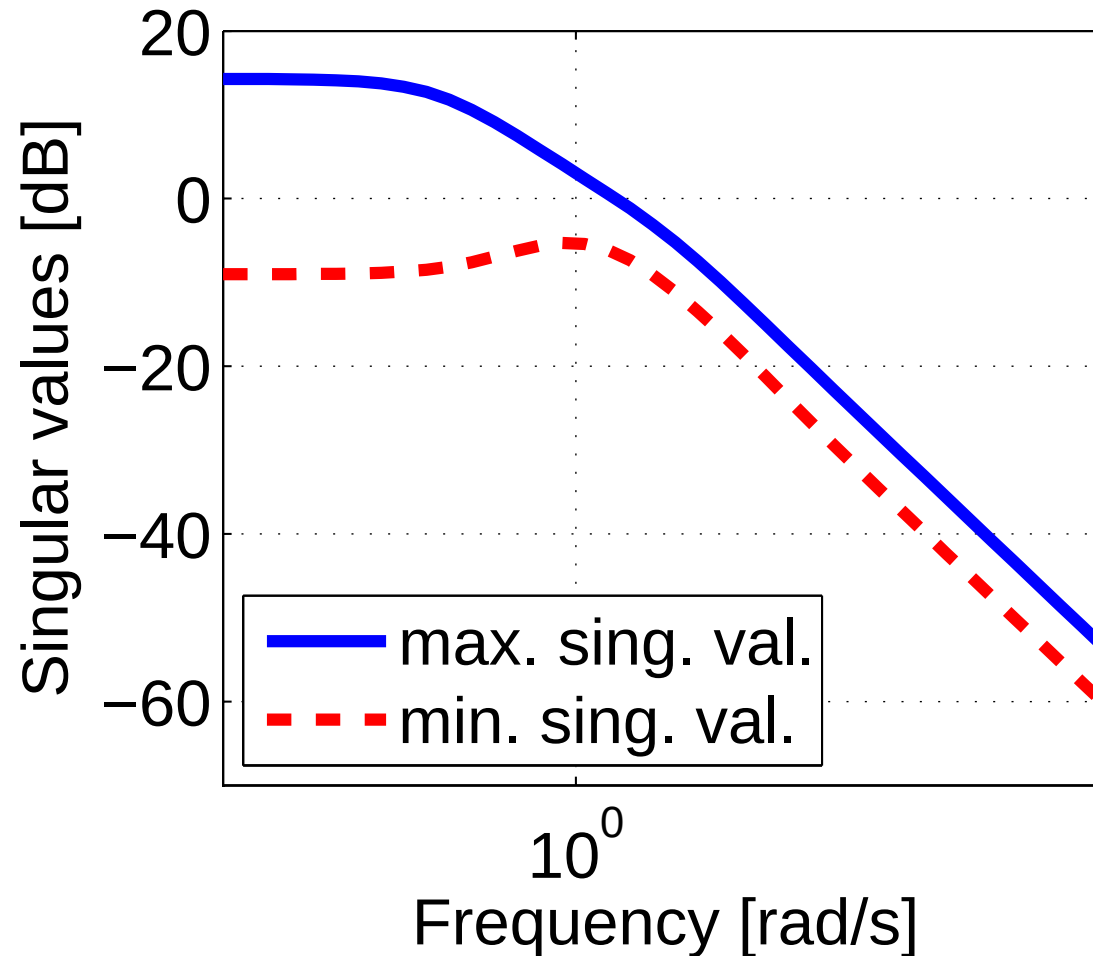
but simulation of real closed loop
shows instability!



Singular Value Diagrams

Example: $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{s+3} \\ \frac{10}{s^2+10s+2} & \frac{-2}{s+2} \end{bmatrix}$

Singular value plot



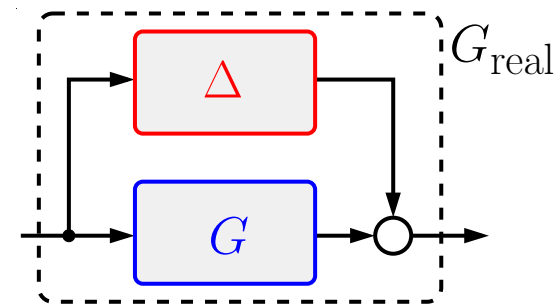
Typical Unstructured Uncertainties

- **Additive uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = G(s) + \Delta(s)$$

Useful for:

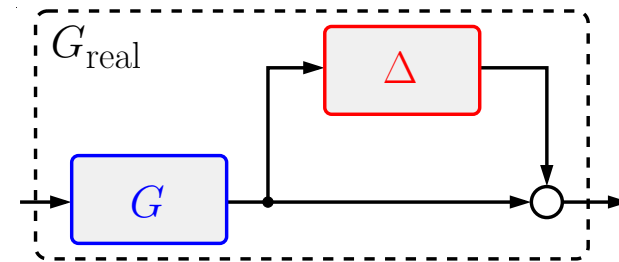
high-freq. (HF) plant dynamics, uncertain zeros



- **Multiplicative output uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = (I + \Delta(s))G(s)$$

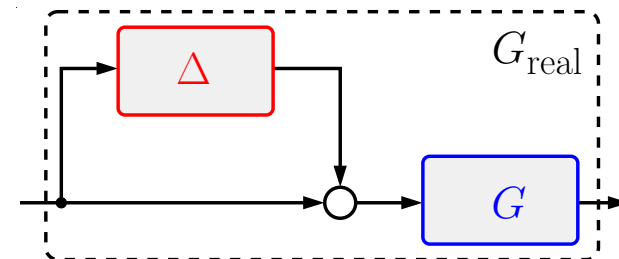
Useful for: HF plant dynamics, sensor errors, uncertain zeros



- **Multiplicative input uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = G(s)(I + \Delta(s))$$

Useful for: HF plant dynamics, actuator errors, uncertain zeros



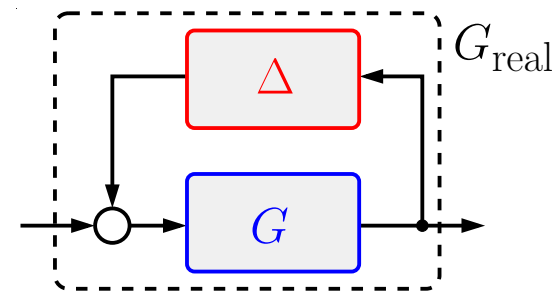
Typical Unstructured Uncertainties

- **Inverse additive uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = G(s)(I - \Delta(s)G(s))^{-1}$$

Useful for:

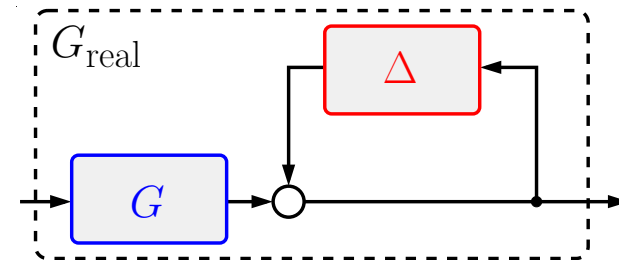
low-freq. (LF) parameter errors, uncertain poles



- **Inverse mult. output uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = (I - \Delta(s))^{-1}G(s)$$

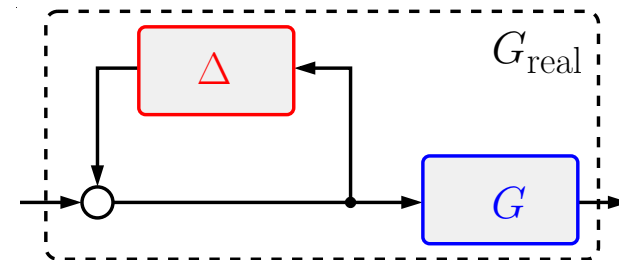
Useful for: dito



- **Inverse mult. input uncertainty:**

$$G_{\text{real}}(s) = G(s)(I - \Delta(s))^{-1}$$

Useful for: dito



Normalization of Δ

What do we do if we have $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < l(\omega) \forall \omega$ for some frequency-dependent function $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ instead of $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1 \forall \omega$?

Normalize the uncertainty Δ :

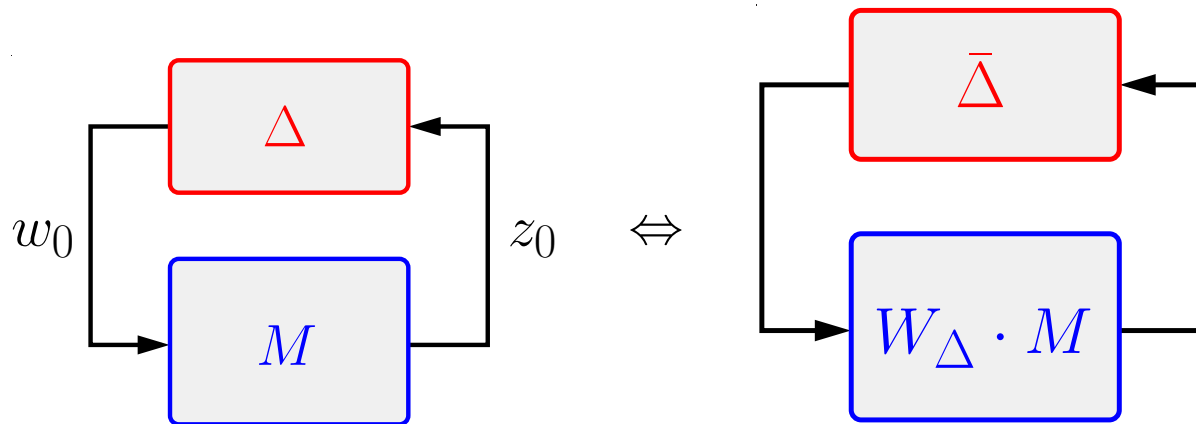
1. Suppose $\dim(\Delta) = q_0 \times p_0$
2. Find a stable, proper, minimum-phase SISO system $w_\Delta(s)$
with $\bar{\sigma}(w_\Delta(j\omega)) = |w_\Delta(j\omega)| = l(\omega)$
(or $\bar{\sigma}(w_\Delta(j\omega)) = |w_\Delta(j\omega)| \geq l(\omega)$)
3. Set $W_\Delta(s) = w_\Delta(s) \cdot I$, where size of I is $p_0 \times p_0$
4. Suppose we have another uncertainty $\bar{\Delta}$ with $\bar{\sigma}(\bar{\Delta}(j\omega)) < 1 \forall \omega$

Normalization of Δ

5. Substitute $\Delta(s) := \bar{\Delta}(s)W_{\Delta}(s)$

Hence it holds that $\underbrace{\bar{\sigma}(\bar{\Delta}(j\omega)W_{\Delta}(j\omega))}_{\Delta(j\omega)} \leq \bar{\sigma}(\bar{\Delta}(j\omega)) \cdot \underbrace{\bar{\sigma}(W_{\Delta}(j\omega))}_{l(\omega)} < l(\omega)$

