

# Kapitel 1: Grundlagen der Kontinuumsmechanik im eindimensionalen Kontext

## 1. Wie definiert man ein Kontinuum?

- mathematische Idealisierung der real auftretenden (diskontinuierlichen) Mikrostruktur der Materie
- dient Analyse von makroskopischen Problemen im Bereich großer Skalen
- unendliche Anzahl an Massenpunkten
- Deformation an einem Punkt (nicht: eine Deformationsgröße)

## 2. Wozu dient das phänomenologische Konzept?

Mathematische Beschreibung von physikalischen Betrachtungen von phänomenologischen Eigenschaften (makroskopische Eigenschaften)

Phänomenologische Größen: Temperatur, Energie, Verzerrung, Spannung, ...

## 3. Welche sind die Fragenstellung der Kontinuumsmechanik? Woraus basieren diese und wie kann man diese Fragen beantworten?

- Beschreibung der endlichen Deformation eines Kontinuums mit mathematischen Werkzeugen  
→ Kinematik: Behandelt die Geometrie der Bewegung
- Frage nach physikalischen Gesetzen welche das allgemeine Verhalten des Kontinuums beschreiben  
→ Bilanzsätze = Grundaxiome der Mechanik gelten für alle Körper: Masse, Impuls, Drall, Entropie, Energie
- Verhalten der Materialien auf externe Einflüsse (Bsp: Krafteinwirkung, Temperatur)  
→ Materialtheorie (charakterisiert individuelles makroskopische Materialverhalten)

## 4. Wie validiert man ein phänomenologisches mathematisches Konzept?

Durchführung von Experimenten und Vergleichen der Ergebnisse

## 5. Welche physikalischen Zustände können mit einem kontinuumsmechanischen Ansatz beschrieben werden?

Festkörper: Referenzkonfiguration bekannt

Fluid: Referenzkonfiguration unbekannt

Gas: Referenzkonfiguration unbekannt aber homogene Verteilung?

## 6. Wie definiert man die Bewegungs-/Platzierungsfunktion?

Bewegungsfunktion  $\chi$  = Platzierungsfunktion: ordnet jedem materiellen Punkt  $P$  mit Ausgangsposition  $X$  eine Position  $x$  im Raum in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  zu

$$x = \chi(P, t) = \chi(X, t)$$

Verschiebevektor = Differenz zwischen  $X$  und  $x$ :

$$u = x - X$$

## 7. Wie definiert man den Deformationsgradienten?

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}$$

- $F$  verbindet aktuelle und referentielle Betrachtungsweise
- dimensionslos
- $F > 0$ : Orientierung des Koordinatensystems bleibt bei Deformation erhalten
- $F = 1$ : an diesem Punkt keine Deformation (aber: keine Aussage über Rotation oder Translation)
- $F > 1$ : Extension
- $F < 1$ : Kompression

8. Wie definiert man die Verzerrung?

Dehnung/Normalverzerrung  $e$  = Maß der relativen Elongation:

$$\begin{aligned} e &= F - 1 \\ &= \frac{dx}{dX} - 1 = \frac{dx - dX}{dX} \\ e &\in (-1, \infty) \text{ da } F > 0 \end{aligned}$$

9. Wie sind die Verzerrungsmaße definiert?

- Normalverzerrung/Cauchy-Verzerrungsmaß

$$e = F - 1$$

- Lagrange'sches Verzerrungsmaß

$$E = \frac{1}{2}(c - 1) = \frac{1}{2}(F^2 - 1)$$

Cauchy-Green'sche Verzerrungsskalar:  $c = F^2$

Eigenschaften (ähnlich  $F$ ):  $c > 0$ , bei  $c = 1 \rightarrow F = 1$

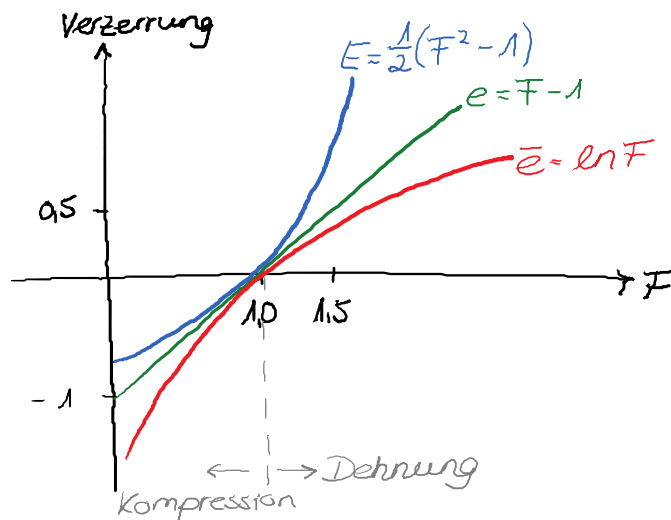
- Logarithmisches Verzerrungsmaß

$$\bar{e} = \ln F$$

10. Wie unterscheiden sich die Verzerrungsmaße bei einer kleinen Deformation?

Verzerrungsmaße für kleine Deformationen ähnlich ( $< 2 - 5\%$ )

