

1. Überblick
 2. Bilddarstellung
 3. Grundlagen der Bildverarbeitung im Ortsbereich
 - a. Bildtransformationen
 - b. Faltung, Korrelation
 - c. Segmentation
 - d. Klassifizierung
 - e. Registrierung
 4. Fouriertransformation
 5. Abtastung und Quantisierung
 6. Grundlagen der Bildverarbeitung im Frequenzbereich
 7. Systemtheorie bildgebender Systeme
- Literatur: R. C. Gonzalez, R.E. Woods, Digital Image Processing, 3rd Edition, Pearson Education, Inc., 2008.
 - Internet

Wichtige Bemerkung:

Teile des Vorlesungsmaterials sind der Literatur und dem Internet entnommen ohne dass dies in den Folien immer explizit angegeben ist. Deshalb darf das Vorlesungsmaterial (alle Downloads) nur im Rahmen der Vorlesung benutzt werden.

Kopieren und die Weitergabe an Dritte sind aus urheberrechtlichen Gründen nicht erlaubt.

Abbildung:

Mehrdimensionale Erfassung und Visualisierung von Daten, bzw. Information eines Objekts oder Vorgangs.

Bildstrukturen:

Kontinuierlich, diskrete Elemente, Linien, Ecken, Farben, Grauwerte, 1-, 2-, 3-, oder 4-dimensional, Projektionen, begrenzte Rahmen.

Bildinformation:

Formen, Konturen, Größen, Farben, Entfernungen, Bewegungen, Funktionen, Metabolismus, elektrische und magnetische Felder, Fluss, etc.

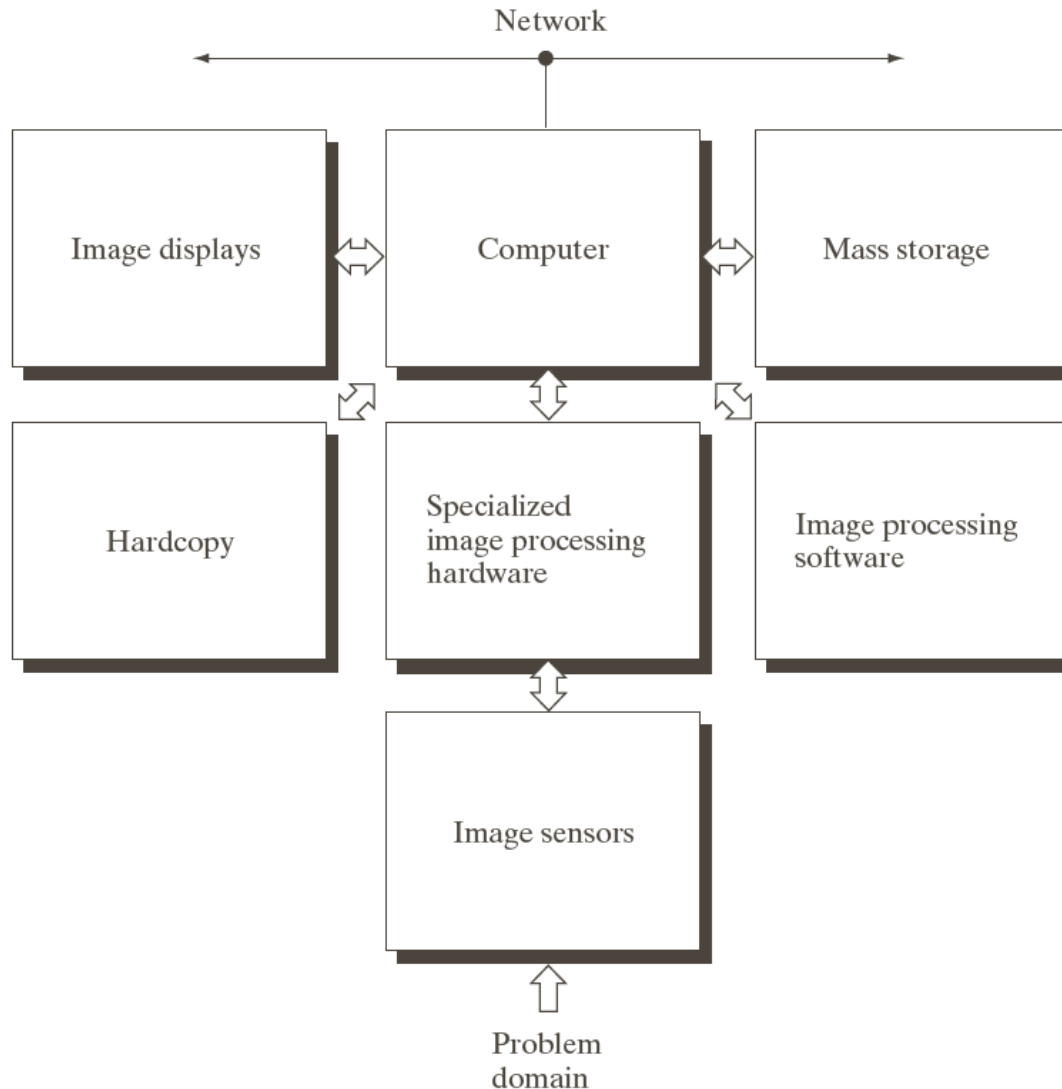
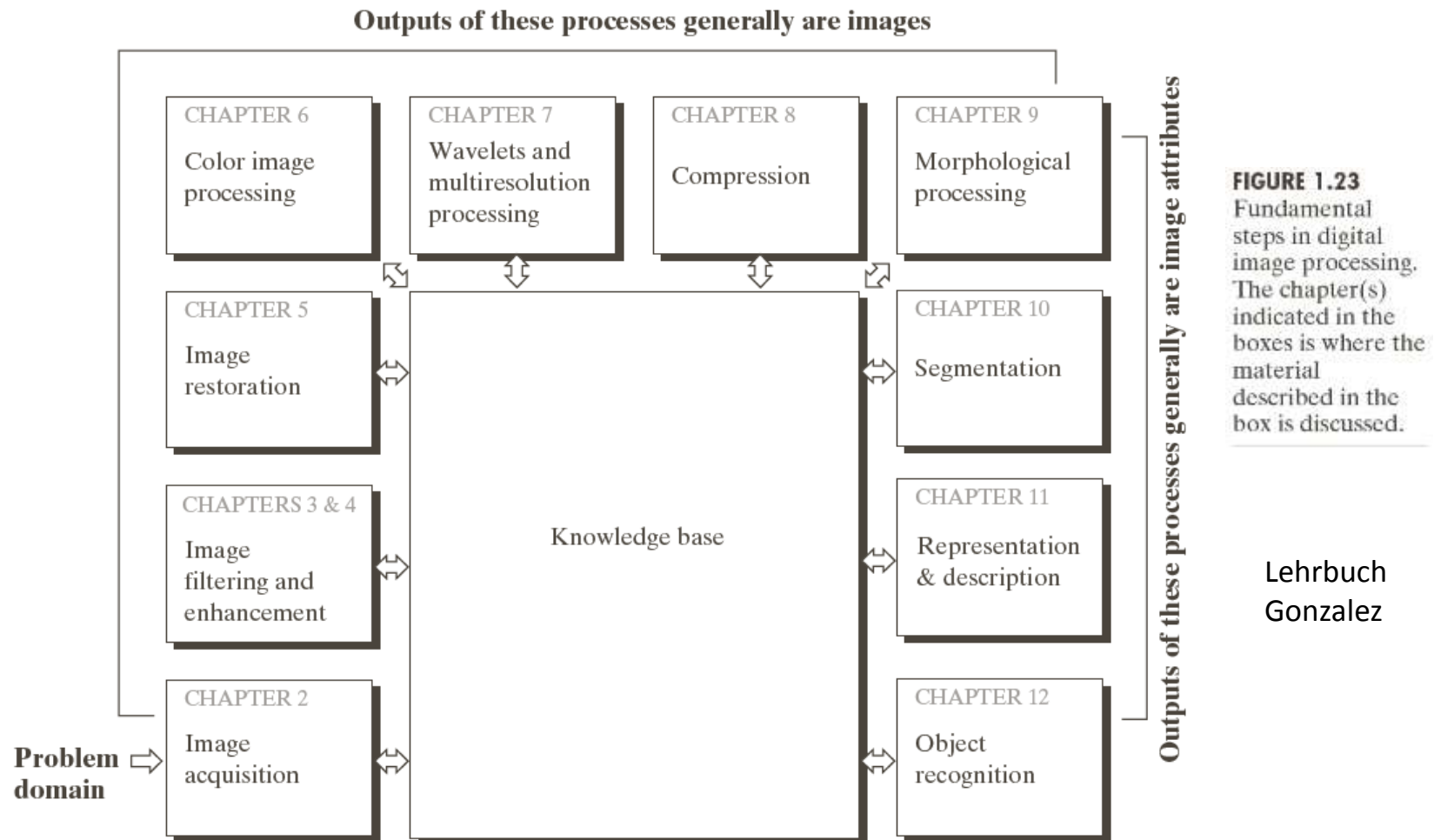


FIGURE 1.24
Components of a
general-purpose
image processing
system.

Lehrbuch
Gonzalez



Zweck medizinischer Abbildungsverfahren:

- Informationen bzw. medizinische Parameter darstellbar machen,
- unsichtbare Informationen sichtbar machen,
- Informationen einer Verarbeitung zugänglich zu machen,

um das diagnostische und therapeutische Potential zu verbessern.

Beispiele: Dichte von Geweben

Verborgene Strukturen

Temperaturen

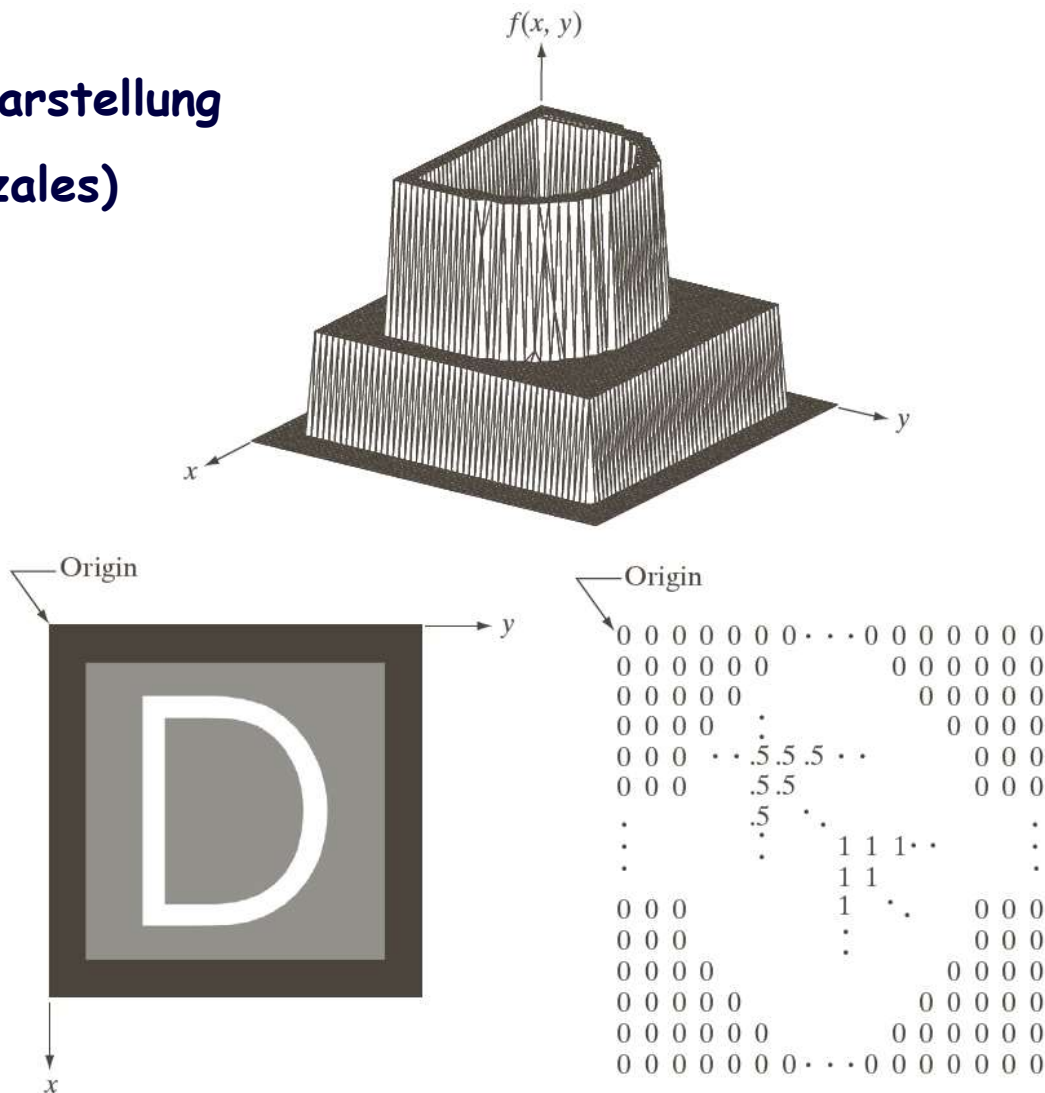
Materialeigenschaften und -Zusammensetzung



unterschiedliche Sonden erforderlich!

z.B. elektromagnetische Wellen, mechanische Wellen

Bilddarstellung (Gonzales)



a
b c

FIGURE 2.18

(a) Image plotted as a surface.

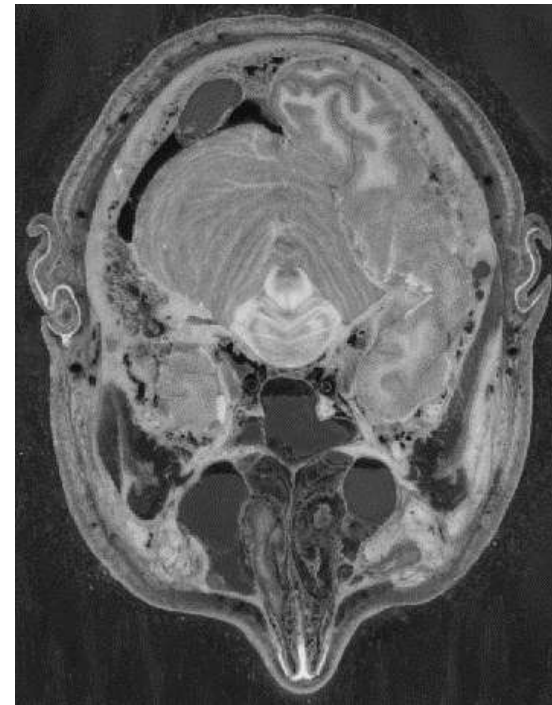
(b) Image displayed as a visual intensity array.

(c) Image shown as a 2-D numerical array (0, .5, and 1 represent black, gray, and white, respectively).

Zweck der Bildverarbeitung in der Medizin
ist die Verbesserung der
Interpretierbarkeit der dargestellten Inhalte.



Verrauschtes Originalbild

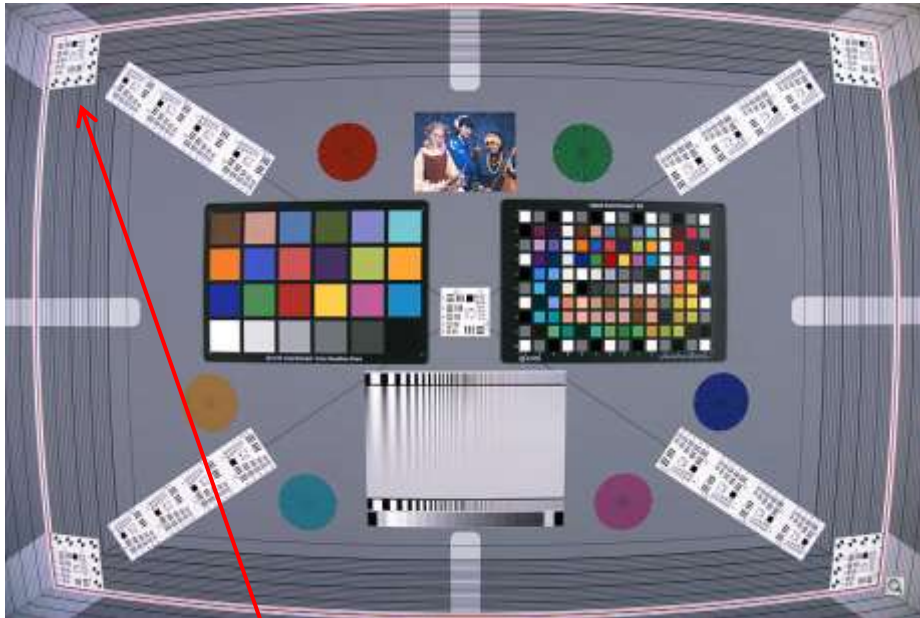


Restauriertes Bild

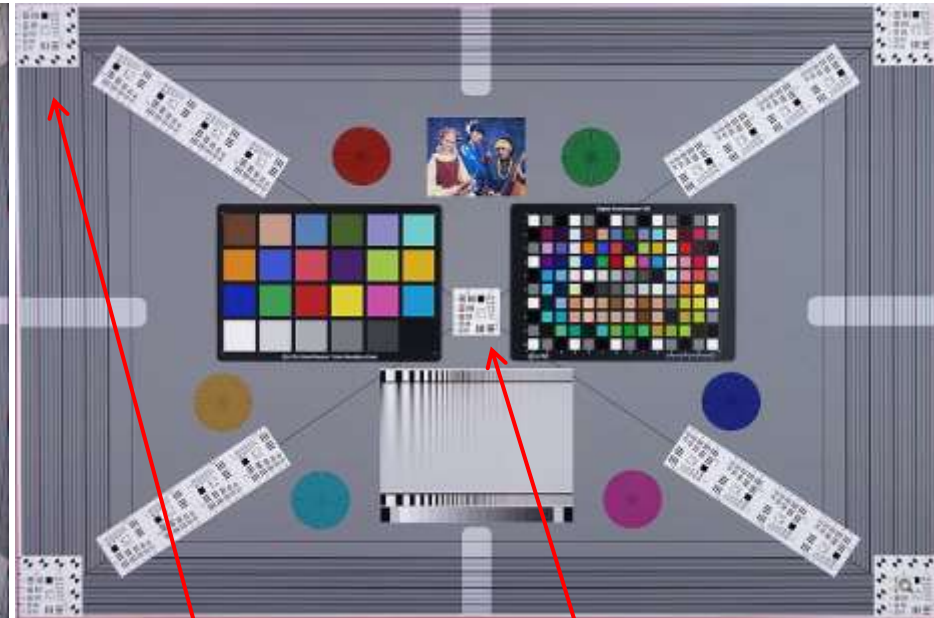
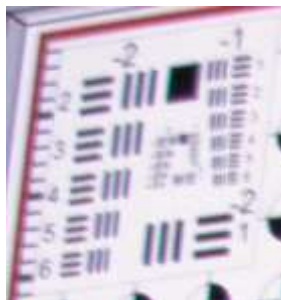
Da im Rahmen der Vorlesung nur eine begrenzte Auswahl an Bildverarbeitungs- und Visualisierungsverfahren behandelt werden kann, dient die folgende Liste und Klassifizierung der wichtigsten Verarbeitungskategorien als Referenz für eigene, weitergehende Studien.

1. Verbesserung der Bildqualität oder Bildrestaurierung (Image Enhancement):

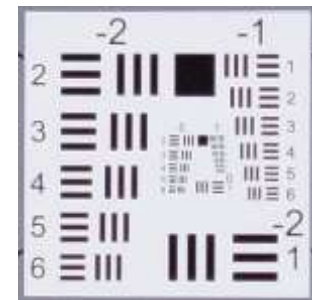
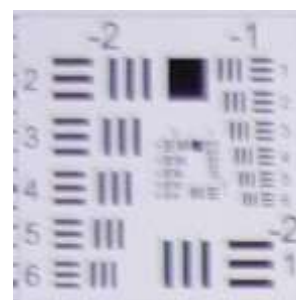
Die Beseitigung von Bildstörungen und -verzerrungen, wie z.B. Rauschen und Inhomogenitäten, sowie die Verbesserung bzw. Verstärkung von Details, Kontrasten, Konturen, Strukturen, Merkmalen und anderer relevanter Parameter.

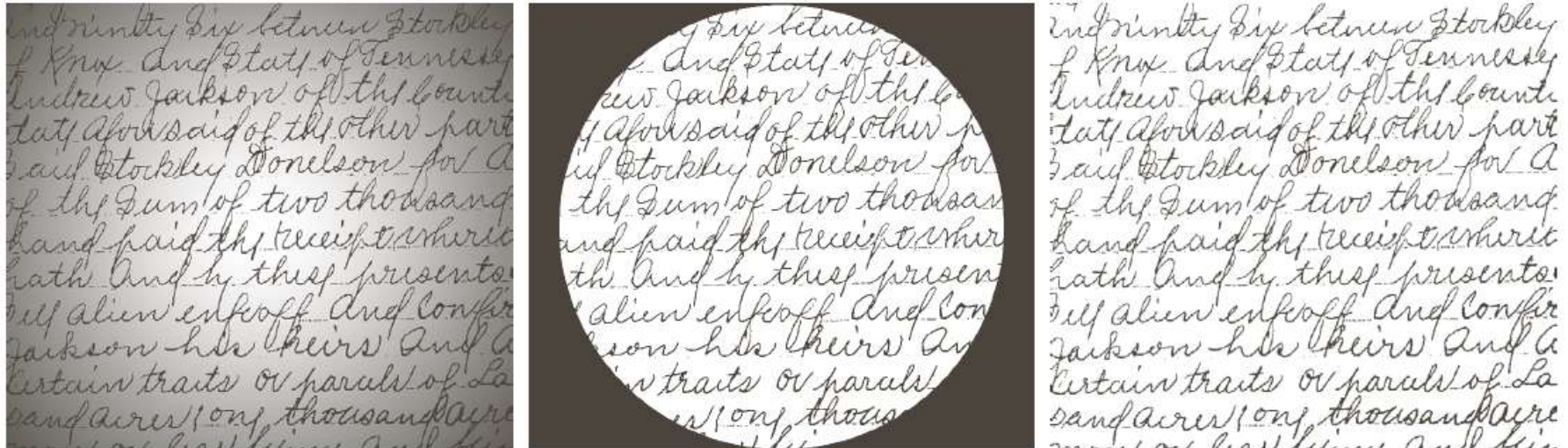


Sony Cyber-Shot DSC-RX100 Testbild Raw Data mit deutlicher Verzeichnung



Sony Cyber-Shot DSC-RX100 Testbild nach Korrektur der Verzeichnung

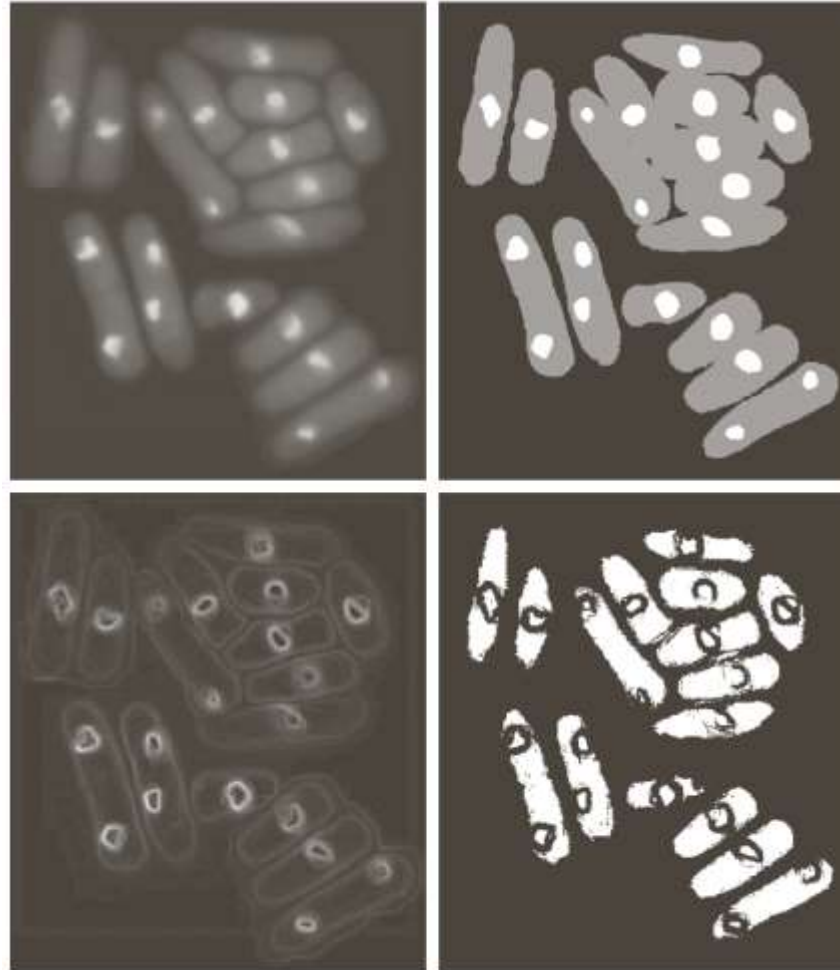




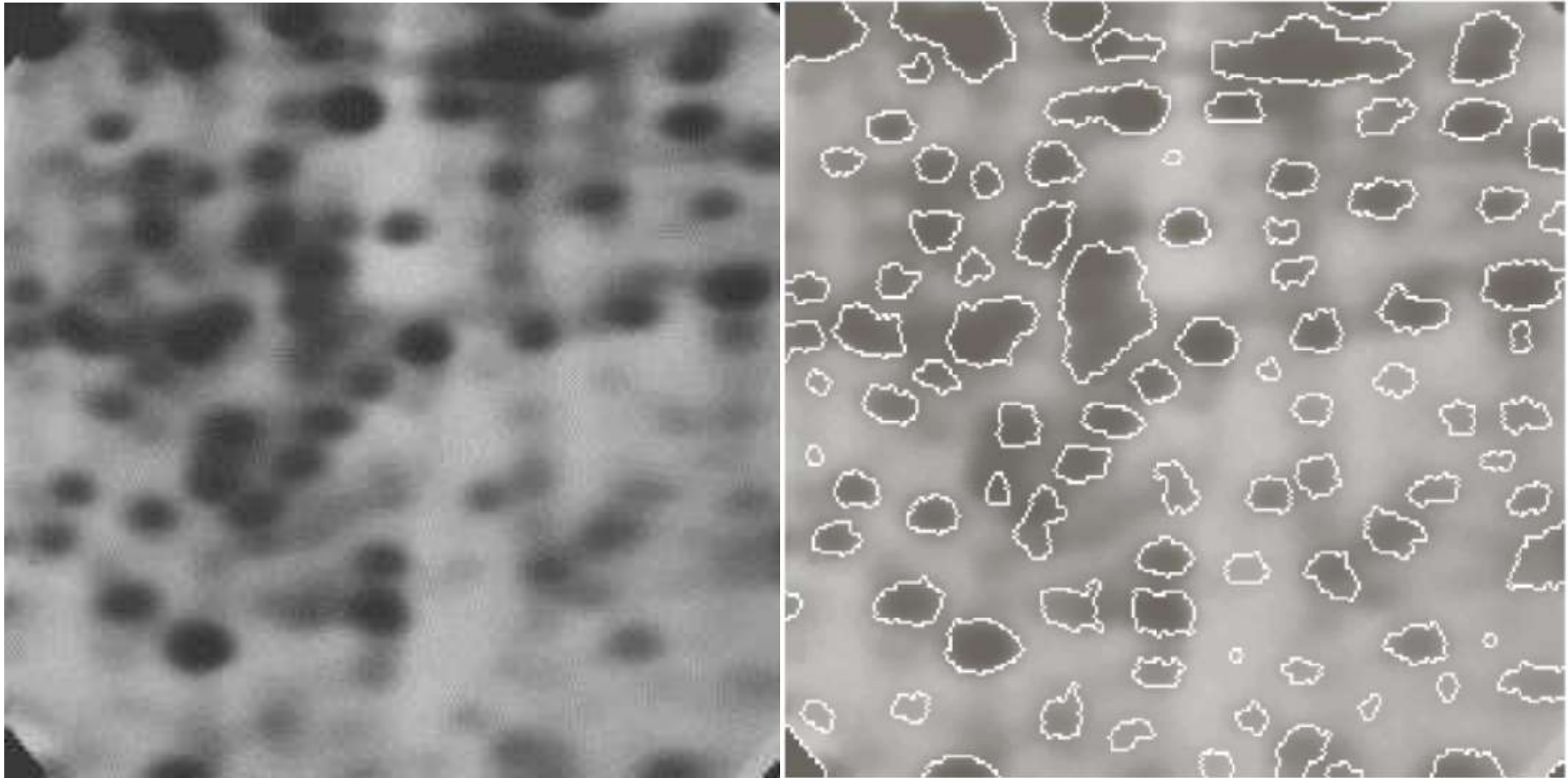
Links: Bild mit lokaler Variation der Belichtung (Spot Shading). Mitte: Korrekturergebnis bei Anwendung eines globalen Schwellwert (Otsu's Methode). Rechts: Korrekturergebnis mittels gleitender Mittelwerte.