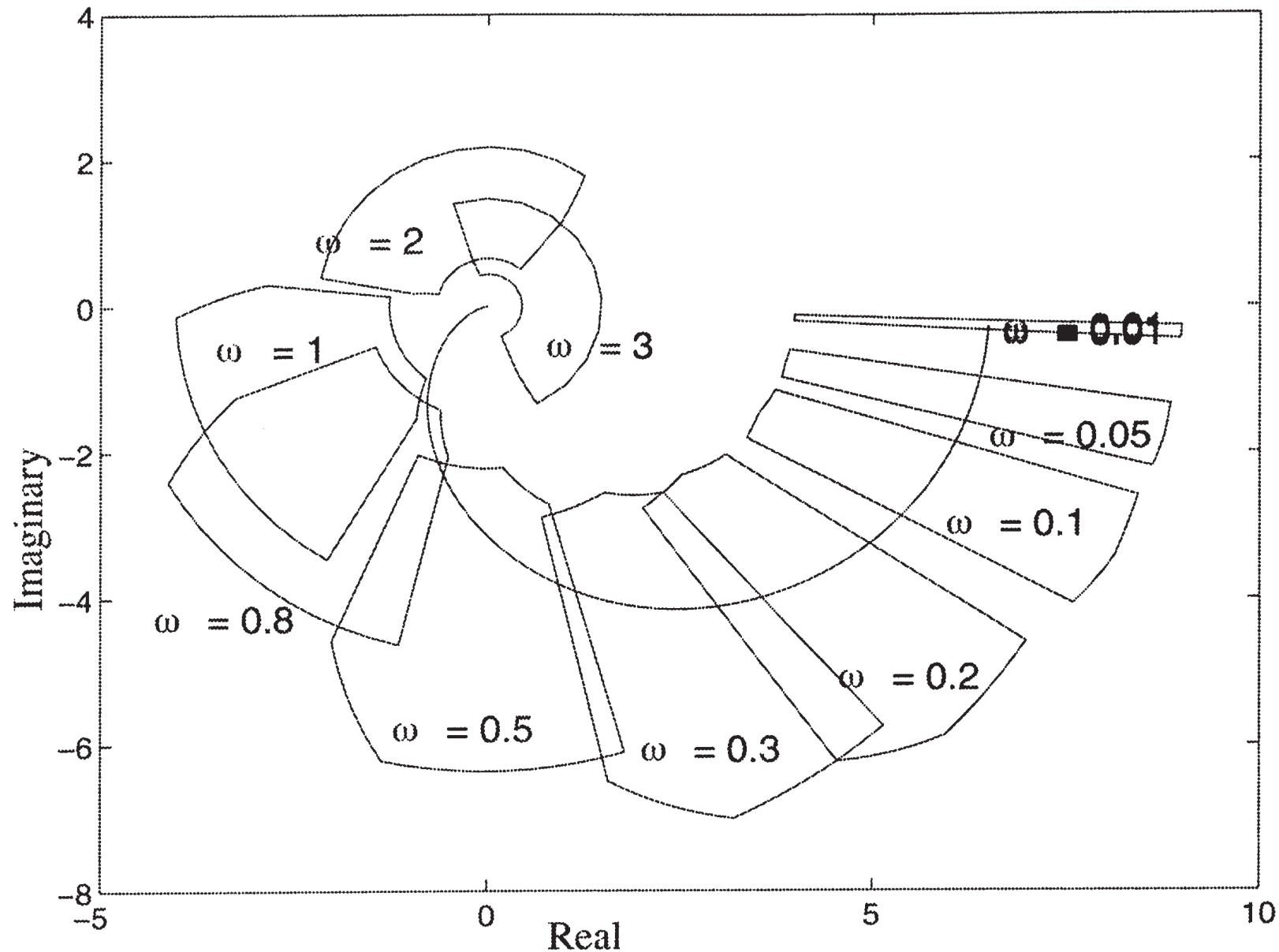
6. Rearrange the M - Δ -structure:



7. Use $(W_{\Delta}M, \bar{\Delta})$ instead of (M, Δ) .

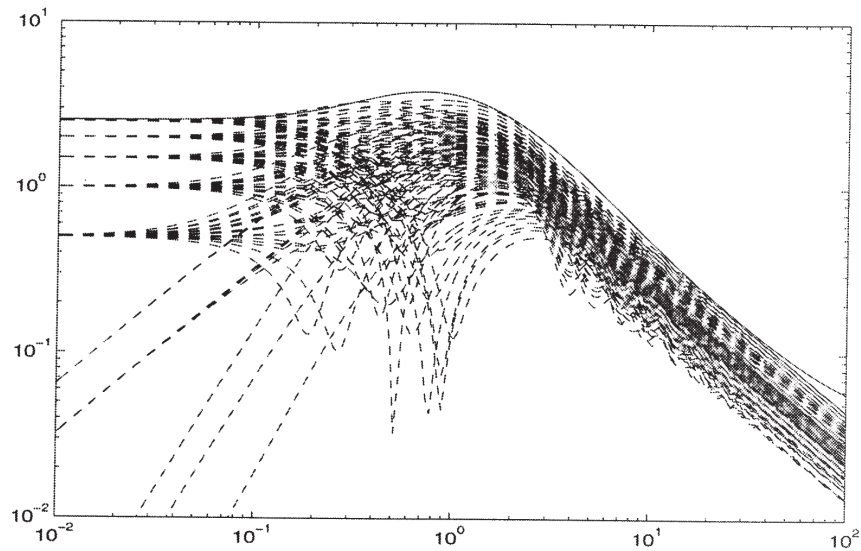
Unsicherheitsbeschreibung: Nyquist-Diag.

Beispiel 8.2 aus K.Zhou, Essentials of robust control.

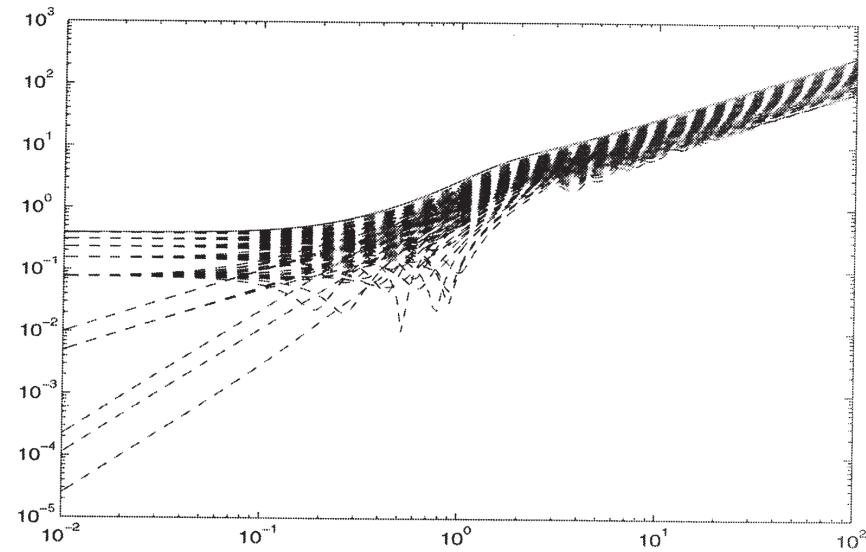


Unsicherheitsbeschreibung

Additive Unsicherheit



Multiplikative Unsicherheit



A Robust Stability Theorem

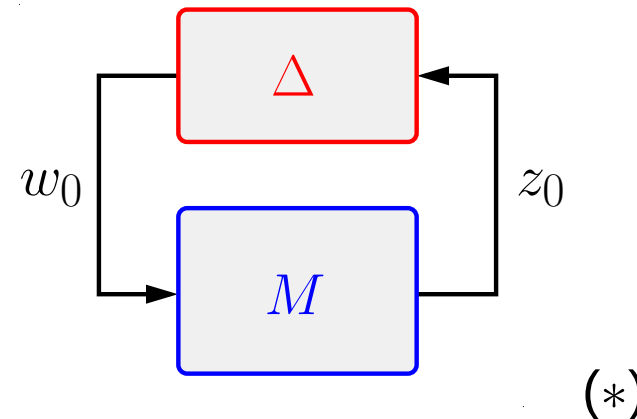
Def.: A property is called *robust* against a class of uncertainties / model errors, if the property holds in face of these uncertainties.

Theorem:

Suppose that M is a stable and proper LTI system, and consider the class of stable and proper uncertainties Δ with $\|\Delta\|_\infty < 1$.

Then the following statements are equivalent:

- (i) The closed-loop interconnection (*) is robustly stable.
- (ii) The closed-loop interconnection (*) is internally stable for all considered uncertainties Δ .
- (iii) $\bar{\sigma}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega$
- (iv) $\|M\|_\infty \leq 1$

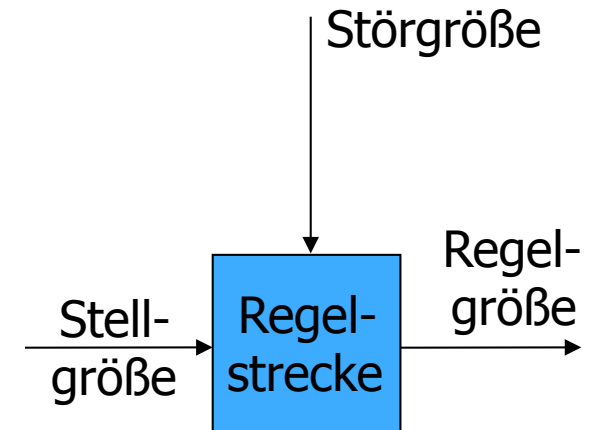


A Robust Stability Theorem

Remarks:

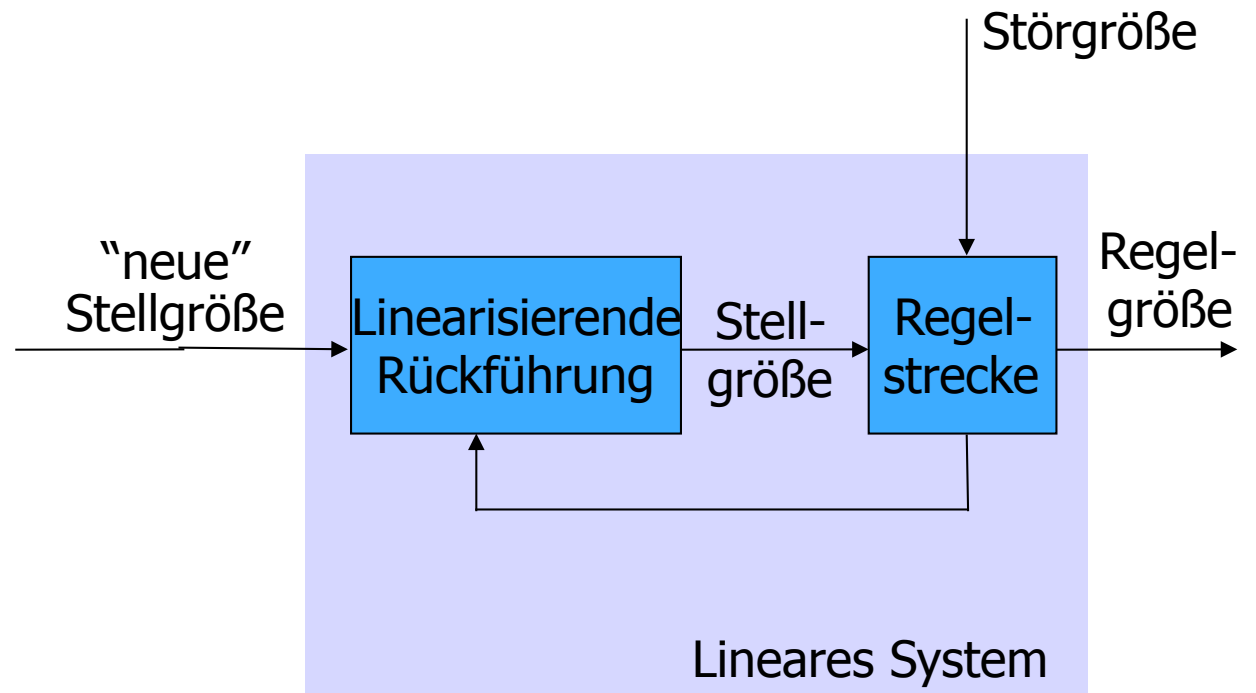
- Δ is any dynamical system satisfying the assumed norm bound.
Actually, Δ can be a linear system with an arbitrary number of states, it can be just a complex matrix $\in \mathbb{C}^{q_0 \times p_0}$, or it can be a time-varying or nonlinear system (with corresponding stability notions).
Hence, usually a much larger class of uncertainties than intended is taken into account.
- The theorem is necessary and sufficient.
Sufficiency means: $\|M\|_\infty \leq 1 \Rightarrow$ robust stability.
Necessity means: $\|M\|_\infty > 1 \Rightarrow$ there exists at least one uncertainty in the considered class that results in instability. It does not imply that the closed loop with G_{real} is necessarily unstable.

