

4. Toleranzrechnung / - analyse

4.1 Ausgangssituation

Ausgangssituation

Alle Bauteile und alle darin enthaltenen Geometrien sind nicht ideal genau herstellbar! Fertigungsbedingt entstehen immer **Abweichungen vom Nennmaß sowie von idealen Formen, Lagezuordnungen und Oberflächen.**

Trotz dieser Abweichungen (**Toleranzen**) müssen Funktion und Ökonomie gewahrt werden. Eine massive Verkleinerung von Toleranzangaben in Zeichnungen ist kein Lösungsweg, da die Kosten dadurch extrem steigen.

Für die Funktion entsteht folgendes **Grundproblem**:

Alle Maße sind toleranzbehaftet. Spätestens durch die Montage entstehen Maß- und damit Toleranzketten. Diese Maßketten dürfen nicht geschlossen sein, sonst wären sie überbestimmt. Das offene Glied der Maßkette (Schlussmaß oder Schließmaß) ist abhängig von den Kettengliedern, muss jedoch gleichzeitig funktionellen Anforderungen genügen.

Zur Sicherung der funktionellen Anforderungen an das Schließmaß bieten sich verschiedene Wege an:

- Schließmaß über **Justage- oder Abgleich- bzw. Abstimmvorgänge** einstellen
- Bauteile ausmessen und so kombinieren, dass Schließmaßvorgaben erfüllt werden (**selektive Montage**) bzw.
- Bauteile ausmessen und in Maßgruppen sortieren und zugeordnet montieren (**Gruppenaustauschbarkeit**, z. B. bei Wälzlagern)
- Federnde, selbst **nachstellende Elemente** verwenden
- Auswirkungen des Schließmaßes **rechnerisch ermitteln** und durch Toleranzfestlegungen gezielt beeinflussen

4.2 Methoden zur Toleranzrechnung - Übersicht

Methoden zur Toleranzrechnung - Übersicht

Toleranzrechnung nutzt **lineares bzw. quadratisches** Fehlerfortpflanzungsgesetz.

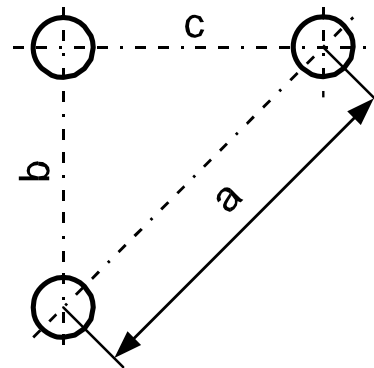
Unabhängig davon können dabei lineare und nichtlineare Maßketten entstehen (**Fehlerfaktor eins oder funktioneller Zusammenhang**):

a) lineare:
$$\pm N_0 = \pm N_1 \pm N_2 \pm \dots = \sum k_i N_i$$

(Einzelmaße voneinander unabhängig, **Fehlerfaktor mit Betrag eins**)

b) nichtlineare:
$$N_0 = f(N_i)$$

(funktioneller Zusammenhang zwischen den Einzelmaßen, **Fehlerfaktor als funktioneller Zusammenhang**), z. B.:



In Anlehnung an die Fehlerfortpflanzungsgesetze werden zwei Methoden der Toleranzrechnung unterschieden:

I **Arithmetische Toleranzrechnung** (vollständige Austauschbarkeit) (Maximum-Minimum-Methode / Extremwertmethode)

Grundlage: Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz (systematische Fehler)

$$T_0 = \left| \frac{\partial f}{\partial M_1} \right| \cdot T_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial M_2} \right| T_2 + \dots$$

a) *lineare Toleranzketten:* $T_0 = T_1 + T_2 + \dots = \sum_{i=1}^m T_i$

mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| = 1$$

b) *nichtlineare Toleranzketten:* $T_0 = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| T_i$

mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| \neq 1 .$$

II Statistische bzw. wahrscheinlichkeitstheoretische Methode (unvollständige Austauschbarkeit)

Grundlage: Quadratisches Fehlerfortpflanzungsgesetz (zufällige Fehler)

$$\sigma_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial M_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial M_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots$$

$T_i = 2 h_i \sigma_i$ in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion

a) *lineare Toleranzketten:* $\sigma_0 = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| = 1$$

b) *nichtlineare Toleranzketten:* $\sigma_0 = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \sigma_i^2}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| \neq 1$$

Abgrenzung der beiden Methoden:

Bei **kleinen Losgrößen und / oder weniggliedrigen Ketten** ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von ungünstigsten Kombinationen von Extremwerten nicht vernachlässigbar. Hier kann nur die **arithmetische Toleranzrechnung** (Maximum-Minimum-Methode) zum Einsatz kommen.

Bei **hohen Losgrößen und vielgliedrigen Ketten ($i \geq 4$)** ist die Wahrscheinlichkeit für ungünstigste extremale Kombinationen jedoch äußerst gering. Hier ist die **statistische bzw. wahrscheinlichkeitstheoretische Methode** einsetzbar. Dies ermöglicht dann bei Akzeptanz einer geringen Überschreitungsquote deutlich größere Einzeltoleranzen (50 ... 60 % größer) bzw. geringere Bauteilkosten, gleiche Schlusstoleranz vorausgesetzt.

4.3 Arithmetische Toleranzrechnung (Maximum-Minimum-Methode / Extremwertmethode)

Arithmetische Toleranzrechnung (Maximum-Minimum-Methode / Extremwertmethode)

Ausgangspunkt:

- Alle **ungünstigsten Kombinationen** von Einzelmaßen werden berücksichtigt, d. h. eine Kombination ungünstigster Toleranzfeldlagen und Vorzeichen erscheint möglich, wodurch Größt- und Kleinstmaße für das Schließmaß entstehen.
- Dies ist insbesondere bei kleinen, weniggliedrigen Ketten in geringen Stückzahlen zu erwarten.

Vorteile:

- vollständige Austauschbarkeit innerhalb aller Bauteillose
- einfach organisierbare Montage, die ohne Auswählen und Nacharbeiten zu den vorausberechneten Ergebnissen führen muss (fehlerfrei, auch bei niedrig qualifiziertem Personal)
- einfache Lagerhaltung und ein einfacher Service
- einfache, überschaubare Rechenmethode

Nachteile:

- vertretbar kleine Einzeltoleranzen führen bei vielgliedrigen Ketten schnell zu recht großen Schließtoleranzen, d. h. Verschlechterung der Funktion
- Vorgegebene Schließtoleranzen erfordern bei vielgliedrigen Ketten dann extrem kleine Einzeltoleranzen und hohe Kosten
- Praktisch werden dadurch sehr enge (zu enge) Toleranzen provoziert

Direkte Berechnung von Größt- und Kleinstmaß bei arithmetischer Toleranzrechnung

1. Ausgangsgleichung
$$\sum_{i=0}^m k_i M_i = 0$$

2. Umstellen nach M_0
$$M_0 = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^m k_i M_i$$

3. Größt- und Kleinstmaße berechnen

Größtmaß G_0 des Schlussmaßes M_0 = Summe der Größtmaße G_i der positiven Glieder der Gleichung *minus* Summe der Kleinstmaße K_i der negativen Glieder der Gleichung
(Kleinstmaß K_0 analog)

$$G_0 = \sum_{i=1}^n G_i - \sum_{i=n+1}^m K_i (= N_0 + E_{Co} + T_o/2)$$

$$K_0 = \sum_{i=1}^n K_i - \sum_{i=n+1}^m G_i (= N_0 + E_{Co} - T_o/2)$$

$$T_0 = G_0 - K_0$$

Probleme bei direkter Berechnung:

- Fehlerhäufigkeit sehr hoch, insbesondere bei Grundaufgabe 2
- kein formalisiertes automatisierbares Vorgehen möglich
- Rechnerunterstützung entfällt damit

Tabelle 4.1 Tabellenmethode zur arithmetischen Toleranzrechnung

Voraussetzungen:

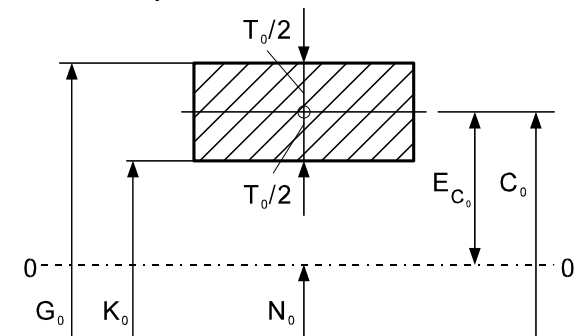
1. Lineare Maßketten, Einzelmaße unabhängig voneinander
2. Maß- bzw. Toleranzkette darf nicht geschlossen sein
3. **Schließmaß ist nichtbemaßtes Glied einer Kette**, von anderen Gliedern abhängig!

Ausgangspunkt:

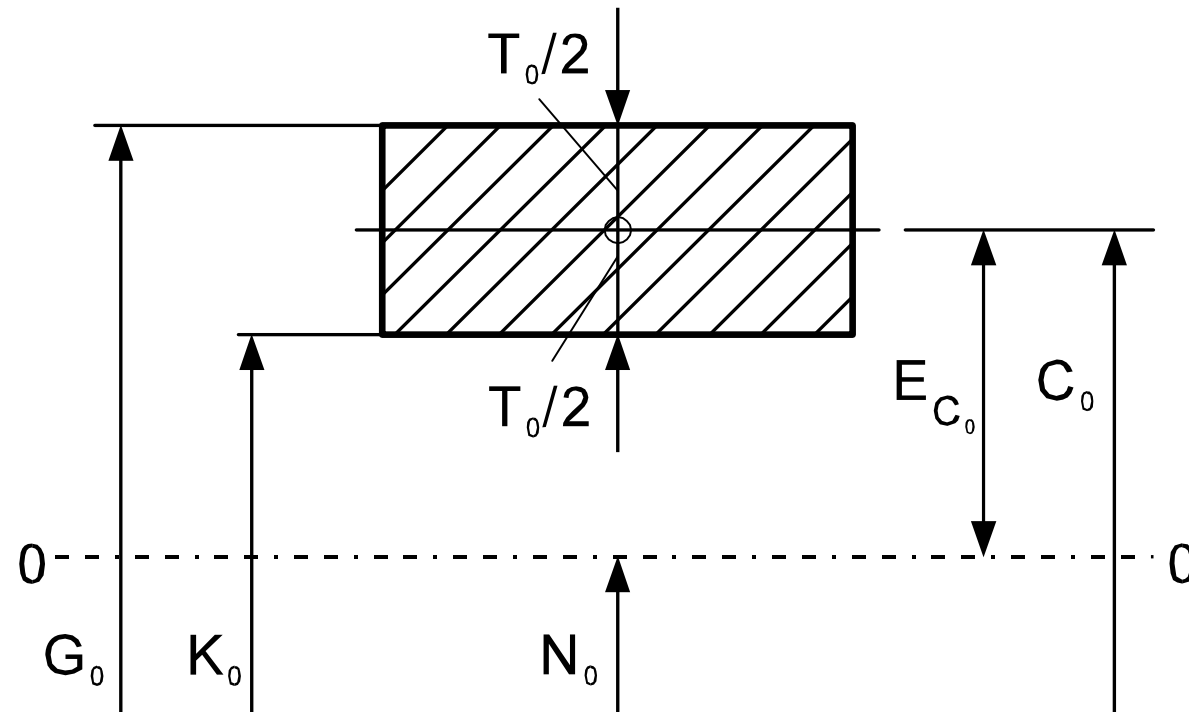
1. Zunächst wird eine zu untersuchende Maßkette durch Maßpfeile mit beliebigen aber einheitlichen Richtungssinn nachgezeichnet (nachvollzogen).
2. In der Maßkette verbleibt ein offenes Maß, das Schließmaß.
3. Die richtungsabhängige Maßkette wird als vorzeichenbehaftete Summe abgebildet und in die Form $\sum k_i M_i = 0$ umgestellt.
4. Die Vorzeichen werden dabei als Richtungskoeffizienten k_i bezeichnet.
5. Die einzelnen Maßbestandteile werden aufgesplittet in die Einzelbestandteile

Nennmaß N_i , Toleranzmittenabweichung E_{Ci} und Toleranz T_i in der Form

$$M_i = N_i + E_{Ci} \pm T_i/2 \quad \text{bzw.} \quad M_o = N_o + E_{Co} \pm T_o/2$$



Erläuterungen zu den Maßbestandteilen:



Sinn dieser Aufsplittung ist die automatisierungsgerechte Aufbereitung der Daten, so dass CAD-Programme die Toleranzanalyse automatisch begleitend mit umsetzen können.