2. Segmentierung:

Die Erkennung bzw. Identifizierung der Konturen einer anatomischen oder funktionellen Struktur, wie z.B. ein Organ, ein Blutgefäß oder eines Tumors.



Segmentierung von Hefezellen mittels verschiedener Schwellwertmethoden. Originalbild oben links.

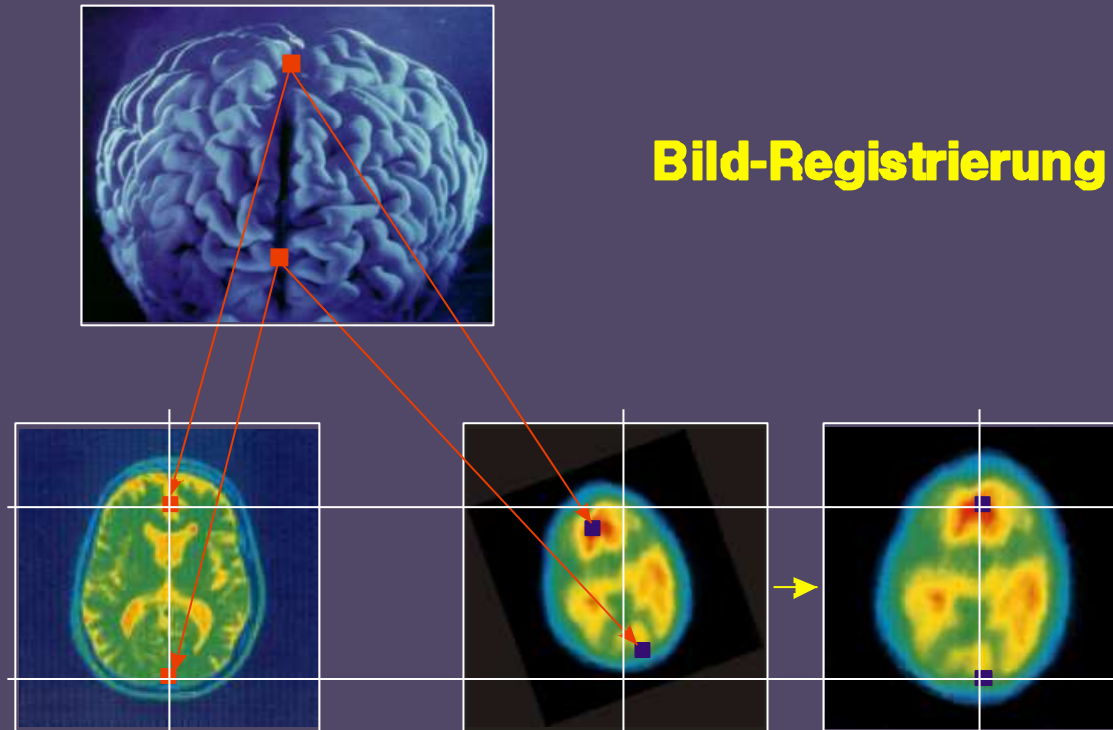


Segmentierung eines Elektrophorese-Photos mittels „Watershed“ Segmentierungsalgorithmus .

3. Registrierung:

Die räumliche Transformation eines Bildes, so dass die dargestellten Strukturen in Größe (Abbildungsmaßstab), Position und Orientierung vollständig mit denjenigen eines Referenzbildes übereinstimmen. Die Registrierung ist z.B. erforderlich zur Überlagerung und Darstellung der Daten von zwei Bildern verschiedener Modalitäten (z.B. PET/CT).

Bild-Registrierung



4. Quantifizierung:

Die Bestimmung geometrischer Eigenschaften einer anatomischen Struktur (z.B. Volumen, Durchmesser, Krümmung) oder physiologischer Eigenschaften wie Perfusion oder Gewebezusammensetzung (Klassifizierung von normalem Gewebe oder Tumor).

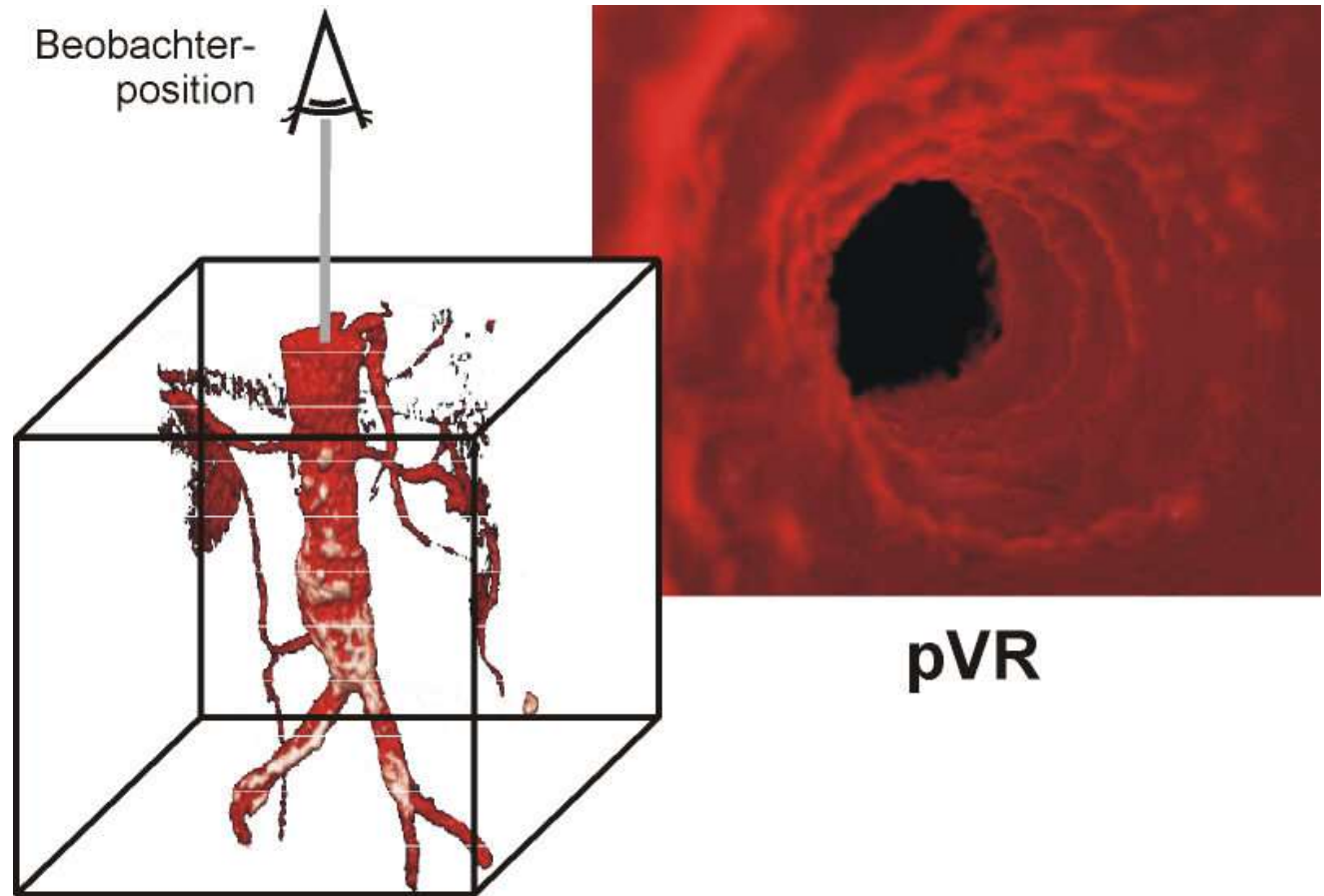


Quantifizierung: Fetales Ultraschallbild, Vermessung von Körperteilen zur Bestimmung der fetalen Reife.

5. Visualisierung:

Die zweidimensionale (2-D) oder dreidimensionale (3-D) Darstellung von Bilddaten, sowie die Darstellung virtueller Modelle (z.B. Oberflächendarstellung von 3-D Objekten) von Organen und anderer anatomischer Strukturen.

Dreidimensionale Darstellungen - Virtuelle Endoskopie: Perspektivisches Volume Rendering (pVR)



Die Darstellung erfolgt wie beim Volume Rendering, es wird aber in jedem Falle eine perspektivische Darstellung aus Sicht der Kamera im Nahbereich mit speziell angepaßten Opazitätsfunktionen erstellt.

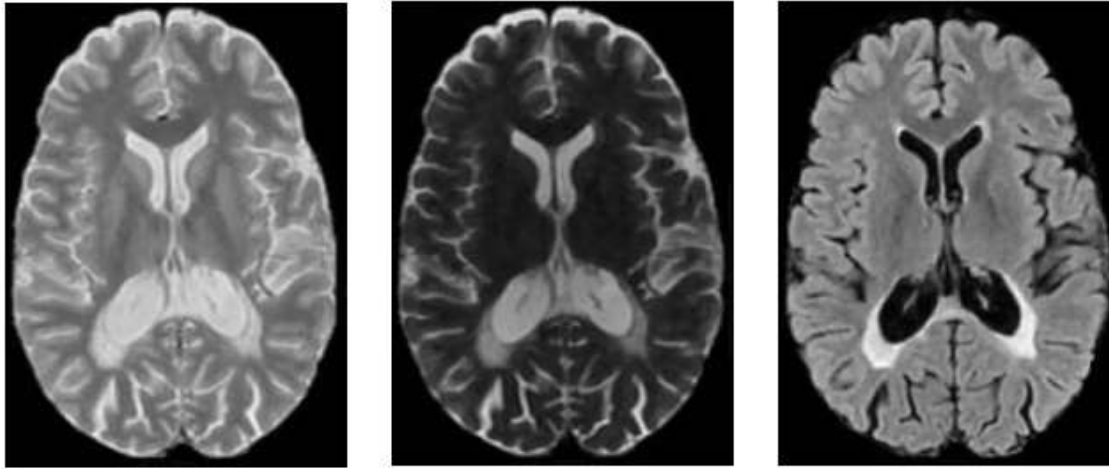


Dreidimensionale
Falschfarbendarstellung
Darstellungen zur besseren
Unterscheidbarkeit der
einzelnen Organe und
Körperteile.

5. Automatische (computerunterstützte) Klassifizierung und Erkennung:

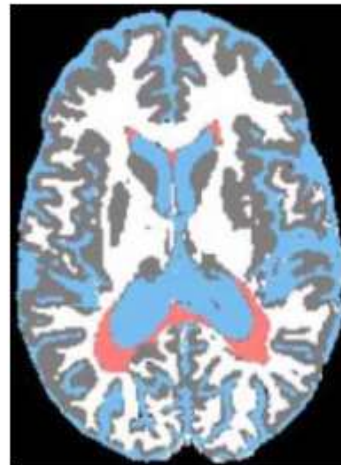
Die Erkennung und Charakterisierung pathologischer Strukturen und Läsionen, wie z.B. Tumorerkrankungen, Gefäßverengungen bzw. Gefäßverschlüsse, oder Verletzungen.

Klassifikation von MS-Läsionen



MRT Eingabedaten:
PD, T_2 -Wichtung, FLAIR
(T_2w mit Unterdrückung
von freiem Wasser)

Klassifikationsmethode:
Parzen-Window (verallgemein-
erte k-nearest neighbor Technik)

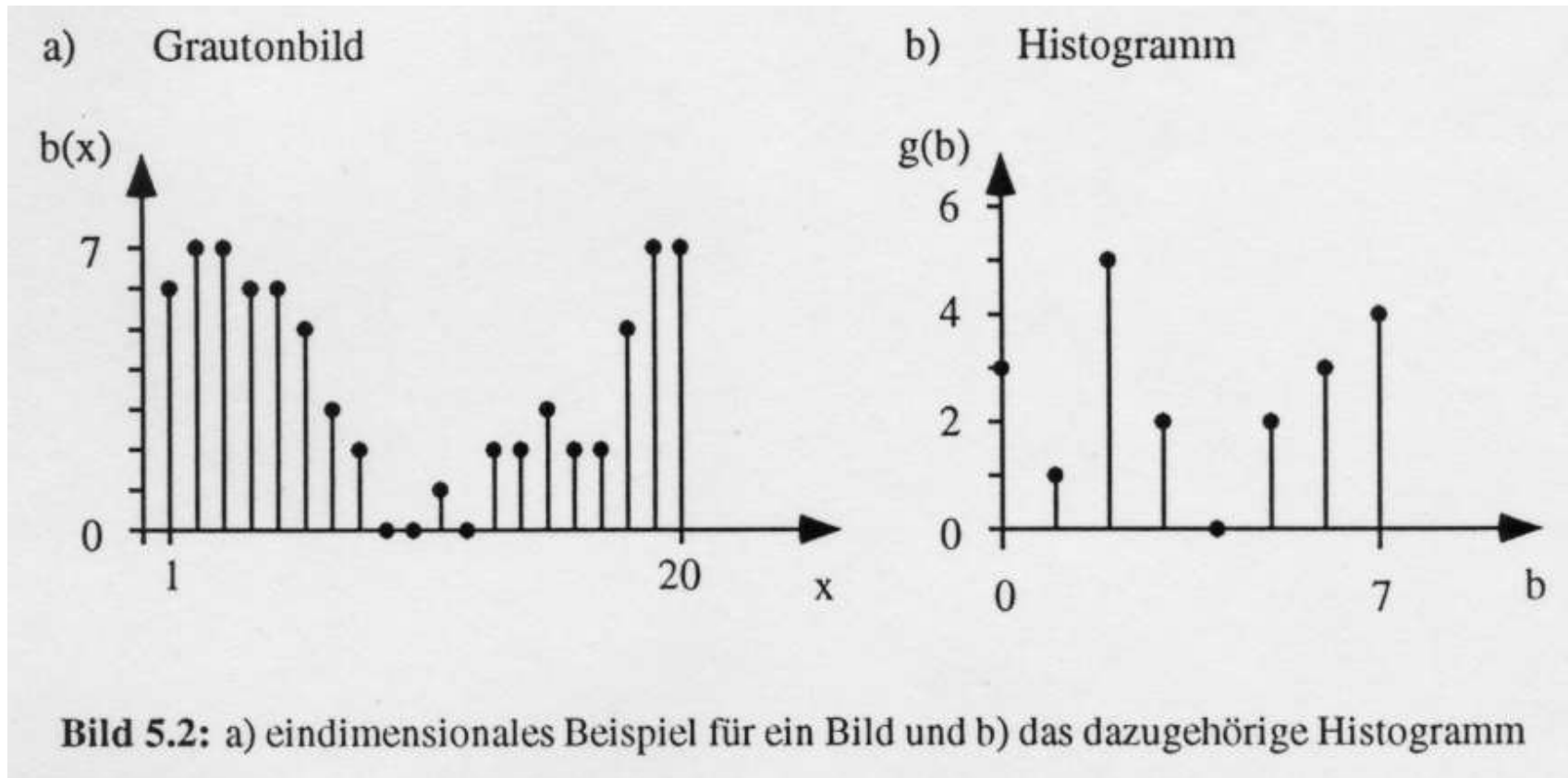


Klassifikationsergebnis
(nach Segmentierung)
hellblau: CSF
grau: graue Hirnmasse
weiß: weiße Hirnmasse
Rosa: MS-Läsionen

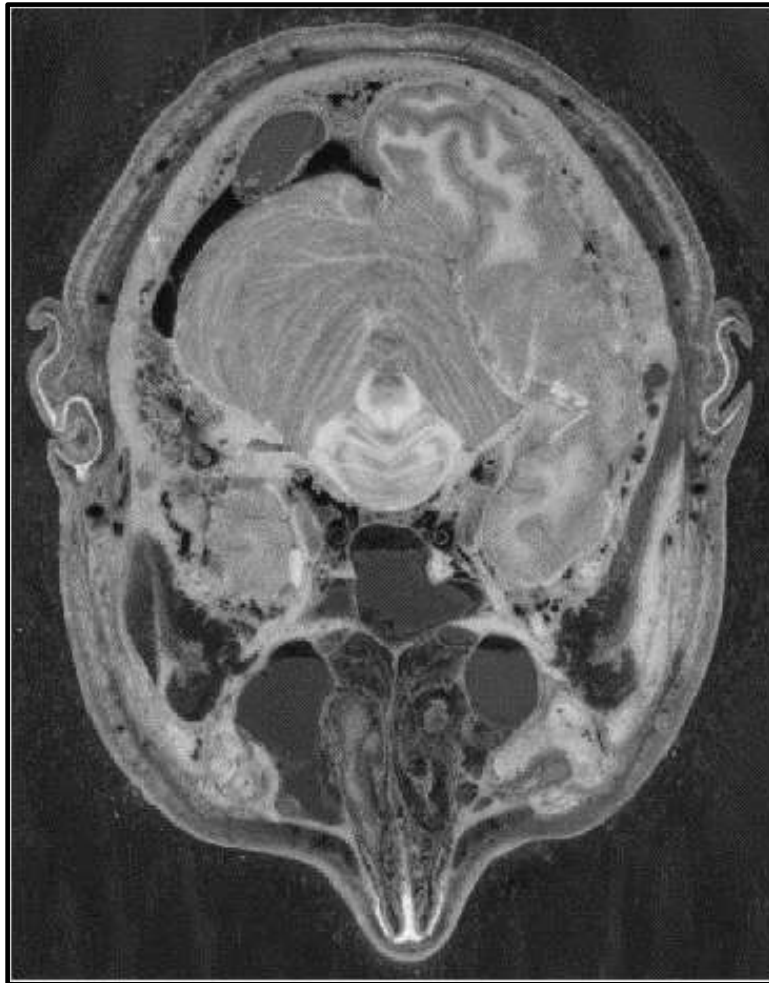
Sajja BR, Datta S, He R, Mehta M, Gupta RK, Wolinsky JS, Narayana PA. Unified approach for multiple sclerosis lesion segmentation on brain MRI. Ann Biomed Eng. 2006 Jan;34(1):142-51.

Bilddarstellung

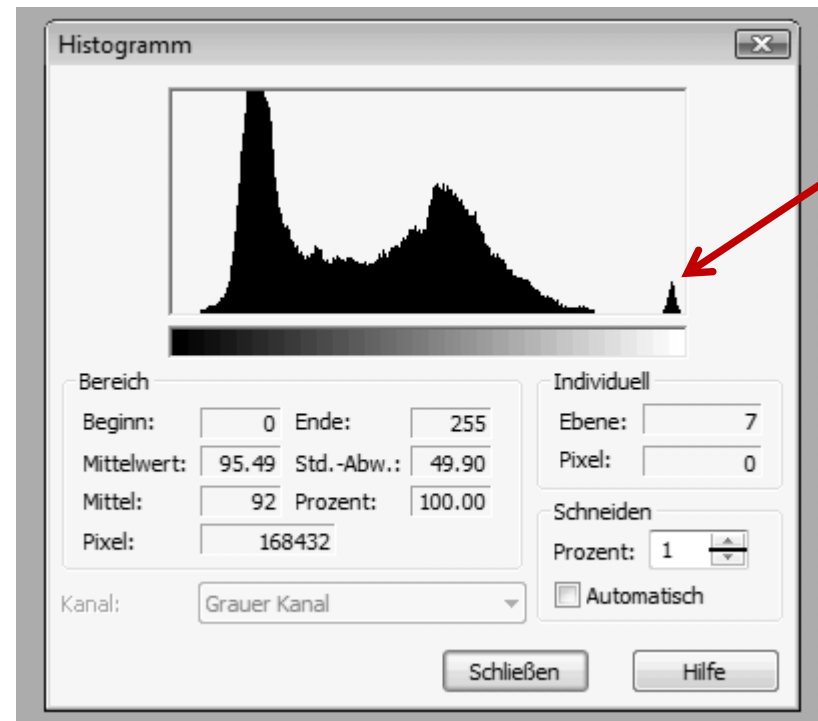
1. Räumliche Helligkeitsverteilung (Grauwertdarstellung)
repräsentativ z.B. für physikalische, chemische oder funktionelle (metabolische) Parameter
2. Grauerthistogramm
Verteilung der Helligkeitswerte
3. Farbdarstellung
4. Falschfarbendarstellung
5. 2-d und 3-d Darstellung (stereo, perspektivisch)
6. Auflösung



Bilddarstellung



Histogramm CT-1.jpg: Verteilung der
CT-Zahlen

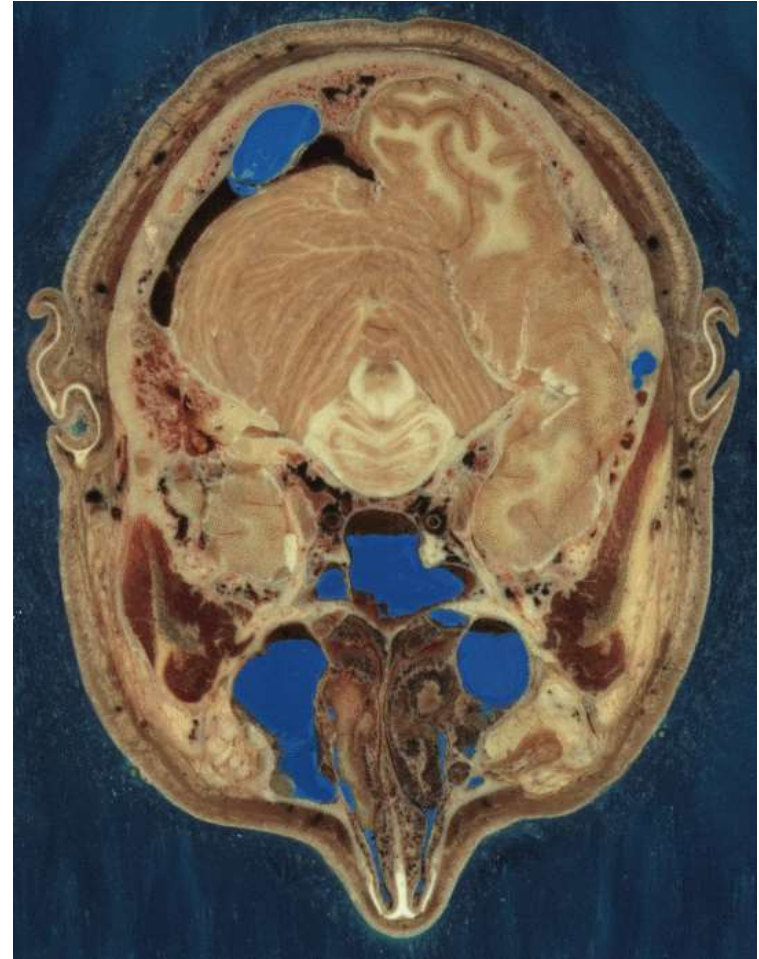
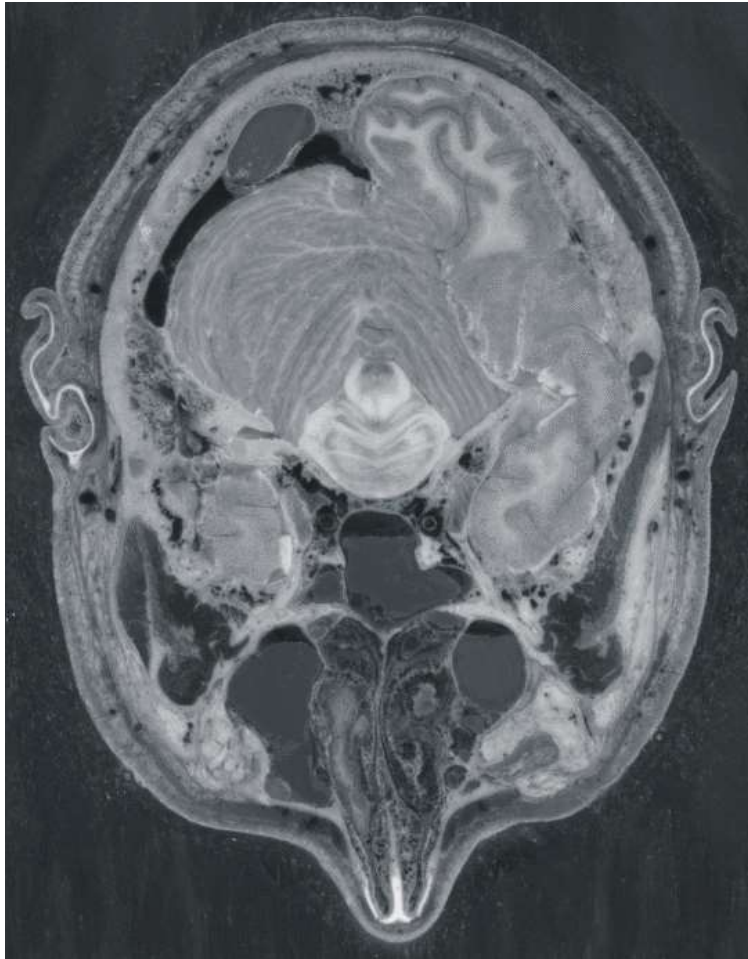


CT-1.jpg: CT-Zahlen

“Histogramm“
“Anpassen,
Kontrastverbesserung“

Räumliche Helligkeitsverteilung (Grauwertdarstellung) und Grauerthistogramm

Bilddarstellung

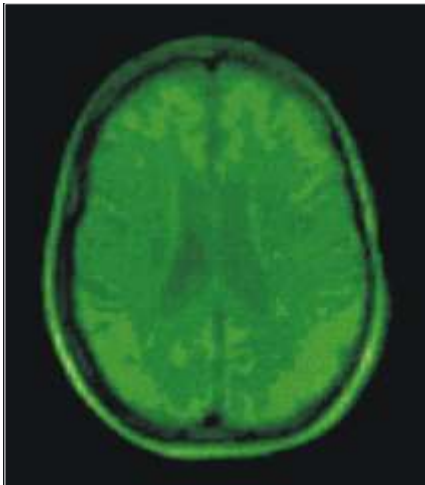


Schwarzweiß und Farbphotographie: Querschnitt durch Kopf (Quelle: Visible Human Project)

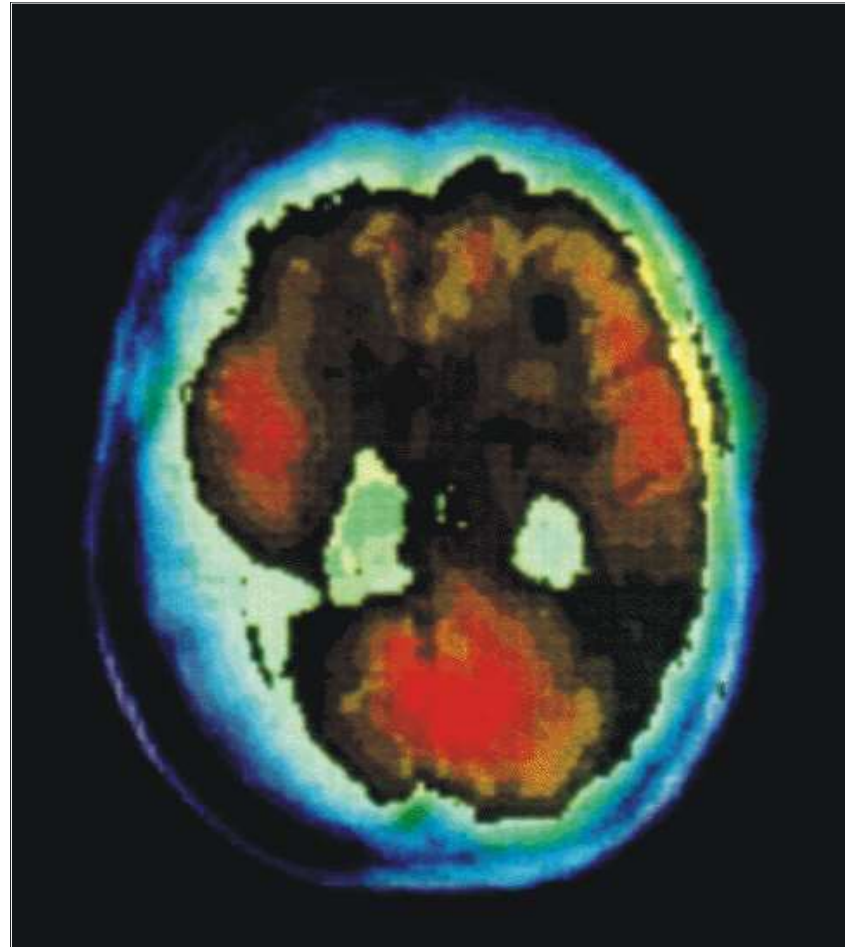
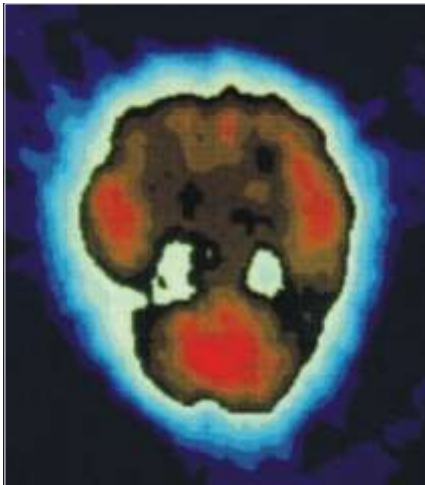
Räumliche Helligkeitsverteilung und Farbdarstellung zur Beurteilung der Erkennbarkeit von Details und Unterschieden zwischen Geweben sowie deren Grenzflächen