Idee: 2-Schritt Reglerentwurf



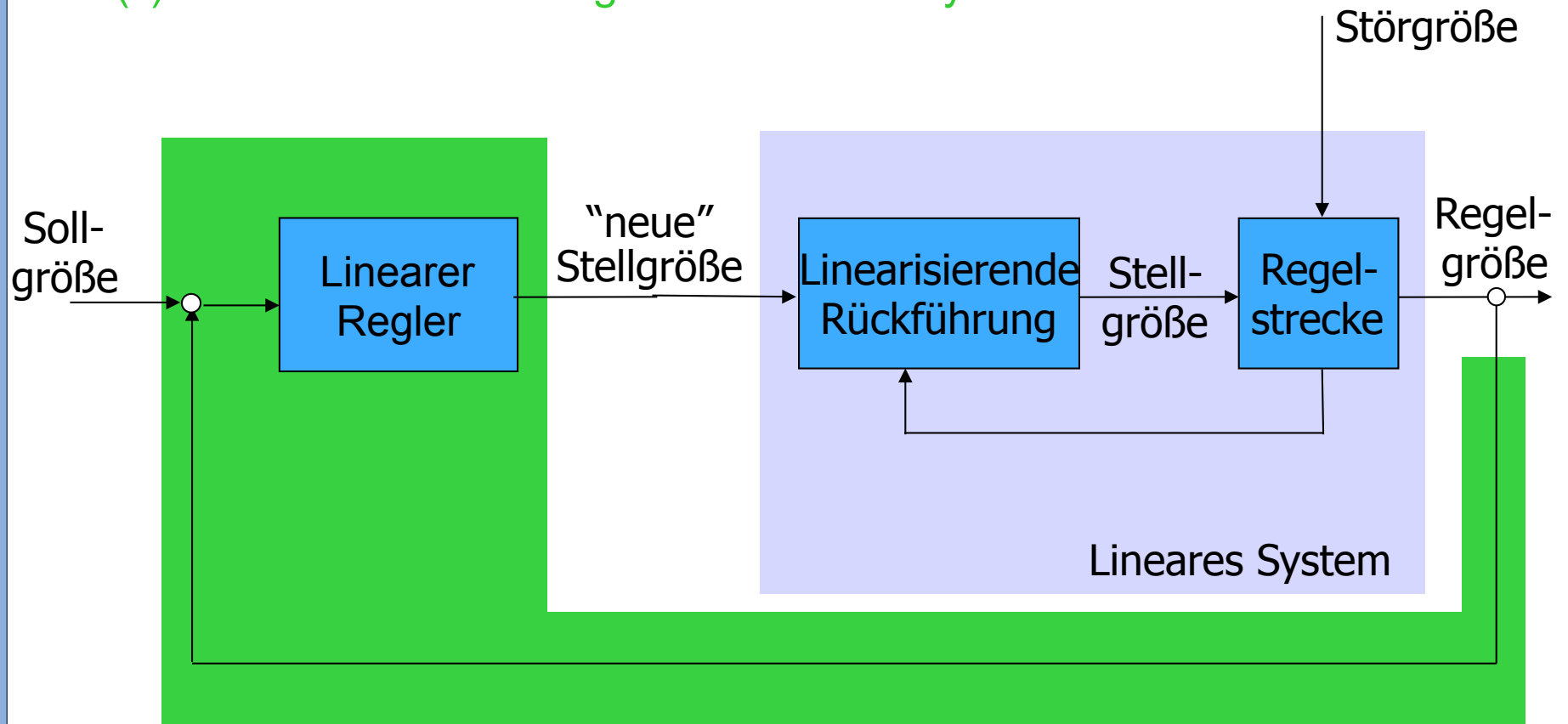
Idee: 2-Schritt Reglerentwurf

- (i) Berechne Rückführung, so dass E/A-Verhalten linear



Idee: 2-Schritt Reglerentwurf

- (i) Berechne Rückführung, so dass E/A-Verhalten linear
- (ii) Entwerfe linearen Regler für lineares System

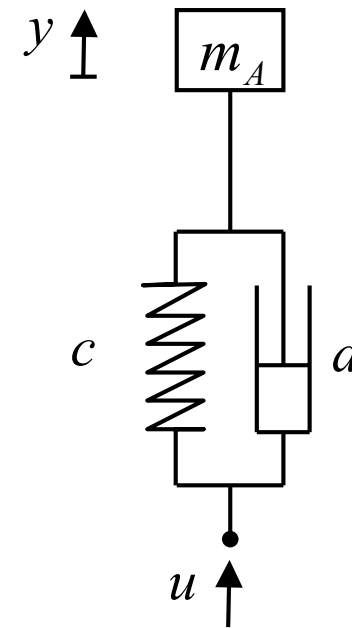
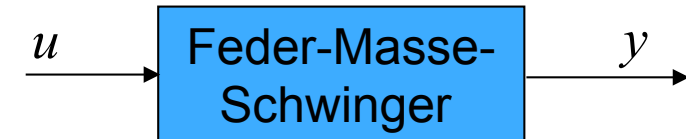


Beispiel: nichtlin. Feder-Masse-Schwinger

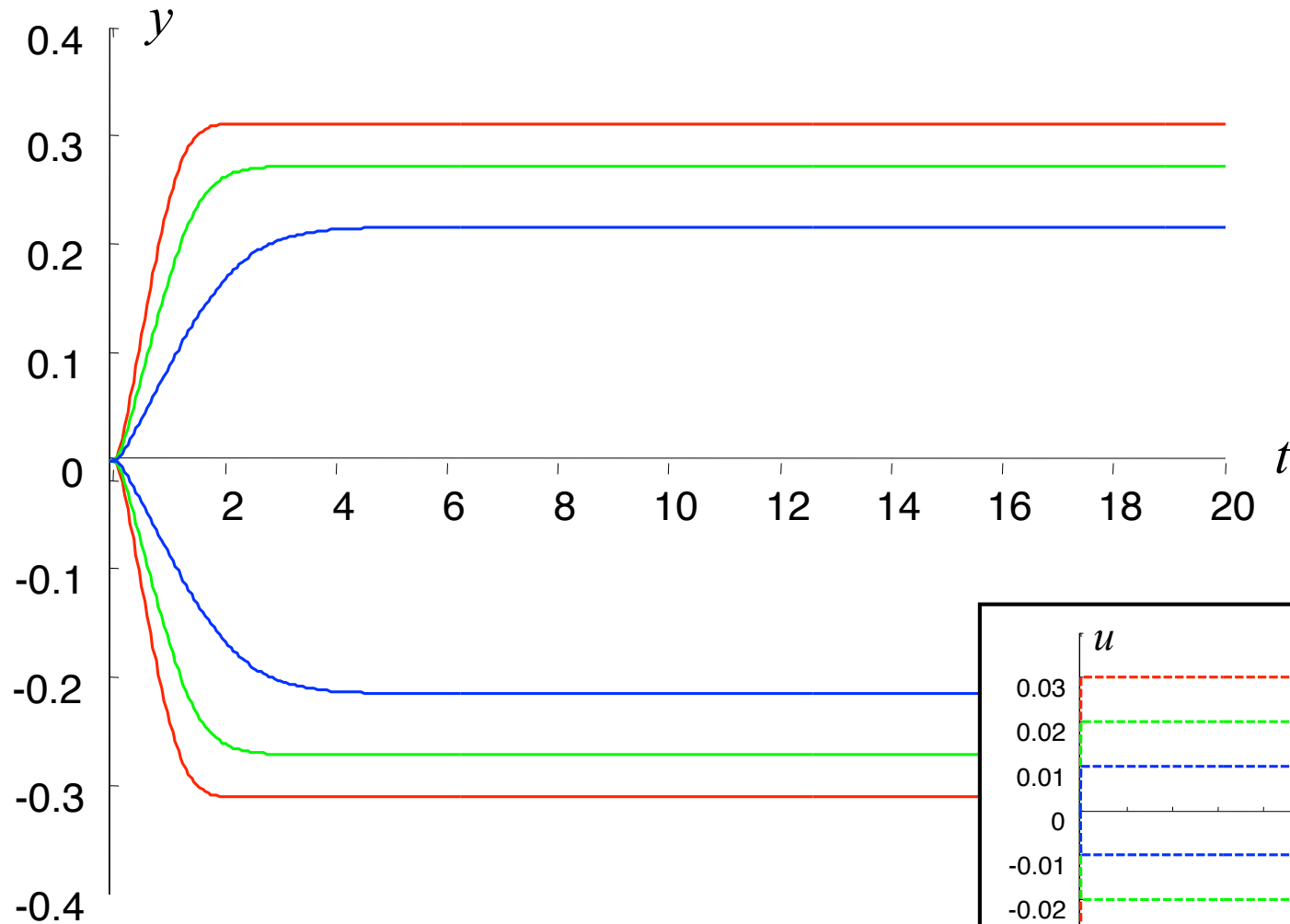
Systemgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m} x_1^3 - \frac{d}{m} x_2 + u \end{bmatrix}$$

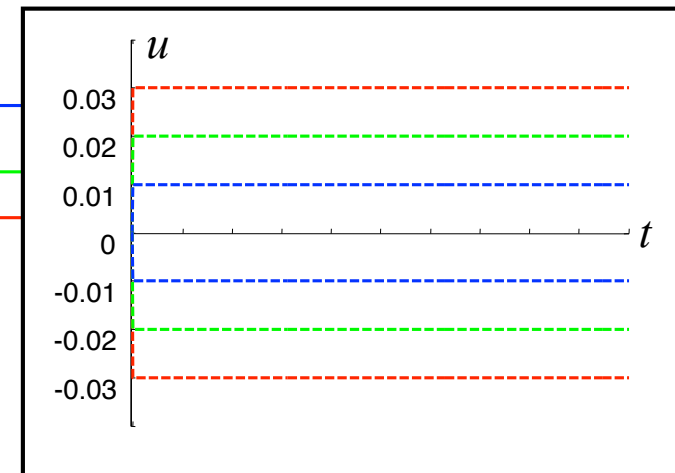
$$y = x_1$$



Sprungantworten des nichtlinearen Systems



Homogenitätsprinzip verletzt!