Verschiedene Aufgaben:

Grundaufgabe 1: Schließmaß M_0 und dessen Toleranz T_0 gesucht.

Grundaufgabe 2: Beliebiges Maß M_n , T_n bei gegebenem Schließmaß und Toleranz des Schließmaßes gesucht.

Grundgleichungen:

Ausgangsbeziehung $\sum k_i M_i = 0$ (Kette durch M_0 geschlossen)

Grundaufgabe 1	Grundaufgabe 2
Schließmaß M_0 , T_0 gesucht	Schließmaß M_0 , T_0 gegeben, beliebiges Maß M_n , T_n der Kette gesucht
$N_0 = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^m k_i N_i$ m = Anzahl der Einzelmaße k_i = Richtungskoeffizienten N_i = Nennmaße	$N_n = - \frac{1}{k_n} \left[\sum_{i=0}^{n-1} k_i N_i + \sum_{i=n+1}^m k_i N_i \right]$ n = gesuchtes Einzelmaß
$T_0 = \sum_{i=1}^m T_i$	$T_n = T_0 - \sum_{i=1}^{n-1} T_i - \sum_{i=n+1}^m T_i$
! Wichtig: Schließtoleranz = $\sum$ der Einzeltoleranzen	
$E_{\Sigma} = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^m k_i E_{Gi}$	$E_{Gn} = - \frac{1}{k_n} \left[\sum_{i=0}^{n-1} k_i E_{Gi} + \sum_{i=n+1}^m k_i E_{Gi} \right]$
$M_0 = N_0 + E_{\Sigma} \pm T_0/2$ ((= $C_0 \pm T_0/2$))	$M_n = N_n + E_{Gn} \pm T_n/2$ ((= $C_n \pm T_n/2$))

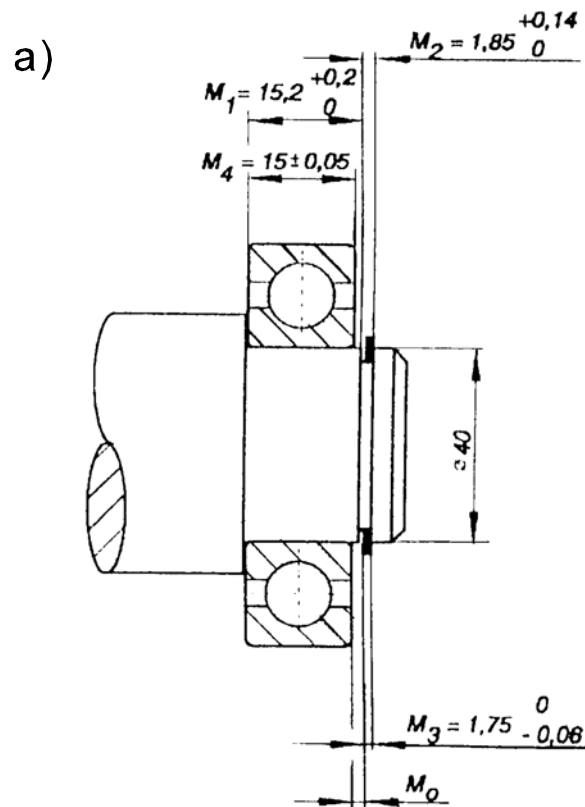
T liegt symmetrisch zu C bzw. E_C !

Index 0=Schlussglied;

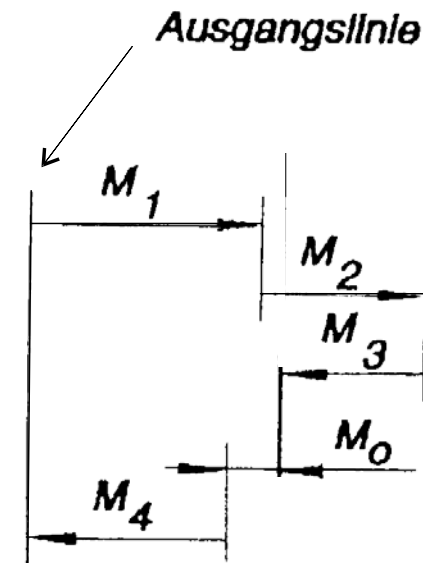
k_i =Richtungskoeffizienten, beliebig zuordenbar, aber innerhalb einer Kette mit festem Richtungssinn, entspricht Vorzeichen in Gleichung $\sum k_i M_i = 0$

Beispiel 1:

Abbildung 4.2a verdeutlicht die Montage eines Wälzlagers an einem Wellenzapfen mit axialer Sicherung. Gesucht ist das axiale Spiel (und dessen Schwankungsbreite)



b)



Wälzlagermontage auf einem Wellenzapfen, Beispiel aus /11/

a) Anordnung b) Maßkette

Lösung:

1. Welches ist das **Schließmaß der Kette**?

Zunächst ist stets nach dem abhängigen Kettenglied zu suchen, das das Schließmaß der Kette darstellt. Dieses und nur dieses sollte dann mit M_0 bezeichnet werden. Hier ist das axiale Spiel die abhängige Größe, M_0 ist folglich gesucht - Grundaufgabe 1!

2. Aufstellen der **Maßkette**

Ausgehend von einer beliebigen, in die Maßkette zu zeichnenden Maßbezugslinie ist ein geschlossener Linienzug über bekannte oder gesuchte Einzelmaße und das Schlussglied zu bilden. Dazu sollte ein Richtungssinn beliebig eingeführt werden. Abbildung 4.2b zeigt ein Beispiel.

3. Ausgangsgleichung

Das vorzeichenbehaftete Durchlaufen der Maßkette liefert eine Gleichung, die in der Form $\sum M_i = 0$ die Ausgangsgleichung darstellt.

Hier folgt aus der Maßkette: $M_1 + M_2 - M_3 - M_0 - M_4 = 0$

Die Vorzeichen stellen die Richtungskoeffizienten k_i für die einzelnen Maße dar.

4. Tabelle

In Tabellenform sollten die Maßbestandteile - soweit bekannt - aufbereitet werden.

i	M_i	N_i	k_i	E_{ci}	T_i
0	?	?	-1	?	?
1	$15,2^{+0,2}$	15,2	+1	+0,1	0,2
2	$1,85^{+0,14}$	1,85	+1	+0,07	0,14
3	$1,75_{-0,06}$	1,75	-1	-0,03	0,06
4	$15,0 \pm 0,05$	15,0	-1	0	0,1

5. Gleichungen:

$$N_0 = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^4 k_i N_i = - \frac{1}{-1} (1 \cdot 15,2 + 1 \cdot 1,85 - 1 \cdot 1,75 - 1 \cdot 15,0) = 0,3$$

$$E_{\infty} = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^4 k_i E_{ci} = - \frac{1}{-1} (1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,07 - 1 \cdot (-0,03) - 0) = 0,2$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^4 T_i = 0,2 + 0,14 + 0,06 + 0,1 = 0,5$$

$$M_0 = N_0 + E_{\infty} \pm \frac{T_0}{2} = 0,3 + 0,2 \pm 0,25 = 0,5 \pm 0,25$$

6. Ergebnis: $M_0 = 0,5 \pm 0,25$
Spiel 0,25 . . . 0,75mm

Reserven durch Statistische Toleranzrechnung

Vorlesungsbeispiel

Simulation einer Statistischen Toleranzrechnung WS 2011/12

Ergebnisse

Baugruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+ M ₁	15,30	15,27	15,20	15,33	15,40	15,33	15,36	15,30	15,30	15,24	15,36	15,33	15,27	15,27	15,24	15,30
+ M ₂	1,94	1,99	1,92	1,96	1,92	1,90	1,90	1,88	1,88	1,96	1,94	1,92	1,92	1,90	1,85	1,94
– M ₃	1,71	1,73	1,73	1,72	1,72	1,71	1,71	1,73	1,74	1,71	1,72	1,70	1,72	1,72	1,72	1,73
– M ₄	15,00	14,99	15,00	15,00	14,99	15,00	15,01	15,01	14,99	15,03	14,99	15,01	14,97	15,01	15,00	15,00
= Schließmaß M ₀	0,53	0,54	0,39	0,57	0,61	0,52	0,54	0,44	0,45	0,46	0,59	0,54	0,50	0,44	0,37	0,51

Größtmaß $M_{0 \max} = 0,61$

Kleinstmaß $M_{0 \min} = 0,37$

Schließtoleranz $T_0 = M_{0 \max} - M_{0 \min} = 0,24$

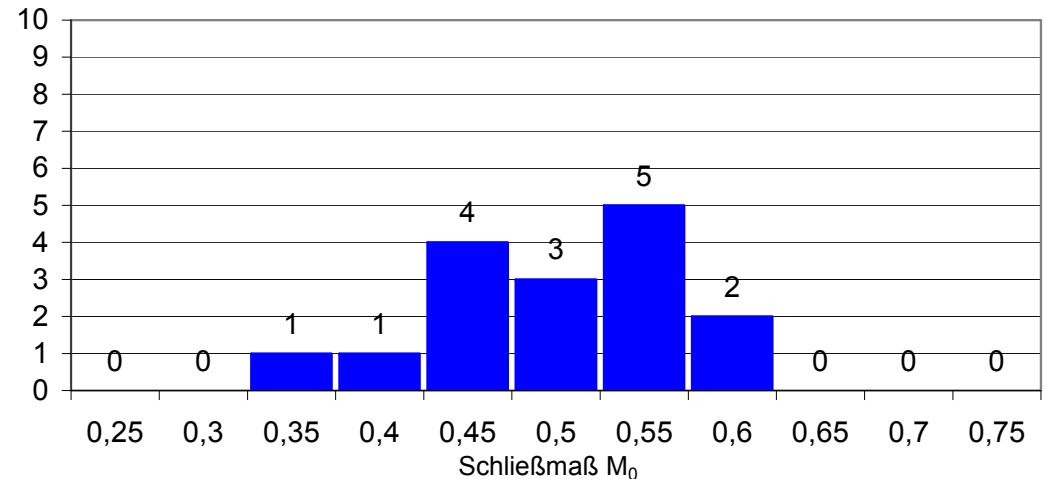
Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{i} \sum M_{0i} = 0,5000$

Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{i} \sum (M_{0i} - \bar{x})^2} = 0,0669$

3 s = 0,2007

Anzahl n

Häufigkeitsverteilung



Beispiel 2:

Aufgabenstellung:

Gesucht war zunächst axiales Spiel und Schwankungsbreite.
Ergebnis $M_0 = 0,5 \pm 0,25$, Spiel $0,25 \dots 0,75$ mm.

Nun soll das Spiel insgesamt verschoben werden auf $M_0 = 0,3 \pm 0,25$
bzw. auf ein Spiel $0,05 \dots 0,55$ mm.

Dafür ist ein angepasstes Maß M_1 gesucht, da dies am einfachsten zu ändern ist.

Lösung:

1. Welches ist das **Schließmaß der Kette**?

Zunächst ist immer nach dem abhängigen Kettenglied zu suchen, welches das Schließmaß der Kette darstellt. Dieses und nur dieses sollte dann mit M_0 bezeichnet werden.

Hier ist das axiale **Spiel weiterhin die abhängige Größe**. M_0 ist folglich das Schließmaß. Gesucht ist aber nun M_1 nach Grundaufgabe 2

2. Aufstellen der **Maßkette**

Ausgehend von einer beliebigen, in die Maßkette zu zeichnenden Maßbezugslinie ist ein geschlossener Linienzug über bekannte oder gesuchte Einzelmaße und das Schlussglied zu bilden. Dazu sollte ein Richtungssinn beliebig eingeführt werden. Dies gilt wie bisher auch.

3. Ausgangsgleichung

Das vorzeichenbehaftete Durchlaufen der Maßkette liefert eine Gleichung, die in der Form $\sum M_i = 0$ die Ausgangsgleichung darstellt, ebenfalls wie bisher.