Falschfarbendarstellung

MRI

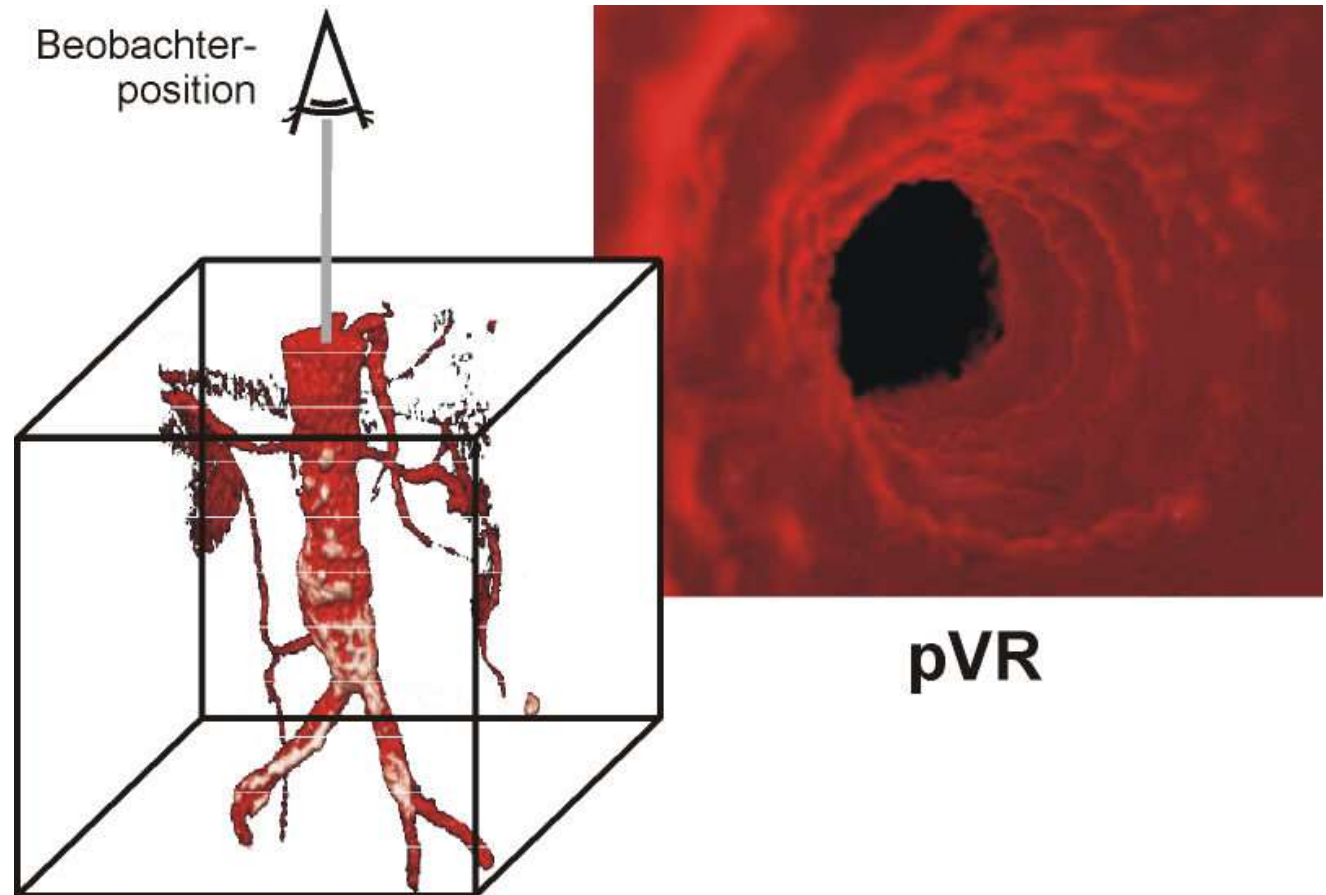


PET



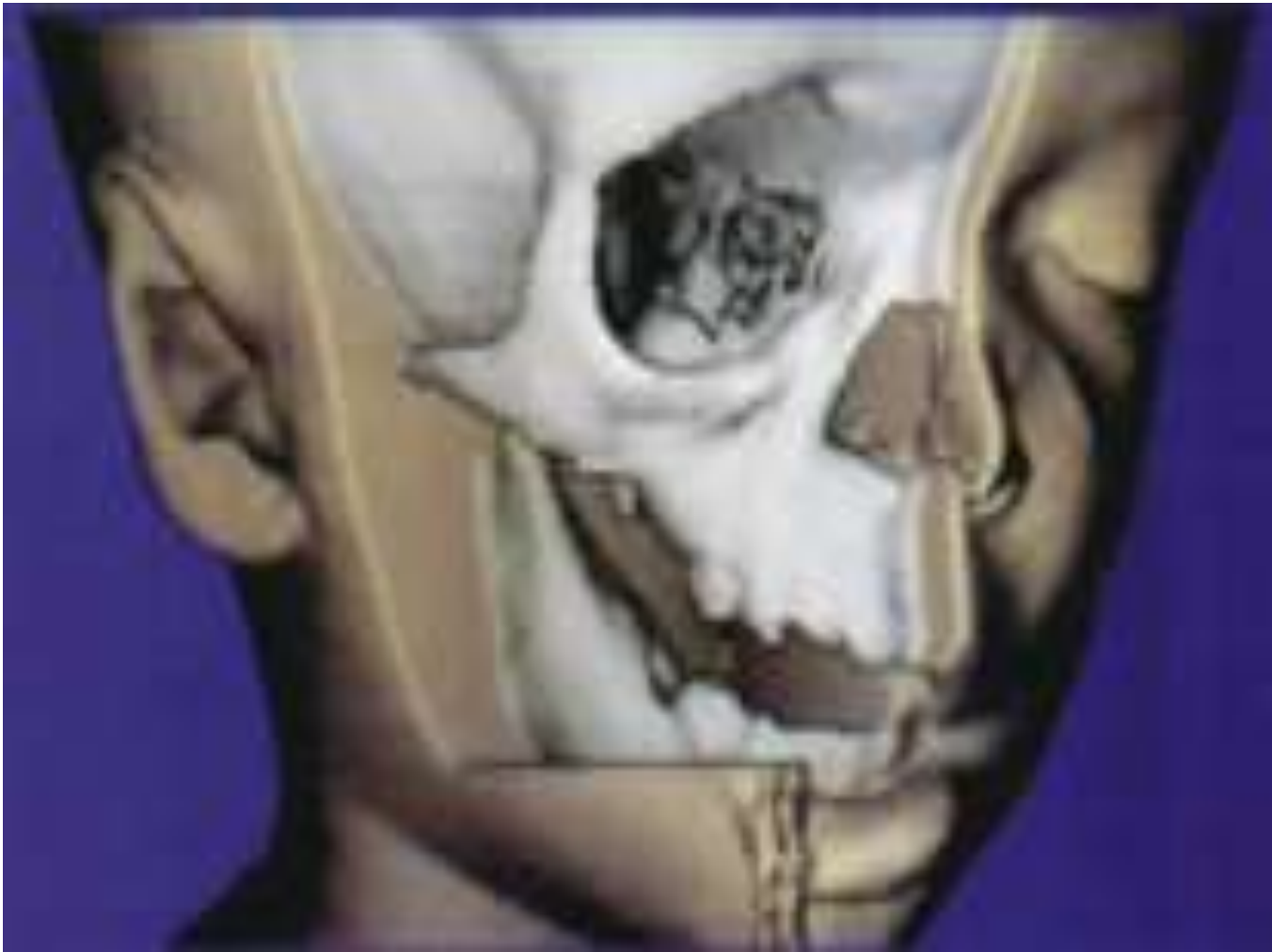
Brightness/Colour Coded MRI/PET
Image Integration

Dreidimensionale Darstellungen - Virtuelle Endoskopie: Perspektivisches Volume Rendering (pVR)



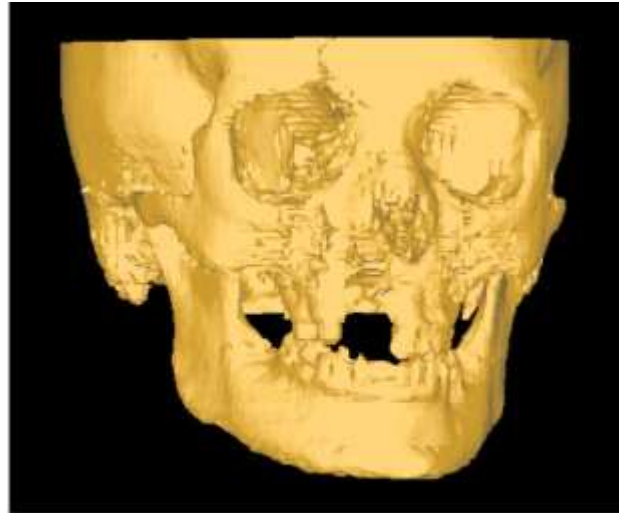
Perspektivische Falschfarbendarstellung

3-d Rendering

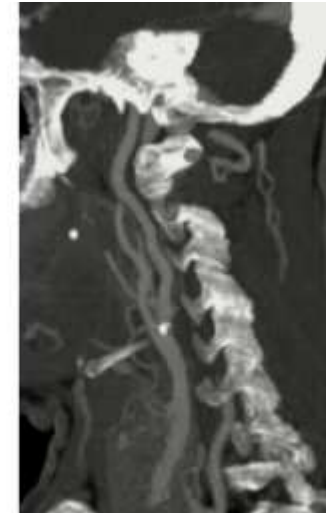


Einsatzbereiche dreidimensionaler Darstellungen

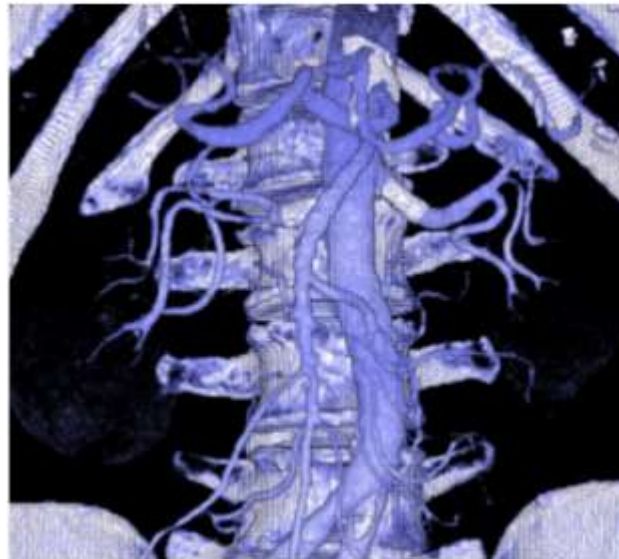
- a) Schwellwertbasierte
Oberflächendarstellung
(SSD) zur Skelett-
darstellung,
- b) Maximum Intensity
Projections (MIP)
Einsatz in der CT-
Angiographie,
- c) Volumenvisualisierung
(VR) Einsatz im
Abdomen,
- d) Perspektivisches
Volume Rendering
(pVR) zur virtuellen
Zisternoskopie zur
präoperativen Planung.



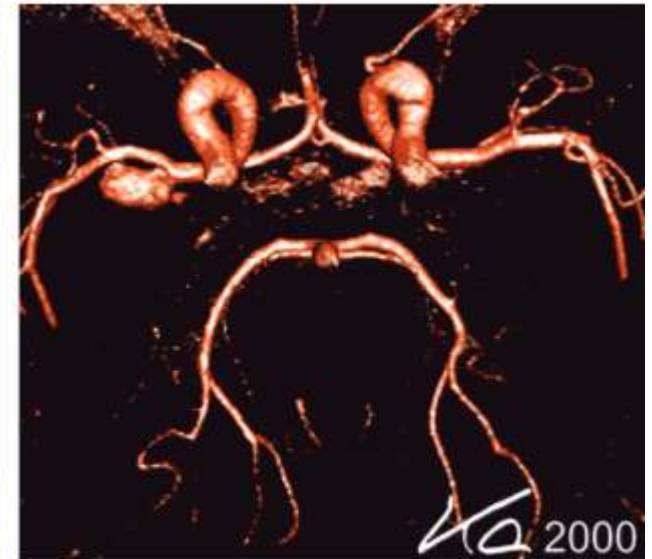
a)



b)

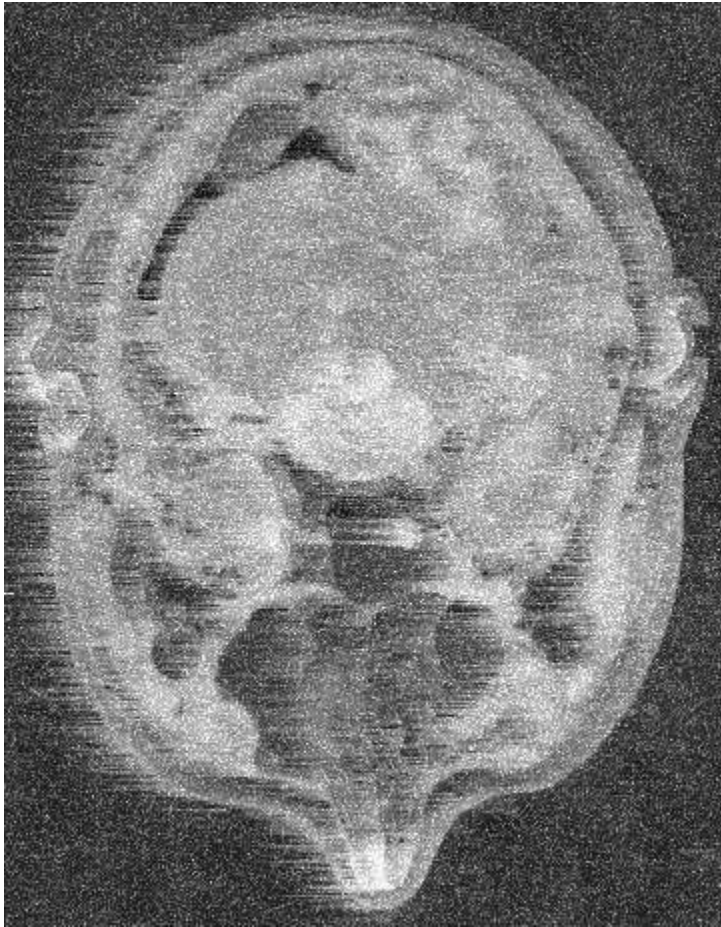


c)

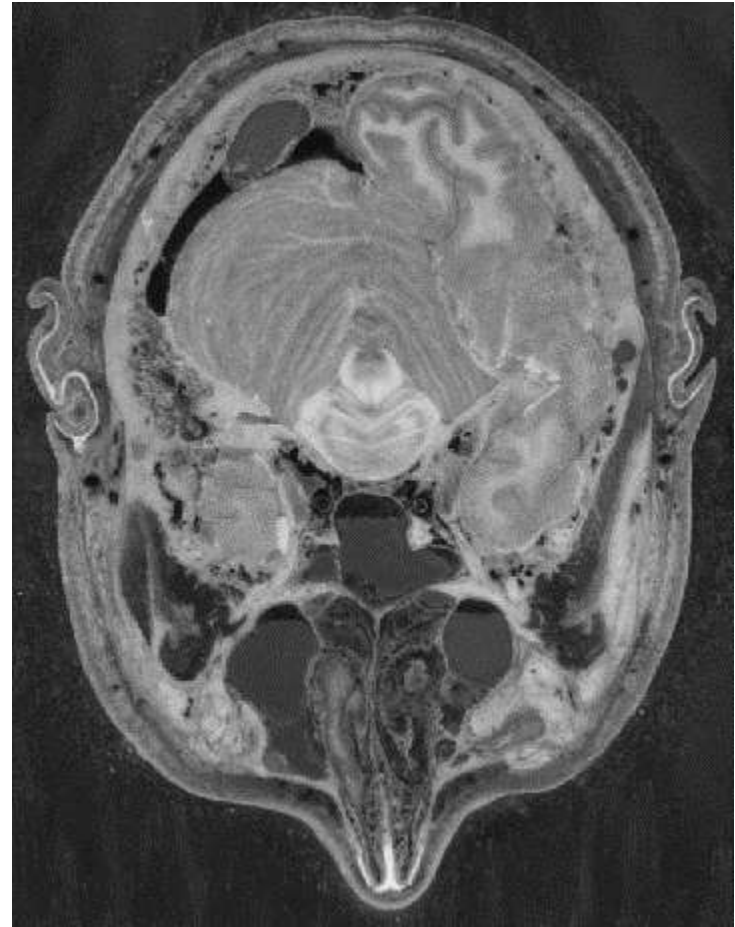


d)

Zweck der Bildverarbeitung: Verbesserung der Bildqualität, Verbesserung der Interpretierbarkeit, Sichtbarmachung von Details, Strukturen und Merkmalen

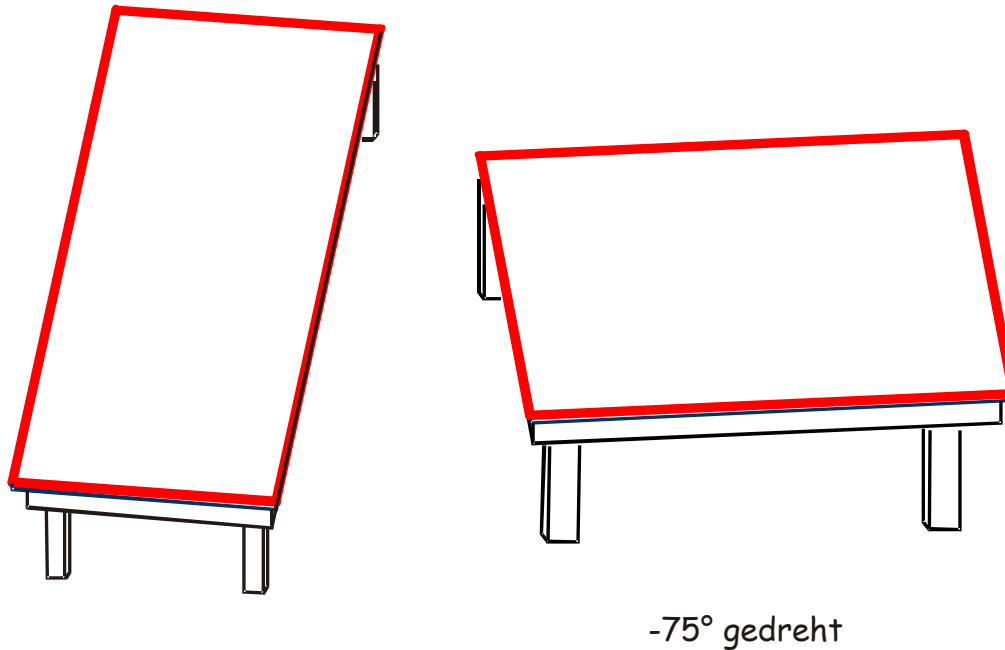


Verrauschtes Originalbild



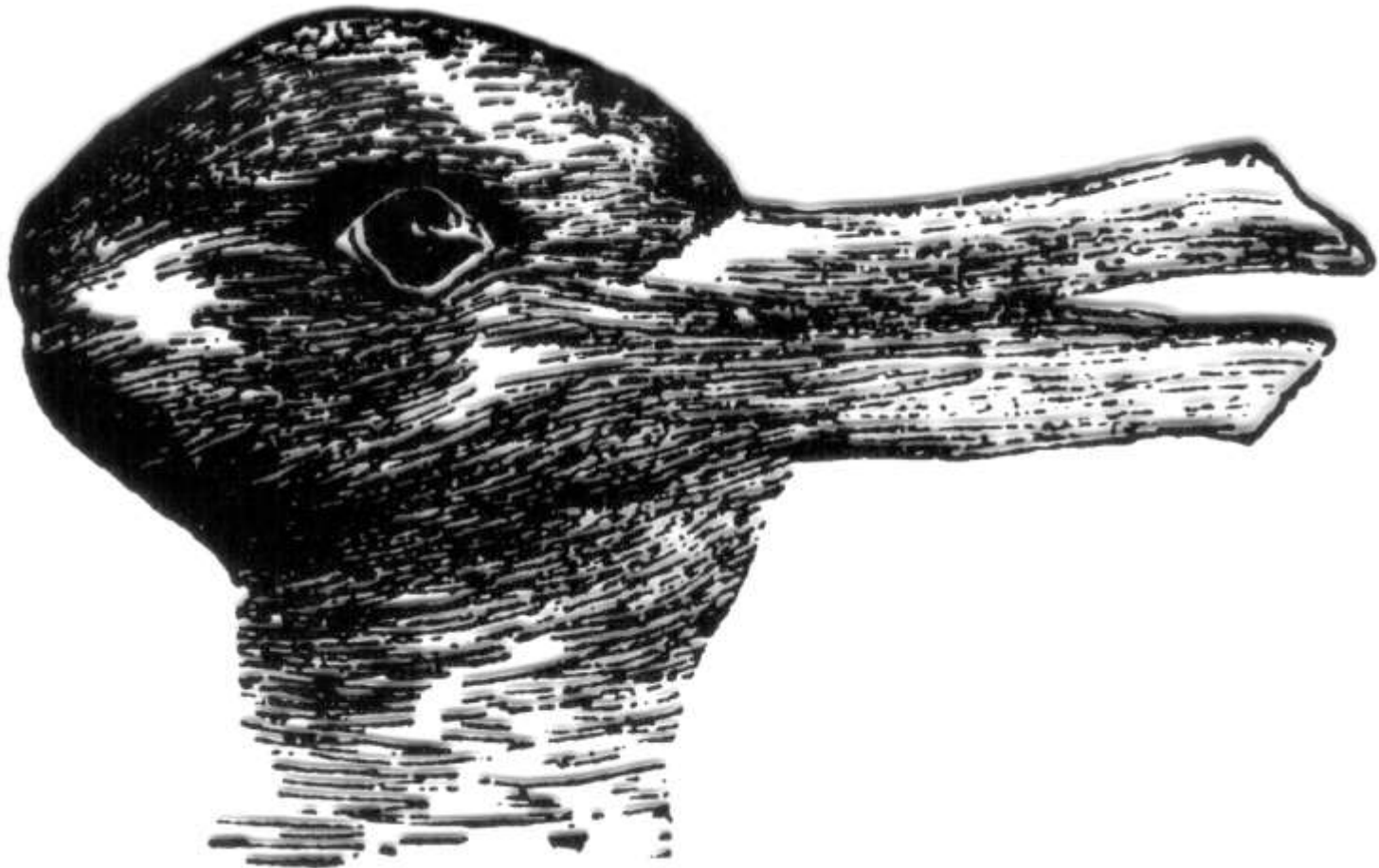
Restauriertes Bild

Optische Täuschungen



Beide Tischplatten haben exakt die gleiche Form, nur daß sie gegeneinander verdreht sind. Die eine wirkt lang und schmal, die andere kurz und breit, eine Folge dessen, wie unsere visuelle Intelligenz Höhen und Breiten bewertet.

Optische Täuschungen



Optische Täuschungen

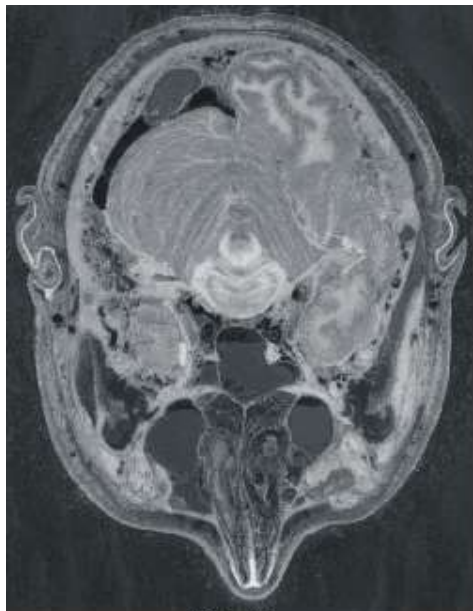


Bilddarstellung

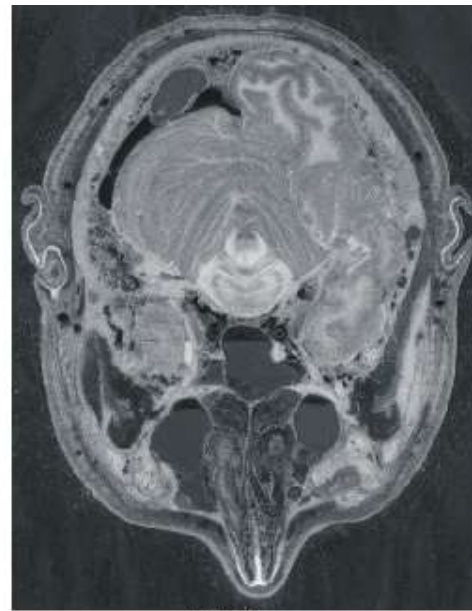
1. Räumliche Helligkeitsverteilung (Grauwertdarstellung)
repräsentativ z.B. für physikalische, chemische oder funktionelle (metabolische) Parameter
2. Grauerthistogramm
Verteilung der Helligkeitswerte
3. Farbdarstellung
4. Falschfarbendarstellung
5. 2-d und 3-d Darstellung (stereo, perspektivisch)
6. **Auflösung**

Bildauflösung:

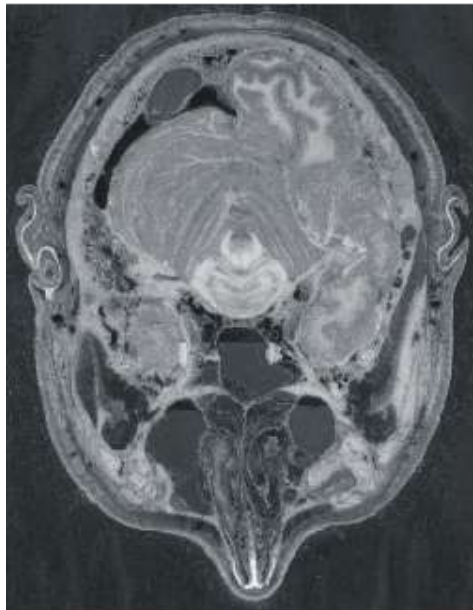
- Amplitudenauflösung (Anzahl der Grauwerte) und
- räumliche Auflösung (Anzahl und Dichte der Bildpunkte)