Beispiel: nichtlin. Feder-Masse-Schwinger

Systemgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m} x_1^3 - \frac{d}{m} x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

Linearisierende Rückführung

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m} x_1^3 - \frac{d}{m} x_2 + u = v!$$

$$\Rightarrow u = v + \frac{c}{m} x_1^3 + \frac{d}{m} x_2$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = v$$

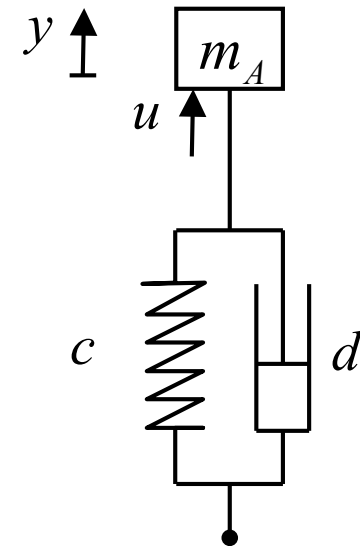
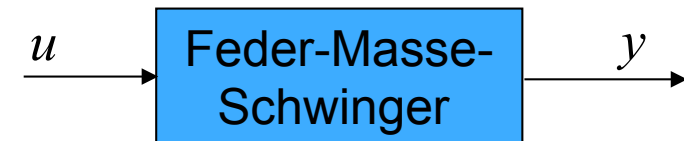
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ v \end{bmatrix}$$

Lineares Übertragungsverhalten

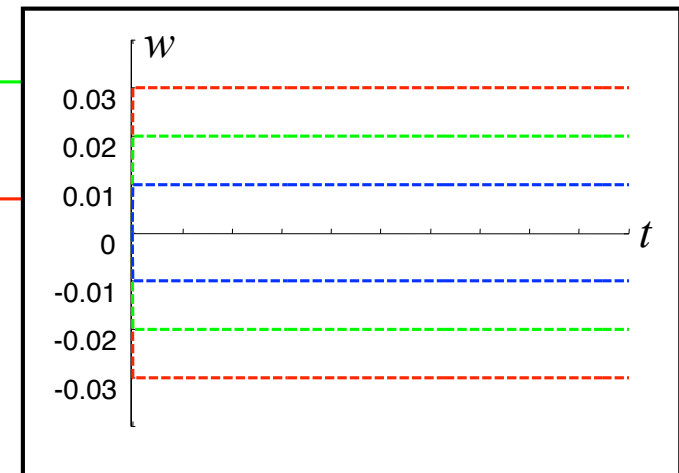
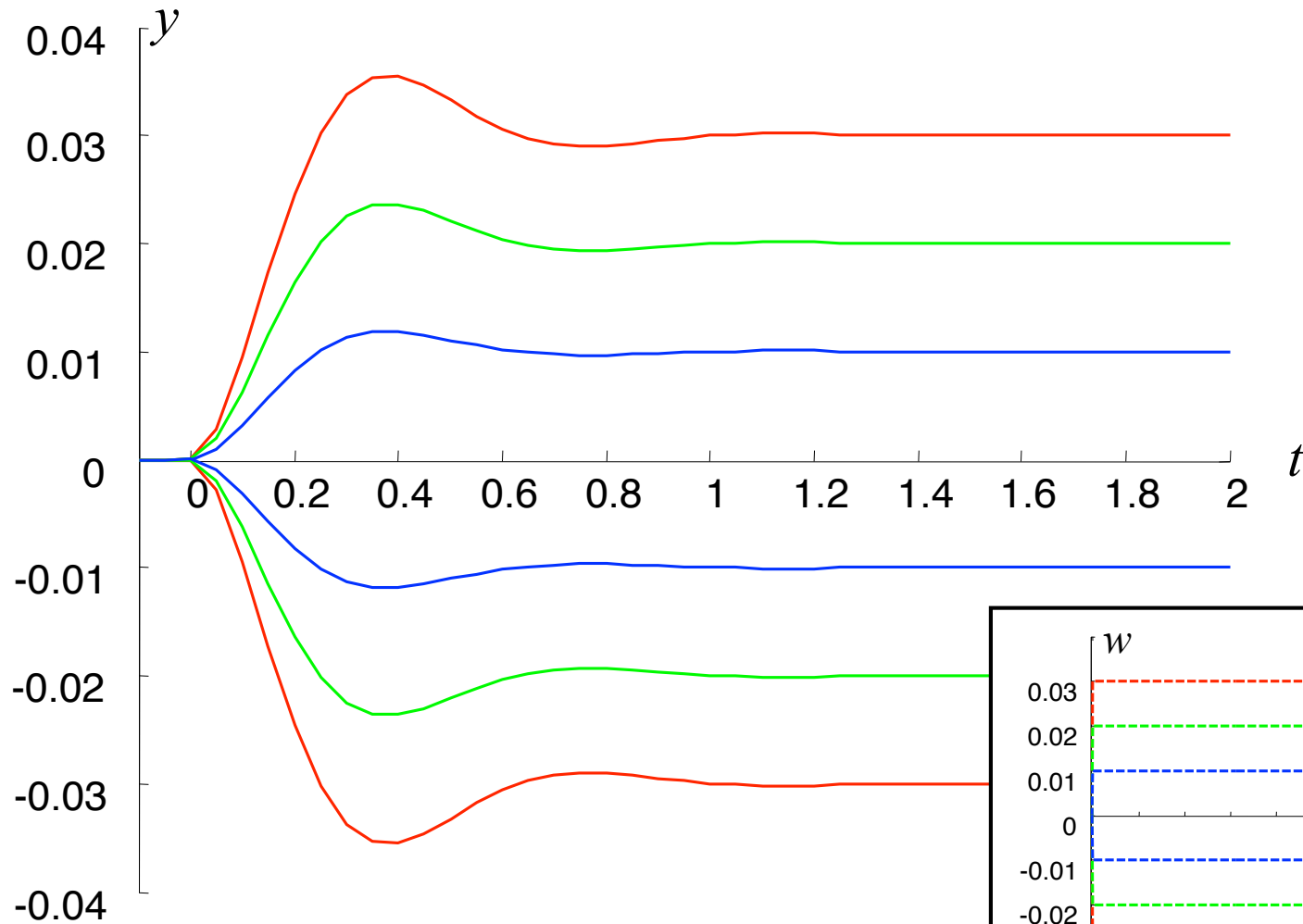
Lineare Zustandsgleichungen

Linearer Regler, z.B. Zustandsrückführung

$$v = -\frac{c}{m} x_1 - \frac{d}{m} x_2 + w$$

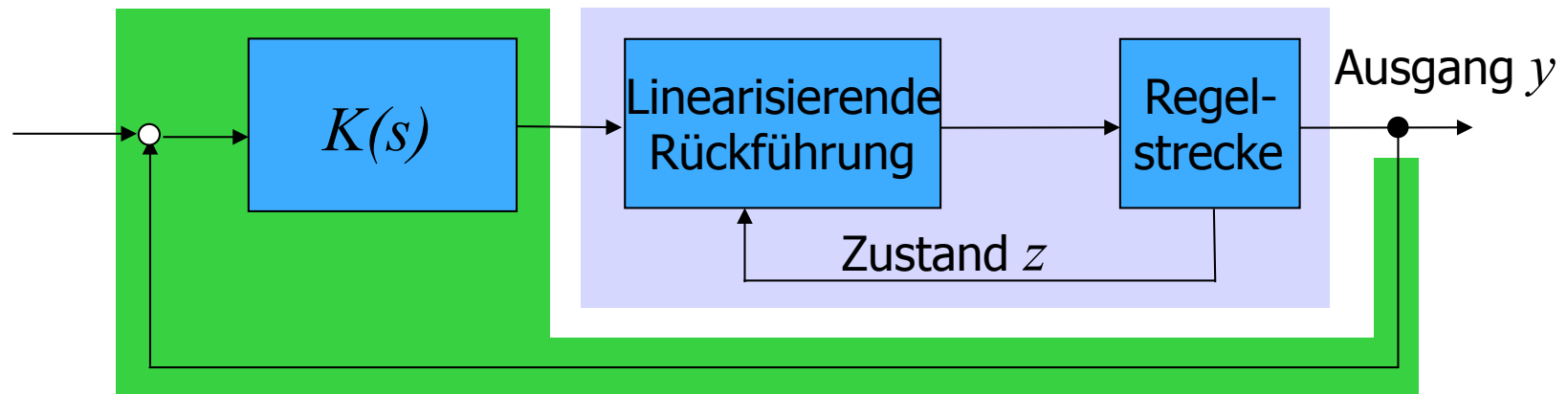


Sprungantworten des linearisierten Systems

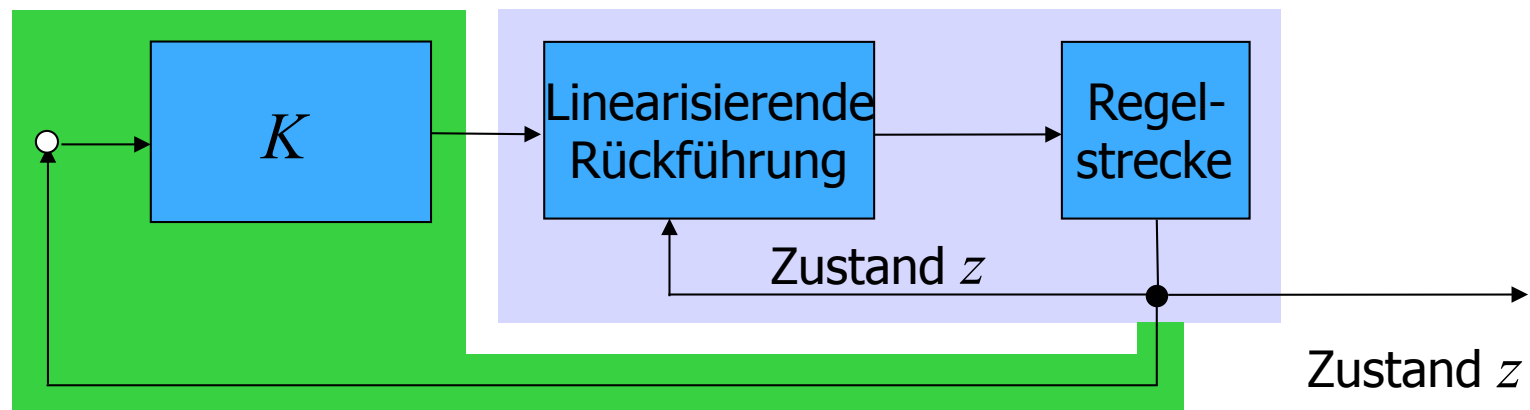


Exakte Linearisierung: Zwei Aufgabenstellungen

1. Exakte Ein-/Ausgangslinearisierung



2. Exakte Zustandslinearisierung:



Exakte Ein-/Ausganglinearisierung

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x) \end{cases}$$

Zustandsrückführung $u = \alpha(x) + \beta(x)v$

$y = G(s)v$

Ziel: Entwerfe Regler

$$v(s) = -K(s)y(s)$$

so dass geschlossener Kreis

1. asymptotisch stabil ist
2. gewünschte Regelgüte besitzt

Exakte Zustandslinearisierung:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

Zustandsrückführung $u = \alpha(x) + \beta(x)v$

und Zustandstransformation $z = T(x)$

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^m$$

Hauptziel: Stabilisierung mit $v = -Kz$

Beispiel: Exakte Zustandslinearisierung eines Rührkesselreaktors

Reaktionsschema



Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x}_A = \frac{q}{V} (c_{A_0} - c_A) - k_1(T) c_A^2$$

$$\dot{x}_B = -\frac{q}{V} c_B + k_1(T) c_A^2 - k_2(T) c_B$$

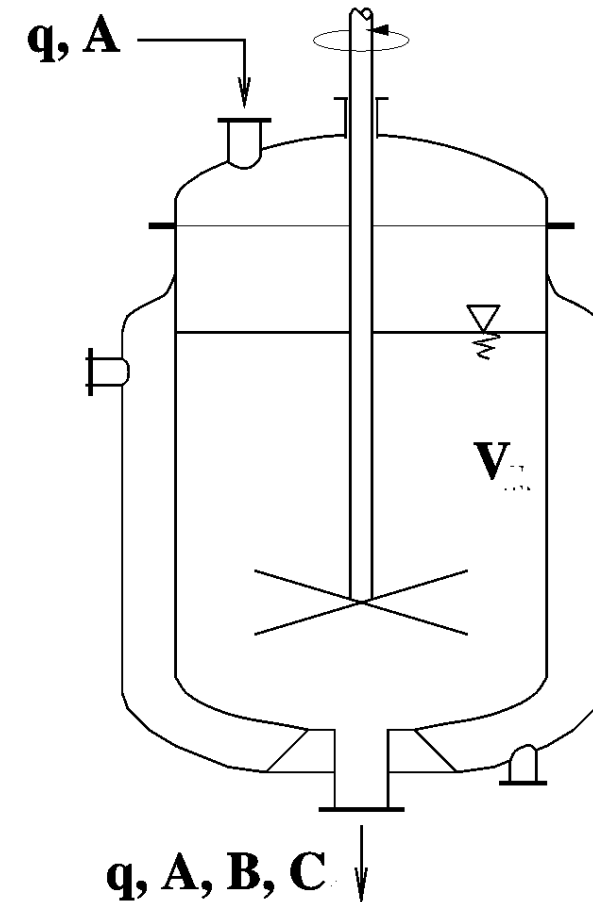
$$\dot{T} = \frac{q}{V} (T_0 - T) - \frac{1}{\rho C_P} \left(k_1(T) c_A \Delta H_{R_{AB}} + k_2(T) c_B \Delta H_{R_{BC}} \right) + \frac{k_w A_R}{\rho C_P V_R} (T_C - T)$$

mit

$$k_1(T) = k_{10} e^{-\frac{E_1}{RT}}$$

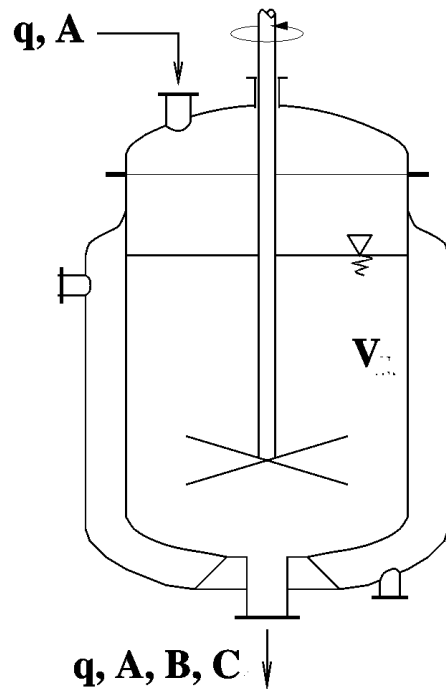
$$k_2(T) = k_{20} e^{-\frac{E_2}{RT}}$$

nur zustandslinearisierbar für $E_1 = E_2$!