Es folgt aus der Maßkette wiederum: $M_1 + M_2 - M_3 - M_0 - M_4 = 0$

Die Vorzeichen stellen die Richtungskoeffizienten k_i für die einzelnen Maße dar.

4. Tabelle

In Tabellenform sollten die bekannten Maßbestandteile aufbereitet werden. Hier ist nun M_0 bekannt und M_1 unbekannt.

i	M_i	N_i	k_i	E_{ci}	T_i
0	$0,3 \pm 0,25$	0,3	-1	0	0,5
1	?	?	+1	?	?
2	$1,85^{+0,14}$	1,85	+1	+ 0,07	0,14
3	$1,75^{-0,06}$	1,75	- 1	- 0,03	0,06
4	$15,0 \pm 0,05$	15,0	- 1	0	0,1

5. Gleichungen, nun für Grundaufgabe 2:

$$N_1 = - \frac{1}{k_1} \sum_{i=0,2}^4 k_i N_i = - \frac{1}{1} (-1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 1,85 - 1 \cdot 1,75 - 1 \cdot 15,0) = 15,2$$

$$E_{Cl} = - \frac{1}{k_1} \sum_{i=0,2}^4 k_i E_{ci} = - \frac{1}{1} (-1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,07 - 1 \cdot (-0,03) - 0) = -0,1$$

$$T_1 = T_0 - \sum_{i=2}^4 T_i = 0,5 - (+ 0,14 + 0,06 + 0,1) = 0,2$$

$$M_1 = N_1 + E_{Cl} \pm \frac{T_1}{2} = 15,2 - 0,1 \pm 0,1 = 15,1 \pm 0,1$$

6. Ergebnis: $M_1 = 15,1 \pm 0,1$
für Spiel 0,05 . . . 0,55 mm
Bitte Probe machen!

4.4 Statistische Toleranzrechnung

Statistische Toleranzrechnung

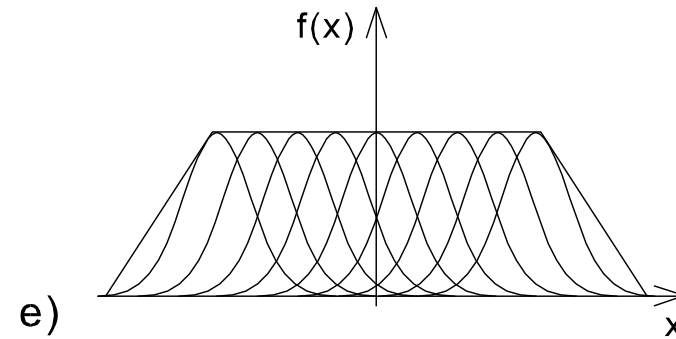
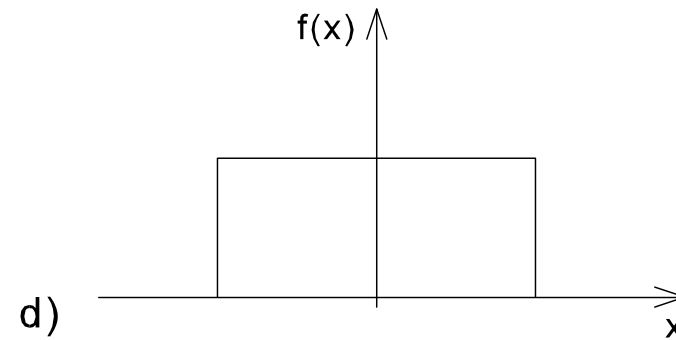
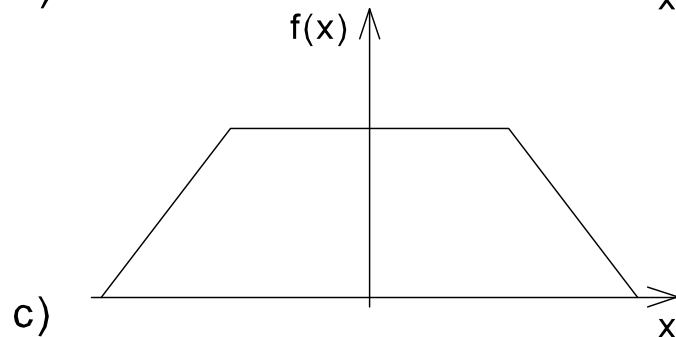
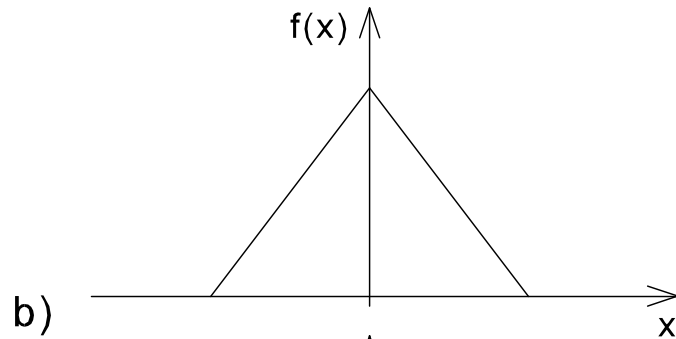
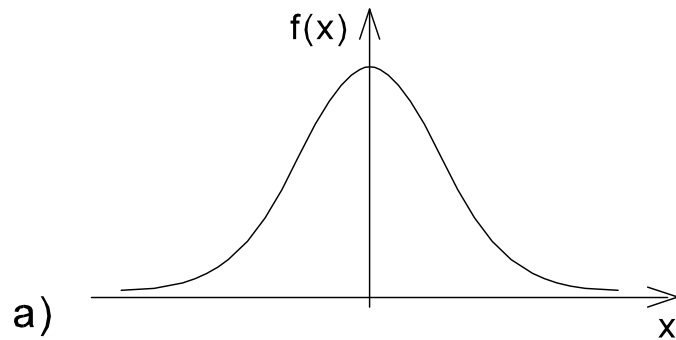
Ausgangssituation:

- Immer genauere Gerätefunktionen gefordert, selbst höchste Fertigungsgenauigkeiten reichen dafür kaum aus
- extreme Fertigungsgenauigkeiten führen zu sehr hohen Kosten
- Justage oder Abstimmarbeiten sind nicht vertretbar (Kosten)
- Lösung des Widerspruches durch Auslesepaarung, selektive Montage oder Anwendung der Reserven in der Tolerierung durch statistische Toleranzrechnung

Kern der statistischen Toleranzrechnung:

- Abmaße in den Toleranzgrenzen sind nicht gleich verteilt
- Extremale Abweichungen sind häufig weniger wahrscheinlich als am Beispiel Normalverteilung
- Die Wahrscheinlichkeit für extremale Kombinationen von Toleranzketten ist per se nicht gleich verteilt und durch die am Rand abnehmenden realen Verteilungen nochmals in der Wahrscheinlichkeit abgeschwächt
- Bei Kenntnis der Verteilungen der auftretenden Abweichungen (erfordert eine Analyse der Fertigung) können diese Reserven durch eine statistische Toleranzbetrachtung erschlossen werden
- Statistische Toleranzbetrachtung basiert auf dem quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Praktisch zu erwartende Verteilungsfunktionen:



a) Normalverteilung b) Dreieckverteilung c) Trapezverteilung d) Rechteckverteilung
e) Entstehung einer Trapezverteilung bei Durchlaufen einer Normalverteilung

4.4.1 Statistische Grundbegriffe

Statistische Grundbegriffe:

Analyse der Fertigung zum Auftreten von bestimmten Maßabweichungen in einer Stichprobe n führt zu einer Häufigkeitsverteilung (Histogramm $h(x)$) für die relative Häufigkeit

$$h_{rel}(x) = \frac{v}{n} = \frac{\text{Anzahl des Eintreffens eines Wertes}}{\text{Stichprobenanzahl}}$$

Dabei können die Maße beliebige Werte annehmen. Sinnvoll ist deshalb eine Aufteilung der Werte in bestimmte Klassen mit einer festzulegenden Klassenbreite. Gezählt wird dann das Wiederfinden eines Maßes in diesen Klassen (diskrete Ereignisse).

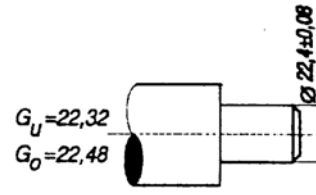
Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung von Verteilungen im Fertigungsprozess am Beispiel einer manuellen Qualitätskontrolle (aus /11/)

Wellenzapfen - Außendurchmesser $22,4 \pm 0,08$ mm

Meßwerte (von 50 Wellen)

(Angegeben sind nur die Nachkommastellen)

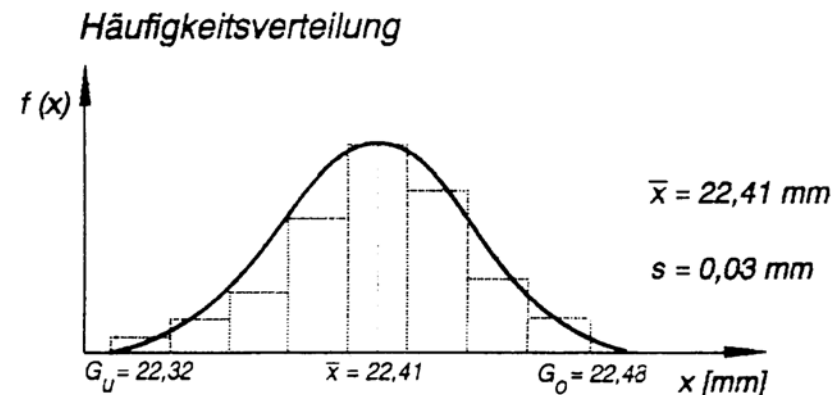
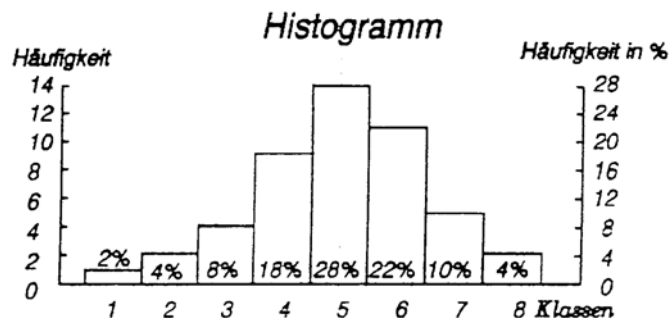
Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert
1	48	6	41	11	43	16	43	21	40	26	41	31	39	36	45	41	37	46	42
2	37	7	42	12	42	17	32	22	38	27	38	32	41	37	42	42	43	47	44
3	38	8	36	13	50*	18	40	23	41	28	43	33	49*	38	36	43	45	48	40
4	45	9	40	14	40	19	39	24	43	29	35	34	41	39	38	44	41	49	38
5	43	10	35	15	39	20	41	25	46	30	42	35	44	40	40	45	39	50	43