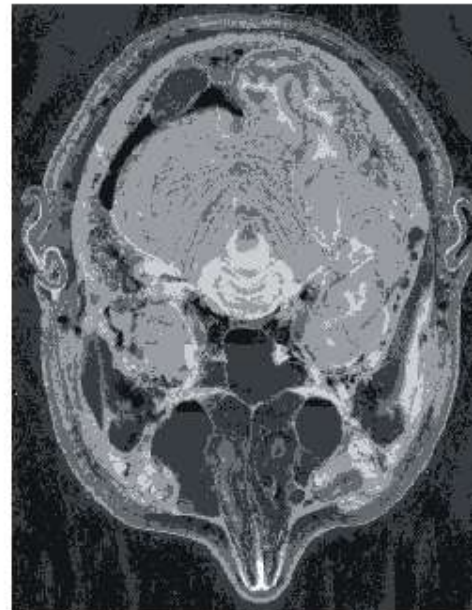
255 Grauwerte



127 Grauwerte

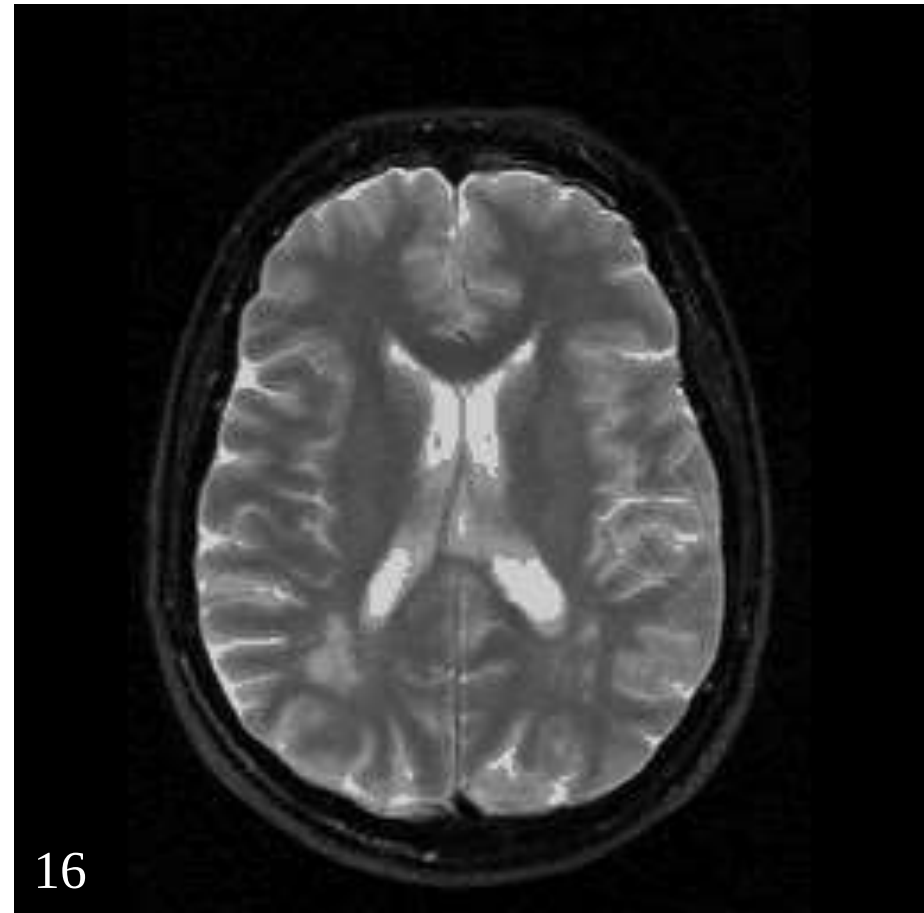
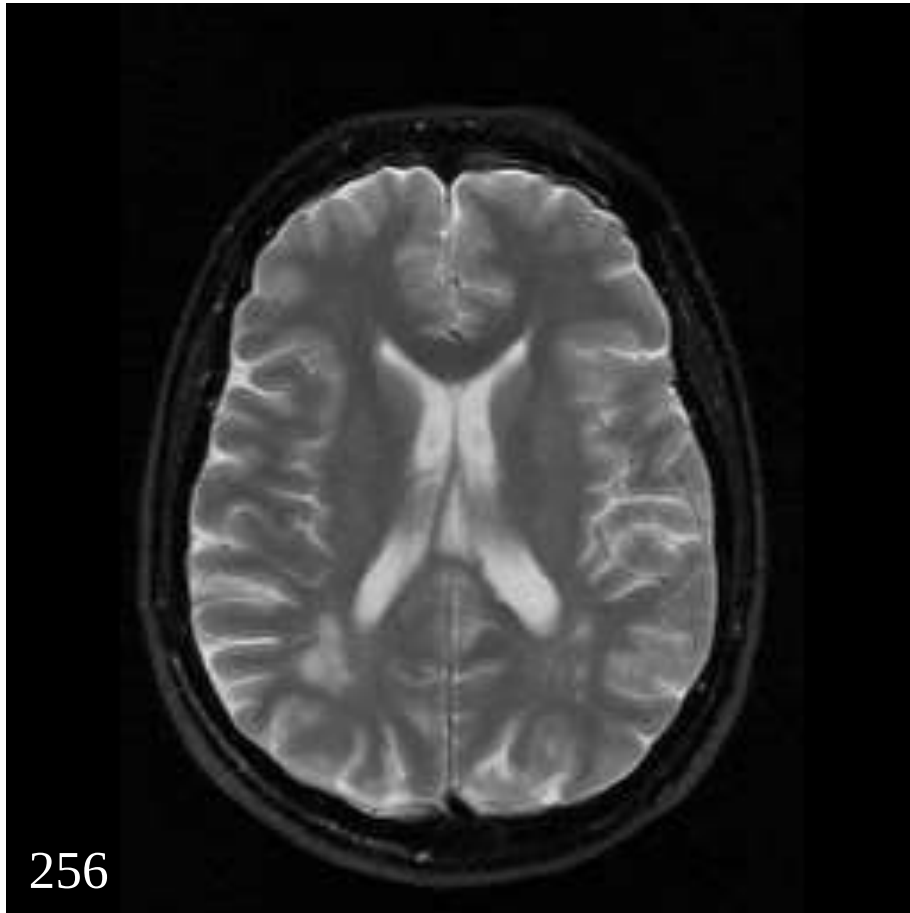


63 Grauwerte



6 Grauwerte

Amplitudenauflösung (Zahl der möglichen Helligkeitswerte)

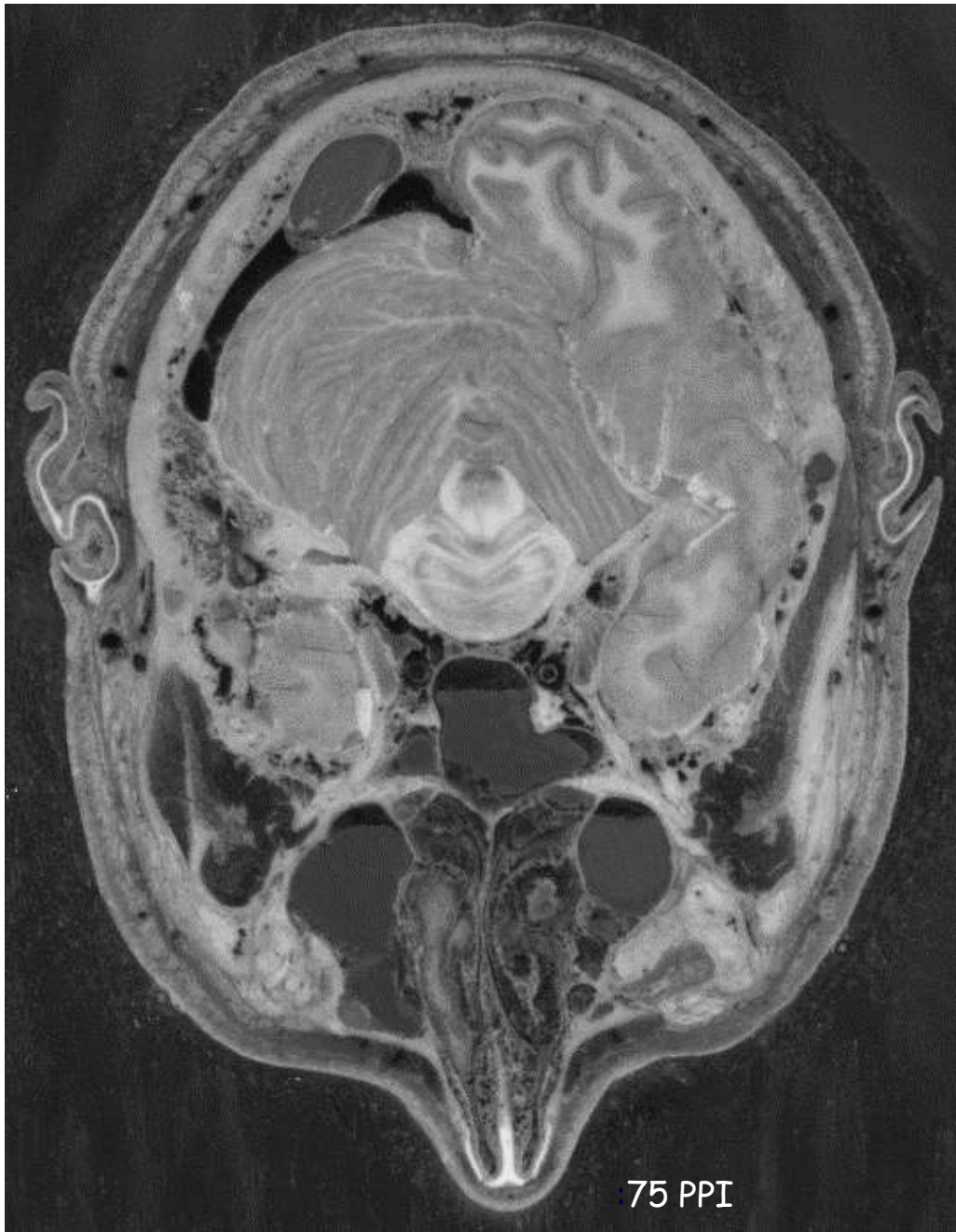


Typische Grauwertquantisierungsstufen

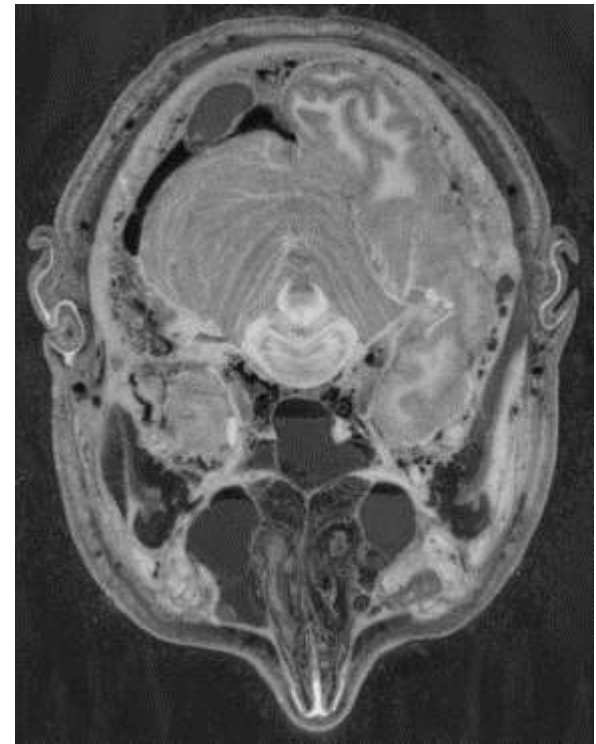
$f(x,y)$ wird in Form ganzzahliger Werte angegeben $[0 - \max]$, $\max = 2^n - 1$

$n = 1$	$[0 \ 1]$	Binärbild
$n = 5$	$[0 \ 31]$	ungefähr die maximale Anzahl an Grauwerten die das menschliche Auge lokal auflösen kann
$n = 8$	$[0 \ 256]$	1 Byte Grauwerttiefe
$n = 16$	$[0 \ 65535]$	üblicher Typ medizinischer Bilddaten oftmals sind jedoch nur 12 bit, d.h. 4096 Grauwerte tatsächlich belegt
$n = 24$	$[0 \ 16777215]$	üblich für Farbbilder, z.B. 3·1 Byte in RGB-Bildern

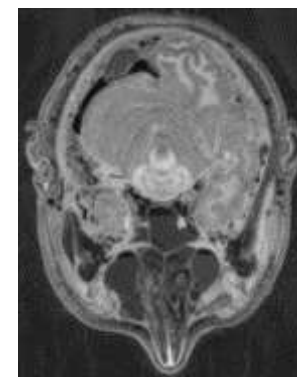
Bildauflösung: räumliche Auflösung (Dichte der Bildpunkte)
Maß: Points Per Inch (PPI)



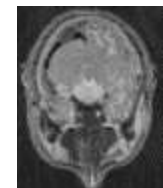
75 PPI



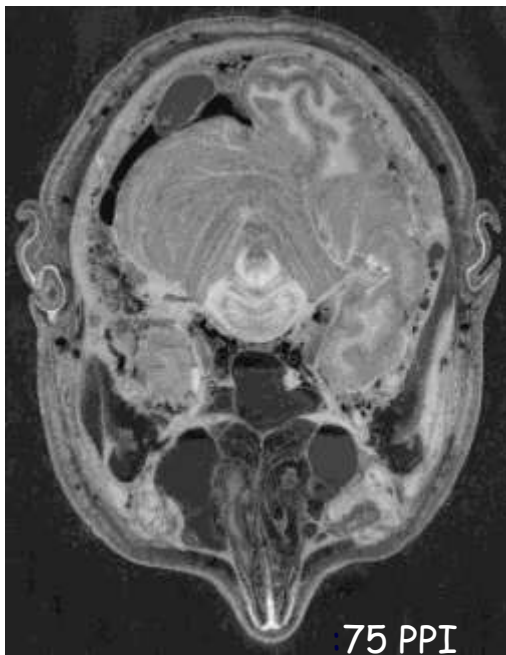
40 PPI



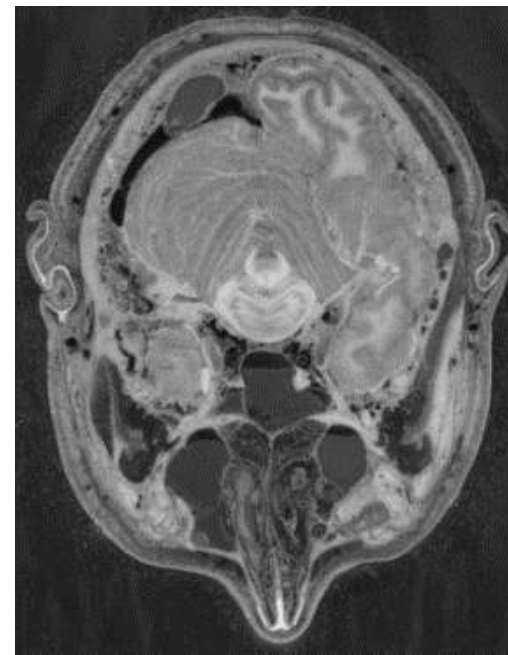
20 PPI



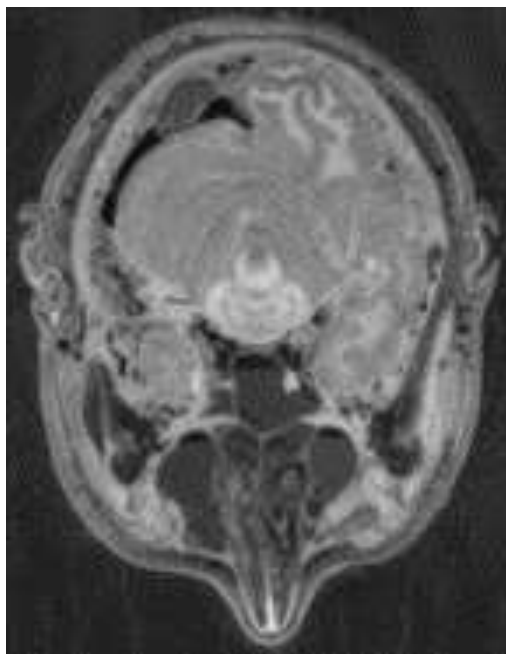
10 PPI



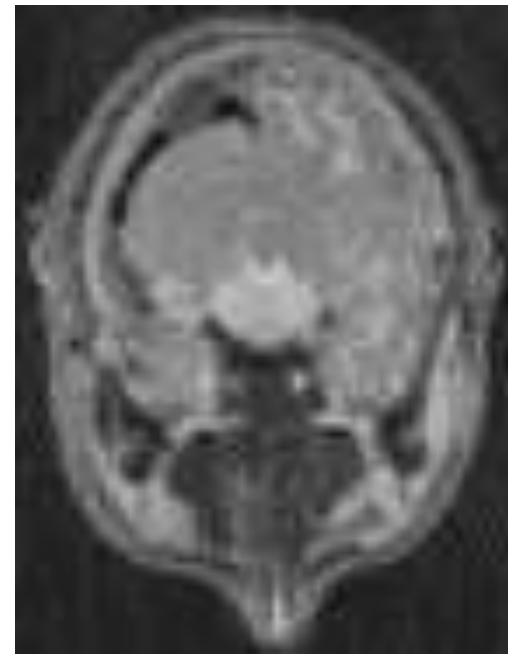
75 PPI



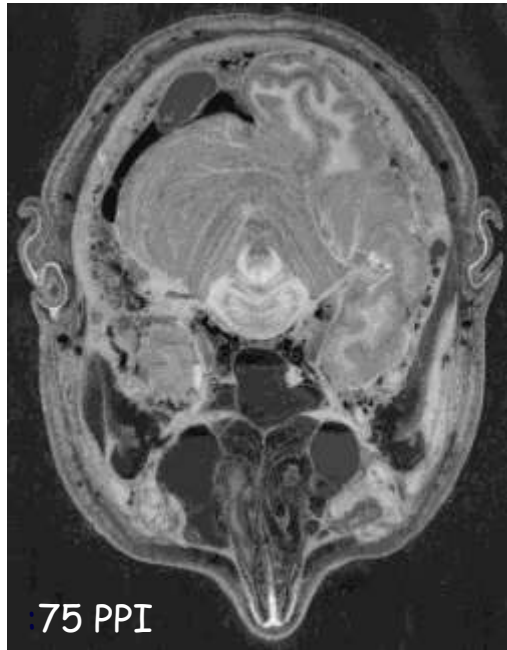
40 PPI



20 PPI



10 PPI

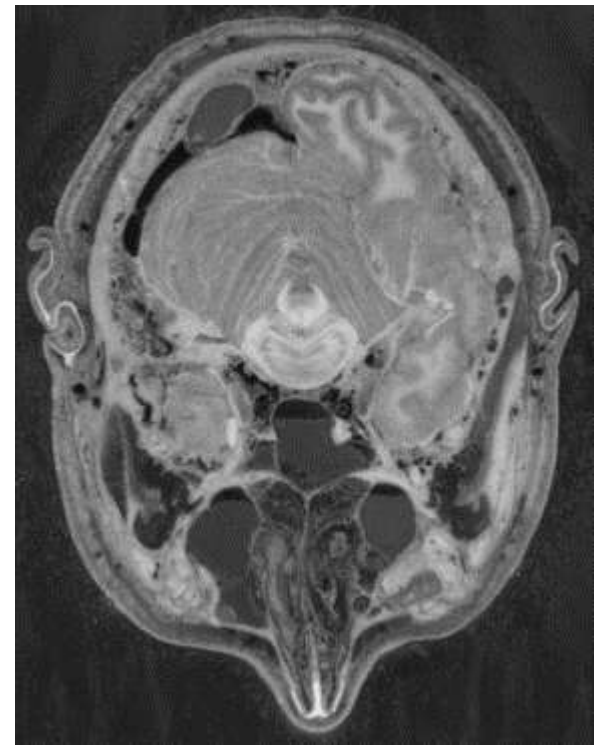
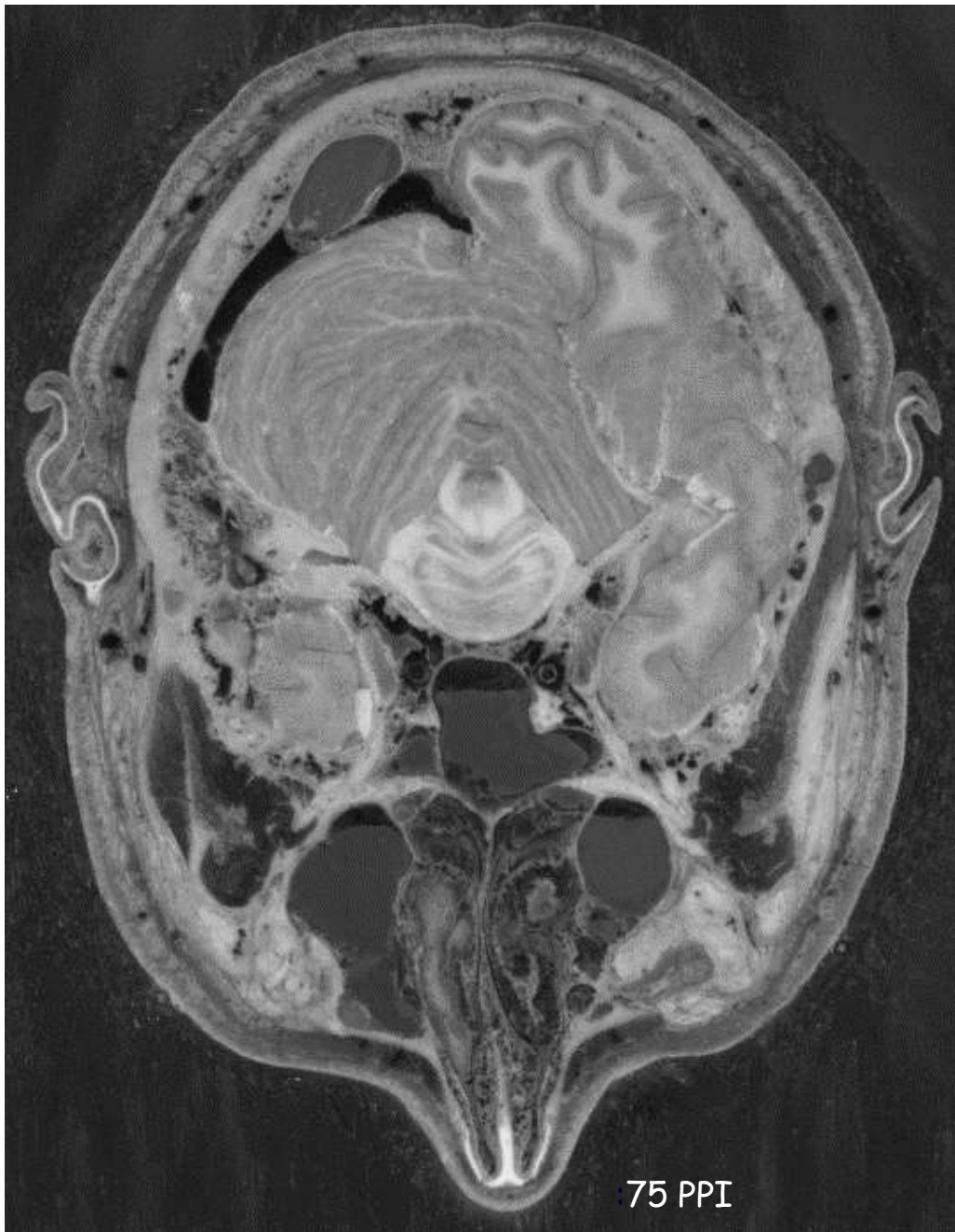


Zum Vergleich:

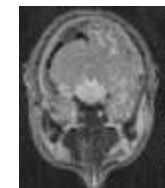
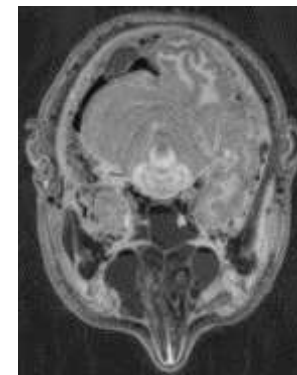
Hochwertiger Grauwertdrucker und Scanner: 300 bis 1200 PPI

Hochwertiger Photodrucker und Scanner: über 2400 PPI

Hochwertiger Röntgen CT Scanner: 75 bis 100 PPI

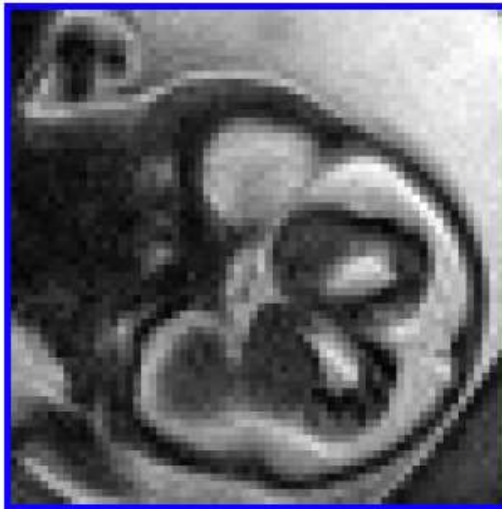
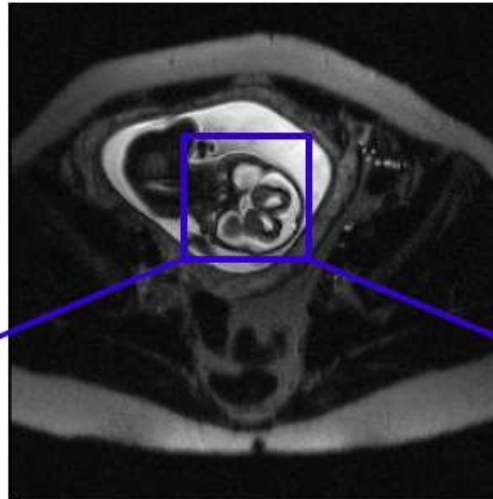


← **Interpolation?** Zur Verbesserung der Auflösung



Resampling und Interpolationsverfahren

4-fache Vergrößerung
des Bildausschnitts



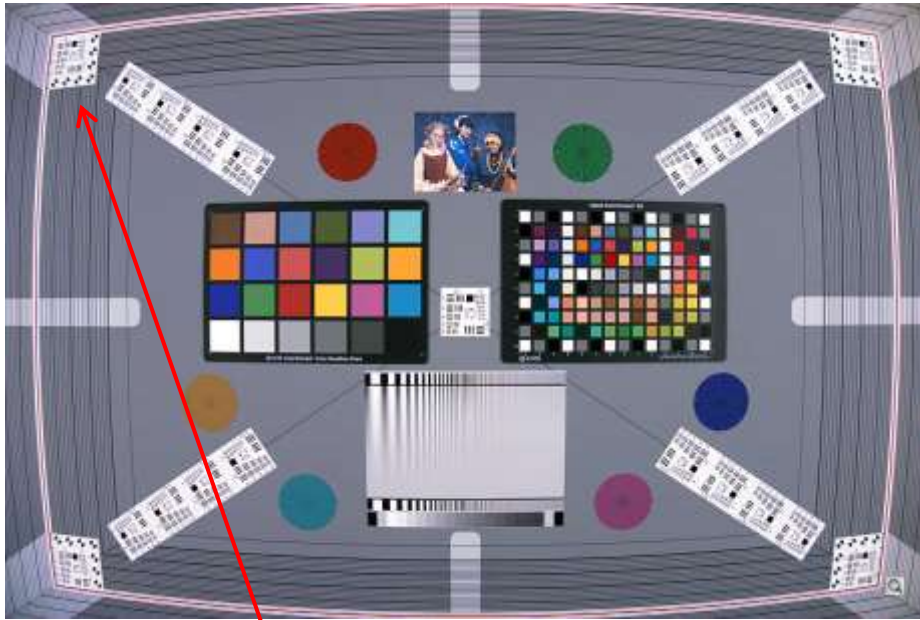
nearest neighbor



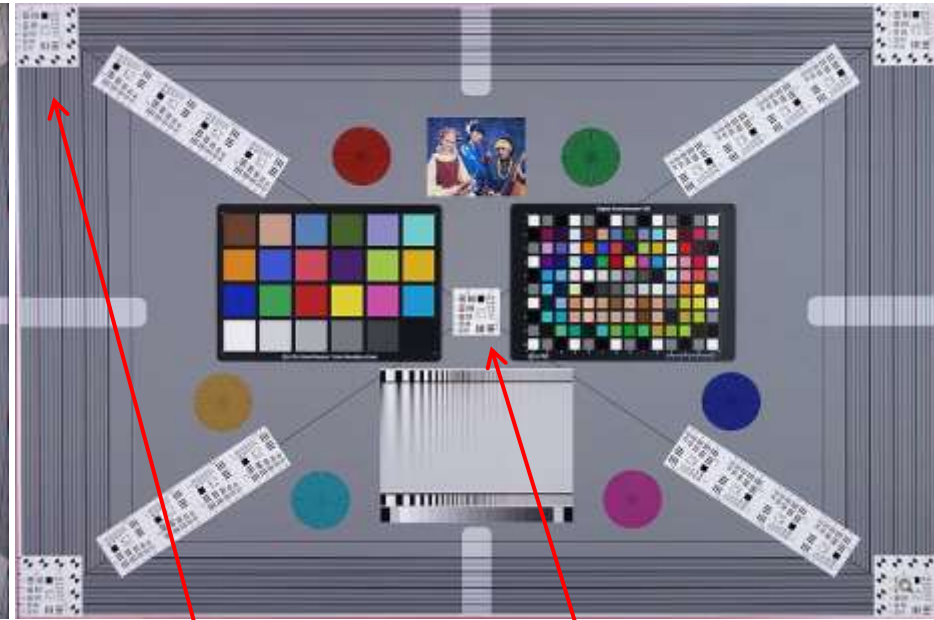
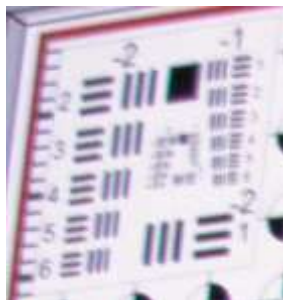
bilinear



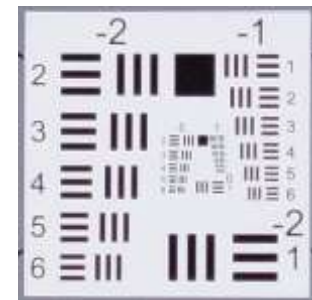
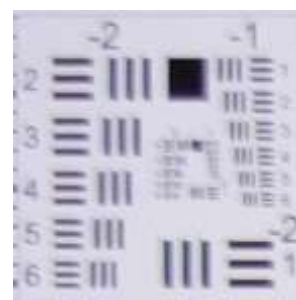
bikubisch



Sony Cyber-Shot DSC-RX100 Testbild Raw Data mit deutlicher Verzeichnung



Sony Cyber-Shot DSC-RX100 Testbild nach Korrektur der Verzeichnung



Nächster Nachbar oder Pixelwiederholung

Bei der Pixelwiederholung, auch Nearest neighbor („nächster Nachbar“) genannt, wird jedem Pixel des Ausgabebildes der Wert des nächstgelegenen Pixels des Eingabebildes zugewiesen.