Beispiel: Exakte Zustandslinearisierung eines Rührkesselreaktors

ist



$$u = \alpha(x) + \beta(x) \cdot v$$

mit $k_0 = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$

```

OCONST*{-(H2*K20*X2*EXP(-E/(R*X3))+H1*K10*X1**2*EXP(-E/
1  (R*X3))+K0*(T1-X3))*{(K0*K20*EXP(K20/(K10*X1)))/(K10*X1)-CAI*K0*
2  K20*EXP(K20/(K10*X1)))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1)))*{E*K10*
3  X1**2*EXP(-E/(R*X3))/(R*X3**2)-E*K20*X2*EXP(-E/(R*X3))/(R*X3**2
4  )-E*K10*X1**2*(-K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**3)+
5  2*CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP
6  (K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**4)+K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*
7  X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1
8  ))*EXP(-E/(R*X3))/(R*X3**2))-A2*((K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K1
9  0*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*
10 X1))*{-K20*X2*EXP(-E/(R*X3))+K10*X1**2*EXP(-E/(R*X3))-K0*X2)+(-
11 -K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*EXP
12 (K20/(K10*X1))*X2/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X
13 2/(K10**2*X1**4)+K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*E
14 XP(K20/(K10*X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1))*{(K0*(CAI-X1)
15 -K10*X1**2*EXP(-B/(R*X3)))-{(K0*(CAI-X1)-K10*X1**2*EXP(-E/(R*X3
16 )))*{-K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*
17 EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))/(
18 K10**2*X1**4))*{-K20*X2*EXP(-E/(R*X3))+K10*X1**2*EXP(-E/(R*X3))
19 -K0*X2)+(3*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**4)-6*CAI*
20 K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10*X1**4)+K0*K20**3*EXP(K20/(K10*
21 X1))*X2/(K10**3*X1**5)-6*CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K1
22 0**2*X1**5)-CAI*K0*K20**3*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**3*X1**6)-K
23 0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*EXP(K20/
24 (K10*X1))/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))/(K10**2*X
25 1**4))*{(K0*(CAI-X1)-K10*X1**2*EXP(-B/(R*X3)))+{-K0*K20**2*EXP(K
26 20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))*X
27 2/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**4)
28 +K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))
29 /(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1))*{-2*K10*X1*EXP(-E/(R*X3))-K0
30 )+2*K10*X1*(K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K2
31 0/(K10*X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1))*EXP(-E/(R*X3)))-(-
32 K20*X2*EXP(-E/(R*X3))+K10*X1**2*EXP(-E/(R*X3))-K0*X2)*{(K0*K2
33 0**2*EXP(K20/(K10*X1))/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10
34 *X1))/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))/(K10**2*X1**4
35 )*(K0*(CAI-X1)-K10*X1**2*EXP(-E/(R*X3)))+(K0*K20*EXP(K20/(K10*
36 X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K
37 20/(K10*X1))*{-K20*EXP(-E/(R*X3))-K0)-A1*(K0*K20*EXP(K20/(K10
38 *X1))*X2/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10*X1**2)-K
39 0*EXP(K20/(K10*X1))*X2-K0*X1*EXP(K20/(K10*X1))+CAI*K0*EXP(K20/(
40 K10*X1))-A0*EXP(K20/(K10*X1))*X2+X1*v-B11*K20/K10)/(K0*K20
41 *EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X
42 1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1))*{(E*K10*X1**2*EXP(-B/(R*X3))/(R*X3**
43 2)-E*K20*X2*EXP(-E/(R*X3))/(R*X3**2))-E*K10*X1**2*(-K0*K20**2*E
44 XP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1**3)+2*CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*X1
45 ))*X2/(K10*X1**3)+CAI*K0*K20**2*EXP(K20/(K10*X1))*X2/(K10**2*X1
46 **4)+K0*K20*EXP(K20/(K10*X1))/(K10*X1)-CAI*K0*K20*EXP(K20/(K10*
47 X1))/(K10*X1**2)-K0*EXP(K20/(K10*X1))*EXP(-E/(R*X3))/(R*X3**2)
    
```

Robuste Regelung

Bevor wir uns der Reglersynthese zuwenden, müssen wir klären, welche Eigenschaften vom geschlossenen Kreis erwartet werden. In diesem Kapitel werden wir diese gewünschten Eigenschaften an den Kreis definieren und in mathematischer Form quantitativ formulieren, wobei Kapitel und bis eine Wiederholung des Stoffes aus der Vorlesung *Einführung in die Regelungstechnik* darstellt. Dazu betrachten wir in Abb. 1 den *Standardregelkreis* mit der Strecke $G(s)$ und dem Regler $K(s)$.

Dabei sind:

y ... Regelgröße	y' ... Streckenausgang
u ... Stellgröße	u' ... Reglerausgang
r ... Führungsgröße	z_1 ... Ausgangsstörung
η ... Messrauschen	z_2 ... Eingangsstörung.

Alle Signale sollen skalare Größen sein. Die Größe

$$e = r - y \quad (1)$$

wird als *Regelfehler* bezeichnet. Dieser Standardregelkreis kann durch unterschiedliche Erweiterungen ergänzt werden, z.B.

- Führungsgröße vorfiltern („Two-degree-of-freedom design“)
- Störgrößen beeinflussen die Regel- bzw. Stellgröße nicht additiv, sondern werden durch sogenannte Störübertragungsfunktionen auf die Regelgröße geschaltet.
- Störungen können unter Umständen gemessen werden. Durch geeignetes Aufschalten auf die Stellgröße (Störgrößenaufschaltung) lassen sich so verbesserte Eigenschaften erreichen (feed-forward).

Wir stellen drei Hauptforderungen an den geschlossenen Kreis, die in den folgenden Kapiteln näher erläutert werden:

1. Stabilität
2. gutes Regelverhalten
3. Robustheit der Stabilität

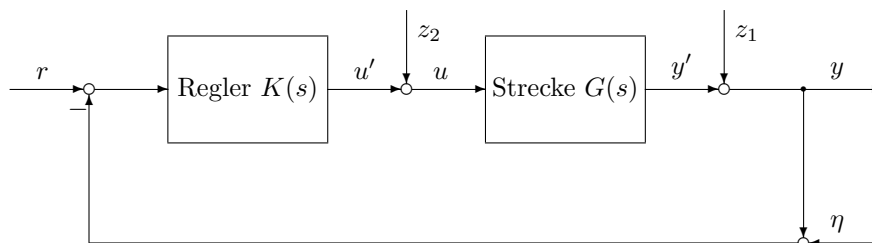


Abbildung 1: Standardregelkreis.

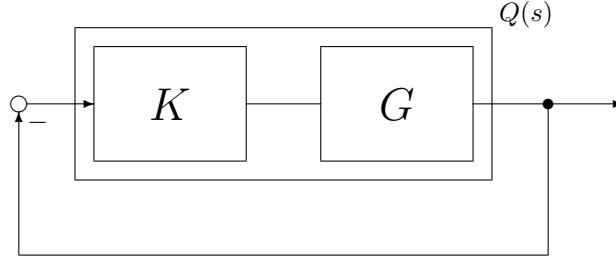


Abbildung 2: Regelkreis für Small-Gain-Theorem.

Nominelle Stabilität

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass das Modell der Regelstrecke $G(s)$ mit der wirklichen Regelstrecke übereinstimmt und wir untersuchen die Stabilität des geschlossenen Kreises. Dieser Fall wird als *nominelle Stabilität* bezeichnet, im Unterschied zur *robusten Stabilität*, die in Kapitel IV.3 behandelt wird.

An mehreren Stellen wird vorausgesetzt, dass $G(s)$ streng proper und $K(s)$ proper sind. Diese Annahmen stellen in der Praxis keine große Einschränkung dar.

Zusätzlich zum bereits bekannten Nyquistkriterium wollen wir hier ein weiteres wichtiges Stabilitätskriterium behandeln, nämlich das sogenannte *Small-Gain-Theorem*. Der große Vorteil dieses Stabilitätstests ist seine sehr allgemeine Formulierung, die sogar auf nichtlineare Systeme übertragen werden kann.

Wir betrachten den Regelkreis in Abbildung 2 und setzen voraus, dass der offene Kreis $Q = GK$ stabil ist.

Satz 1 ((Small-Gain-Theorem)). *Der geschlossene Kreis ist dann asymptotisch stabil, wenn*

$$\|Q(j\omega)\|_{ind} < 1 \quad \forall \omega. \quad (2)$$

Man beachte, dass das Small-Gain-Theorem lediglich ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium darstellt.

$\|\cdot\|_{ind}$ kann jede induzierte Norm sein. Wenn speziell die $\mathcal{L}_2$ -induzierte Norm gewählt wird, entspricht Gl. (2) der Forderung, dass die maximale Energie-Verstärkung des offenen Kreises kleiner als eins sein muss, also alle Signale abklingen müssen.

Die zweite wichtige Anforderung an den Regelkreis betrifft die Regelgüte. Wir betrachten wieder den Standardregelkreis in Abbildung 1 und bestimmen den Einfluss von Störungen z_1 bzw. z_2 , Messrauschen η und der Führungsgröße r auf den Regelfehler

$$e = r - y.$$

Aus dem Blockdiagramm lesen wir direkt ab

$$y = z_1 + G(z_2 + K(r - \eta - y))$$

woraus

$$y = (1 + GK)^{-1} \{z_1 + Gz_2 + GK r - GK \eta\}$$

folgt. Damit ergibt sich als Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises:

$$\begin{aligned} e &= r - y \\ &= r - (1 + GK)^{-1} GK r - (1 + GK)^{-1} z_1 - (1 + GK)^{-1} Gz_2 + (1 + GK)^{-1} GK \eta \\ &= \underbrace{-(1 + GK)^{-1} z_1}_{=:S} + (1 + GK)^{-1} r - (1 + GK)^{-1} Gz_2 + \underbrace{(1 + GK)^{-1} GK \eta}_{=:T}. \end{aligned} \quad (3)$$

Definition 1. Die Übertragungsfunktion

$$S = (1 + GK)^{-1}$$

heißt Sensitivität.

Definition 2. Die Übertragungsfunktion

$$T = (1 + GK)^{-1}GK = GK(1 + GK)^{-1} \quad (4)$$

heißt komplementäre Sensitivität.