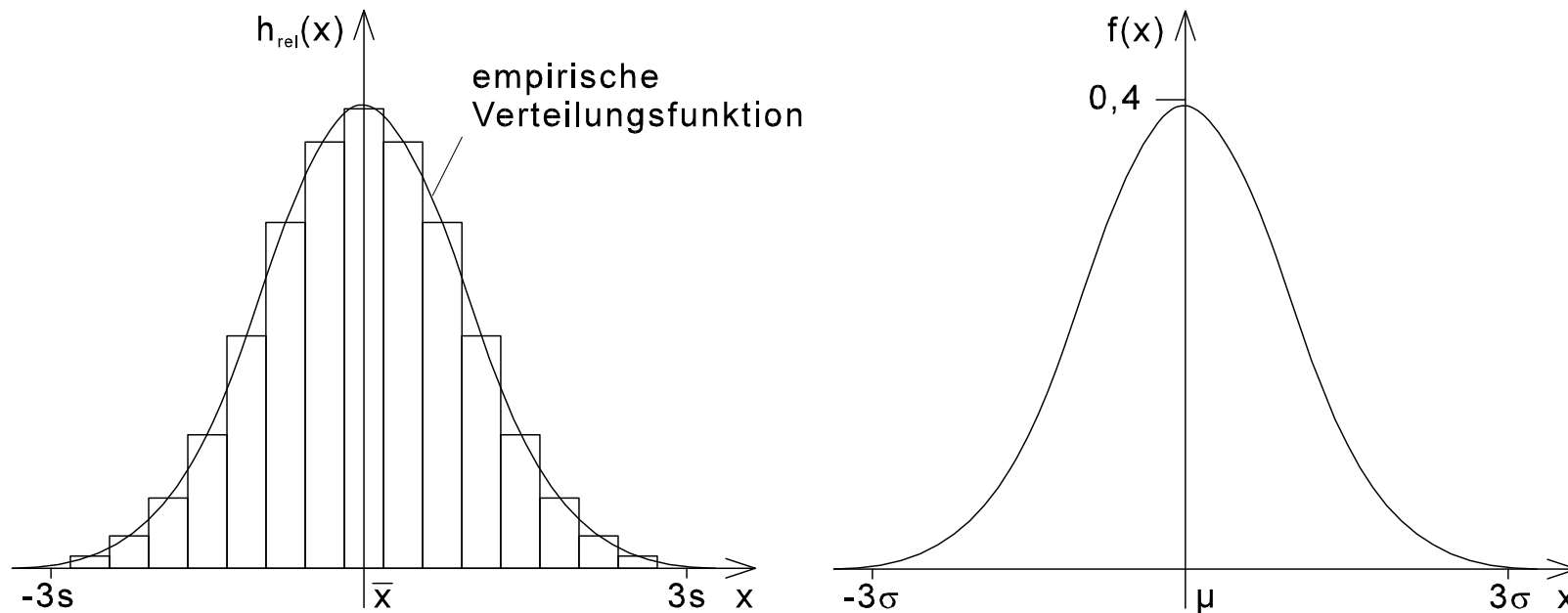
Ergebnis: angenommen 48
verworfen * 2

Strichliste		Σ	%
Klassen	1 22,32 - 22,34	/	2
	2 22,34 - 22,36	//	4
	3 22,36 - 22,38	///	8
	4 22,38 - 22,40	////	18
	5 22,40 - 22,42	////	28
	6 22,42 - 22,44	////	22
	7 22,44 - 22,46	////	10
	8 22,46 - 22,48	//	4
			4 % verworfen

Häufigkeit



Beispiel von Histogrammen und zugehörigen Verteilungsdichtefunktionen



Verteilung schwankt um einen Mittelwert mit einer Standardabweichung.

Bezeichnung:

- Für eine Stichprobe n aus der Grundgesamtheit N aller Daten
Mittelwert $\bar{x}$ Standardabweichung s (empirische Standardabweichung)
- Für die Grundgesamtheit N aller Bauteile bzw. Maße
Mittelwert μ Standardabweichung σ

Statistische Grundbegriffe

Stichprobe n Stück

Grundgesamtheit N

Histogramm $h_{\text{rel}}(x) = \frac{v}{n}$
(relative Häufigkeit)

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow h \rightarrow f$$

Mittelwert:

Schätzwert für:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Standardabweichung/Streuung:

empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Schätzwert für:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

Varianz:

empirische Varianz:

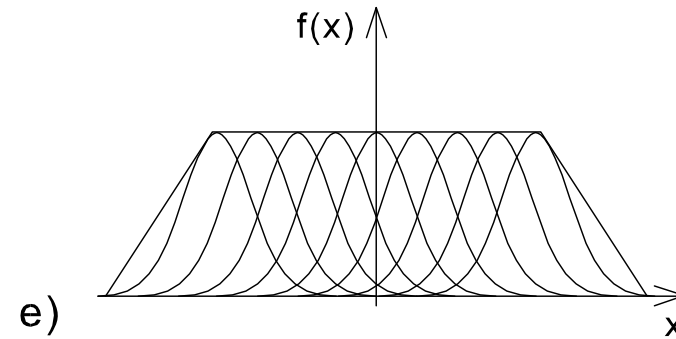
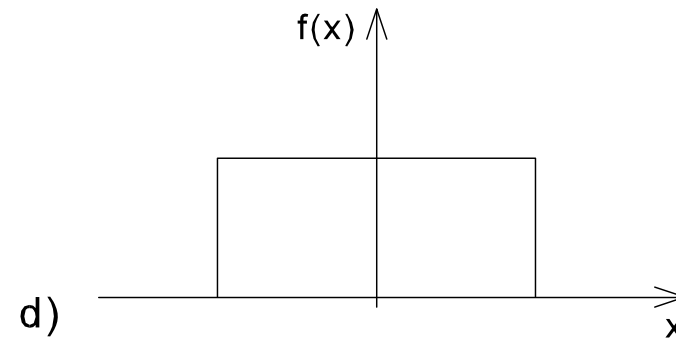
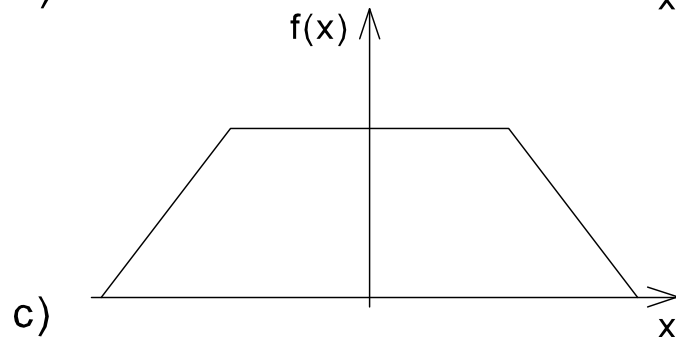
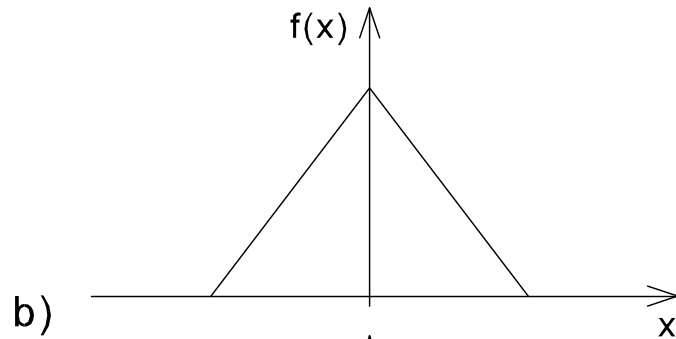
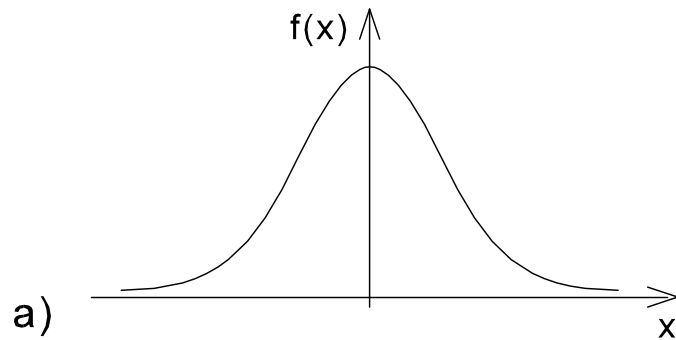
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Schätzwert für:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Für jede Verteilung lassen sich mit Hilfe der angegebenen Gleichungen die Verteilungskenngrößen Mittelwert und Standardabweichung sowie Varianz rechnerisch ermitteln.

Praktisch zu erwartende Verteilungsfunktionen:



a) Normalverteilung b) Dreieckverteilung c) Trapezverteilung d) Rechteckverteilung
e) Entstehung einer Trapezverteilung bei Durchlaufen einer Normalverteilung

Praktisch zu erwartende Verteilungsfunktionen:

- **Rechteckverteilung:** Sie tritt nur bei kleinen Serien und schlecht eingestellter Fertigung bzw. bei Auswahl aus einem Fertigungslos auf, bei dem Randabschnitte als Ausschuss deklariert werden
- **Trapezverteilung:** Sie tritt bei kleineren Serien häufig auf, kann jedoch auch mit durchlaufender Normalverteilung erklärt werden
- **Dreieckverteilungen:** Ebenfalls häufig bei kleinen Serien zu erwarten, die mit hoher Fertigungsqualität realisiert werden
- **Glockenkurve:** Sie tritt bei vielen statistisch wirkenden Einflussgrößen auf, von denen keine dominiert, insbesondere dann, wenn die Stückzahlen größer sind oder bei der Überlagerung verschiedener Verteilungen, z. B. zweier Dreieckverteilungen
- **Normalverteilung:** Die Gauß'sche Normalverteilung bildet in idealer Weise die Einwirkung verschiedenster Einflussfaktoren ohne dominierende Einflussgröße ab. Sie stellt sich bei sehr großen Stückzahlen ohne dominierende Einflüsse ein oder bei Überlagerung, beispielsweise zweier Glockenkurven als Ergebnis dessen.

Normalverteilung als wichtige Verteilung

Eine ganz besondere Rolle nimmt die Normalverteilung ein mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

und $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

mit $f(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und $F(x)$ Verteilungsfunktion.

Bedeutsam sind die Spannweiten $\pm 1 \sigma, \pm 2 \sigma, \pm 3 \sigma; \pm 4 \sigma; \pm 5 \sigma$.

Innerhalb eines Bereiches um μ von $\pm 1 \sigma$ befinden sich 68,26 %

$\pm 2 \sigma$ 95,45 %

$\pm 3 \sigma$ 99,73 %

$\pm 4 \sigma$ 99,994 %

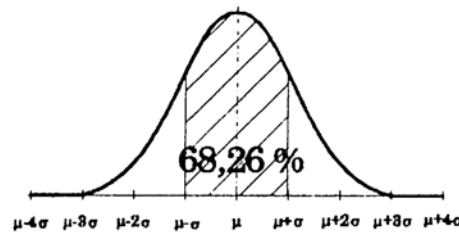
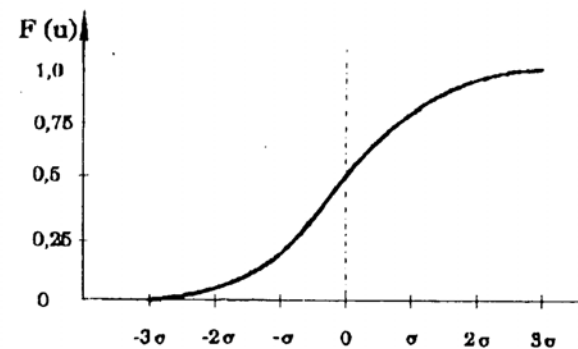
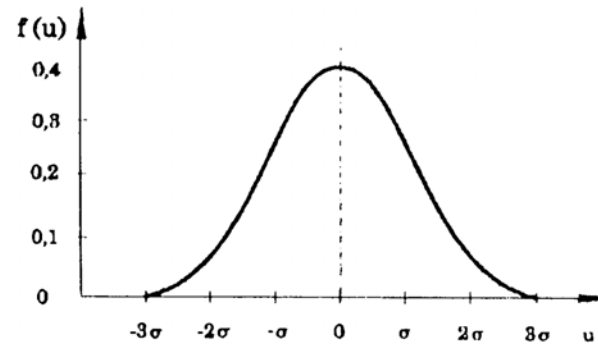
$\pm 5 \sigma$ 99,99994 % aller Maße.

Normalverteilung als wichtige Verteilung

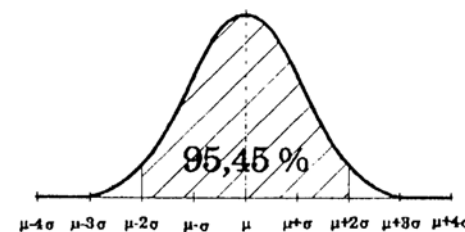
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Verteilungsfunktion

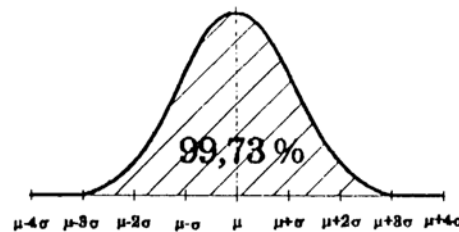
der standardisierten Normalverteilung



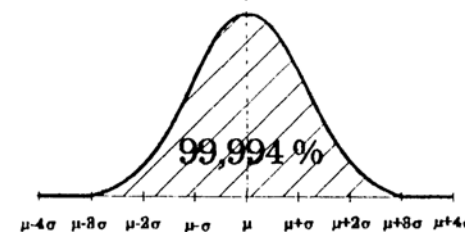
Toleranz = 2σ



Toleranz = 4σ



Toleranz = 6σ



Toleranz = 8σ

4.4.2 Grundlagen der statistischen Toleranzrechnung

Grundlagen der statistischen Toleranzrechnung

Basis der statistischen Toleranzrechnung ist der „**Zentrale Grenzwertsatz**“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik:

- Danach ist eine Zufallsgröße dann annähernd normalverteilt, wenn diese als Summe einer großen Anzahl unabhängiger Summanden aufgefasst werden kann, von denen jeder zur Summe nur einen unbedeutenden Beitrag liefert.