- $E = \frac{1}{2}(F^2 - 1) = \frac{1}{2}(F + 1)(F - 1) = \frac{1}{2}(e + 2)e = \frac{1}{2}(e^2 + 2e) = e + \frac{1}{2}e^2$   
 $E \approx e$ , wenn  $e \approx 0 \rightarrow$  kleine Deformationen
- $\bar{e} = \ln F = F - \frac{1}{2}F^2 + \sigma(F^3)$  (Reihenentwicklung)  
 $= \left(F - 1 + 1 - \frac{1}{2}F^2\right) \dots = e - \left(\frac{1}{2}F^2 - 1\right)$   
 $\bar{e} \approx e$ , wenn  $e \approx 0$



11. Wie ist die Verschiebung definiert?

$$u(X, t) = x(X, t) - X$$

$$e = F - 1 = \nabla u$$

$$E = \nabla u + \frac{1}{2}(\nabla u)^2$$

12. Welche alternativen Namen gibt es für die Lagrange'sche und Euler'sche Betrachtungsweise?

| <u>Lagrange'sche Betrachtungsweise</u>                        | <u>Euler'sche Betrachtungsweise</u>                                    |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| materiell - Festkörper                                        | räumlich - Fluid                                                       |
| Referenzkonfiguration „bekannt“                               | Referenzkonfiguration nicht möglich                                    |
| Deformation kann bzgl. eines Referenzpunktes definiert werden | materieller Punkt zu verfolgen nicht möglich                           |
| Betrachtung der Bahn eines referentiellen Punktes             | Betrachtet einen Punkt im Raum, an dem materielle Punkte vorbeiwandern |

13. Wie ist die Lagrange'sche mit der Euler'schen Betrachtungsweise verknüpft?

$$dx = \frac{\partial x}{\partial X} \cdot dX = F \cdot dX$$

oder:

$$dX = F^{-1} dx$$

14. Welche Anteile hat die materielle Zeitableitung?

- totale Zeitableitung = materielle Zeitableitung
- Änderung einer Größe, die ein Beobachter feststellt, wenn er sich mit dem Punkt mitbewegt

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{d\varphi(x,t)}{dt} = \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{dt} \\
&= \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \cdot v(X,t) \\
\frac{d\varphi}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}}_{\text{lokaler Teil}} + \underbrace{\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \cdot v(X,t)}_{\text{konvektiver Teil}}
\end{aligned}$$

- Lokaler Anteil: beschreibt zeitliche Änderung von  $\varphi$  bei festgehaltenem Ort (wenn  $\varphi$  unabhängig von  $t \rightarrow$  lokaler Anteil verschwindet)
- Konvektiver Anteil: beschreibt Änderung von  $\varphi$  aufgrund der Bewegung des materiellen Anteils, Korrekturterm zwischen referentieller und partieller Ableitung
- Bei materieller Darstellung (Lagrange) fällt konvektiver Anteil weg

15. Was ist der Unterschied zwischen der materiellen und der räumlichen Zeitableitung?

Durchführen der totalen Zeitableitung bei der räumlichen Größe und der materiellen Größe

16. Wie leitet man den Zusammenhang zwischen dem materiellen

Geschwindigkeitsgradienten  $\dot{F}$  und dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $L$  her?

Materieller Geschwindigkeitsgradient  $\dot{F}$ :

$$\begin{aligned}
d\dot{x} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} \cdot dX = \dot{F} dX \\
\rightarrow \dot{F} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial X}
\end{aligned}$$

Räumlicher Geschwindigkeitsgradient  $L$ :

$$\begin{aligned}
d\dot{x} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \cdot dx = L dx \\
\rightarrow L &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}
\end{aligned}$$

Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
d\dot{x} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} \cdot dX = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} dX \\
\rightarrow \dot{F} &= LF \text{ bzw. } L = \dot{F} F^{-1}
\end{aligned}$$

17. Wie ist die Querschnittsfläche in der Referenzkonfiguration mit der Querschnittsfläche in der aktuellen Konfiguration verknüpft?