Bei der Verringerung von Punktdichten oder nicht-ganzzahligen Änderungen werden einige der vorhandenen Pixelwerte gelöscht. Die Verkleinerung von Bildern mit dieser Methode kann zu starken Alias-Effekten führen, die sich als Bildartefakte äußern. Bei der Vergrößerung mittels Pixelwiederholung kommt es zu einer klötzchenartigen, „pixeligen“ Darstellung.

Bilineare Filterung oder **bilineare Interpolation**

Die **bilineare Filterung** oder **bilineare Interpolation** ist eine Erweiterung der linearen Interpolation, um Zwischenwerte innerhalb eines zweidimensionalen, regulären Rasters zu bestimmen.

Bilineare Interpolation

Es wird angenommen, dass der Wert $P = f(x, y)$ innerhalb einer Funktion f bestimmt werden soll. Dieser soll weiterhin von vier fixen Rasterpunkten $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ und $Q_{22} = (x_2, y_2)$ umgeben sein. Um den Wert P näherungsweise (durch lineare Interpolation) zu bestimmen, wird zunächst in eine festgelegte Richtung (horizontal oder vertikal, hier horizontal) zwischen den Rasterpunkten linear interpoliert. Dabei sind R_1 und R_2 Stützpunkte zwischen den in horizontaler Richtung liegenden Rasterpunkten.

$$f(R_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}) \quad \text{mit } R_1 = (x, y_1),$$

$$f(R_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}) \quad \text{mit } R_2 = (x, y_2).$$

Nach dem gleichen Verfahren wird anschließend zwischen den Werten dieser beiden Punkte interpoliert.

$$f(P) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(R_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(R_2).$$

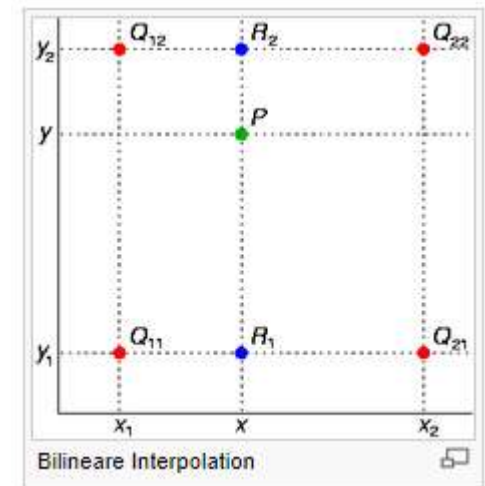
Sind die Rasterpunkte der Funktion f in regelmäßiger Form $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ gegeben, so reduziert sich die Gleichung zu

$$f(x, y) \approx f(0, 0)(1-x)(1-y) + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)(1-x)y + f(1, 1)xy.$$

Diese Gleichung lässt sich in Matrixschreibweise wie folgt zusammenfassen.

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1-x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix}$$

Eine Erweiterung dieses Verfahrens um eine zusätzliche dritte Dimension wird als trilineare Interpolation bezeichnet.



Trotz des Namens, der Linearität suggeriert, ist die bilineare Interpolation wegen des Terms xy keine lineare Filterung.

Bikubische Interpolation

Diese Methode benutzt analytische Funktionen (also die Berücksichtigung von Tendenzen über die Nachbarpixel hinaus) zur Neuberechnung.

Dabei wird ein Wert des Ausgabebildes aus den benachbarten Werten des Eingabebildes mittels kubischer Splines interpoliert. Es gibt mehrere gebräuchliche kubische Splines mit unterschiedlichen Eigenschaften; der Begriff „bikubische Interpolation“ ist daher mehrdeutig. Bei der Verringerung von Punktdichten oder nicht-ganzzahligen Änderungen entstehen hierbei deutlich "weichere" Übergänge zwischen den neuen Pixeln als bei der einfachen Pixelwiederholung.

Bikubische Interpolation

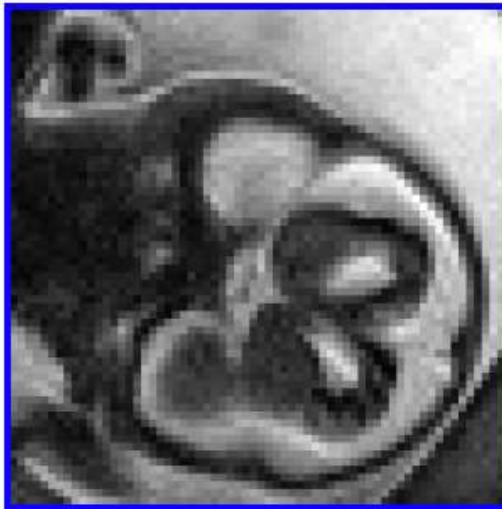
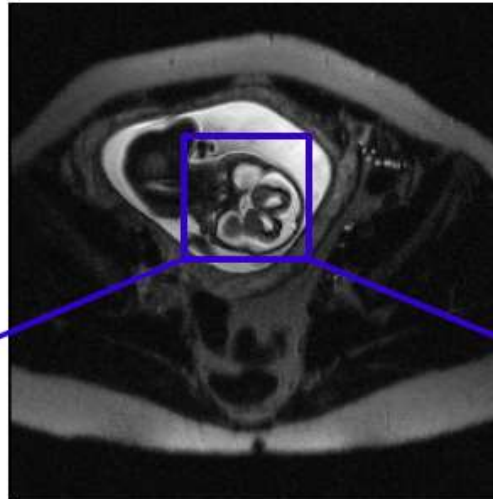
Bei der bikubischen Interpolation stützt sich der Wert des Ausgabebildes auf die Werte der 16 nächsten Nachbarn.

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$$

Die sechzehn Koeffizienten a_{ij} werden bestimmt aus den 16 Gleichungen mit 16 Unbekannten für $v(x, y)$.

Resampling und Interpolationsverfahren

4-fache Vergrößerung
des Bildausschnitts



nearest neighbor



bilinear



bikubisch

Bildtransformationen:

- Punktabbildungen (Kennlinienprozesse)
- Lokale Operationen
- Globale Operationen (z.B. Fouriertransformation)

Rechenaufwand?

Punktabbildungen/Kennlinienprozesse

Die einfachste Form einer Bildtransformation besteht darin, daß jedem Bildpunkt des Eingabebilds $b_1(x, y)$ in Abhängigkeit von seinem Wert ein bestimmter Grauwert im Ausgabebild zugeordnet wird. Dieser Vorgang kann leicht über eine Kennlinie beschrieben werden. Dabei gilt allgemein für ein ortsinvariantes System

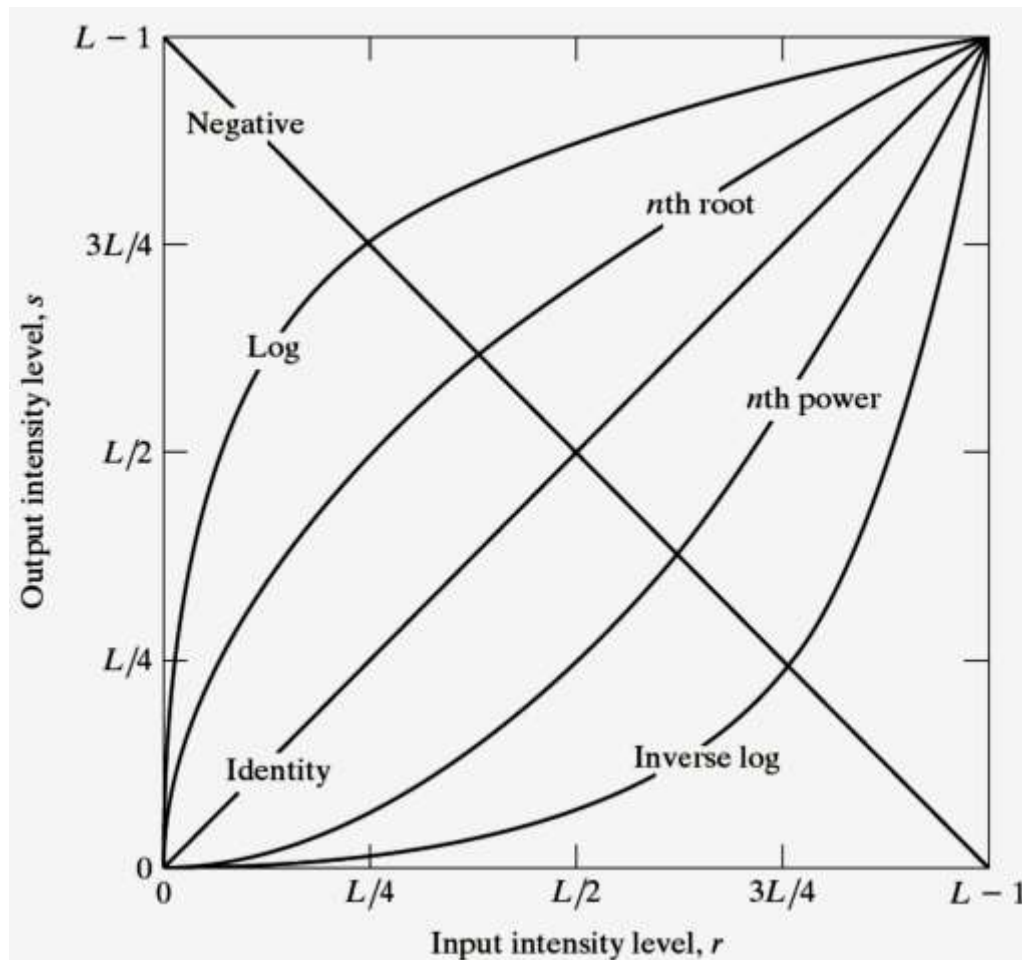
$$b_2(x, y) = f(b_1(x, y)) \quad (5.1)$$

und für ein ortsvariantes System

$$b_2(x, y) = f(b_1(x, y), x, y). \quad (5.2)$$

Dies bedeutet, daß der Grauwert im Ausgabebild bei einem ortsinvarianten System ausschließlich vom aktuellen Grauwert im Eingabebild abhängt, während bei ortsvarianten Systemen diese Funktion von Bildpunkt zu Bildpunkt unterschiedlich sein kann.

Kennlinienprozesse



Einige einfache Intensitätstransformations-Funktionen.

Negativbild

Originalbild B1

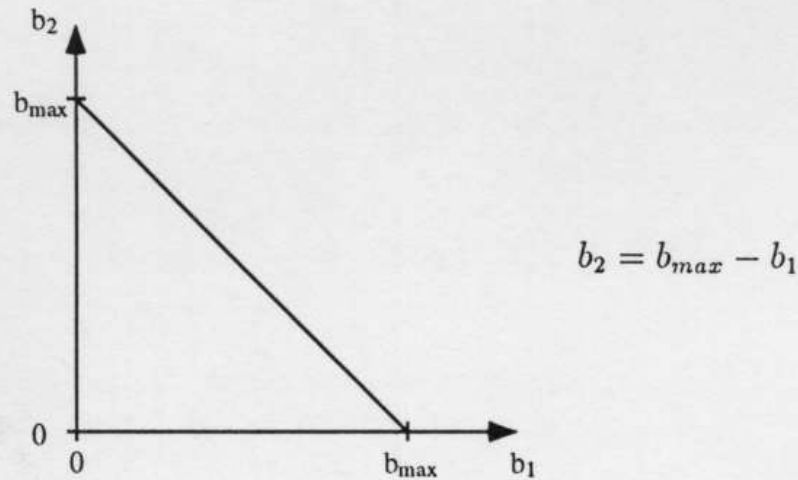
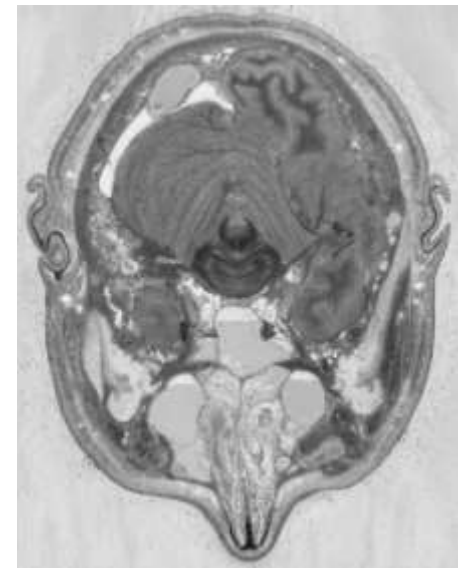
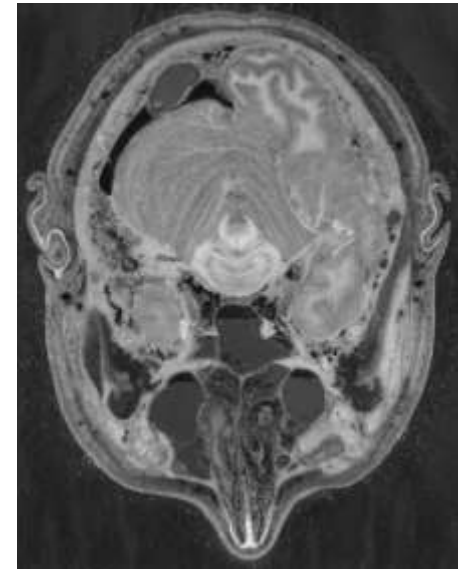


Bild 5.3: Kennlinie zur Bildinvertierung

Invertiertes Bild B2
fil3.tif

Negativbild



Originales digitales Mammogram



Negativbild des Mammograms

Lineare und nichtlineare Gammafunktionen (Kennlinien)

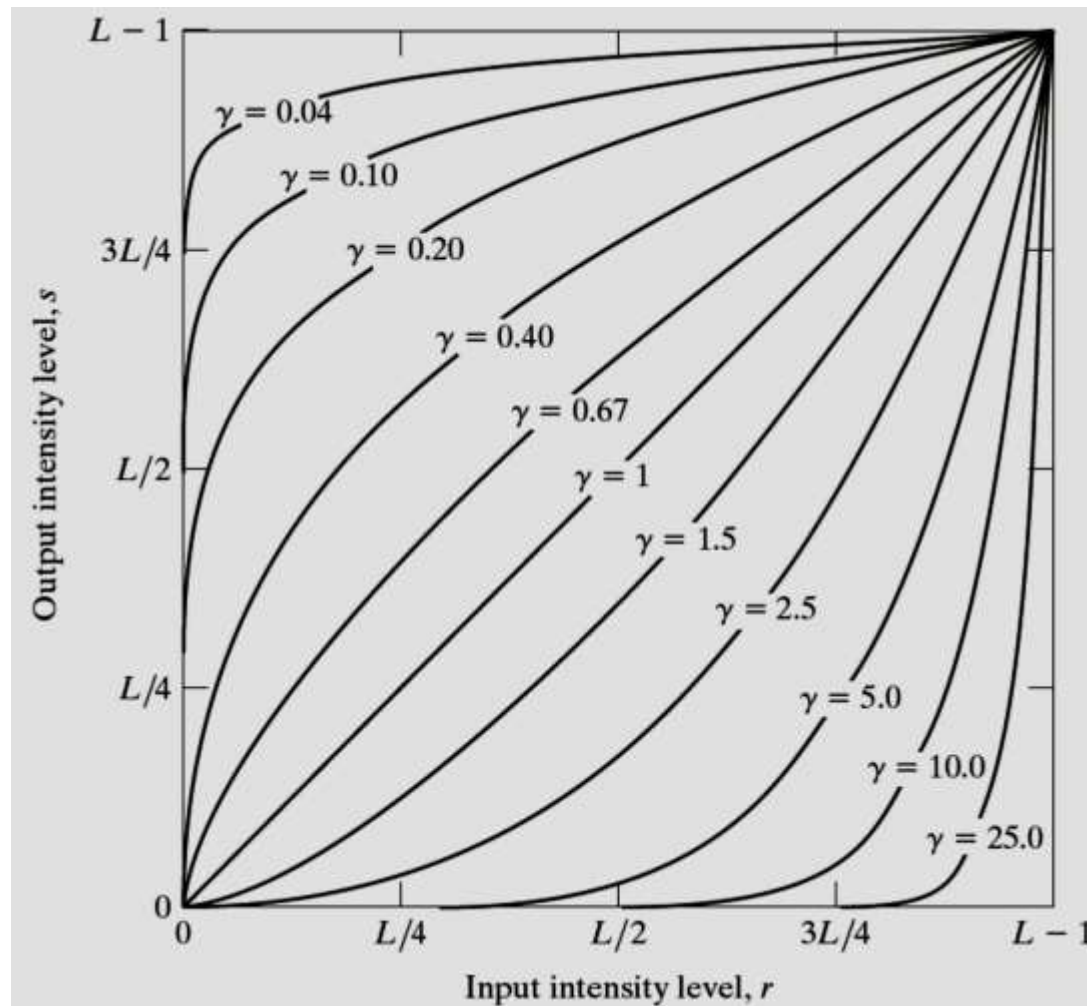
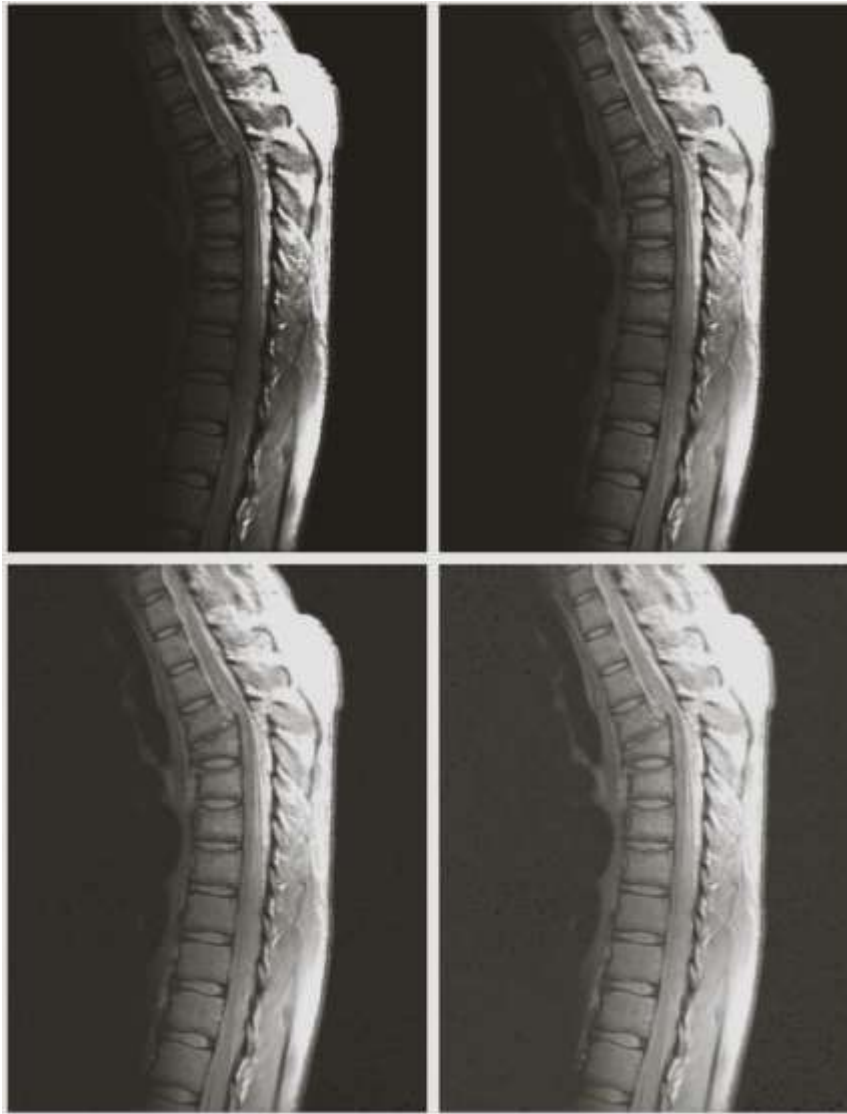


FIGURE 3.6 Plots of the equation $s = cr^\gamma$ for various values of γ ($c = 1$ in all cases). All curves were scaled to fit in the range shown.

Lineare und nichtlineare Gammafunktionen (Kennlinien)



a	b
c	d

FIGURE 3.8

(a) Magnetic resonance image (MRI) of a fractured human spine.

(b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with $c = 1$ and $\gamma = 0.6, 0.4$, and 0.3 , respectively. (Original image courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

$$s = cr^\gamma$$

Lineare und nichtlineare Gammafunktionen (Kennlinien)



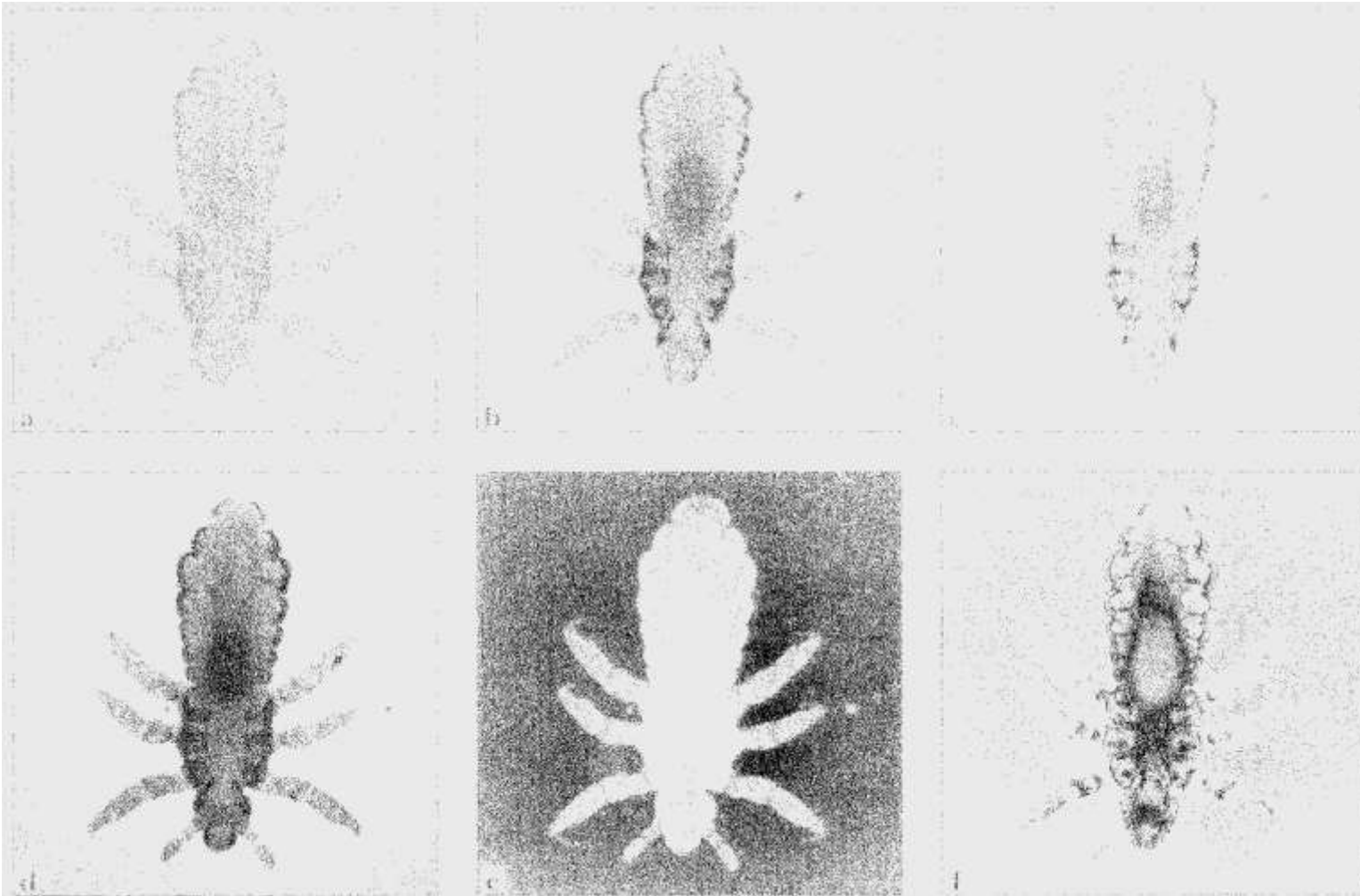
$$s = cr^\gamma$$

a	b
c	d

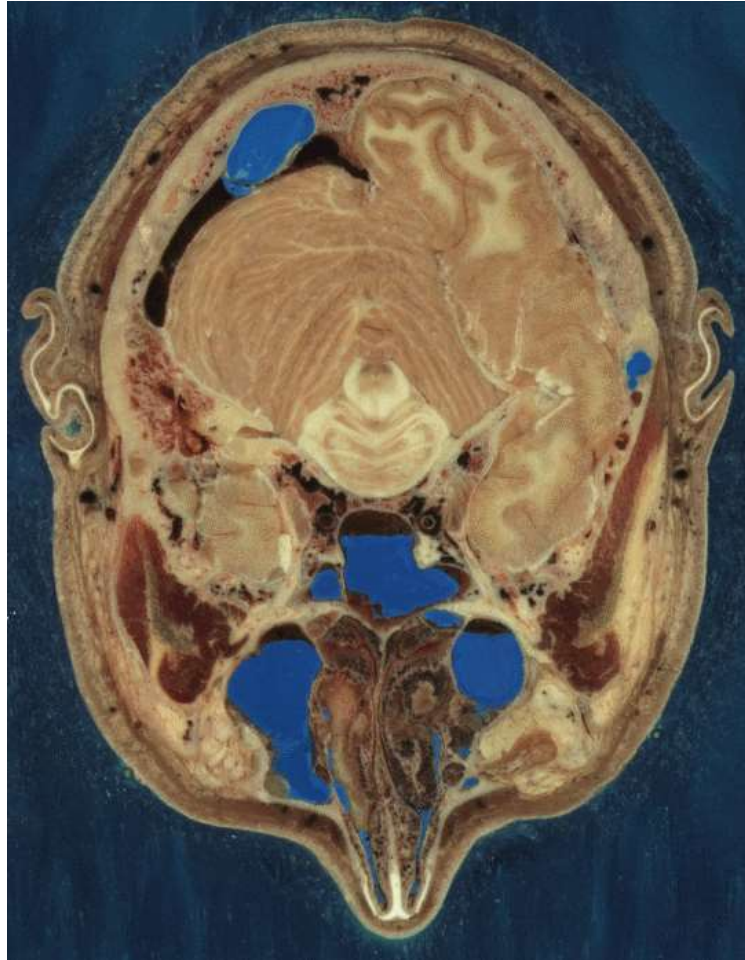
FIGURE 3.9

(a) Aerial image.
 (b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with $c = 1$ and $\gamma = 3.0, 4.0$, and 5.0 , respectively. (Original image for this example courtesy of NASA.)