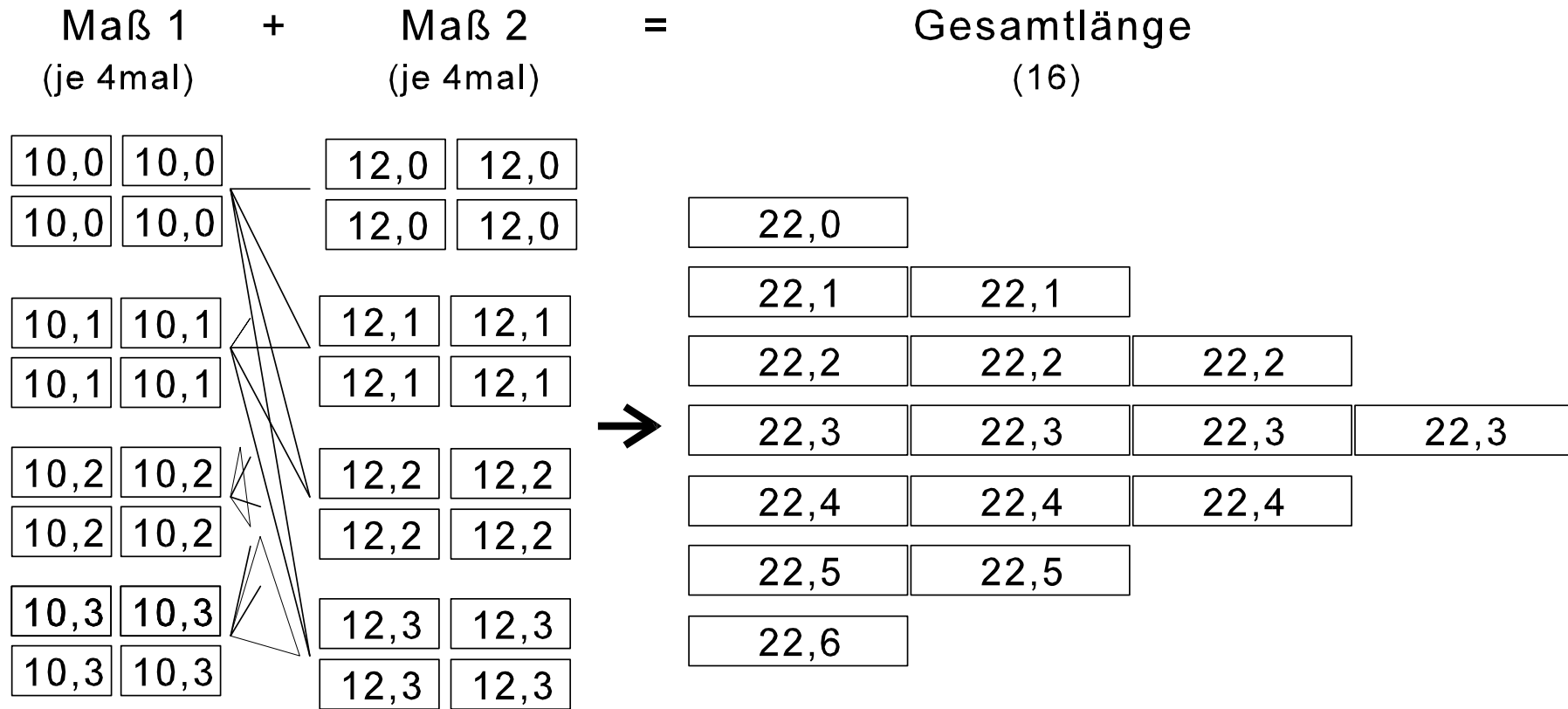
Den Weg zur Normalverteilung zeigt folgendes einfaches Experiment auf:

Betrachtet werden zunächst nur zwei Summanden (also Einflussgrößen). Beide Summanden seien Maße mit Nennmaß 10,0 mm und 12,0 mm, gleichverteilt mit ihren Istmaßen in einem Toleranzbereich von 0 bis + 0,3 mm.

Zu jedem der Maße seien je vier Istmaße 10,0, 10,1, 10,2 und 10,3 mm bzw. 12,0, 12,1, 12,2 und 12,3 mm jeweils viermal als Istwerte vorhanden.

Kombinieren wir nun möglichst gleichmäßig diese gleichverteilten Istmaße, so erhalten wir eine Dreieckverteilung um ein Maß 22,3 mm herum.

Den Weg zur Normalverteilung zeigt folgendes einfaches Experiment:

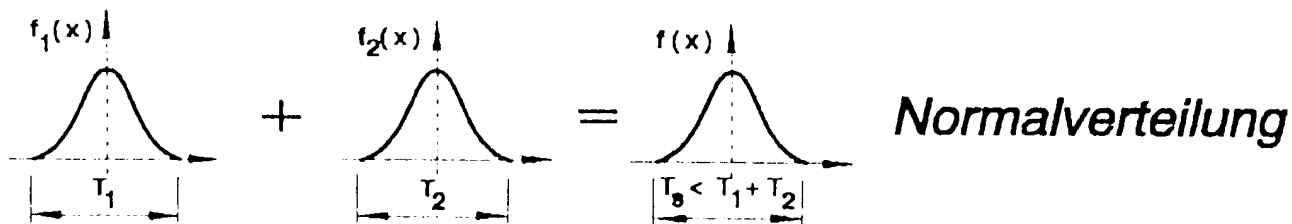
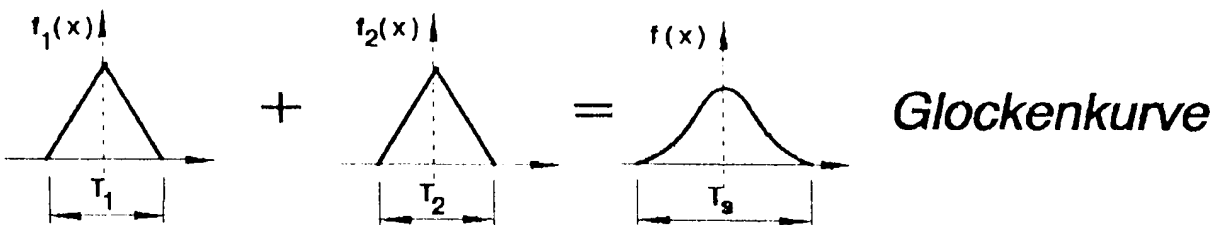
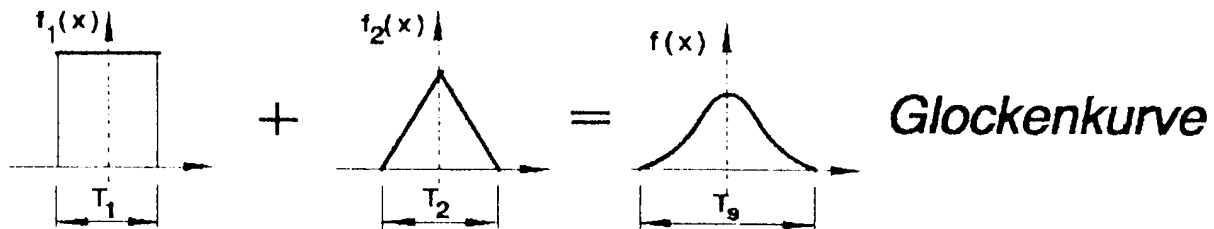
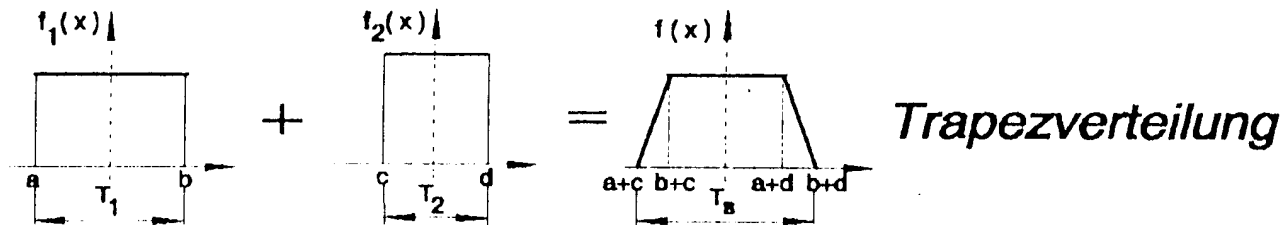
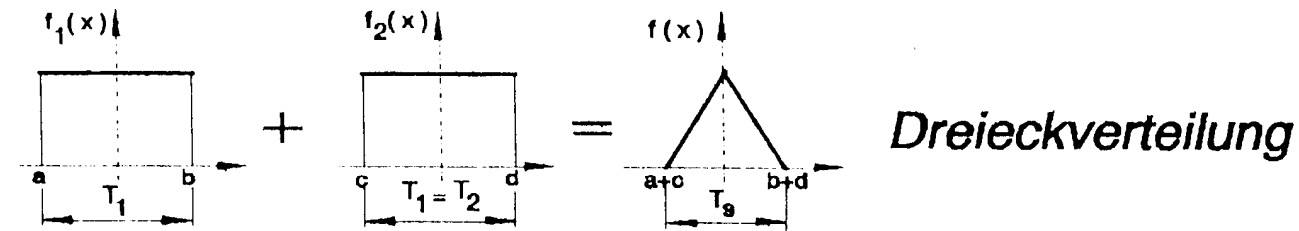


Bei diesem Beispiel ist bereits eine Tendenz zur Normalverteilung erkennbar, auch wenn weder die Anzahl der Einflussgrößen (Summanden) noch die Zahl der Elemente (16 Maße zu jedem Nennmaß) groß ist.

Würde man dieses Experiment weiterführen und zwei Dreieckverteilungen miteinander in gleicher Art und Weise kombinieren entsteht eine Glockenkurve.

Würde man zwei Glockenkurven in gleicher Weise dann miteinander kombinieren geht die Tendenz zur Gauß'schen Normverteilung.

Faltung von Verteilungen Ergebnis



Mathematische Grundbeziehungen für die Überlagerung von Verteilungen ist die sogenannte Faltung mit

$$P(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} P_1(x-y)P_2(y)dy ,$$

wobei $P(x)$ die durch P_1 und P_2 entstehende neue Verteilung darstellt.

Das Ergebnis einer solchen Faltung nähert sich umso mehr einer Normalverteilung an, je öfter gefaltet wird. Mehrfache Faltungen hintereinander streben also gegen eine Normalverteilung.

Die Kenngrößen der neuen Verteilung lassen sich wie folgt berechnen:

$$\mu_{ges} = \sum_{i=1}^N \mu_i \quad (\text{Mittelwertsatz})$$

und

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2} \quad (\text{Fehlerfortpflanzungsgesetz})$$

Es gilt also das quadratische Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{ges}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x2}^2 + \dots$$

4.4.3 Vorgehensweise bei der statistischen Toleranzrechnung

Vorgehensweise bei der statistischen Toleranzrechnung

Voraussetzung:

- Analyse der Fertigung zur Ermittlung tatsächlich auftretender Verteilungen und Verteilungsgesetze der Istmaße
- Analyse der Fertigung erfolgt vorzugsweise über statistische Prozesskontrolle (SPC)
- Für vielgliedrige Ketten ($i \geq 4$)
- Für große Fertigungsstückzahlen ($n \geq 50$)
- Neben den Werten von Nennmaß, Toleranz und Toleranzmittenabweichung sind für jedes Maß die Verteilungsfunktion und daraus abgeleitete Kennwerte erforderlich
- Für nicht endliche Verteilungen, d. h. für Normalverteilungen, ist eine Begrenzung der zu betrachtenden Breite der Verteilung notwendig.