$\hat{S}$  ist Querschnitt am materiellen Punkt  $X$  in Referenzkonfiguration

$\hat{s}(x,t)$  ist Querschnitt am Punkt  $x$  in der aktuellen Konfiguration

$$\hat{S}(X)dX = \hat{s}(x,t)dx = \hat{s}(x,t) \cdot F dX$$

$$\rightarrow \hat{s} = \frac{\hat{S}}{F} = \hat{S} \cdot F^{-1}$$

$$\rightarrow \hat{S} = \hat{s} \cdot F$$

- Gilt bei Inkompressibilität (wird bei den meisten biologischen Materialien angenommen)

18. Wie ist die Zeitableitung der Querschnittsfläche definiert und wie leitet man diese her?

$$\dot{\hat{S}} = -\hat{s} \cdot L$$

Herleitung: Übung 3 - Aufgabe 3.2 b

## Kapitel 2: Bilanzgleichungen

1. Wie unterscheidet man intensive und extensive Größen?

- extensive Größen  
→ das Verhalten dieser wird durch Konstitutivgesetze und Bilanzgleichungen beschrieben  
→ abhängig von der Größe des Systems  
→ z.B. Masse, Impuls, Volumen, ...
- intensive Größen  
→ unabhängig von der Größe des Systems  
→ z.B. Temperatur, Druck, Verschiebung, Verzerrung, ...

2. Wie kann man die lokale Form einer Bilanzgleichung (BGL) aus der zugehörigen globalen Form der BGL in der Lagrange'sche Betrachtungsweise herleiten?

globale Form [BG]:

$$\frac{d}{dt} \int_{X_0}^{X_1} G(X, t) dX = \int_{X_0}^{X_1} P(X, t) dX + H(X_0, t) - H(X_1, t)$$

P: Produktionsterm  $P(t) = \int_{X_0}^{X_1} P(X, t) dx$ ,

F: Flussterm  $F(t) = H(X_0, t) - H(X_1, t)$  (Zufluss - Abfluss)

die lokale Form erhält man mithilfe des Fundamentalsatzes der Algebra

Herleitung in 2.1 Bilanzgleichung für die Lagrange'sche Betrachtungsweise:

➔ lokale Form [BL]

$$\frac{d}{dt} G(X, t) = P(X, t) - \frac{\partial H(X, t)}{\partial X}$$

3. Wieso ist die globale Form einer Bilanzgleichung (BGL) allgemeiner als ihre zugehörige lokale Form?

- in der globalen Form muss keine Annahme über die Differenzierbarkeit von H getroffen werden
- lokale Form = differentielle Form
- globale Form = Integral-Form

4. Was gilt für eine beliebige Erhaltungsgleichung?

Produktions- und Flussterm verschwinden

5. Wie kann man die lokale Form einer Bilanzgleichung (BGL) aus der zugehörigen globalen Form der BGL in der Euler'sche Betrachtungsweise herleiten?

globale Euler-Form [BEG]:

$$\int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} \left( \frac{dg(x, t)}{dt} + g(x, t) \cdot L \right) dx = \int_{x(X_0, t)}^{x(X_1, t)} \left( p(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right) dx$$

lokale Euler-Form [BEL]:

$$\frac{dg(x,t)}{dt} + g(x,t) \cdot L = p(x,t) + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad}(g) \cdot g(x,t) \cdot \text{grad}(v) = p(x,t) + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$$

6. Welche fundamentalen Bilanzgleichungen gibt es in der Kontinuumsmechanik und wie kann man diese klassifizieren?

1) Mechanische Bilanzgleichungen

- Masse
- Impuls
- (- Drehimpuls)

2) Thermodynamische Bilanzgleichungen

- Energiebilanz
- Entropieungleichung

7. Welche Bilanzgleichung wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet?

Massenbilanz → Kontinuitätsgleichungen:

- Lagrange:

$$\frac{\partial \rho(X,t)}{\partial t} = 0$$

- Euler:

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} + \rho(x,t) \cdot L = 0$$
$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)v}{\partial x} = 0$$

8. Was besagt das zweite Newton'sche Gesetz?

Der Impuls eines materiellen Körpers ändert sich durch die Kräfte, die an den Körper angreifen.