Kennlinienmanipulationen



- a) Original, Transmissions-Lichtmikroskop Aufnahme einer Kopflaus mit niedrigem Kontrast
b) Grauwerte auf gesamten Bereich expandiert (erhöhte Auflösung), c) Positive, logarithmische Gamma-Funktion, d) Negative, logarithmische Gamma-Funktion, e) Negative, lineare Gamma-Funktion, f) Nichtlineare Gamma-Funktion (steiler, positiv linearer Verlauf im Zentrum des Grauwertbereichs, negative Flanke im Bereich dunkler und heller Grauwerte)



Demo Corel Photo-Paint
Kennlinienmanipulationen mit
„Visible Human Farbe-1.tif“
Tonkurve

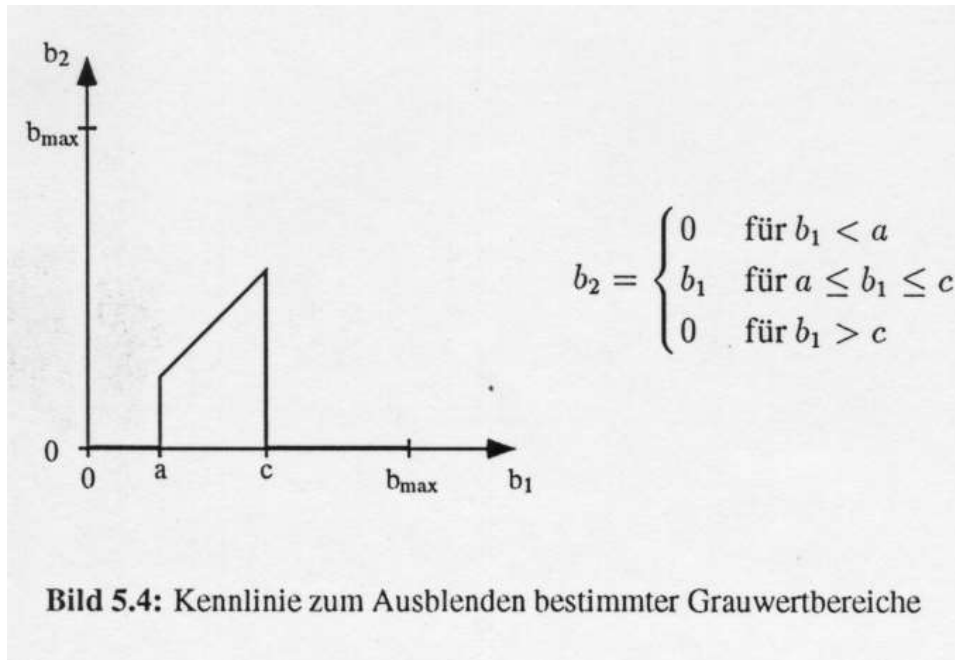
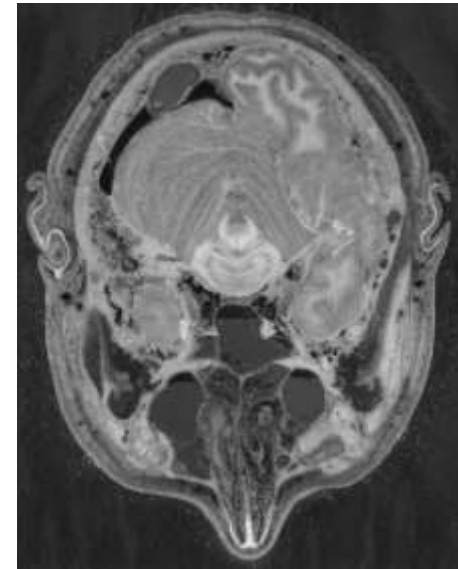
Lineare und nichtlineare Gammafunktionen (Kennlinien)

Korrigierende Gammafunktionen werden für jedes bildgebende System, inklusive Kameras, Scanner und Drucker benötigt.

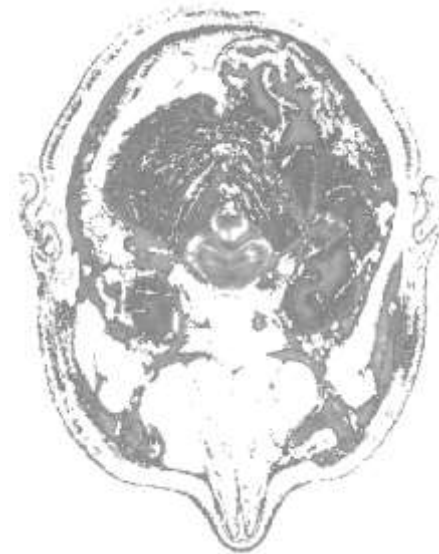
$$s = cr^\gamma$$

Stückweise lineare Kennlinien

Originalbild

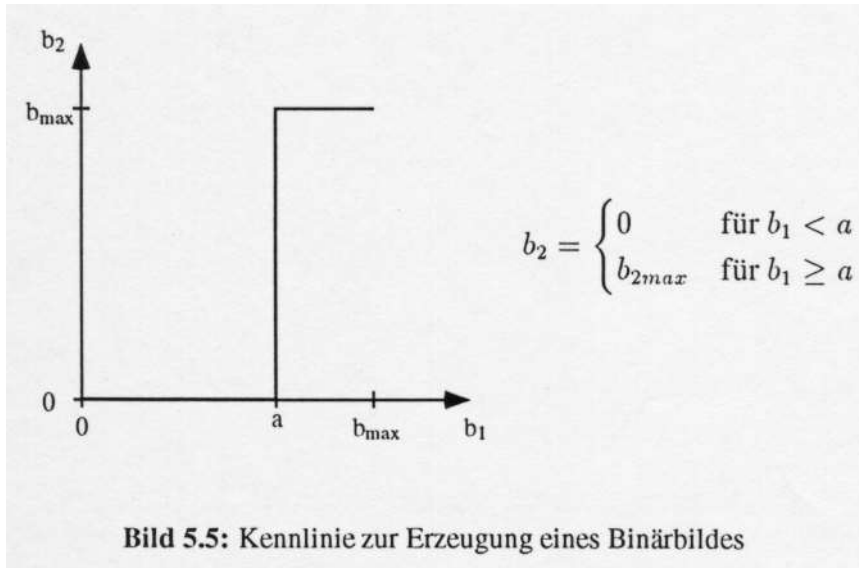
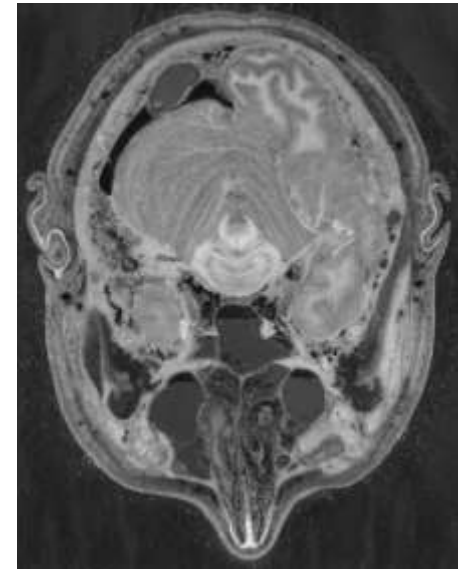


fil4.tif

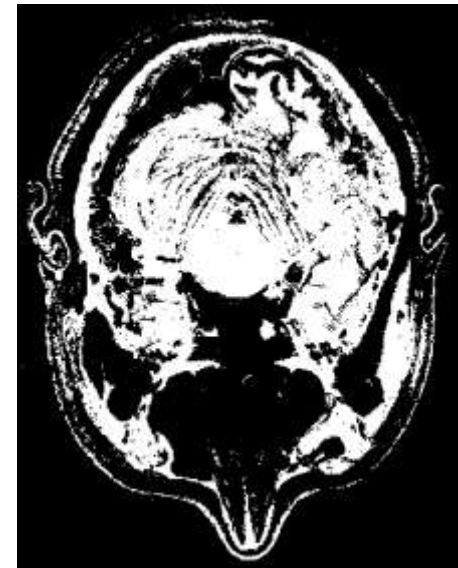


Stückweise lineare Kennlinien

Originalbild
Grauwerte

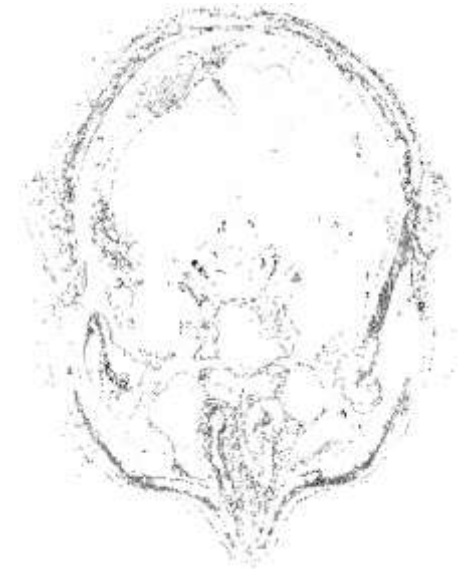
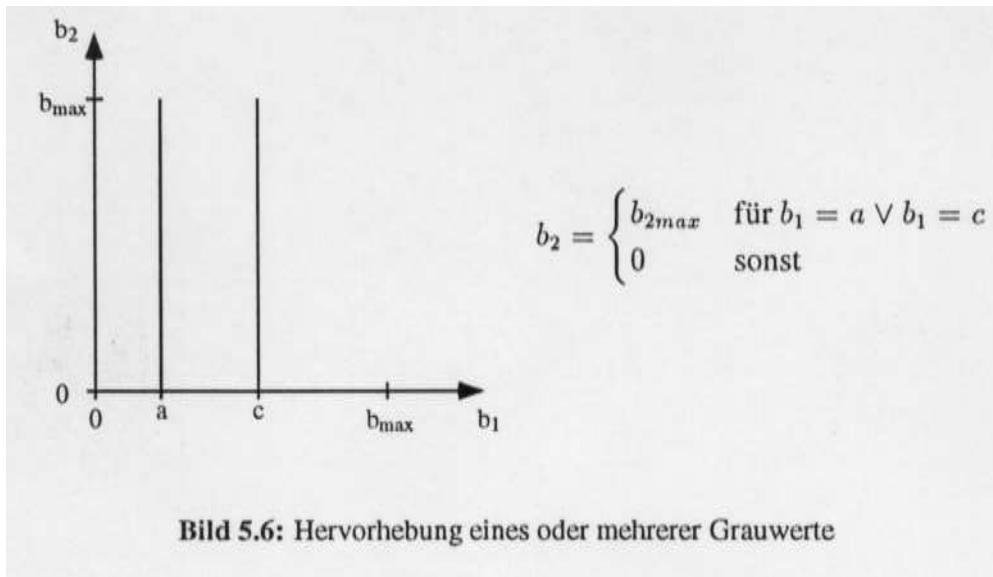
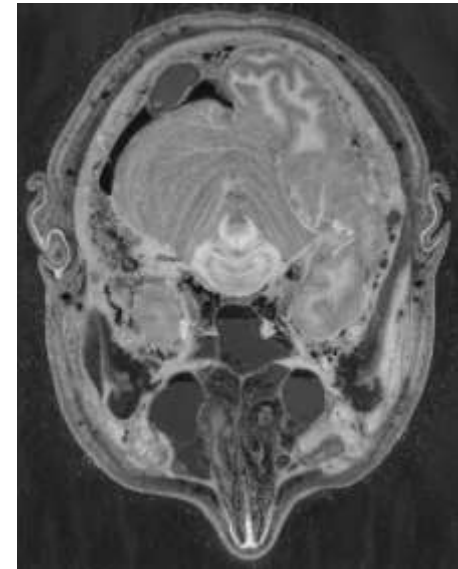


Schwarz-Weiß-Bild
fil5.tif



Stückweise lineare Kennlinien

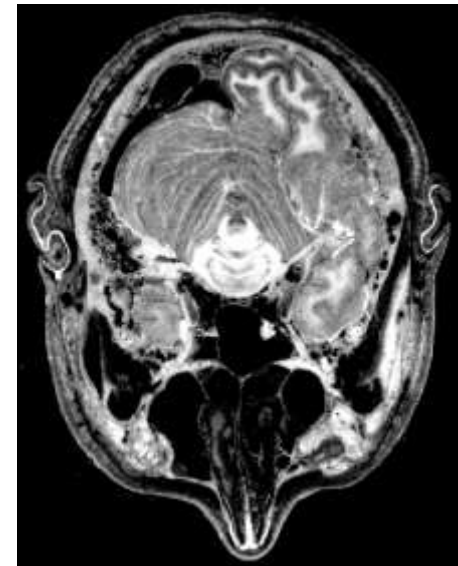
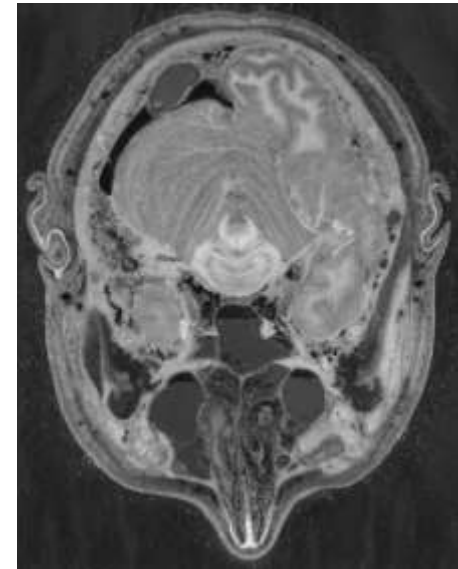
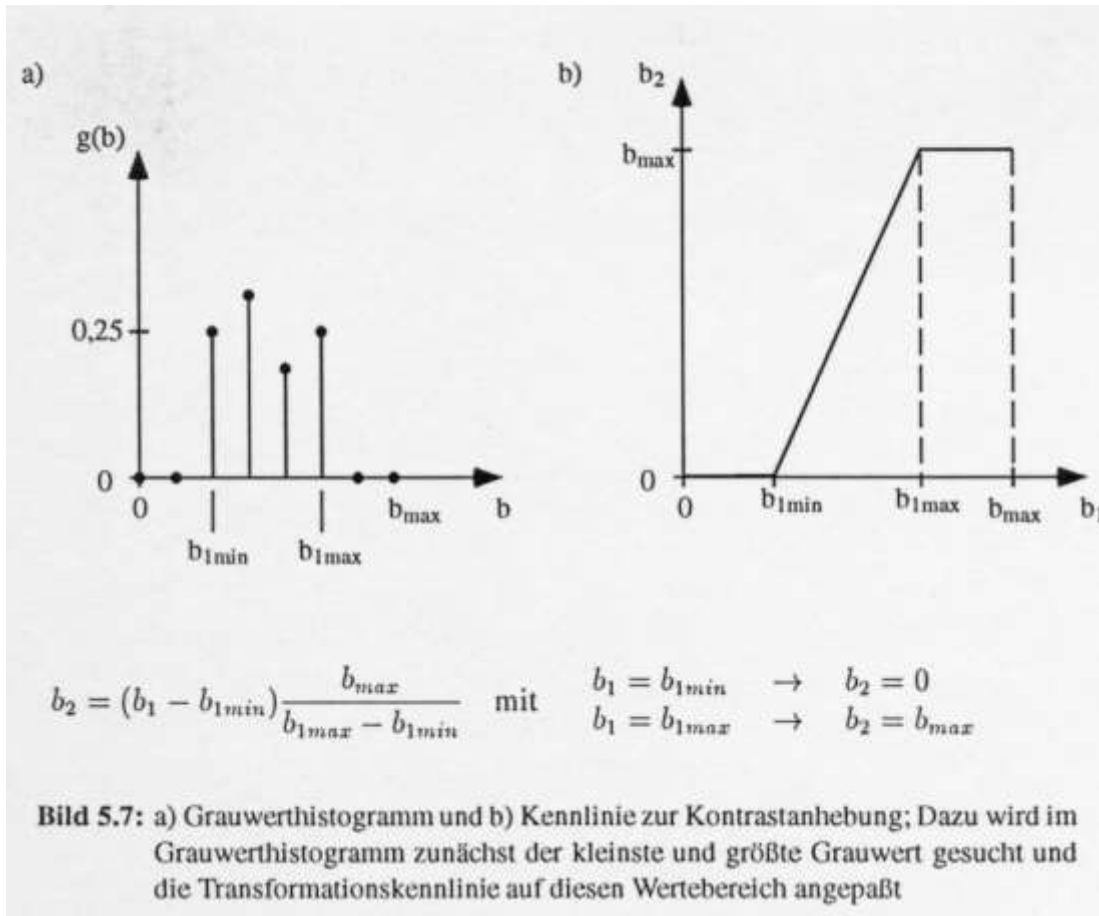
Originalbild



fil6.tif

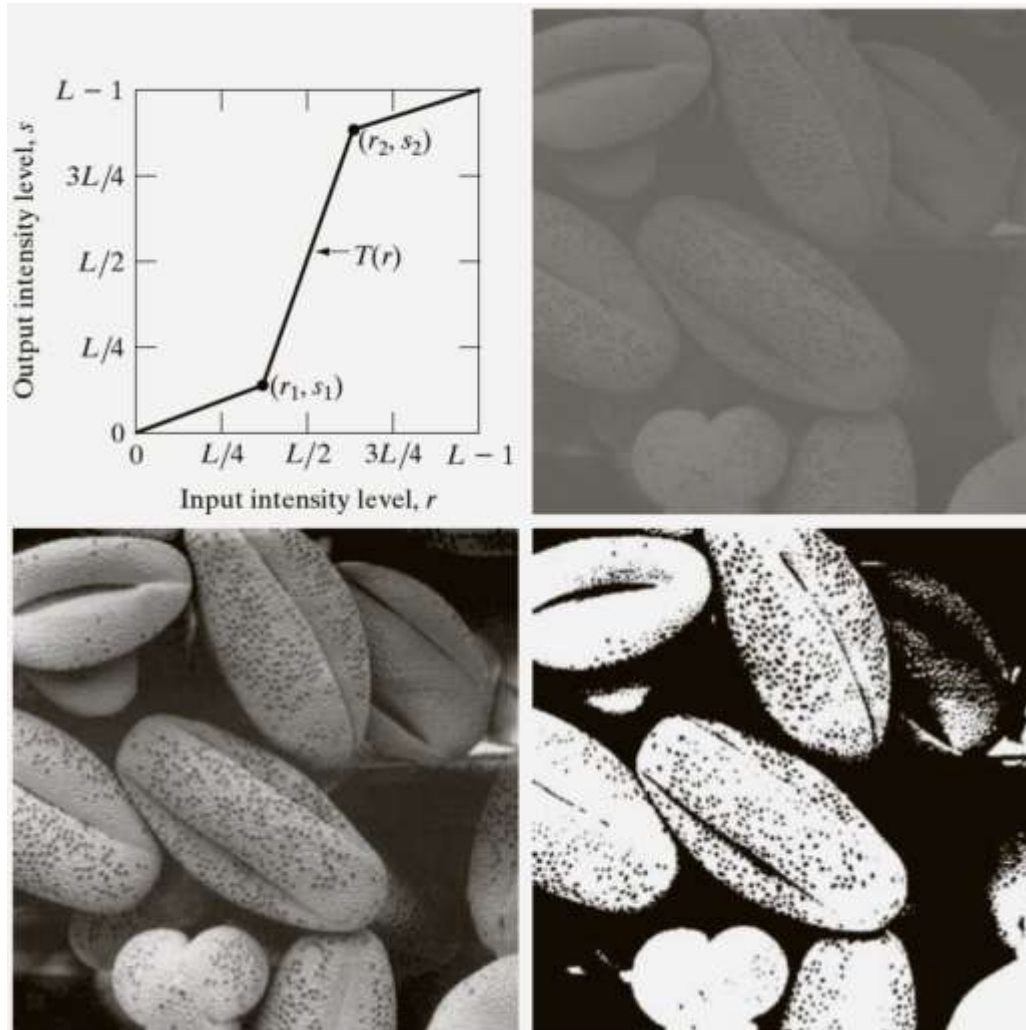
Stückweise lineare Kennlinien

Originalbild



Gefenstertes Bild
„Windowing“, „Stretching“
fil7.tif

Stückweise lineare Kennlinien



a	b
c	d

FIGURE 3.10

Contrast stretching.

(a) Form of transformation function. (b) A low-contrast image.

(c) Result of contrast stretching.

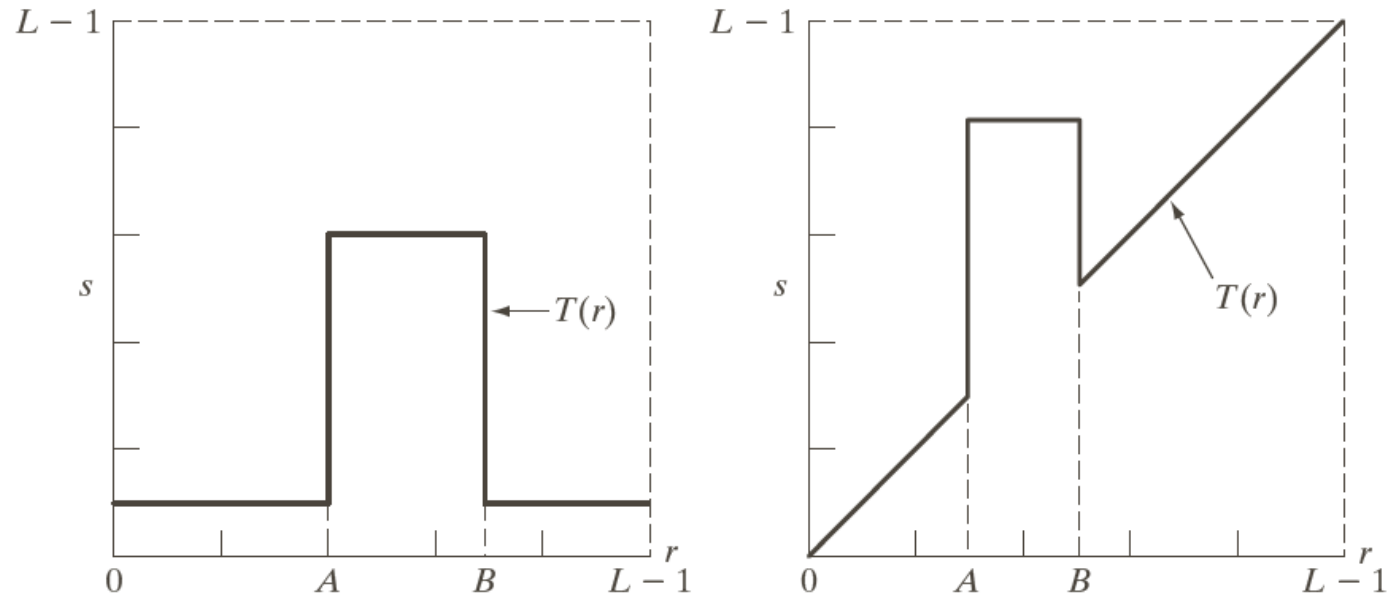
(d) Result of thresholding.

(Original image courtesy of Dr. Roger Heady, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)

Stückweise lineare Kennlinien

a b

FIGURE 3.11 (a) This transformation highlights intensity range $[A, B]$ and reduces all other intensities to a lower level. (b) This transformation highlights range $[A, B]$ and preserves all other intensity levels.



Stückweise lineare Kennlinien

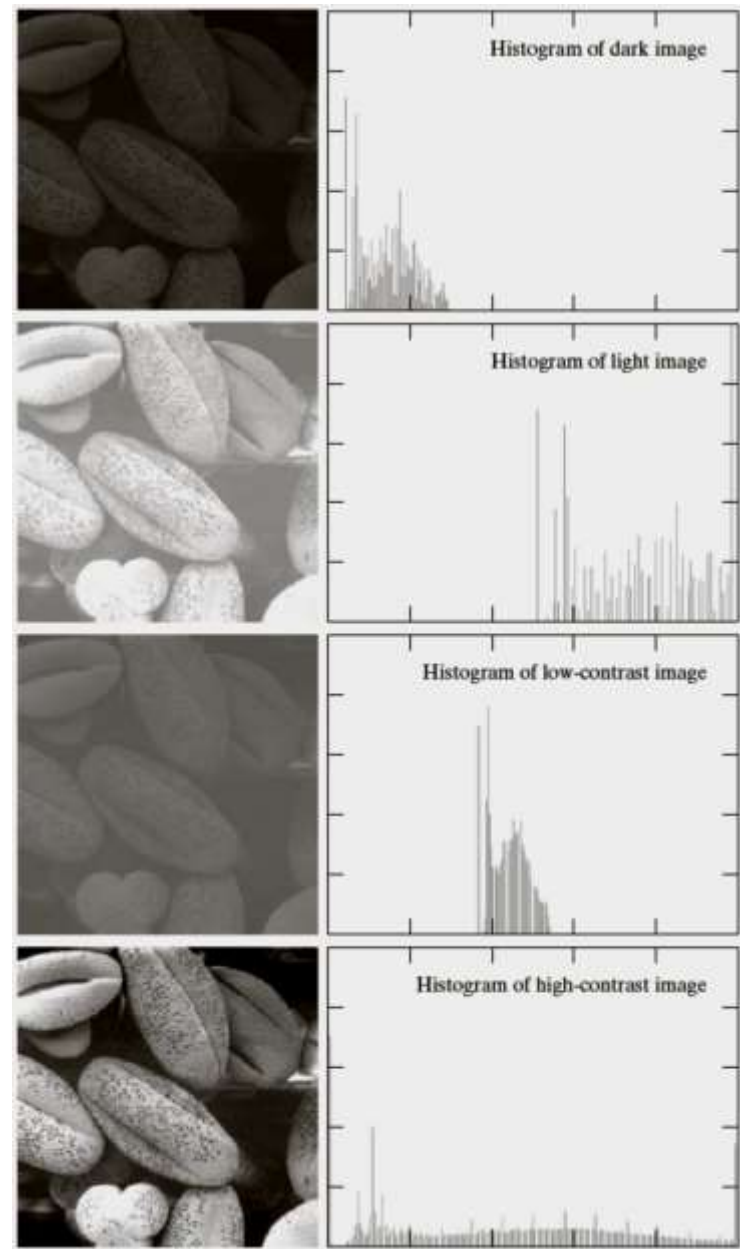


a b c

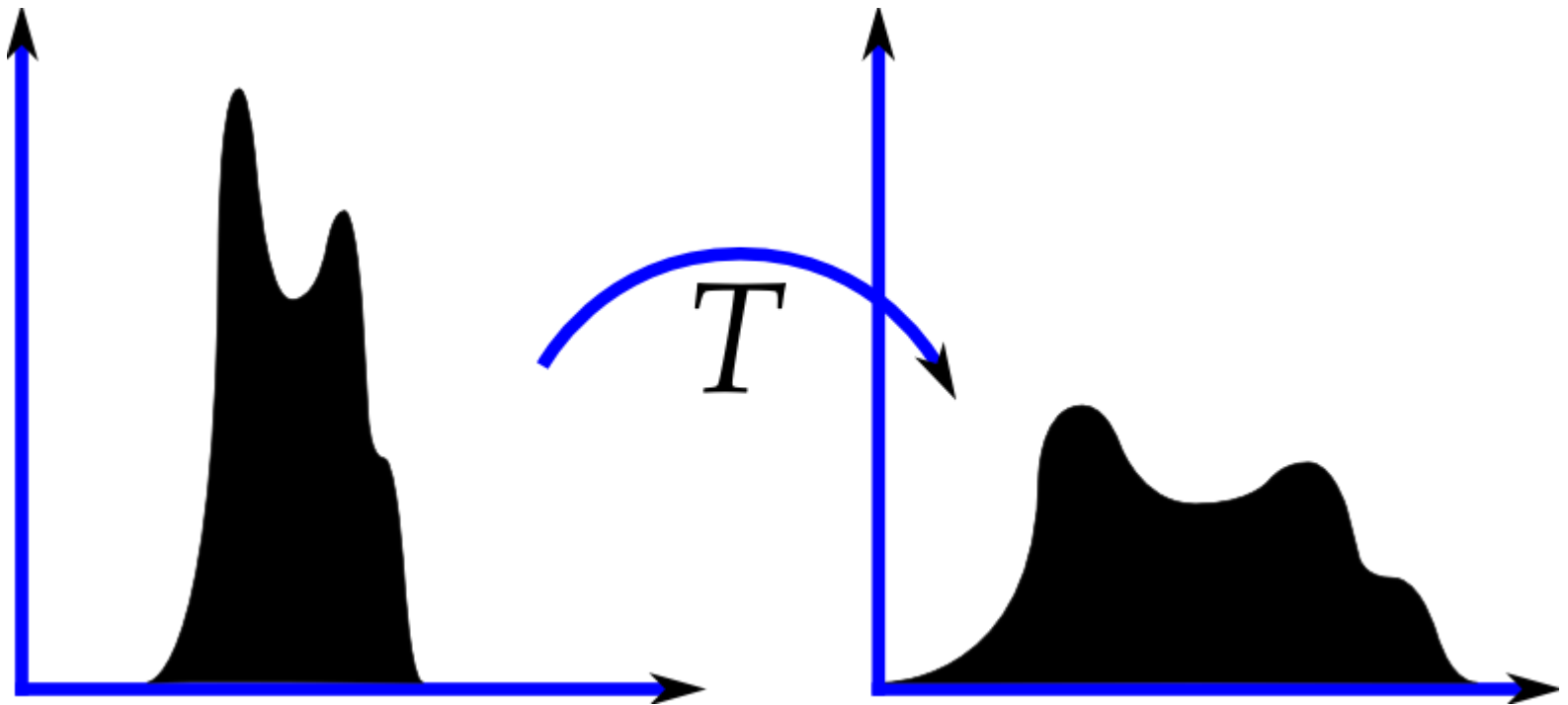
FIGURE 3.12 (a) Aortic angiogram. (b) Result of using a slicing transformation of the type illustrated in Fig. 3.11(a), with the range of intensities of interest selected in the upper end of the gray scale. (c) Result of using the transformation in Fig. 3.11(b), with the selected area set to black, so that grays in the area of the blood vessels and kidneys were preserved. (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, University of Michigan Medical School.)