Datenaufbereitung:

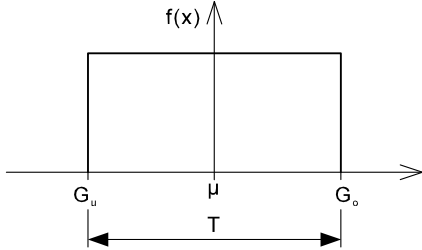
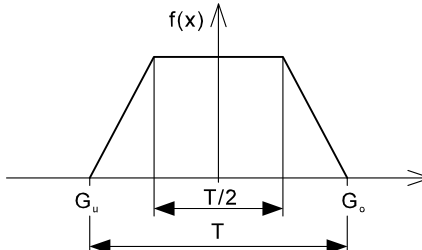
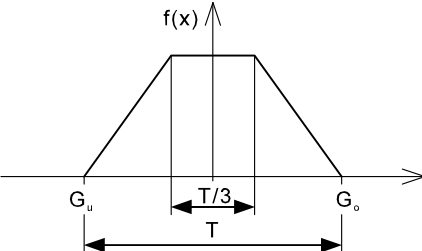
Für die Verteilungen sind Zusammenhänge zwischen der Toleranzbreite T_i bzw. $T_i/2$ und der Standardabweichung σ_i in der Form

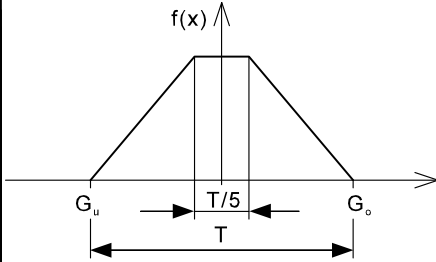
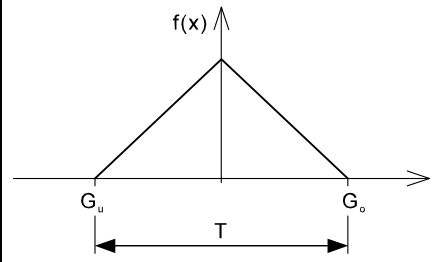
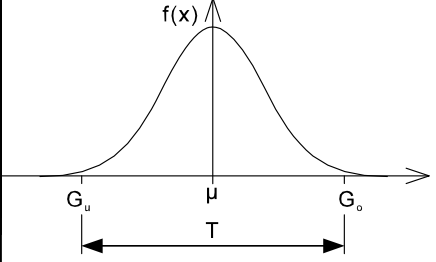
$$T_i = 2h_i \sigma_i \quad \text{bzw.} \quad T_i / 2 = h_i \sigma_i \\ (\text{oder } c_i T_i / 2 = \sigma_i)$$

erforderlich. Diese lassen sich unter Anwendung der bekannten Gleichung für die Standardabweichung im Falle begrenzter Verteilungen ermitteln.

Im Falle der unbegrenzten Normalverteilung ist eine σ -Grenze festzulegen. Üblich ist die $\pm 3 \sigma$ -Grenze, auch andere Grenzen sind jedoch möglich.

Zusammenhänge zwischen verschiedenen Verteilungen und den Parametern zeigen nachfolgende Tabellen

Verteilung		Varianz	Spannweite/ Toleranz
Rechteck- verteilung		$\sigma^2 = \frac{T^2}{12}$	$T = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma = 2 \cdot 1,7321 \cdot \sigma$
Trapez- verteilung 1		$\sigma^2 = \frac{10 \cdot T^2}{192}$	$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{48}{10}} \cdot \sigma = 2 \cdot 2,1909 \cdot \sigma$
Trapez- verteilung 2		$\sigma^2 = \frac{5 \cdot T^2}{1082}$	$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{27}{5}} \cdot \sigma = 2 \cdot 2,3238 \cdot \sigma$

Verteilung		Varianz	Spannweite/ Toleranz
Trapez- verteilung 3		$\sigma^2 = \frac{13 \cdot T^2}{300}$	$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{75}{13}} \cdot \sigma = 2 \cdot 2,4019 \cdot \sigma$
Dreieck- verteilung		$\sigma^2 = \frac{T^2}{124}$	$T = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sigma = 2 \cdot 2,4495 \cdot \sigma$
Normal- verteilung		$\sigma^2 = \frac{T^2}{3612}$	$T = 2 \cdot 3 \cdot \sigma$ (außerhalb der Toleranz liegen 0,27 % aller Teile)

Verteilung	h_i	c_i	Reduktionsfaktor	Statistische Schließ toleranz für $t = 3$
Rechteck- Verteilung	1,7321	0,5774	$r_{RV} = \frac{t}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,7321 \sqrt{\sum T_{si}^2}$
Trapez- Verteilung 1	2,1909	0,4564	$r_{TV_1} = \frac{\sqrt{10} \cdot t}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,36947321 \sqrt{\sum T_{si}^2}$
Trapez- Verteilung 2	2,3238	0,4303	$r_{TV_2} = \frac{\sqrt{5} \cdot t}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,29107321 \sqrt{\sum T_{si}^2}$

Verteilung	h_i	c_i	Reduktionsfaktor	Statistische Schließ toleranz für $t = 3$
Trapez- Verteilung 3	2,4019	0,4163	$r_{TV_3} = \frac{\sqrt{13} \cdot t}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,24907321 \sqrt{\Sigma T_{si}^2}$
Dreieck- Verteilung	2,4495	0,4082	$r_{DV} = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,2247 \sqrt{\Sigma T_{si}^2}$
Normal- Verteilung	3,0000	0,3333	$r_{KV} = \frac{t}{3 \cdot \sqrt{n}}$	$T_S = 1,00007321 \sqrt{\Sigma T_{si}^2}$

Ermittlung des Schließmaßes M_0 :

Die Ermittlung des Schließmaßes M_0 erfolgt auf der Basis des zentralen Grenzwertsatzes und führt zu einer Normalverteilung für das Schließmaß mit

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \sigma_i^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \left(\frac{T_i}{2h_i} \right)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \left(\frac{c_i T_i}{2} \right)^2}$$

bzw. bei linearen Maßketten mit $\left| \frac{\partial f}{\partial M_i} \right| = 1$

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum \sigma_i^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{T_i}{2h_i} \right)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{c_i T_i}{2} \right)^2}$$

Auch diese Verteilung ist als Normalverteilung zunächst nicht begrenzt.

Zur Übertragung der Standardabweichung auf die Schlusstoleranz ist deshalb eine Entscheidung über die σ -Grenzen zu treffen, in Form eines sogenannten Risikofaktors t (Funktion der Student-Verteilung, der abhängig von der gewählten Überschreitungsquote p zu wählen ist). Es gilt

$$\frac{T_0}{2} = t\sigma_0$$

wobei für T Werte von 2, 3 oder 4 üblich sind. D. h. es wird eine $\pm 2\sigma$ -, $\pm 3\sigma$ - oder $\pm 4\sigma$ -Grenze für das Schließmaß betrachtet.

Unter Berücksichtigung des zu wählenden Risikofaktors t ergibt sich damit

$$\sigma_0 = \frac{T_0}{2t} = \sqrt{\sum \left(\frac{T_i}{2h_i} \right)^2}$$

sowie für die Schlusstoleranz

$$T_{0 \text{ stat}} = t \sqrt{\sum \left(\frac{T_i}{h_i} \right)^2} = t \sqrt{\sum (c_i T_i)^2}$$

mit den bekannten Faktoren h_i bzw. c_i für die enthaltenen Verteilungen.

Bewertung des Ergebnisses:

Das Ergebnis der statistischen Toleranzrechnung ist eine Normalverteilung für das Schließmaß, die entsprechend dem gewählten Risikofaktor t begrenzt wird (Abschneiden der gegen unendlich gehenden Ränder). Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über die dadurch bedingte Überschreitungs- bzw. Ausfallquote p

p %	31,7	10	5	4,55	1	0,5	0,27	0,1
t	1	1,65	1,96	2	2,58	2,81	3	3,37

Diese Einschränkung der Normalverteilung und die Akzeptanz einer solchen geringen Überschreitungsquote stellt den Kerngedanken der statistischen Toleranzrechnung dar. Unter Akzeptanz einer solchen Überschreitungsquote ergeben sich damit deutlich kleinere Schließtoleranzen bzw. werden dadurch deutlich größere Einzeltoleranzen ermöglicht als bei der Extremwertmethode.

Sonderfall:

Alle Einzelmaße sind **normalverteilt** ($h_i = 3$ und $T_i = 6\sigma_i$).

Damit folgt für eine Überschreitungsquote $p = 0,27 \%$ ($t = 3$ entsprechend $\pm 3\sigma$ der Normalverteilung)

$$T_{0 \text{ stat}} = \sqrt{\sum T_i^2} \quad .$$

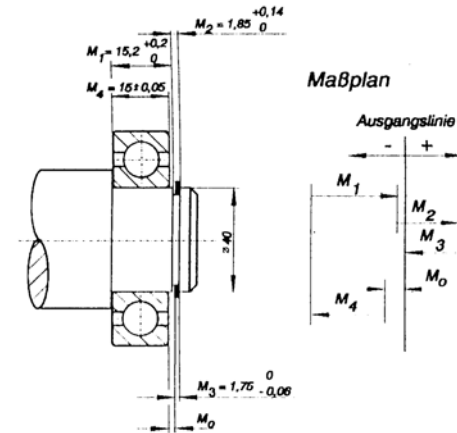
Praktische Vorgehensweise:

Man nutzt die gleiche formalisierte Vorgehensweise wie bei der arithmetischen Toleranzrechnung. Die Tabelle wird jedoch um je eine Spalte zum Verteilungscharakter und zu den Werten h_i oder c_i erweitert.

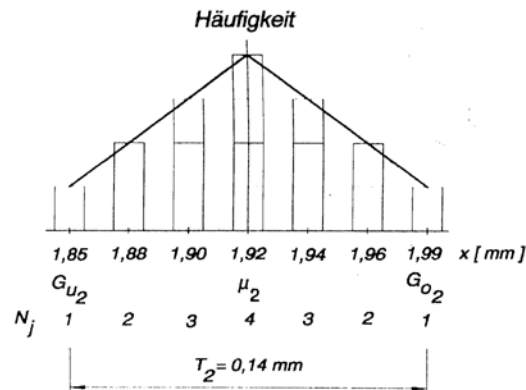
Statt der Beziehung $T_0 = \sum T_i$ gelten jedoch obige Gleichungen für $T_{0 \text{ stat}}$.