Kräfte, die an einen Körper angreifen:

P: Schwerkraft (Fernwirkungskräfte)

F: Kontaktkräfte/Oberflächenkräfte (Nahwirkungskräfte)

9. Wie erhält man die Impulsbilanz in der Lagrange'schen Betrachtungsweise?

Mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes

Lokale Form der Impulsbilanz:

$$\rho_0 \dot{v} = \text{div } \sigma + \gamma$$

$\gamma$ : Gewichtskraft

10. Was kann man mit der Spannung beschreiben?

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

11. Welche Spannungsgrößen wurden im Rahmen der Vorlesung eingeführt und wie sind diese definiert?

- Cauchy-Spannung:  $\sigma(x, t) = \frac{n(x, t)}{\hat{s}(x, t)}$   
Euler'sche innere Kraft pro aktuellem Querschnitt  
Alle Größen in aktueller Konfiguration
- 1. Piola-Kirchhoff-Spannungsgröße:  $T(X, t) = \frac{n(x(X, t), t)}{\hat{s}(X, t)}$   
Hybride Größe, Größen aus Referenzkonfiguration und aktueller Konfiguration  
Vorteil: n und S sind einfach zu bestimmen  
einfach bestimmbar
- 2. Piola-Kirchhoff-Spannungsgröße:  $S(X, t) = \frac{N(X, t)}{\hat{S}(X, t)}$   
Alle Größen in Referenzkonfiguration

12. Was ist der Unterschied zwischen einer isometrischen und einer isotonischen Kontraktion?

- Isometrisch: Muskel wird auf einer bestimmten Länge konstant gehalten
- Isotonisch: Muskel kann sich bei konstanter Kraft verkürzen

13. Von welchen Größen hängen interne Kräfte ab?

Innere Kräfte hängen von Ort, Zeit und Temperatur ab

14. Was besagt der 1. Hauptsatz der Thermodynamik?

Totale Energie = kinetische Energie + innere Energie

Stellt die Änderungsrate der totalen Energie im Bezug zur Summe des mechanischen und nicht-mechanischen Anteils her.

$$\frac{d(K + U)}{dt} = W_{ext} + W_{therm}$$

15. Wie leitet man die Euler'sche Form der Energiebilanz her?

Euler'sche Form der Energiebilanz:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho r - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + n \cdot L$$

$$\text{In 1D: } q(x(X, t), t) = Q(X, t)$$

Lagrange'sche Form der Energiebilanz:

$$\rho_0 \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho_0 r - \frac{\partial Q(X, t)}{\partial X} + N(X, t) \frac{de}{dt}$$

16. Welche Gleichungen und Zusatzbedingungen braucht man um die Materialeigenschaften vollständig beschreiben zu können?

- Massenbilanz
  - Impulsbilanz
  - Energiebilanz
  - Anfangs- und Randbedingungen
  - Konstitutivgesetze
- ➔ genügen um Materialeigenschaften vollständig zu beschreiben

17. Wofür benutzt man den 2. Hauptsatz der Thermodynamik?

- Um gewisse nicht-physikalische Eigenschaften auszuschließen
- Für biologischen Materialien Anwendung schwierig
- Beschreibt die Existenz der Entropie

$$\frac{dS}{dt} \geq P + F$$

18. Wie leitet man die Euler'sche Darstellung der Entropieungleichung her?

Lokale Lagrange'sche Form:

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial S(X, t)}{\partial t} \geq \frac{\rho_0 r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{Q}{\theta} \right)$$

Lokale Euler'sche Betrachtungsweise:

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{\theta} \right)$$

Lagrange

Euler

|          |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                               |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Masse    | $\frac{\partial \rho_0(X, t)}{\partial t} = 0$                                                                                                    | $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$                                                                  |
| Impuls   | $\rho_0 \frac{\partial v(X, t)}{\partial t} = B + \frac{\partial N(X, t)}{\partial X}$                                                            | $\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \cdot v(x, t) = b + \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}$ |
| Energie  | $\rho_0 \frac{\partial \bar{u}(X, t)}{\partial t} = \rho_0 r - \frac{\partial Q(X, t)}{\partial X} + N(X, t) \frac{\partial e(X, t)}{\partial t}$ | $\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho r - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + n \cdot L$                                                         |
| Entropie | $\rho_0 \frac{\partial S(X, t)}{\partial t} \geq \frac{\rho_0 r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial X} \frac{Q(X, t)}{\theta(X, t)}$              | $\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{q(x, t)}{\theta(x, t)}$                                    |