Die Sensitivität S gibt die „Empfindlichkeit des Regelkreises“ auf Ausgangsstörungen bzw. Sollwertänderungen an. Die komplementäre Sensitivität T beschreibt den Einfluss von Messrauschen auf den Regelfehler.

Wie man bereits aus der obigen Gleichung sieht, ergeben sich für das Führungsverhalten (bzgl. r) und für die Unterdrückung von Messrauschen (bzgl. η) unterschiedliche Anforderungen für die Auslegung des geschlossenen Kreises.

In den folgenden Abschnitten sollen nun nacheinander die verschiedenen Anteile der obigen Gleichung genauer untersucht werden. Wir führen dazu folgende Abkürzungen ein:

$$e = \underbrace{-Sz_1}_{e_{z_1}} + \underbrace{Sr}_{e_r} + \underbrace{-SGz_2}_{e_{z_2}} + \underbrace{T\eta}_{e_\eta}. \quad (5)$$

Führungsverhalten

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_r(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega). \quad (6)$$

Wir wollen, dass der Einfluss von Sollwertänderungen auf den Regelfehler gering ist. Somit soll die Übertragungsfunktion S „klein“ sein.

Im SISO-Fall gilt

$$|e_r(j\omega)| = |S(j\omega)r(j\omega)| = |S(j\omega)||r(j\omega)| \quad (7)$$

D.h. die Amplitudenverstärkung $|S(j\omega)|$ der Sensitivität muss klein sein, um gutes Führungsverhalten zu erzielen.

Somit läßt sich diese Forderung wie folgt quantifizieren: Soll im Frequenzbereich $[0, \omega_r]$ gutes Führungsverhalten erreicht werden, so muss gelten:

$$|S(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad 0 \leq \omega \leq \omega_r. \quad (8)$$

Soll speziell nach einer sprungförmigen Änderung der Führungsgröße die *bleibende Regelabweichung* verschwinden, so folgt aus dem Grenzwertsatz der Laplacetransformation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

was nur erfüllt ist, wenn:

$$|S(0)| = 0 \quad (10)$$

Störverhalten

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_{z_1}(j\omega) = -S(j\omega)z_1(j\omega). \quad (11)$$

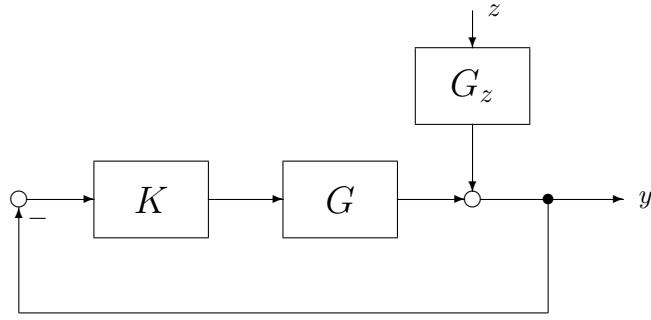


Abbildung 3: Regelkreis mit Störübertragungsfunktion G_z .

Somit enthält die Forderung nach gutem Störverhalten bzgl. Ausgangsstörungen im Frequenzbereich $[0, \omega_z]$:

$$|S(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad 0 \leq \omega \leq \omega_z. \quad (12)$$

Natürlich ist nicht nur das Übertragungsverhalten von Ausgangsstörungen z_1 auf den Regelfehler interessant. Genauso wichtig ist z.B. das Übertragungsverhalten von Eingangsstörungen z_2 auf den Regelfehler

$$e = -SGz_2 \quad (13)$$

oder der Einfluss von Störungen auf die Stellgröße

$$u = -KSz_1 \quad (14)$$

$$\text{bzw.} \quad u = (1 + KG)^{-1}z_2. \quad (15)$$

Daraus ergeben sich analoge Forderungen an die Übertragungsmatrizen des geschlossenen Kreises:

$$|SG| \ll 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_z \quad (16)$$

$$\text{bzw.} \quad |KS| \ll 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_z. \quad (17)$$

Oft wirkt die Störung auch nicht unmittelbar auf die Regelgröße, sondern wird durch eine Störübertragungsmatrix G_z gefiltert (Abbildung 3). Mit

$$e = -SG_z z \quad (18)$$

folgt damit als Forderung an den geschlossenen Kreis

$$|SG_z| \ll 1. \quad (19)$$

Dies ist *nicht* identisch mit der Forderung $|S(j\omega)| \ll 1$ für $\omega \in [0, \omega_z]$, da hier S für diejenigen Frequenzen „groß“ sein darf, für die G_z „klein“ ist. Es ist dadurch meist ein besserer Kompromiss zwischen Anforderungen an S bzw. T möglich.

Unterdrückung von Messrauschen

Nach Gleichung (3) gilt:

$$e_\eta(j\omega) = T(j\omega)\eta(j\omega). \quad (20)$$

Messrauschen im Frequenzbereich $[\omega_\eta, \infty]$ wird unterdrückt, falls gilt:

$$|T(j\omega)| \stackrel{!}{\ll} 1 \quad \text{für } \omega_\eta \leq \omega < \infty. \quad (21)$$

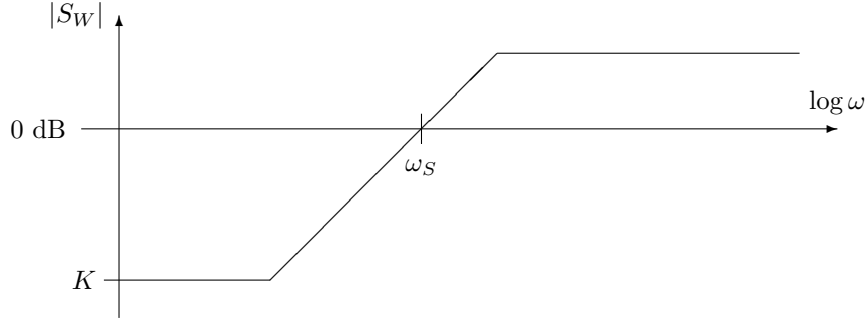


Abbildung 4: Asymptotischer „Wunschverlauf“ für die maximale Amplitude von S .

Widersprüchliche Anforderungen

Normalerweise wollen wir gleichzeitig gutes Störverhalten und gute Rauschunterdrückung. Es sollen also sowohl die Sensitivität S wie auch die komplementäre Sensitivität T klein sein für möglichst große Frequenzbereiche. Beide Anforderungen lassen sich jedoch nicht gleichzeitig realisieren.

Satz 2. Für alle Frequenzen ω gilt:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega. \quad (22)$$

Beweis.

$$S + T = (1 + GK)^{-1} + (1 + GK)^{-1}GK = (1 + GK)^{-1}(1 + GK) = 1.$$

□

Daraus folgt direkt das *Fundamentale Dilemma der Regelungstechnik*:

Für eine feste Frequenz ω weist der Standardregelkreis entweder gutes Führungs- und Störverhalten

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad (23)$$

oder weitgehende Unterdrückung des Messrauschens

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad (24)$$

auf, aber nie beides.

Dieses Dilemma ist in der Praxis oft kein unüberwindbares Hindernis, da Führungs- und Störgrößen in der Regel niederfrequent sind, Messrauschen hingegen hochfrequent ist. D.h. die Anforderungen an S bzw. T gelten für unterschiedliche Frequenzbereiche.

Quantisierung der Anforderungen

Die bisher behandelten Anforderungen wie $|S(j\omega)| \ll 1$ für $\omega < \omega_{rz}$ sind vorwiegend qualitativer Natur. Oft können wir genauer angeben, was wir erreichen wollen. Abbildung 4 gibt beispielhaft einen möglichen „Wunschverlauf“ für den Amplitudengang der Sensitivität an. Ein SISO-System S_W dessen Amplitudengang den Wunschverlauf hat lässt sich leicht finden:

$$S_W = K \cdot \frac{T_z s + 1}{T_p s + 1}. \quad (25)$$

Dabei bestimmt $|S_W(0)| = |K|$ die maximal erlaubte bleibende Regelabweichung. $|S_W(\infty)| = |K \frac{T_z}{T_p}|$ gibt die größtmögliche (schlimmste) Verstärkung einer Störung an. Die Zeitkonstante T_z (zusammen mit K) bestimmt die Frequenz ω_S , die eng mit der Bandbreite ω_B zusammenhängt. Diese Größe gibt die Schnelligkeit des geschlossenen Kreises an. Mit ihr wird der Kompromiß zwischen Führungs-/Störverhalten und Rauschunterdrückung geschlossen.

Wir wollen erreichen, dass die Sensitivität S des geschlossenen Kreises unterhalb des vorgegebenen gewünschten Verlaufes liegt

$$|S(j\omega)| < |S_W(j\omega)| \quad \forall \omega. \quad (26)$$

Daraus folgt mit $W_p(s) = S_W^{-1}(s)$

$$|W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \quad (27)$$

beziehungsweise

$$\|W_p S\|_\infty < 1, \quad (28)$$

wobei $W_p(s)$ und $S(s)$ hier als stabile Systeme angenommen werden¹. Das System $W_p(s)$, das dem inversen Wunschverlauf für die Amplitude von S entspricht, wird als *Performancegewicht* bezeichnet.

Wenn wir also überprüfen wollen, ob ein Regler $K(s)$ die Strecke $G(s)$ zufriedenstellend regelt, müssen wir folgendermaßen vorgehen:

- Festlegen einer tolerierbaren bleibenden Regelabweichung, einer maximaler Störverstärkung und einer gewünschter Bandbreite. Daraus ergibt sich der Wunschverlauf $|S_W(j\omega)|$ für $|S(j\omega)|$.
- Überprüfen, ob $|S(j\omega)| \leq |S_W(j\omega)|$ für alle Frequenzen gilt.

Alternativ können wir auch aus $|S_W(j\omega)|$ das Performancegewicht W_p berechnen und müssen dann überprüfen, ob

$$\|W_p S\|_\infty \leq 1. \quad (29)$$

Von der zweiten Vorgehensweise machen wir in Verbindung mit dem H_∞ -Reglerentwurf Gebrauch. In analoger Weise können Anforderungen an andere Kenngrößen des geschlossenen oder offenen Kreises (z.B. an T , SG_z oder GK) ebenfalls quantisiert werden. Wenn mehrere Anforderungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, führt dies zum Beispiel zum sogenannten *Mixed-Sensitivity-Design*.

Robustheit

Bei unseren seitherigen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, dass das Modell $G(s)$ die wirkliche Regelstrecke exakt beschreibt. Wenn wir diese Annahme fallen lassen, werden die in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Untersuchungen zu Stabilität und Regelgüte nicht mehr aussagekräftig sein. Eine kleine Veränderung in $G(s)$ kann zu Instabilität oder zu signifikant anderen Verläufen von z.B. $|S|$ führen. Im folgenden wollen wir annehmen, dass $G(s)$ die wirkliche Regelstrecke $G_{\text{real}}(s)$ nur fehlerhaft wiedergibt und wollen Bedingungen herleiten, unter denen Stabilität und gutes Regelverhalten auch für das reale System garantiert werden können, wenn der Regler auf der Basis des nominellen Systems $G(s)$ entworfen wurde.

Dazu definieren wir den Begriff der Robustheit.

Definition 3. Eine systemtheoretische Eigenschaft E des geschlossenen Kreises heißt robust gegenüber einem bestimmten Modellfehler F , wenn diese Eigenschaft trotz des Fehlers erhalten bleibt.

Beispiel 1. Robustheit der Eigenschaft Stabilität gegenüber einer falschen Streckenzeitkonstanten.

Beispiel 2. Robustheit der Stabilität gegenüber Ausfällen in Informationskanälen (Messgliedausfall: eine Zeile der Matrix C ist nur mit Nullen besetzt; Stellgliedausfall: eine Spalte der Matrix B ist nur mit Nullen besetzt). Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als Integrität.