Beispiel einer statistischen Toleranzrechnung

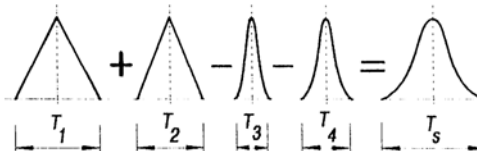
Montagesituation:



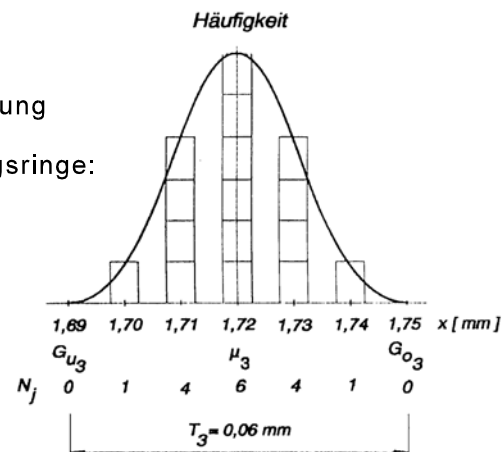
Dreiecksverteilung der
Einstichbreite:



Überlagerung



Normalverteilung
der Breite
der Sicherungsringe:



Die Schritte 1-3 erfolgen analog der Extremwertmethode, für die Tabelle ergibt sich nun neu:

4. Tabelle

i	M_i	N_i	K_i	E_{ci}	T_i	Verteilung	h_i	t
0	?	?	-1	?	?	Normal		3,0
1	$15,2^{+0,2}$	15,2	+1	+0,1	0,2	Dreieck	2,4495	
2	$1,85^{+0,14}$	1,85	+1	+0,07	0,14	Dreieck	2,4495	
3	$1,75^{-0,06}$	1,75	-1	-0,03	0,06	Normal	3,0	
4	$15,0 \pm 0,05$	15	-1	0	0,1	Normal	3,0	

5. Gleichungen

$$N_0 = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^4 k_i N_i = - \frac{1}{-1} (1 \cdot 15,2 + 1 \cdot 1,85 - 1 \cdot 1,75 - 1 \cdot 15,0) = 0,3$$

$$E_{\text{CO}} = - \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^4 k_i E_{ci} = - \frac{1}{-1} (1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,07 - 1 \cdot (-0,03) - 0) = 0,2$$

$$T_{0 \text{ stat}} = t \sqrt{\sum \left(\frac{T_i}{h_i} \right)^2} = 3,0 \sqrt{\left(\frac{0,2}{2,4495} \right)^2 + \left(\frac{0,14}{2,4495} \right)^2 + \left(\frac{0,06}{3} \right)^2 + \left(\frac{0,1}{3} \right)^2}$$

$$T_{0 \text{ stat}} = 0,32$$

$$M_{0 \text{ stat}} = N_0 + E_{\text{CO}} \pm \frac{T_{0 \text{ stat}}}{2} = 0,3 + 0,2 \pm 0,16 = 0,5 \pm 0,16$$

Statistische Toleranzrechnung - Vorlesungsbeispiel

Simulation einer Statistischen Toleranzrechnung WS 2011/12

Ergebnisse

Baugruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+ M ₁	15,30	15,27	15,20	15,33	15,40	15,33	15,36	15,30	15,30	15,24	15,36	15,33	15,27	15,27	15,24	15,30
+ M ₂	1,94	1,99	1,92	1,96	1,92	1,90	1,90	1,88	1,88	1,96	1,94	1,92	1,92	1,90	1,85	1,94
- M ₃	1,71	1,73	1,73	1,72	1,72	1,71	1,71	1,73	1,74	1,71	1,72	1,70	1,72	1,72	1,72	1,73
- M ₄	15,00	14,99	15,00	15,00	14,99	15,00	15,01	15,01	14,99	15,03	14,99	15,01	14,97	15,01	15,00	15,00
= Schließmaß M ₀	0,53	0,54	0,39	0,57	0,61	0,52	0,54	0,44	0,45	0,46	0,59	0,54	0,50	0,44	0,37	0,51

Größtmaß $M_{0 \max} = 0,61$

Kleinstmaß $M_{0 \min} = 0,37$

Schließtoleranz $T_0 = M_{0 \max} - M_{0 \min} = 0,24$

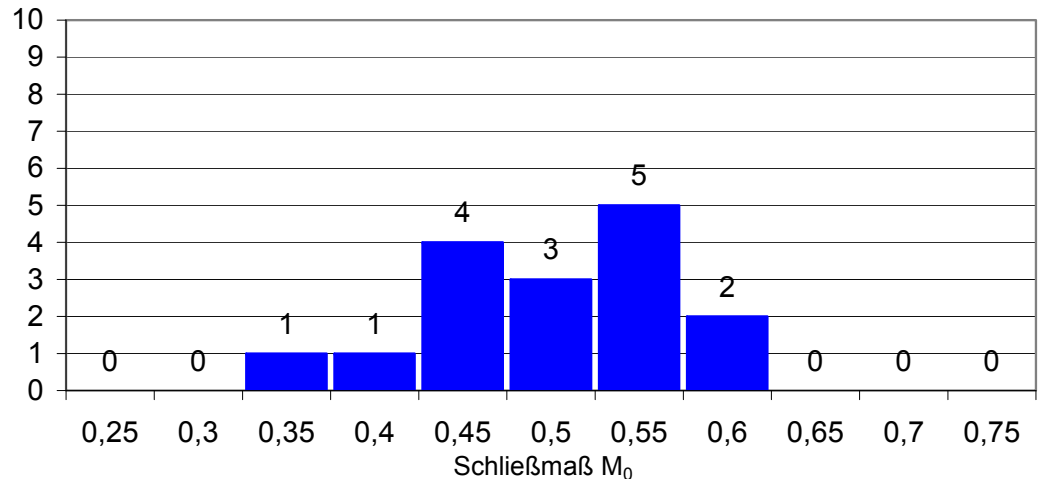
Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{i} \sum M_{0i} = 0,5000$

Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{i} \sum (M_{0i} - \bar{x})^2} = 0,0669$

$3s = 0,2007$

Anzahl n

Häufigkeitsverteilung



Statistische Toleranzrechnung - Vorlesungsbeispiel

Simulation einer Statistischen Toleranzrechnung WS 2006/07

Ergebnisse

Baugruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+ M ₁	15,36	15,33	15,24	15,30	15,24	15,20	15,40	15,27	15,36	15,30	15,27	15,33	15,30	15,30	15,27	15,33
+ M ₂	1,90	1,88	1,94	1,92	1,96	1,92	1,92	1,92	1,94	1,88	1,94	1,99	1,85	1,96	1,90	1,90
- M ₃	1,73	1,72	1,71	1,71	1,74	1,72	1,72	1,71	1,73	1,70	1,72	1,72	1,73	1,73	1,71	1,72
- M ₄	15,00	14,97	14,99	15,01	15,00	15,00	15,00	14,99	14,99	15,01	15,00	15,01	15,00	15,03	15,01	14,99
= Schließmaß M ₀	0,53	0,52	0,48	0,50	0,46	0,40	0,60	0,49	0,58	0,47	0,49	0,59	0,42	0,50	0,45	0,52

Größtmaß $M_{0 \max} = 0,60$

Kleinstmaß $M_{0 \min} = 0,40$

Schließtoleranz $T_0 = M_{0 \min} - M_{0 \max} = 0,20$

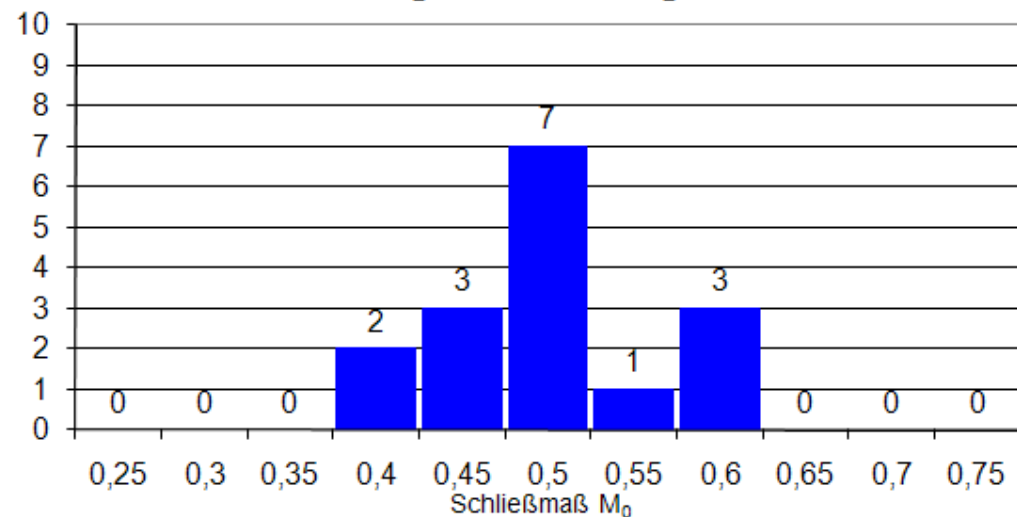
Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{i} \sum M_{0i} = 0,5000$

Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{i} \sum (M_{0i} - \bar{x})^2} = 0,0549$

3 s = 0,165

Anzahl n

Häufigkeitsverteilung



6. Hinweise:

- Die angenommenen Verteilungen sind für die Maße 1 und 2 Dreieckverteilungen, für die Maße 3 und 4 Normalverteilungen
- Dreieckverteilungen wurden für spanend zu fertigende Maße gewählt, Normalverteilungen für Normteile aus großen Serien

Ergebnis: Die statistisch ermittelte Schließ toleranz liegt hier bei nur 64 % derjenigen nach der arithmetischen Toleranzrechnung.

Bewertung der Ergebnisse:

Vorteile:

Die statistische Schlusstoleranz ist häufig um 50 ... 60 % kleiner als die lineare. Eine lineare Schlusstoleranz kann folglich um den Reduktionsfaktor r mit

$$r = \frac{T_{0 \text{ stat}}}{T_{0 \text{ arithm}}}$$

verkleinert, bzw. alle Einzeltoleranzen T_i können um einen Erhöhungsfaktor e mit $e = 1/r$ vergrößert werden. Tabelle 4.7 enthält für den Sonderfall, dass alle Einzelmaße gleiche Verteilungen und gleich große Toleranzen besitzen, die Faktoren r und e .

Anzahl Einzelmaße k	2		4		6		8		10	
Reduktions- u. Erweiterungsfaktor	r	e	r	e	r	e	r	e	r	e
Rechteck-Verteilung			0,866	1,154	0,707	1,414	0,612	1,633	0,547	1,828
Trapez-Verteilung 1	0,968	1,033	0,684	1,461	0,559	1,788	0,484	2,066	0,433	2,309
Trapez-Verteilung 2	0,912	1,096	0,645	1,550	0,527	1,897	0,456	2,192	0,418	2,450
Trapez-Verteilung 3	0,833	1,132	0,624	1,602	0,509	1,964	0,441	2,267	0,394	2,538
Dreieck-Verteilung	0,866	1,154	0,612	1,633	0,499	2,004	0,433	2,309	0,387	2,583
Normal-Verteilung	0,707	1,414	0,500	2,000	0,408	2,450	0,353	2,832	0,316	3,164

Mögliche Nutzung dieser Reserven:

- Die Einsparung im Schließmaß könnte in Form einer Erhöhung der Einzeltoleranzen zur Senkung von Fertigungskosten genutzt werden.
- Da die Fertigungskosten der Normteile kaum zu beeinflussen sind, kommt hier nur die Erweiterung der Maße 1 und 2 in Frage.
- Führt man eine Rechnung mit $e = 1/r$ aus,
folgt beispielsweise für T_1 statt 0,2 mm 0,32 mm und
für T_2 statt 0,14 mm 0,23 mm bei annähernd gleichem Erweiterungsfaktor.

Nachteile:

Es entsteht ein wählbarer Prozentsatz p der **Überschreitungsquote** für das Schlussmaß.

Bei Montageprozessen bedeutet dies einen zusätzlichen Prüfaufwand, jedoch nicht zwingend das Auftreten vom Ausschuss, da eine Neumontage wieder zielführend sein könnte.

4.5 Ermittlung statistischer Merkmale im Fertigungsprozess

Ermittlung statistischer Merkmale im Fertigungsprozess

Durch die statistische Prozesskontrolle (SPC) wird heute bei den meisten Massenfertigungen eine ständige Analyse der Fertigung vorgenommen. Die für die statistische Toleranzrechnung erforderlichen Parameter liegen damit automatisch vor.