Histogrammverarbeitung

FIGURE 3.16 Four basic image types: dark, light, low contrast, and high contrast, and their corresponding histograms.



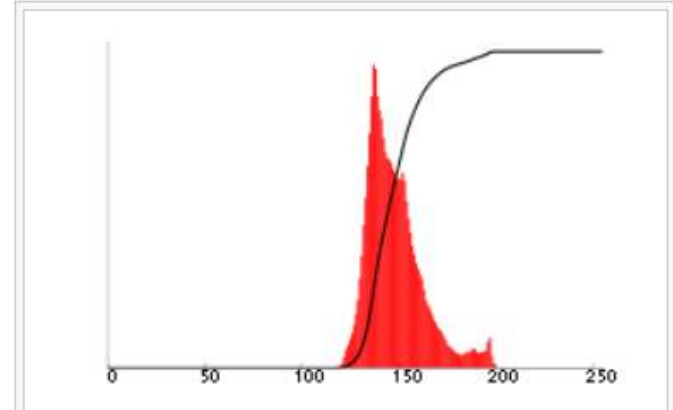
Histogramm Äquivalisierung



Histogramm Äquivalisierung



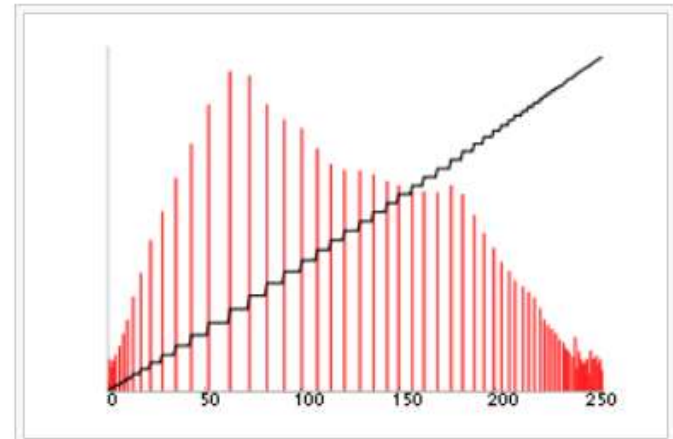
An unequalized image



Corresponding histogram (red) and cumulative histogram (black)



The same image after histogram equalization



Corresponding histogram (red) and cumulative histogram (black)

Histogramm Äquivalisierung

Originalbild

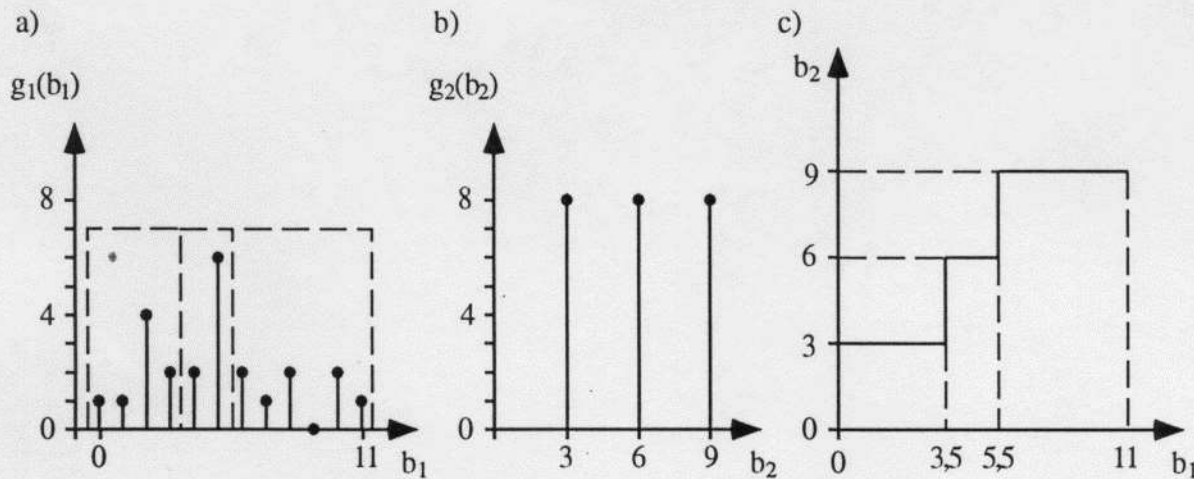
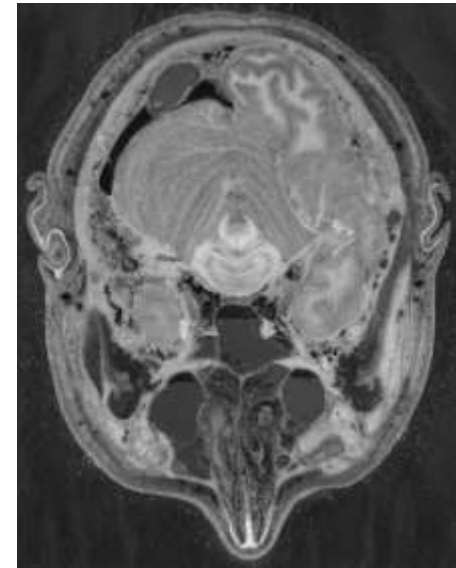
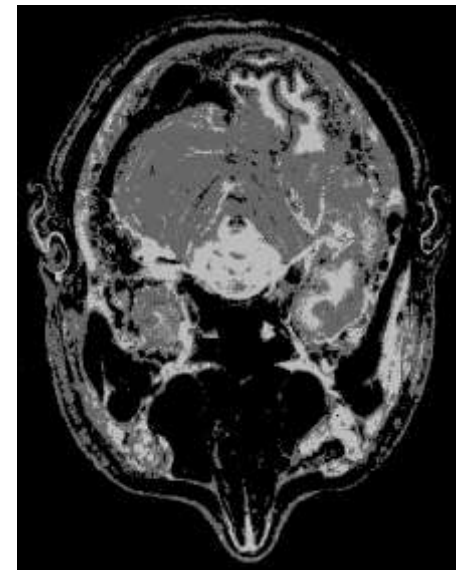


Bild 5.8: Beispiel zur Äquivalisierung eines Bildes. $b_1(x, y)$ ist das Originalbild mit 24 Bildpunkten in 12 Graustufen, für das Ausgangsbild wurden 3 Graustufen gewählt, die angestrebte Höhe des Histogramms $g_2(b_2)$ ist demnach $g_2 = 24/3 = 8$. Die Werte 3, 6 und 9 wurden für das Ausgabebild $b_2(x, y)$ willkürlich gewählt. Teilbild a) zeigt das Histogramm des Originalbilds, in b) ist das Histogramm des transformierten Bilds und in c) die Kennlinie gezeigt, mit der die Äquivalisierung beschrieben werden kann

Äquivalisiertes Bild,
Erkennung verborgener
Strukturen, fil8.tif



Histogramm Äquivalisierung

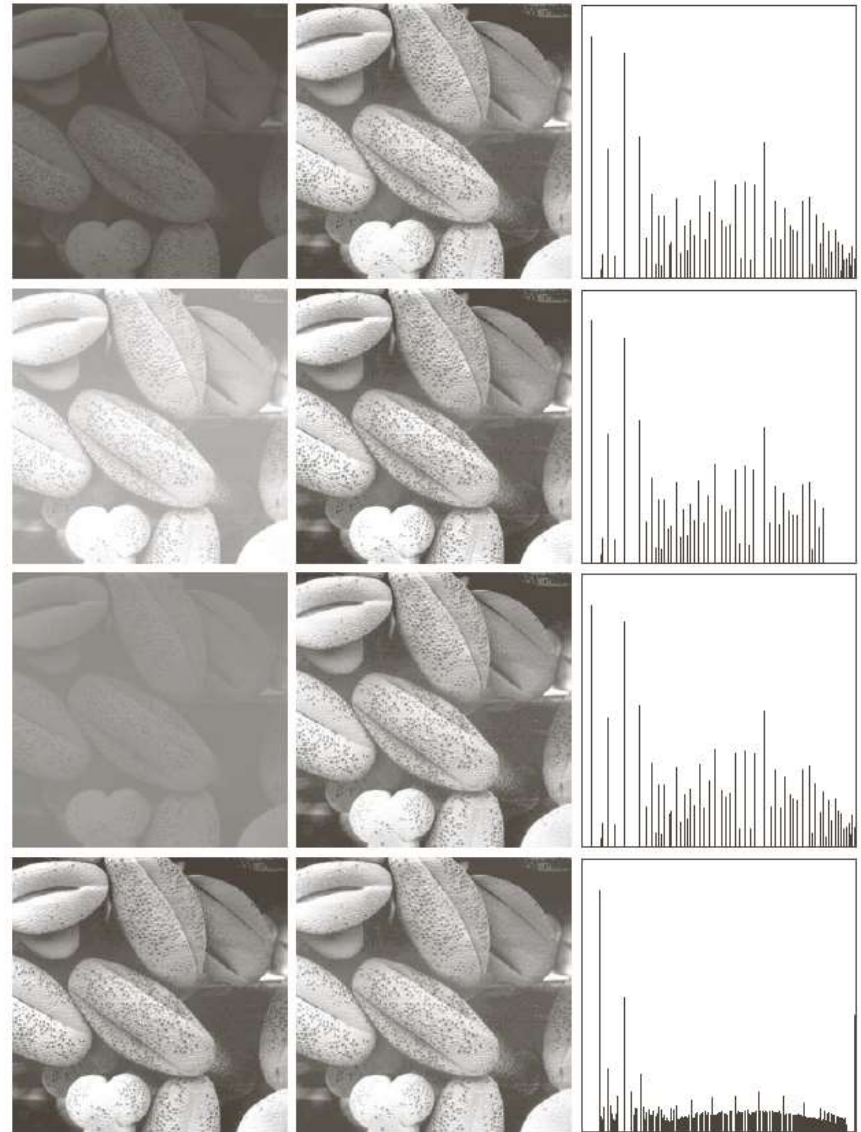


FIGURE 3.20 Left column: images from Fig. 3.16. Center column: corresponding histogram-equalized images. Right column: histograms of the images in the center column.

5.2 Kennlinienprozesse

Die einfachste Form einer Bildtransformation besteht darin, daß jedem Bildpunkt des Eingabebilds $b_1(x, y)$ in Abhängigkeit von seinem Wert ein bestimmter Grauwert im Ausgabebild zugeordnet wird. Dieser Vorgang kann leicht über eine Kennlinie beschrieben werden. Dabei gilt allgemein für ein ortsinvariantes System

$$b_2(x, y) = f(b_1(x, y)) \quad (5.1)$$

und für ein ortsvariantes System

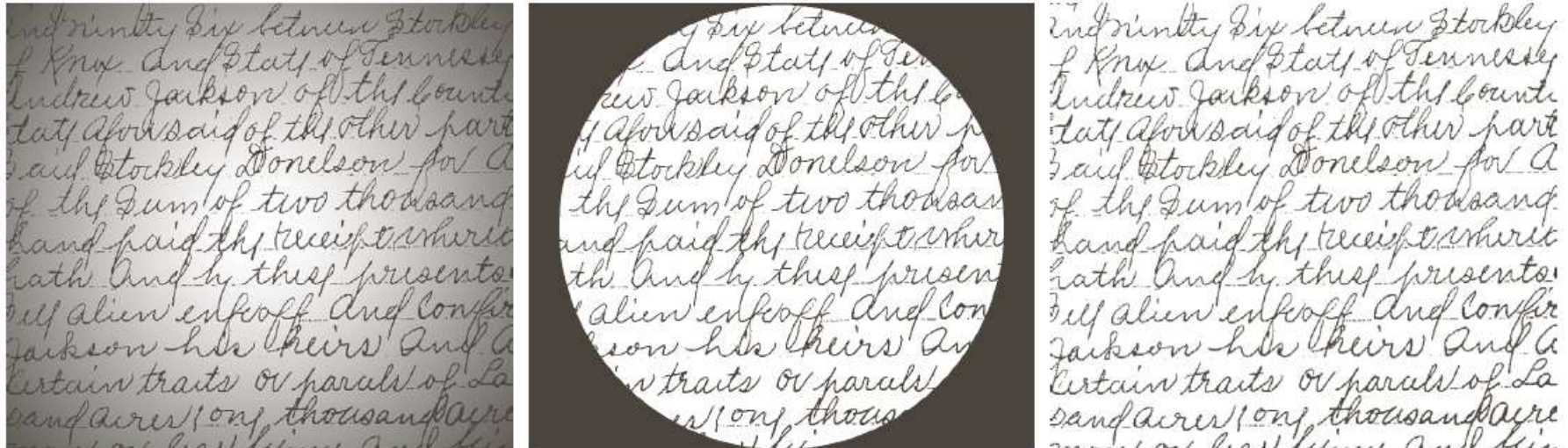
$$b_2(x, y) = f(b_1(x, y), x, y). \quad (5.2)$$

Dies bedeutet, daß der Grauwert im Ausgabebild bei einem ortsinvarianten System ausschließlich vom aktuellen Grauwert im Eingabebild abhängt, während bei ortsvarianten Systemen diese Funktion von Bildpunkt zu Bildpunkt unterschiedlich sein kann. Hierzu sind in den Bildern 5.3 bis 5.7 einige Beispiele aufgeführt.

Als Beispiel für eine *ortsabhängige* Transformation ist hier eine *Shading-Korrektur* (von engl. *Schatten*) aufgeführt, die es gestattet, z.B. eine ungleichmäßige Ausleuchtung des Blickfelds in einem Mikroskop zu korrigieren. Dazu werden Hell- und Dunkelbilder aufgenommen, die für jeden Punkt eine eigene Korrekturkennlinie festlegen, etwa in der Art

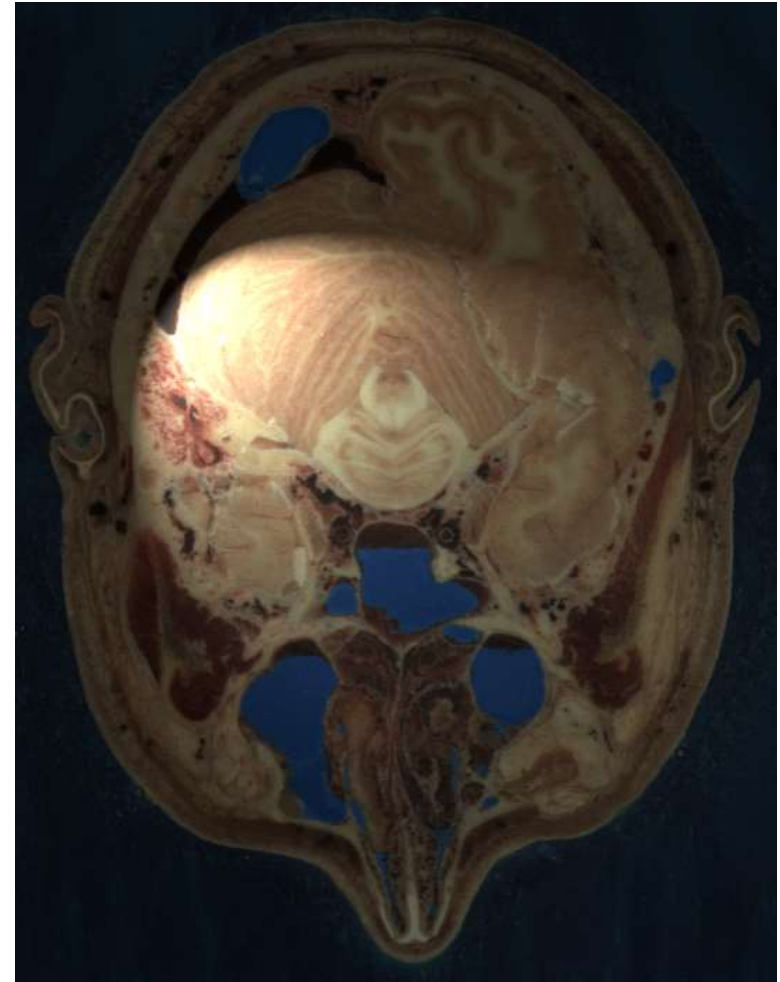
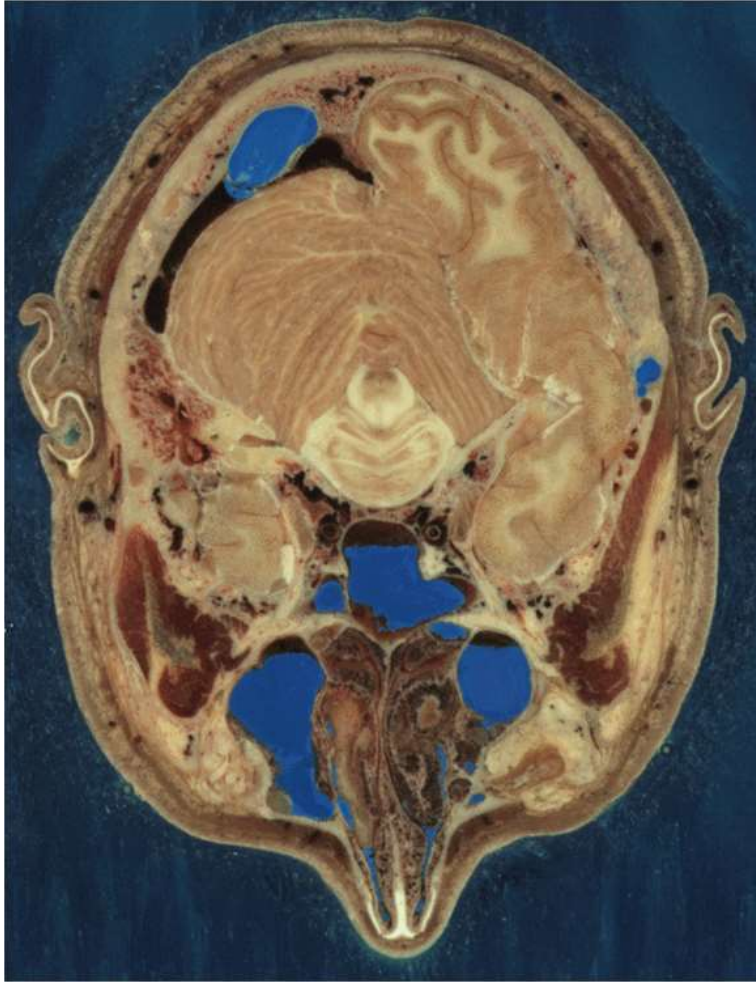
$$b_2(x, y) = (b_1(x, y) - b_{\min}(x, y)) \frac{b_{2\max}}{b_{\max}(x, y) - b_{\min}(x, y)} \quad , \quad (5.3)$$

wobei $b_{\max}(x, y)$ das Hellbild, $b_{\min}(x, y)$ das Dunkelbild und $b_{2\max}$ der größte Grauwert im Ausgabebild ist.



Links: Bild mit lokaler Variation der Belichtung (Spot Shading). Mitte: Korrekturergebnis bei Anwendung eines globalen Schwellwert (Otsu's Methode). Rechts: Korrekturergebnis mittels gleitender Mittelwerte.

Ortsabhängige Transformation: Installation eines Scheinwerfers, d.h. ortsabhängige Helligkeitsveränderung, z.B. Auswertung Fluoreszenz



Lineare lokale Operatoren

- wirken auf mehr als ein
Bildelement

Feld oder Array Operationen und Matrix Operationen

Zwei 2 x 2 Pixel Bilder

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Array-Produkt oder Feld-Produkt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

In den weiteren Betrachtungen werden stets Feld- bzw. Array-Operationen benutzt, wenn nicht speziell Matrix-Operationen angegeben sind.

Lokaler Operator $w(x,y)$

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} w_{-1,-1} & w_{0,-1} & w_{1,-1} \\ w_{-1,0} & w_{0,0} & w_{1,0} \\ w_{-1,1} & w_{0,1} & w_{1,1} \end{bmatrix}$$

Gängige Operatorgrößen: 3 x 3 bis 5 x 5 Array
bei Bildgrößen von 128 x 128 bis 1024 x 1024 Pixel.

Lokaler Operator $w(x,y)$

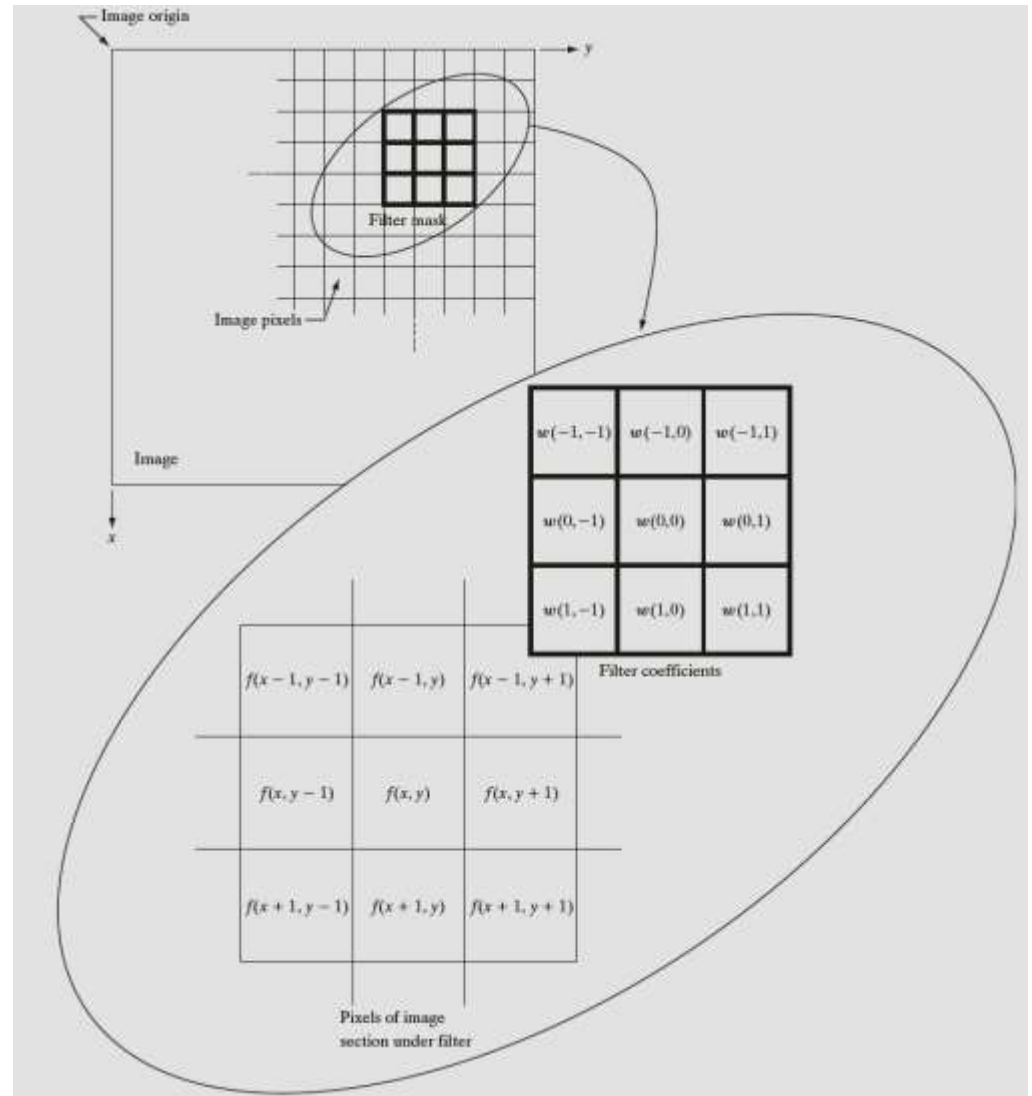


FIGURE 3.28 The mechanics of linear spatial filtering using a 3×3 filter mask. The form chosen to denote the coordinates of the filter mask coefficients simplifies writing expressions for linear filtering.

Linearer lokaler Operator $w(x,y)$

Bei einem linearen lokalen Operator berechnet sich der aktuelle Punkt im Ausgabebild als Linearkombination der Elemente im Operatorbereich im Eingabebild. Damit sind gleichzeitig aber auch die Bedingungen für die Linearität bei der Berechnung der gesamten Bilder erfüllt. Mathematisch gesehen ist ein linearer Operator durch eine Faltung (engl. *convolution*) beschreibbar, es gilt also

$$b_2(x, y) = b_1(x, y) \otimes w(x, y) \quad , \quad (5.5)$$

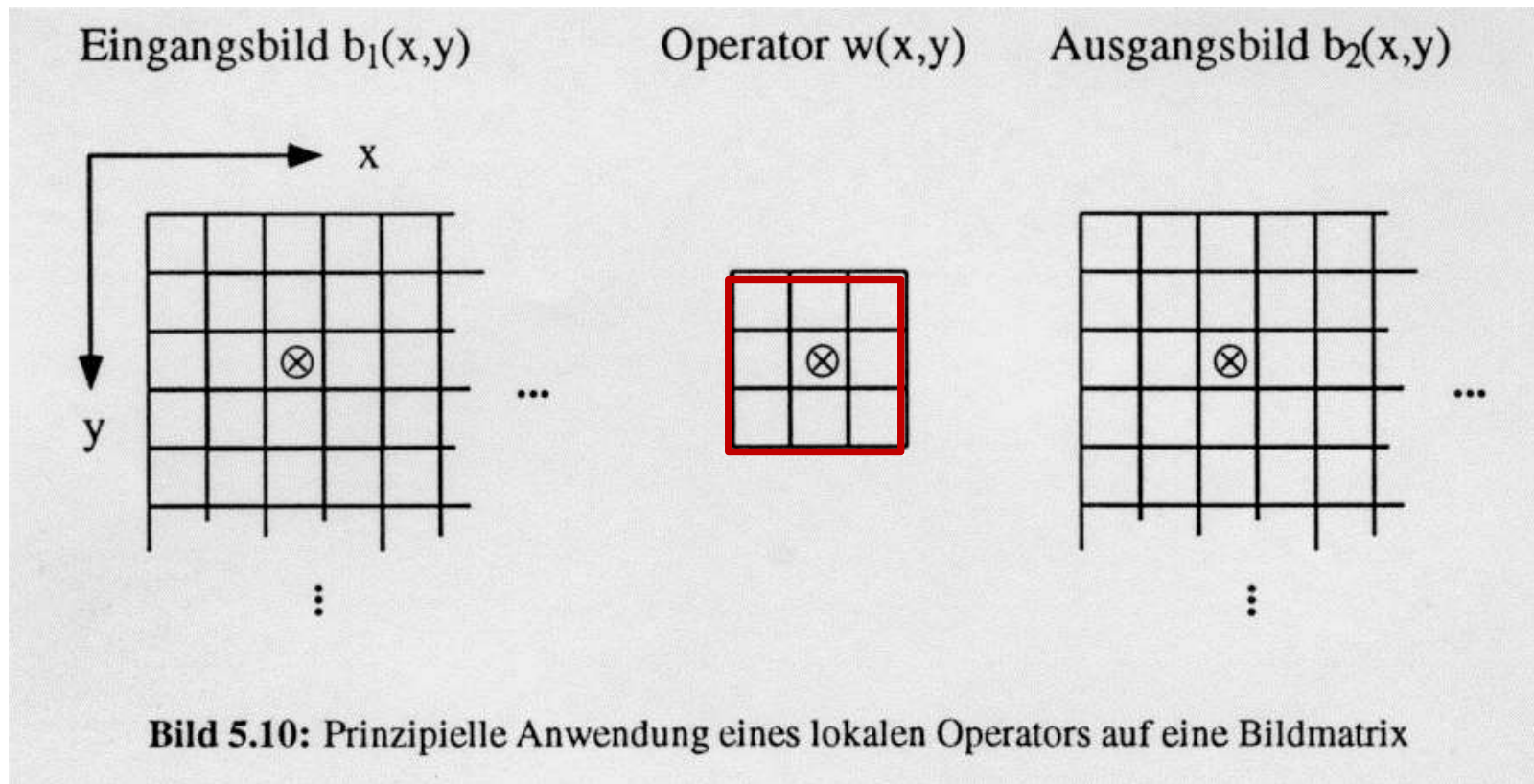
wobei $w(x, y)$ die Koeffizientenmatrix des Faltungskerns ist:

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} w_{-1,-1} & w_{0,-1} & w_{1,-1} \\ w_{-1,0} & w_{0,0} & w_{1,0} \\ w_{-1,1} & w_{0,1} & w_{1,1} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Streng betrachtet ist eine Faltung nur mit zwei Bildern definiert, die unendlich ausgedehnt sind, hier haben wir es aber mit einem endlich großen Bild und einem noch kleineren Faltungskern zu tun. Der Faltungskern kann jedoch als unendlich ausgedehntes Bild betrachtet werden, das nur im Bereich des Fensters Werte aufweist und sonst überall den Wert Null besitzt. Die Grenzen bei der Summation in der Faltungssumme können somit auf die Operatorgröße gesetzt werden. Wenn man nun noch auf die Spiegelung eines der beiden Operanden bei der Faltung verzichtet und die Werte des Operators entsprechend wählt, dann ergibt sich folgende Summationsformel für einen linearen lokalen Operator:

$$b_2(x, y) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=-k}^k b_1(x + i, y + j)w(i, j) \quad (5.7)$$

Hierbei ist ein quadratischer Operator der Größe $2k + 1$ in der Formel vorausgesetzt worden, bei anderen Operatorabmessungen müssen die Grenzen bei der Summation entsprechend angepaßt werden.