¹Es sei hier darauf hingewiesen, dass nur für stabile SISO-Systeme die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm $\|G\|_\infty$ dem Supremum des Amplitudengangs $G(j\omega)$ entspricht.

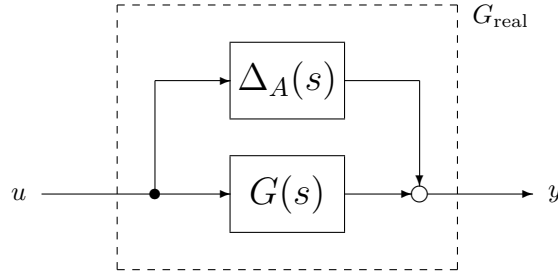


Abbildung 5: System mit additiver Modellunsicherheit.

Beschreibung von Modellunsicherheiten

Das wahre G_{real} ist unbekannt (wenn es bekannt wäre, könnten wir natürlich G_{real} als Modell für unsere Regelkreisuntersuchung und für den Reglerentwurf zugrunde legen). Üblicherweise geht man davon aus, dass der Unterschied zwischen nominellen Modell $G(s)$ und realer Strecke G_{real} nicht beliebig groß sein wird. Das kann man mathematisch so ausdrücken, dass die unsichere reale Strecke ein Element aus einer Klasse von mögliche Streckenbeschreibungen ist. Durch unterschiedliche Festlegung dieser Modellklassen werden nun unterschiedliche Unsicherheitsbeschreibungen definiert. Ein typisches Beispiel sind *Parameterunsicherheiten*.

Beispiel 3. Das Modell eines beladenen Fahrzeugs kann sehr einfach durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_i.$$

Dabei sei die exakte Gesamtmasse m des Fahrzeugs nicht bekannt. Man kann nur eine obere bzw. untere Schranke angeben: $m_u \leq m \leq m_o$.

Allgemein gibt man bei derartigen Fehlern Parameterintervalle für den unsicheren Parameter a_i an: $a_i \in [a_{iu}, a_{io}]$.

Je größer die Modellklasse ist, desto schwieriger ist i.a. Robustheit zu erreichen.

Eine sehr wichtige Klasse von Modellunsicherheiten sind sogenannte *unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen im Frequenzbereich*. Dabei geht man davon aus, dass sich die reale Strecke aus einem nominellen Modell $G(s)$ und einem Fehlerterm $\Delta(s)$ zusammensetzt. Die Unsicherheit $\Delta(s)$ kann ein dynamisches System beliebiger Ordnung sein. Wir nehmen nur eine obere Schranke für die „Größe“ dieses Fehlers an, die durch die Amplitude von $\Delta(s)$ über die Frequenz ausgedrückt wird:

$$|\Delta(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega. \quad (30)$$

Anhand der strukturellen Abhängigkeit der realen Strecke vom Fehler unterscheidet man innerhalb dieser unstrukturierten Unsicherheiten weitere Unterklassen:

- **Additive Fehler:** Die Unsicherheit ist parallel zum nominellen Modell $G(s)$ geschaltet (Abbildung 5). Die reale Strecke ist also ein (unbekanntes) Element der folgenden Modellklasse:

$$\begin{aligned} G_{\text{real}} &\in \{G^* : G^*(s) = G(s) + \Delta_A(s) \text{ mit } \Delta_A(s) \in F\} \\ F &= \{\Delta_A(s) : |\Delta_A(j\omega)| \leq l_A(\omega) \forall \omega\}. \end{aligned} \quad (31)$$

- **Multiplikative Ausgangsfehler:** Die reale Strecke ist eine Hintereinanderschaltung des nominellen Modells und eines Fehlerterms (Abbildung 6):

$$G_{\text{real}} \in \{G^* : G^*(j\omega) = (1 + \Delta_M(j\omega))G(j\omega) \text{ mit } |\Delta_M(j\omega)| \leq l_M(\omega) \forall \omega\}. \quad (32)$$

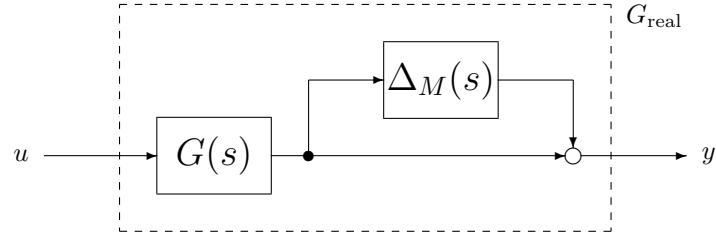


Abbildung 6: System mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit.

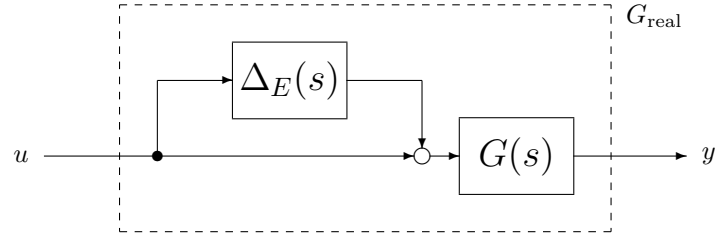


Abbildung 7: System mit multiplikativer Eingangsunsicherheit.

- **Multiplikative Eingangsfehler:** Mehrgrößensysteme sind in der Regel nicht kommutativ. Deshalb ergibt sich eine weitere Fehlerklasse, wenn wir die multiplikative Unsicherheit am Eingang der Strecke annehmen (Abbildung 7):

$$G_{\text{real}} \in \{G^* : G^*(j\omega) = G(j\omega)(1 + \Delta_E(j\omega)) \text{ mit } |\Delta_E(j\omega)| \leq l_E(\omega) \forall \omega\}. \quad (33)$$

Für die hier betrachteten Eingrößensysteme sind die Klassen der multiplikativen Ein- und Ausgangsfehler äquivalent.

Dies sind die gebräuchlichsten Unsicherheitsbeschreibungen. Wie wir sehen werden, können dafür relativ einfach hinreichende und notwendige Kriterien für die Robustheit der Eigenschaft Stabilität hergeleitet werden.

Die beschriebenen Fehler heißen *unstrukturiert*, da nur *eine* „Quelle“ für die Unsicherheit angenommen wird und diese Unsicherheit ein beliebiges normbeschränktes System von passender Dimension sein kann.

Üblicherweise wird durch unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen die Klasse der möglichen Streckenbeschreibungen unnötig vergrößert. Es sind also Systembeschreibungen in dieser Klasse, die nicht auftreten können. Deshalb werden die Robustheitsaussagen übervorsichtig sein. Man spricht dann von *konservativen* Robustheitsaussagen. Regler, die für diese zu große Klasse von Systemen Stabilität bzw. Regelgüte garantieren, werden als „konservativ“ bezeichnet.

Betrachten wir im folgenden beispielhaft die Beschreibung durch multiplikative Ausgangsfehler, die auch häufig relative Fehler genannt werden, etwas genauer. Ein in der Praxis typisches $\Delta_M(s)$ ist in Abbildung 8 angegeben.

Für niedrige Frequenzen kennen wir das dynamische Verhalten häufig verhältnismäßig genau, d.h. der relative Fehler ist klein. Für hohe Frequenzen wird der relative Fehler zunehmend größer und überschreitet meist sogar den Wert Eins. D.h. der Einfluss des Fehlerterms $\Delta(s)$ kann dann sogar größer sein als der Beitrag des nominellen Systems. Das dynamische Verhalten ist damit „vollständig“ unsicher.

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes betrachten wir ein einfaches Beispiel.

Beispiel 4. Eine SISO-Regelstrecke sei durch folgendes Modell exakt wiedergegeben:

$$G_{\text{real}} = \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{(T_2 s + 1)^2} \quad T_1 = 1, T_2 = 0.1. \quad (34)$$

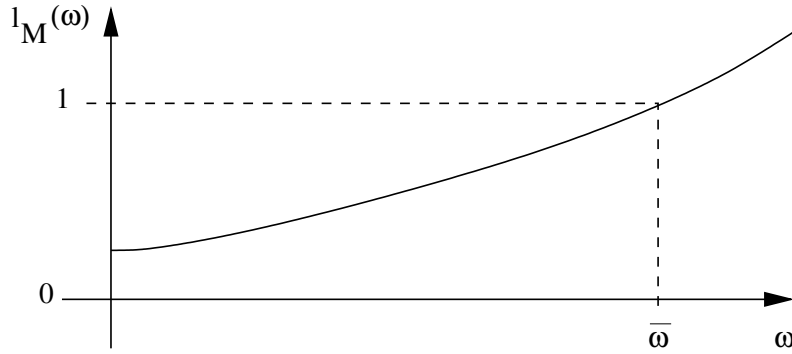


Abbildung 8: Typischer Verlauf der Schranke $l_M(\omega)$ einer multiplikativen Modellunsicherheit.

Wenn wir als nominelles Modell

$$G = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad (35)$$

wählen, können wir explizit den relativen Fehler zwischen nominellem und realem System berechnen und plotten. Üblicherweise ist das reale Modell nicht bekannt, so dass eine solche Untersu-

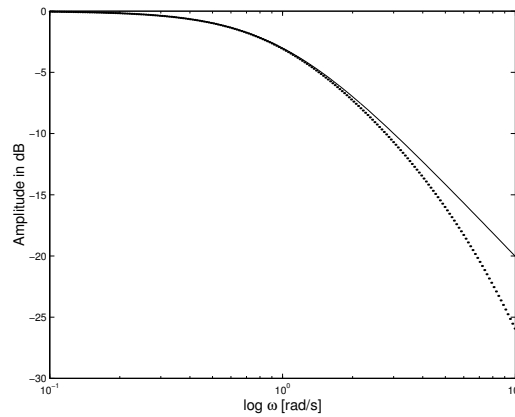


Abbildung 9: Amplitudengang von realer Strecke (gestrichelt) und nominellem Modell (durchgezogen).

chung natürlich nicht möglich ist. Abbildung 9 zeigt den Amplitudengang von realer Strecke und nominellem Modell. Aus

$$G_{\text{real}} = (1 + \Delta_M)G \quad (36)$$

läßt sich der Fehler Δ_M formal berechnen:

$$\Delta_M = \frac{G_{\text{real}} - G}{G} \quad (37)$$

Der Verlauf des Amplitudengangs des Fehlers ist in Abbildung 10 dargestellt. Man sieht, dass der relative Fehler für Frequenzen oberhalb $\omega \approx 10$ rad/sec ungefähr eins wird, obwohl der absolute Fehler wie aus Bild 9 ersichtlich, sehr klein ist.

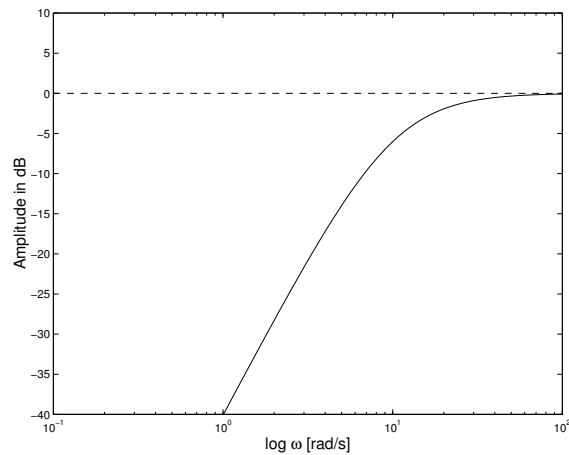


Abbildung 10: Amplitudengang des Fehlers.

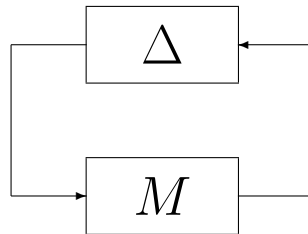


Abbildung 11: M - Δ -Struktur.

Die M - Δ -Struktur

Wir wollen Robustheitskriterien für unterschiedliche Unsicherheitsklassen herleiten. Es sollen aber verallgemeinerte Betrachtungen bleiben, die nicht von einer speziellen unstrukturierten Unsicherheitsbeschreibung abhängen.

