



4. Übung – Bilanzrelationen

Aufgabe 4.1:

Leiten Sie die in der Vorlesung bereits hergeleitete lokale EULERSche Form der allgemeinen Bilanzgleichung nochmals her.

Benutzen Sie hierfür die lokale LAGRANGESche Form und die Relationen zwischen $g \leftrightarrow G$, $p \leftrightarrow P$ und $h \leftrightarrow H$.

Aufgabe 4.2: Gegeben sind ein Skalarfeld und ein Vektorfeld:

$$\alpha(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3,$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = x_2 x_3 \mathbf{e}_1 + x_3 x_1 \mathbf{e}_2 + x_1 x_2 \mathbf{e}_3.$$

Bestimmen Sie

- (a) den Gradienten des Skalarfelds,
- (b) den Gradienten und die Divergenz des Vektorfelds.

Aufgabe 4.3: Bestimmen Sie die Transportmechanismen zwischen

- (a) dem Linienelement in der Referenzkonfiguration, $d\mathbf{X}$, und dem Linienelement in der aktuellen Konfiguration, $d\mathbf{x}$,
- (b) dem orientierten Flächenelement in der Referenzkonfiguration, $d\mathbf{A}$, und dem orientierten Flächenelement in der aktuellen Konfiguration, $d\mathbf{a}$,
- (c) dem Volumenelement in der Referenzkonfiguration, dV , und dem Volumenelement in der aktuellen Konfiguration, $d\mathbf{v}$, und
- (d) dem Gradientenoperator in der Referenzkonfiguration, $\text{Grad } \psi$, und dem Gradientenoperator in der aktuellen Konfiguration, $\text{grad } \psi$.

Aufgabe 4.4: Zeigen Sie, dass für die Zeitableitungen eines Linienelements, $d\mathbf{x}$, eines Flächenelements, $d\mathbf{a}$ und eines Volumenelements, $d\mathbf{v}$, die folgenden Transporttheoreme gelten:

- (a) $d\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} d\mathbf{x}$,
- (b) $d\dot{\mathbf{a}} = [(\mathbf{L} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I} - \mathbf{L}^T] d\mathbf{a} = [(\text{div } \dot{\mathbf{x}})\mathbf{I} - \mathbf{L}^T] d\mathbf{a}$,
- (c) $d\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{I}) d\mathbf{v} = (\text{div } \dot{\mathbf{x}}) d\mathbf{v}$.