Vorgehensweise:

- Erfassung der Aufträge und Istmaße, Klassifizierung in Klassen festzulegender Breite
- Ermittlung der Häufigkeit des Auftretens bestimmter Klassenmerkmale
- Ableitung von Histogrammen zu der Klassenhäufigkeit
- Übergang zu empirischen Verteilungsfunktionen
- Annäherung durch analytische Gleichungen

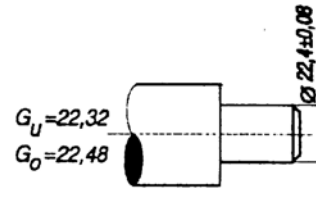
Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung von Verteilungen im Fertigungsprozess am Beispiel einer manuellen Qualitätskontrolle (aus /11/)

Wellenzapfen - Außendurchmesser $22,4 \pm 0,08$ mm

Meßwerte (von 50 Wellen)

(Angegeben sind nur die Nachkommastellen)

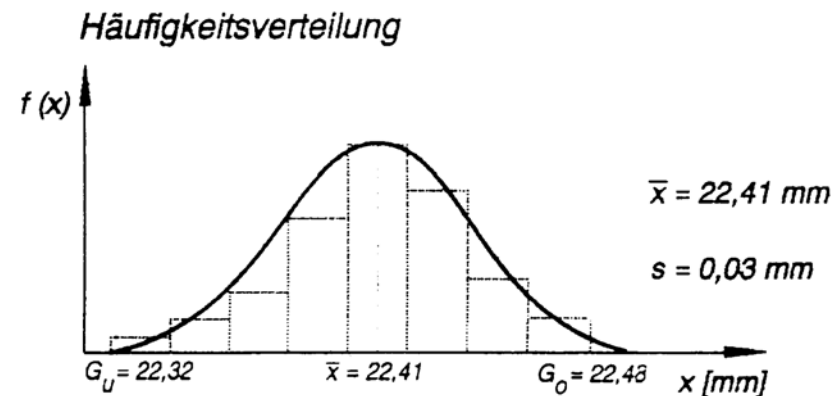
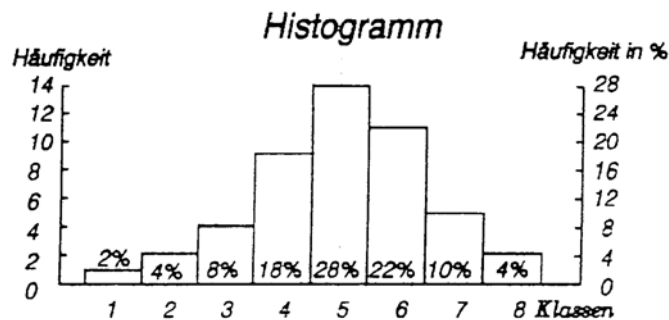
Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert	Nr	Wert
1	48	6	41	11	43	16	43	21	40	26	41	31	39	36	45	41	37	46	42
2	37	7	42	12	42	17	32	22	38	27	38	32	41	37	42	42	43	47	44
3	38	8	36	13	50*	18	40	23	41	28	43	33	49*	38	36	43	45	48	40
4	45	9	40	14	40	19	39	24	43	29	35	34	41	39	38	44	41	49	38
5	43	10	35	15	39	20	41	25	46	30	42	35	44	40	40	45	39	50	43



Ergebnis: angenommen 48
verworfen * 2

Strichliste		Σ	%
Klassen	1 22,32 - 22,34 /	1	2
	2 22,34 - 22,36 //	2	4
	3 22,36 - 22,38 ///	4	8
	4 22,38 - 22,40 /////	9	18
	5 22,40 - 22,42 //////////	14	28
	6 22,42 - 22,44 //////////	11	22
	7 22,44 - 22,46 /////	5	10
	8 22,46 - 22,48 //	2	4
			4 % verworfen

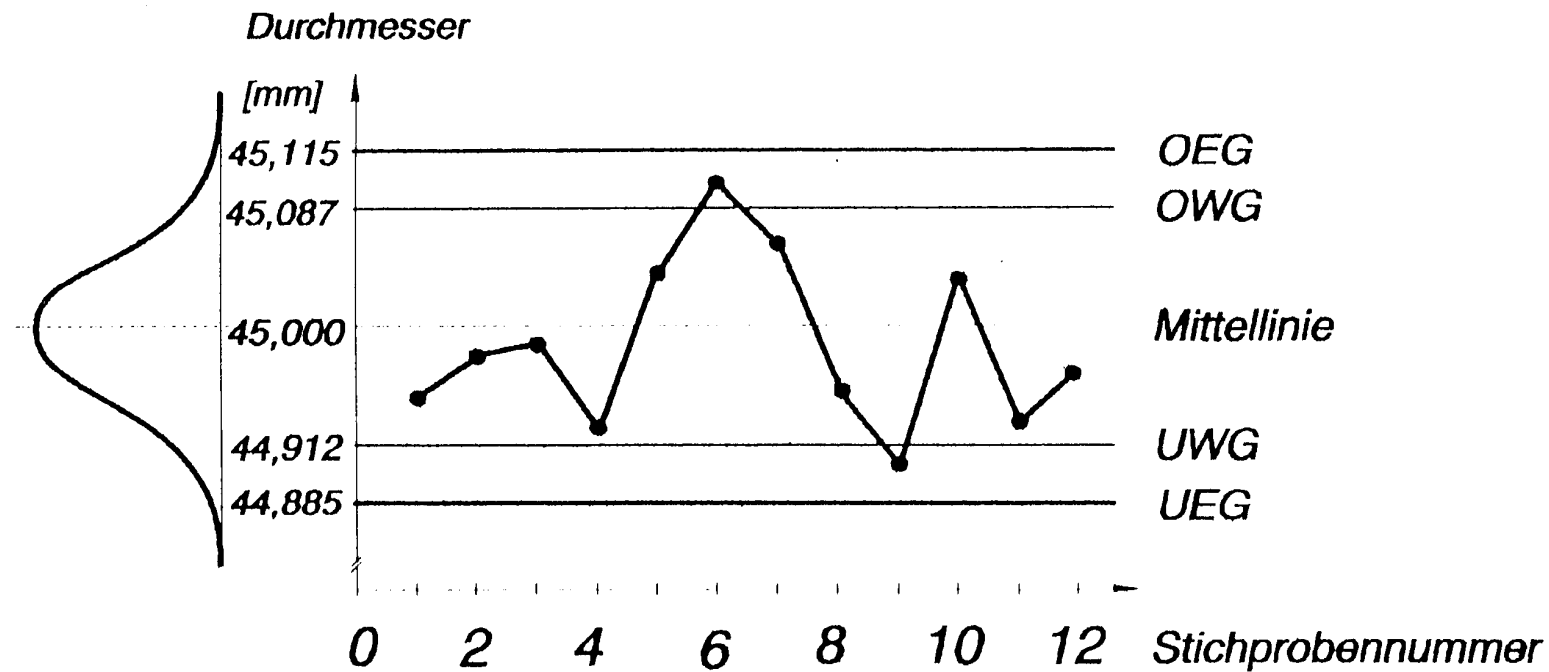
Häufigkeit



Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung der Verteilungen mittels SPC-Messwerterfassungssystemen (aus /11/)

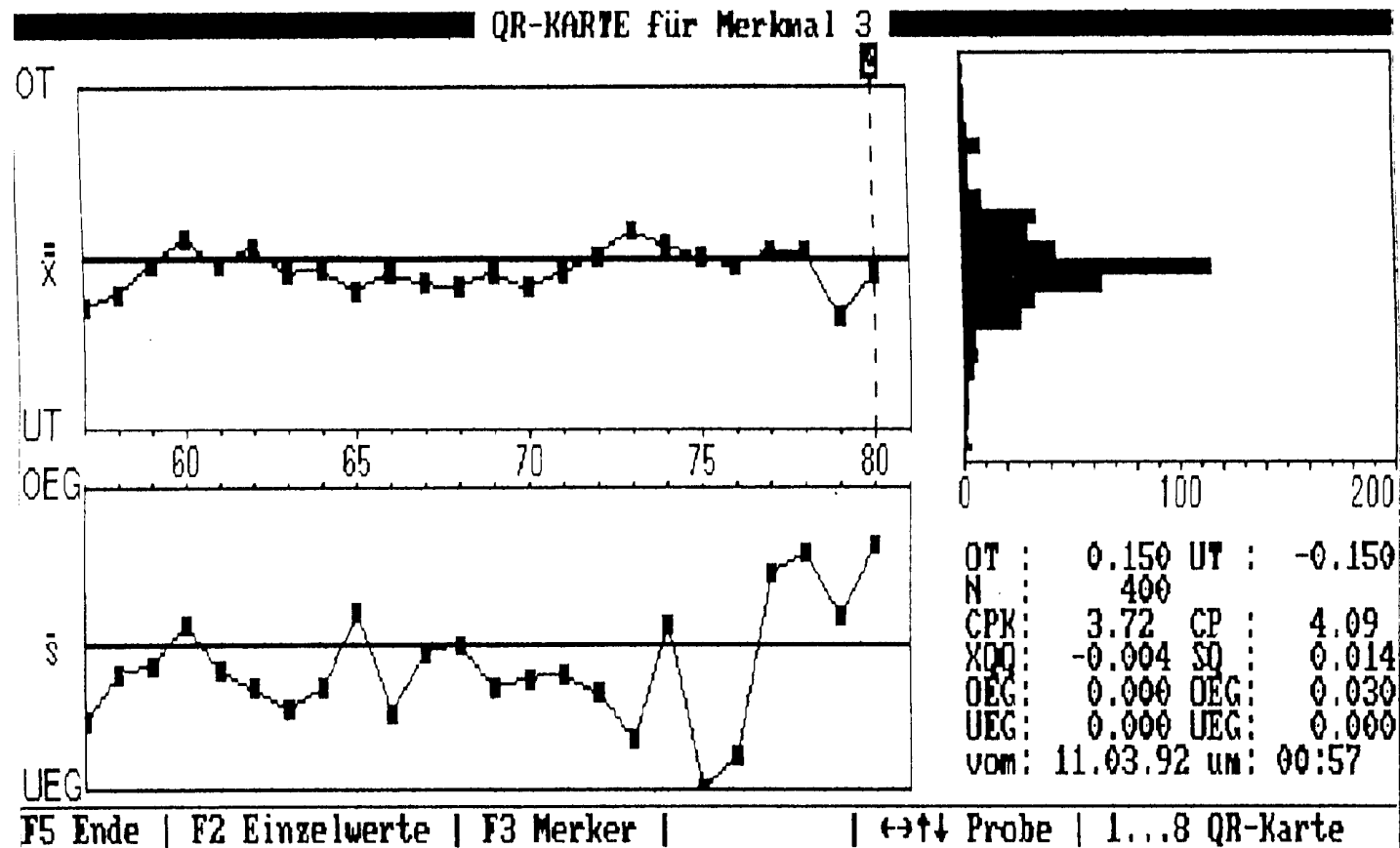
Prinzip der Qualitätsregelkarte

Mittelwert - QRK



Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung der Verteilungen mittels SPC-Messwerterfassungssystemen (aus 11)

Datenausgabe eines SPC-Messwerterfassungssystems



Zusätzliche Kenngrößen aus der Fertigung

Kenngrößen für die Stabilität des Fertigungsprozesses sind

- die **Prozessfähigkeit** $C_p = \frac{T}{6 \hat{s}} \geq 1$,

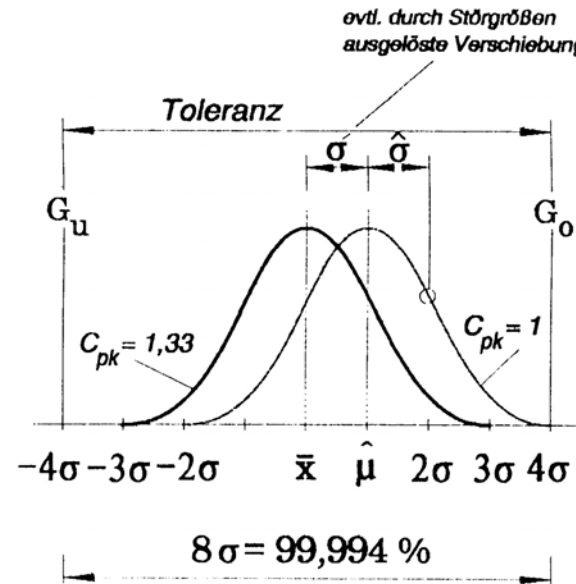
die zum Ausdruck bringt, ob die 6σ - bzw. $6s$ -Grenze kleiner als die Toleranzfeldbreite T ist. Dann ist der Prozess **fähig**, in 99,73 % der Maße die Toleranz einzuhalten bzw. liefert 0,27 % Überschreitungsquote

- der **Prozessfähigkeitsindex** $C_{pk} = \frac{\min (G - \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{x}} - K)}{3 \hat{s}} \geq 1$,

der zusätzlich die $\pm 3\sigma$ - bzw. $\pm 3s$ -Grenze an den Mittelwert der Messwerte bindet, um ein Wegdriften zu erkennen.

(In der Automobilindustrie wird $C_{pk} = 1,67$ bzw. die $\pm 5\sigma$ -Grenze häufig genutzt, d. h. 99,99994 % aller Istmaße liegen innerhalb des Toleranzbandes.)

Zusammenhang Prozessfähigkeit und Prozessfähigkeitsindex (aus 11)



T	C_p
6 σ	1
8 σ	1,33
10 σ	1,66
12 σ	2
18 σ	3