Dazu formen wir den Regelkreis mit Strecke, Unsicherheit und Regler mit der einen, unstrukturierten Unsicherheit so um, dass er die in Abbildung 11 dargestellte Form hat, wobei Δ der jeweilige Unsicherheitsterm ist und M eine zu berechnende Übertragungsfunktion darstellt, die keine Unsicherheiten mehr enthalten soll.

Beispiel 5. Wir betrachten den Regelkreis in Abbildung 12 (multiplikative Ausgangsunsicherheit). Zur Berechnung von M müssen wir das Übertragungsverhalten zwischen $\downarrow^{\textcircled{1}}$ und $\uparrow^{\textcircled{2}}$ betrachten.

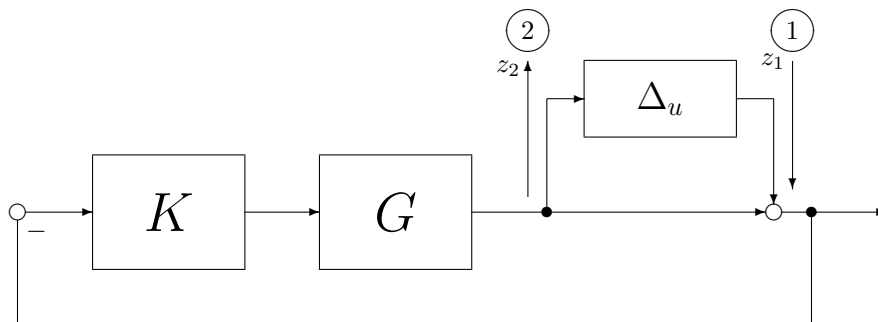


Abbildung 12: Geschlossener Kreis mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit.

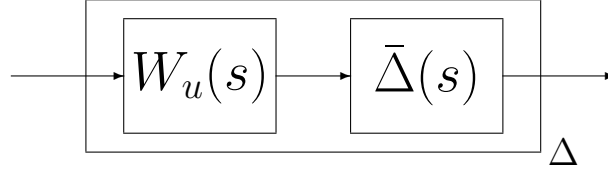


Abbildung 13: Aufspaltung der Unsicherheit Δ in Unsicherheitsgewicht W_u und normierter Unsicherheit $\bar{\Delta}$.

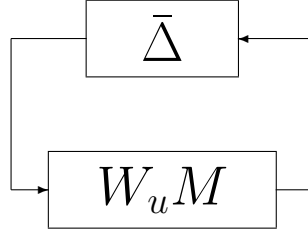


Abbildung 14: M - Δ -Struktur mit Unsicherheit $\bar{\Delta}$.

Mit den Hilfsgrößen z_1 und z_2 erhält man:

$$\begin{aligned} z_2 &= -GK(z_1 + z_2) \\ &= \underbrace{-GK(1 + GK)^{-1}}_M z_1. \end{aligned} \quad (38)$$

In diesem Fall entspricht M also der negativen komplementären Sensitivität.

Entsprechend verlaufen die Umformungen für andere Systembeschreibungen. Diese Struktur wird M - Δ -Struktur genannt.

Wir wollen noch weiter verallgemeinern bzw. normalisieren. Bei den bisherigen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, dass die Größe des Fehlers eine frequenzabhängige obere Schranke besitzt:

$$|\Delta(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega. \quad (39)$$

Wir können die Unsicherheit noch weiter normalisieren und damit erreichen, dass diese Schranke für alle Frequenzen gleich eins wird:

$$\Delta(\omega) = \bar{\Delta}(\omega)l(\omega) \quad \text{mit} \quad |\bar{\Delta}(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (40)$$

Wir können $l(\omega)$ als dynamisches Gewicht interpretieren, wenn wir ein stabiles und nichtminimalphasiges dynamisches SISO-System $W_u(j\omega)$ finden, das $l(\omega)$ als Amplitudengang besitzt: $|W_u(j\omega)| = l(\omega)$. Die Unsicherheit Δ hat also die in Abbildung 13 gezeigte Struktur. Das Unsicherheitsgewicht $W_u(s)$ ist bekannt. Deshalb können wir es mit der Übertragungsfunktion M zusammenfassen

$$\bar{M} = W_u M \quad (41)$$

und können dann annehmen, dass die verbleibende Unsicherheit auf den Betrag eins beschränkt ist, also $|\bar{\Delta}(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$ gilt (Abbildung 14). Im Weiteren wollen wir die betreffenden Matrizen M und Δ (nicht $\bar{M}$ bzw. $\bar{\Delta}$) nennen, aber in Zukunft annehmen, dass W_u in M enthalten ist und $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ gilt.

Für diese allgemeine M - Δ -Struktur können wir Aussagen über die Robustheit der Stabilität machen.

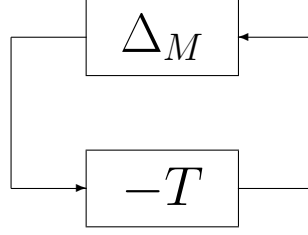


Abbildung 15: M - Δ -Struktur resultierend aus einer multiplikativen Ausgangsunsicherheit.

Satz 3 ((Robuste Stabilität, unstrukturierte Unsicherheiten)). *Unter der Annahme, dass M und Δ stabil sind und $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ gilt, ist der geschlossene Kreis genau dann robust asymptotisch stabil, wenn gilt*

$$|M| < 1 \quad \forall \omega \quad (42)$$

oder äquivalent

$$\|M\|_\infty < 1. \quad (43)$$

Bemerkung 1: Satz 3 gilt auch bei vertauschten Annahmen zu M und Δ . Also unter der Annahme, dass M und Δ stabil sind und $\|\Delta\|_\infty < 1$ gilt, ist der geschlossene Kreis genau dann robust asymptotisch stabil, wenn gilt

$$|M| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (44)$$

oder äquivalent

$$\|M\|_\infty \leq 1. \quad (45)$$

Bemerkung 2: Die Annahme, dass Δ stabil sein soll, ist eigentlich zu restriktiv. Der Satz gilt auch, wenn das nominelle und das unsichere System die gleiche Anzahl instabiler Pole haben (Δ darf auch instabil sein). Man kann sogar zeigen, dass die Zahl der instabilen Pole unterschiedlich sein darf, wenn die instabilen Pole durch „Überqueren“ der imaginären Achse entstehen und nicht durch Pol/Nullstellen-Überdeckung.

Der hinreichende Teil von Satz 3 folgt direkt aus dem *Small-Gain Theorem*. Der Beweis der Notwendigkeit kann zum Beispiel nachgelesen werden in MORARI, M. ; ZAFIRIOU, E.: ROBUST PROCESS CONTROL. PRENTICE HALL, 1989.

Der Satz gibt hinreichende und notwendige Bedingungen für robuste Stabilität an. D.h. wenn z.B. $\|M\|_\infty > 1$, dann existiert ein Δ mit $|\Delta| \leq 1$, so dass der Kreis instabil wird. Man sagt dann auch, dass dieses Robustheitskriterium *nicht konservativ* ist, d.h. nicht übervorsichtig.

Jetzt wollen wir diesen Satz auf die unterschiedlichen Unsicherheitsbeschreibungen anwenden, die wir seither kennengelernt haben. Für den Spezialfall der multiplikativen Ausgangsunsicherheit gilt:

$$G_{\text{real}} = (1 + \Delta_M)G, \quad |\Delta_M| \leq l_M(\omega). \quad (46)$$

Weiter oben wurde gezeigt, wie die Matrix M der M - Δ -Struktur (Abbildung 15) berechnet wird wobei $|\Delta_M| \leq l_M(\omega) \forall \omega$ gilt.

Um den Robustheitssatz anwenden zu können, müssen wir die Unsicherheit normalisieren,

$$\Delta_M(j\omega) = \Delta(j\omega)W_u(j\omega) \quad \text{mit } |W_u(j\omega)| = l_M(\omega). \quad (47)$$

wobei nun $|\Delta(j\omega)| \leq 1 \forall \omega$ (Abbildung 16).

Die Anwendung des Robustheitssatzes (3) liefert nun als notwendige und hinreichende Bedingung für robuste Stabilität die folgende Aussage:

Corollar 1. *Der geschlossene Kreis mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit nach Abb. 6 ist genau dann asymptotisch stabil für alle Unsicherheiten Δ mit $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, wenn gilt*

$$\|W_u G K (1 + G K)^{-1}\|_\infty < 1. \quad (48)$$

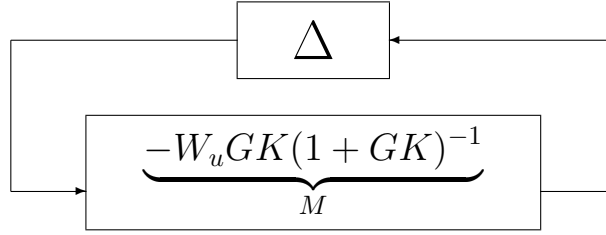


Abbildung 16: M - Δ -Struktur mit normalisierter Unsicherheit Δ für multiplikative Ausgangsunsicherheit.

Mit $|l_M(\omega)| = |W_u(j\omega)|$ kann man diese Bedingung noch umformen:

$$|GK(1 + GK)^{-1}l_M| < 1 \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad |T(j\omega)| < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad \forall \omega. \quad (49)$$

Wenn wir also robuste Stabilität bezüglich multiplikativer Ausgangsfehler fordern und $l_M(\omega)$ als obere Grenze für den Fehler bekannt ist, müssen wir nur den Amplitudengang der komplementären Sensitivität des nominellen Kreises aufplotten und schauen, ob dieser kleiner als $\frac{1}{l_M(\omega)}$ für alle Frequenzen ist. Also gibt es eine weitere Grenze für $|T|$, analog zur Rauschunterdrückung. Für hohe Frequenzen, für die auch l_M i.a. groß ist, gilt:

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_B : \quad |GK(1 + GK)^{-1}| &= |(1 + GK)(GK)^{-1}|^{-1} = |(GK)^{-1} + 1|^{-1} \\ &\approx |(GK)^{-1}|^{-1} = |GK| \\ &\Rightarrow |GK| < \frac{1}{l_M} \quad \text{für große } \omega. \end{aligned} \quad (50)$$

D.h. wenn die Unsicherheit groß ist, muss die Verstärkung klein sein. Man muss also „vorsichtig“ regeln. Wenn die Unsicherheit klein ist, dann kann man auch die Verstärkung groß wählen.

Unsicherheitsbeschreibung		Robustheitskriterium
multiplikative Ausgangsunsicherheit	$G_{real} = (1 + \Delta_M)G$ $ \Delta_M \leq l_M \quad \forall \omega$	$ GK(1 + GK)^{-1} = T < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad \forall \omega$
multiplikative Eingangsunsicherheit	$G_{real} = G(1 + \Delta_E)$ $ \Delta_E \leq l_E \quad \forall \omega$	$ KG(1 + KG)^{-1} < \frac{1}{l_E(\omega)} \quad \forall \omega$
additive Unsicherheit	$G_{real} = G + \Delta_A$ $ \Delta_A \leq l_A \quad \forall \omega$	$ K(1 + GK)^{-1} = KS < \frac{1}{l_A(\omega)} \quad \forall \omega$

Tabelle 1: Robustheitskriterien für unterschiedliche Unsicherheitsbeschreibungen.

Das Auffinden von Robustheitskriterien für andere Unsicherheitsbeschreibungen erfolgt ganz analog. Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden (Tab. 1)

Es gibt noch weitere unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibungen in der Literatur, die aber oft nur für Spezialfälle interessant sind: z.B. inverse multiplikative Ausgangsunsicherheit oder additiv rückwirkende Unsicherheit. Mit dem allgemeinen Satz (3) kann man leicht die Robustheitskriterien für die entsprechenden Fälle herleiten.