Lineare lokale Operatoren

Die Faltung zweier Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ ist definiert durch:

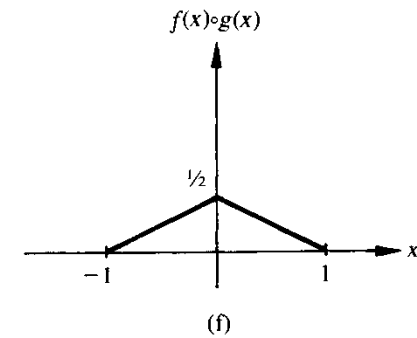
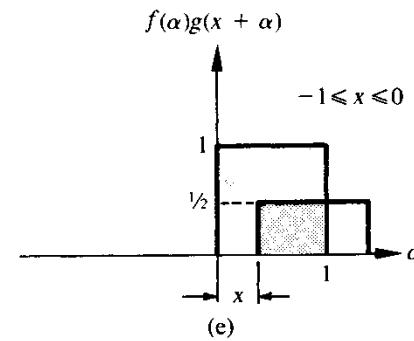
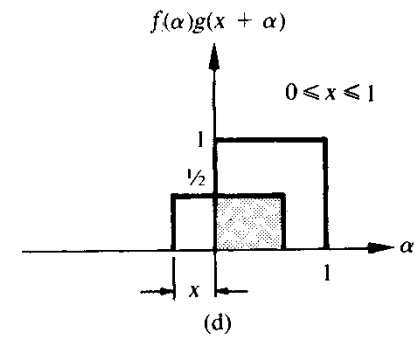
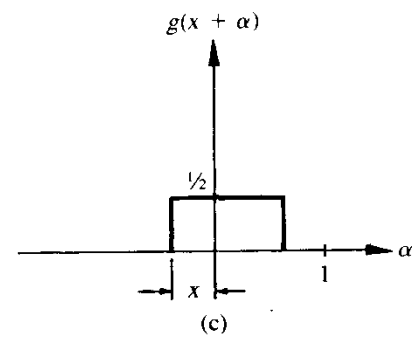
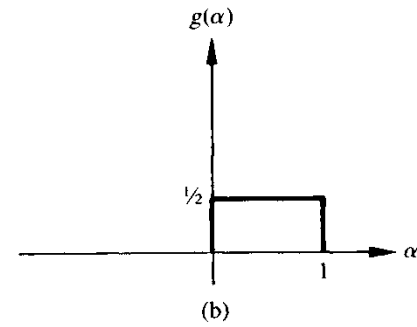
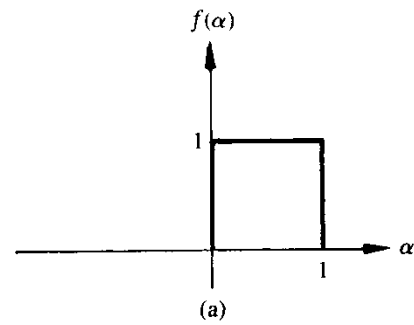
$$(f * g)$$

$$(f * g)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(\xi - y)dy$$

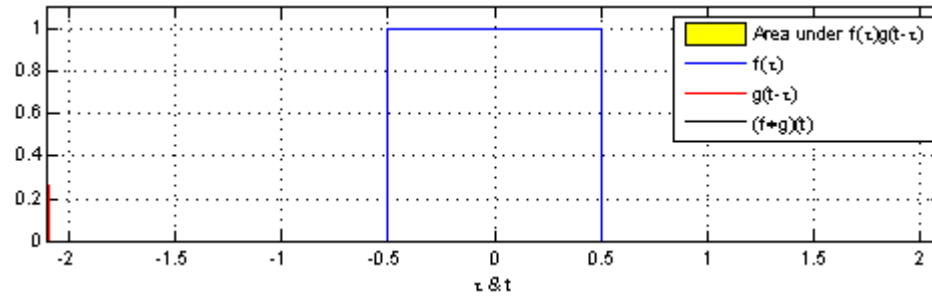
ξ ist neue Variable

In der **Signalanalyse** wird die **Kreuzkorrelationsfunktion** $R_{xy}(\tau)$ zur Beschreibung der **Korrelation** zweier Signale $x(t)$ und $y(t)$ bei unterschiedlichen Zeitverschiebungen τ zwischen den beiden Signalen eingesetzt. Es gilt:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T_F \rightarrow \infty} \frac{1}{T_F} \int_{-T_F/2}^{T_F/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$



Faltung



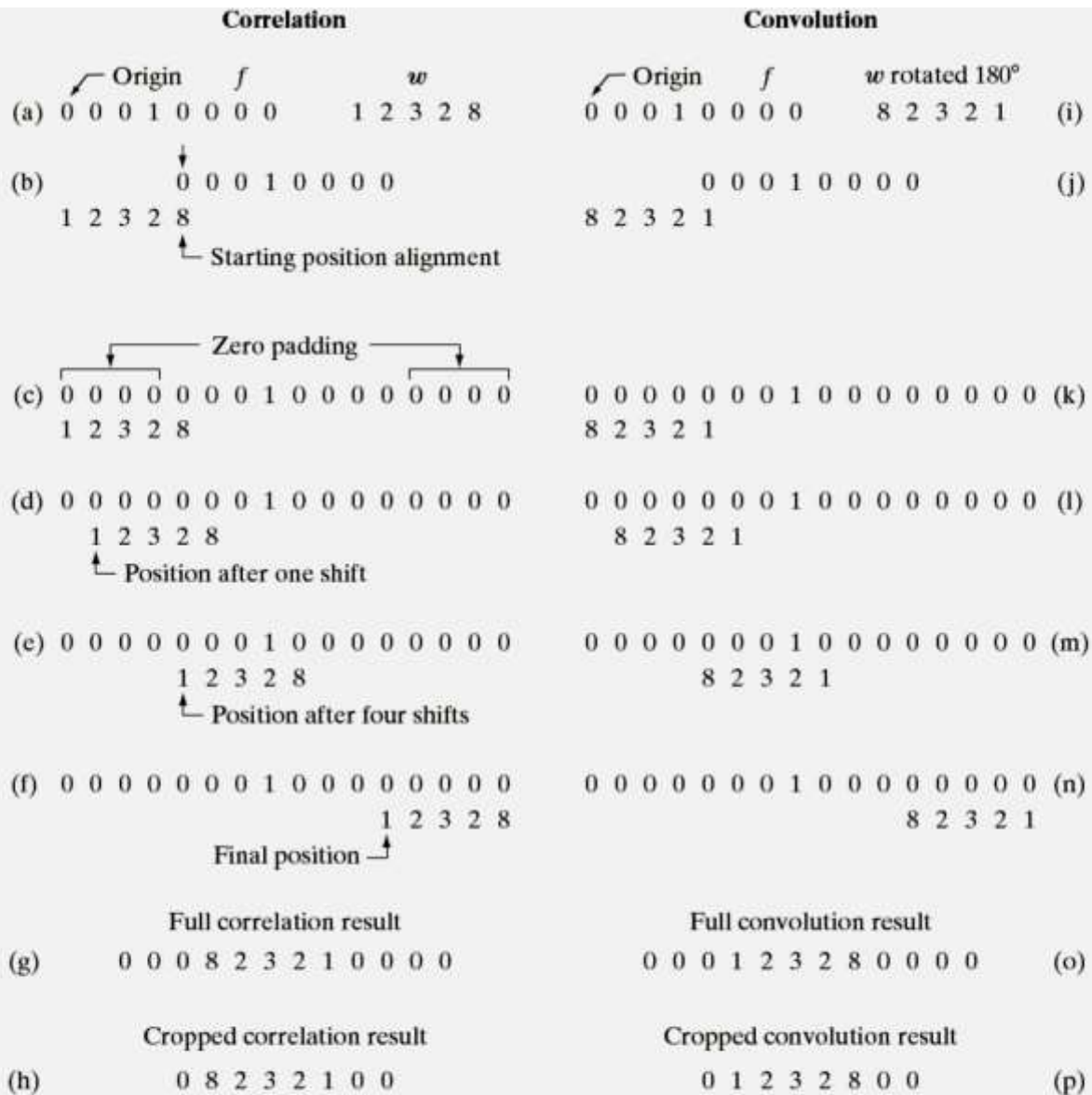
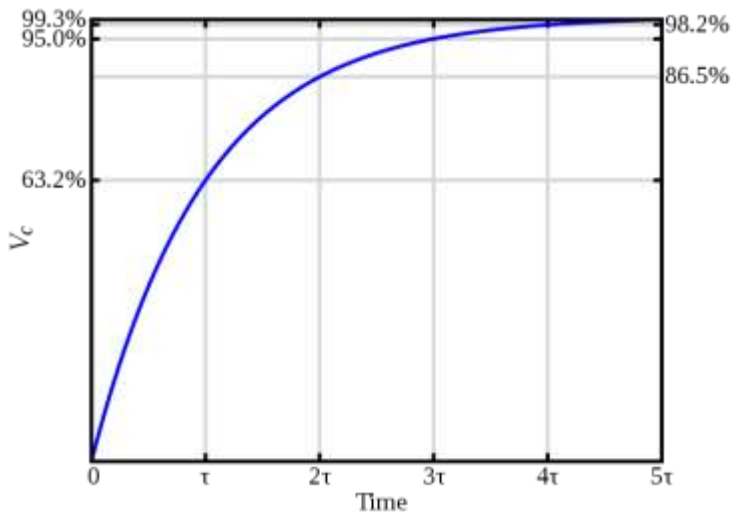
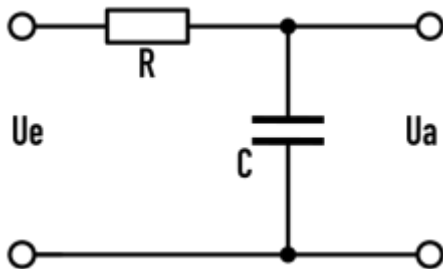


FIGURE 3.29 Illustration of 1-D correlation and convolution of a filter with a discrete unit impulse. Note that correlation and convolution are functions of *displacement*.

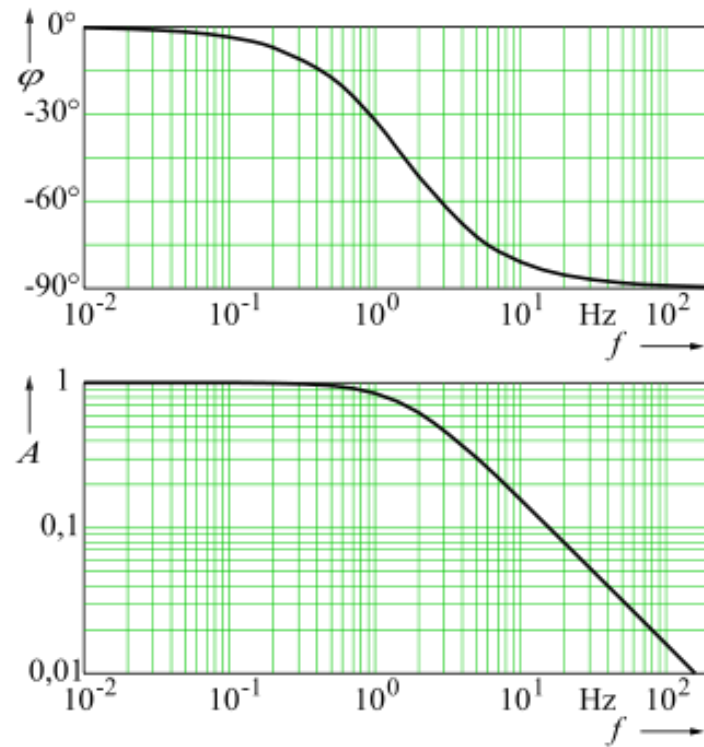
Tiefpaß

Im einfachsten Fall besteht ein Tiefpass aus einer Widerstand-Kondensator-Kombination (RC-Glied) und stellt einen Butterworth-Filter 1. Ordnung in folgender Anordnung dar:



Spannung V_C an der Kapazität als Funktion der Zeit bei sprunghafter Änderung der Eingangsspannung

Bodediagramm Tiefpaß



Frequenzgang eines passiven Tiefpasses 1. Ordnung bei sinusförmiger Eingangsspannung, dargestellt als Bode-Diagramm,

A = Spannungsverhältnis U_a/U_e ,

ϕ = Phasenverschiebungswinkel,

bestimmt für $RC = 0,1$ s.

Tiefpaß

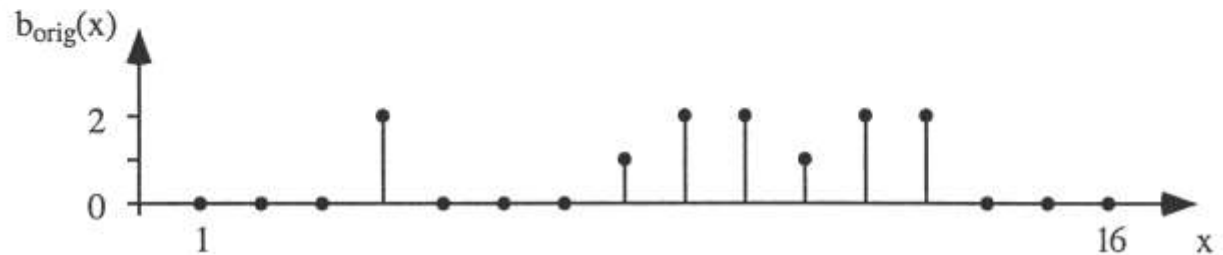
Eine Tiefpaßwirkung entspricht einer Glättung, die dadurch erzeugt werden kann, daß die Bildelemente innerhalb eines Fensters gemittelt werden.

Tiefpaß

$$w_1(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

In Bild 5.11 ist die Anwendung des Tiefpasses w_1 an einem eindimensionalen Beispiel gezeigt.

a) Originalbild



b) Tiefpaßfilterung

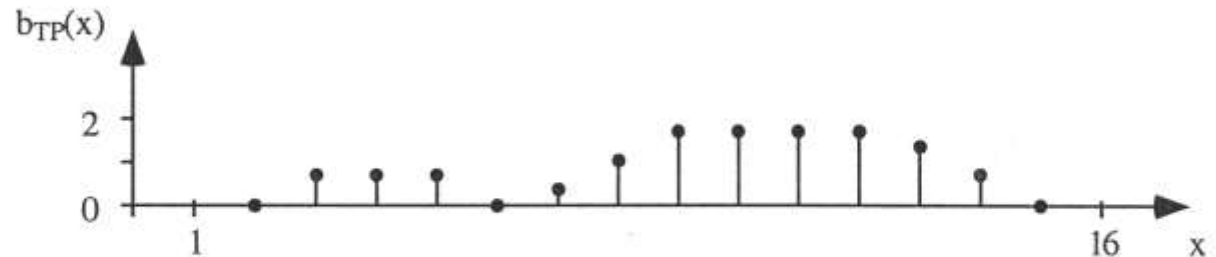


Bild 5.11: Anwendung eines Tiefpaß-Operators auf ein einfaches Bild. In diesem eindimensionalen Beispiel wird der Operator $w(x) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ auf das Bild b_1 angewendet

Tiefpaß:

$$\begin{aligned}w_{TP1}(x, y) &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & w_{TP2}(x, y) &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\w_{TP3}(x, y) &= \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} & & (5.9)\end{aligned}$$

Gauß-Tiefpaß

Ein Tiefpaß zeichnet sich meist durch eine Mittelung der Bildpunkte im Operatorfenster aus, Kanten werden dabei unscharf. Der Gleichanteil bleibt bei entsprechender Normierung (Division mit der Summe aller Operatorelemente) erhalten. Wenn keine a priori Aussagen über die Lage der Objekte gemacht werden können, so wird ein möglichst rotations-symmetrischer Faltungskern eingesetzt. Die beiden Tiefpässe $TP2$ und $TP3$ sind in x - und y -Richtung separierbar und wurden aus den Binomialkoeffizienten $[121]$ bzw. $[14641]$ gewonnen. Für große Operatoren entspricht dies einem Gauß-Tiefpaß, der eine Reihe günstiger Eigenschaften besitzt.

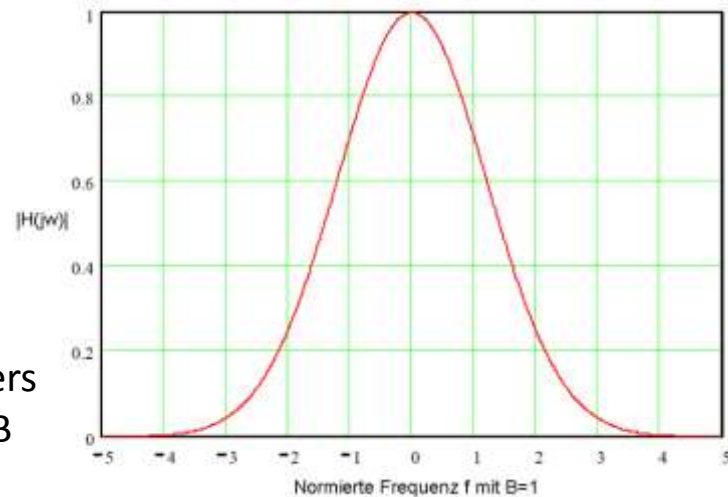
Gauß-Tiefpaß

Mit Gauß-Filter geglättetes
Halbtonbild

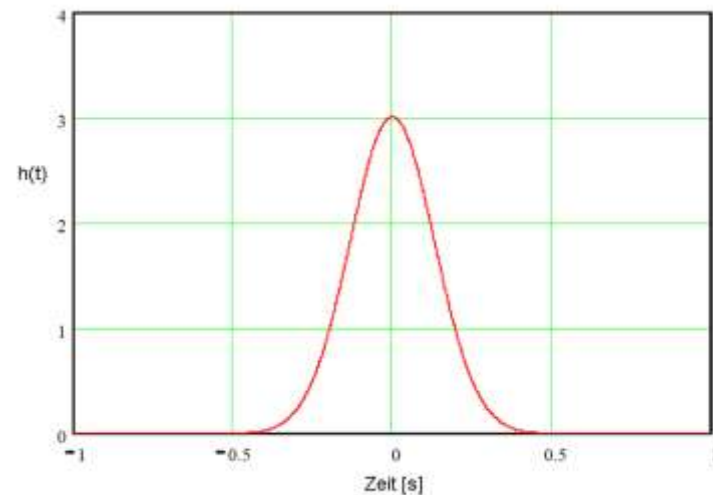


Gauß-Tiefpaß

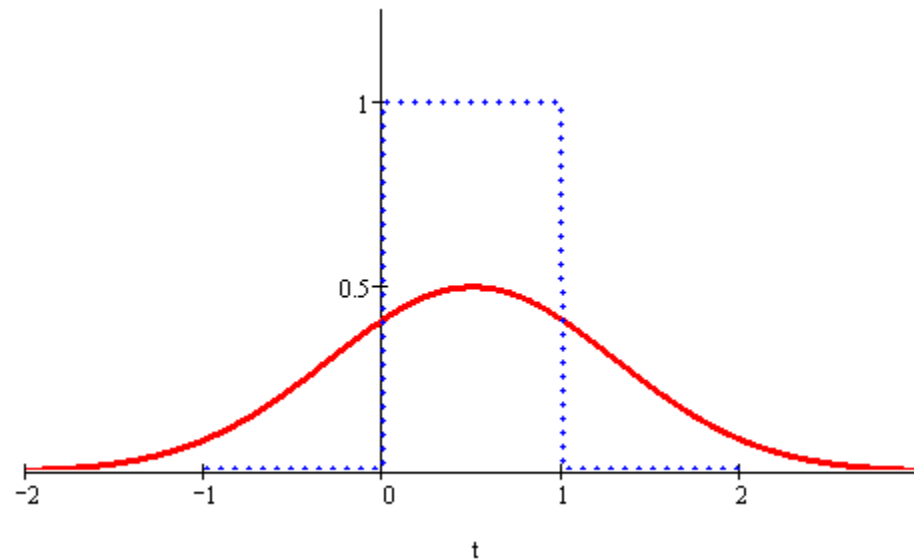
Betragsfrequenzgang von $H(j\omega)$ eines Gauß-Filters mit normierter Frequenz und einer Bandbreite B von 1.



Impulsantwort eines Gauß-Filters.



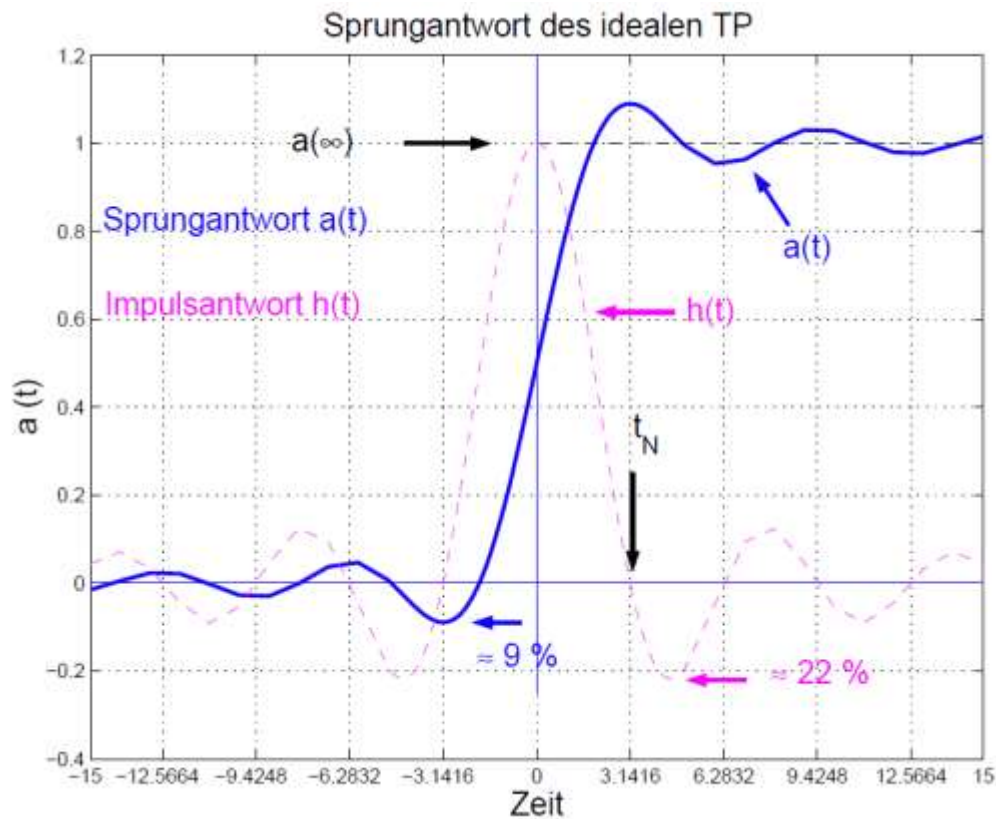
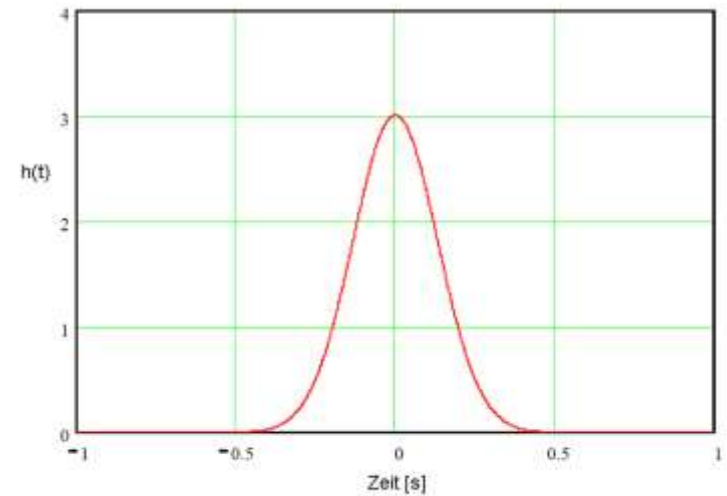
Gauß-Tiefpaß

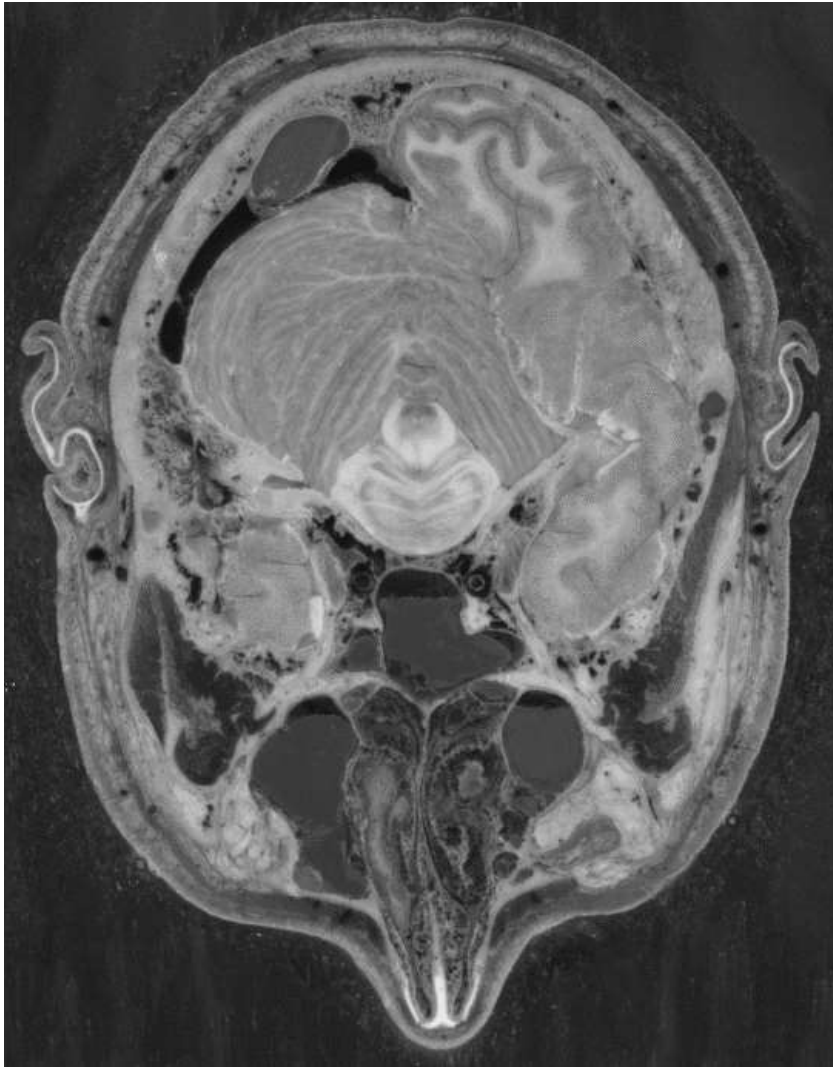


Ein Rechteckimpuls, blau punktiert dargestellt, wird durch die Impulsformung eines Gauß-Filters in den rot dargestellten Signalverlauf übergeführt.

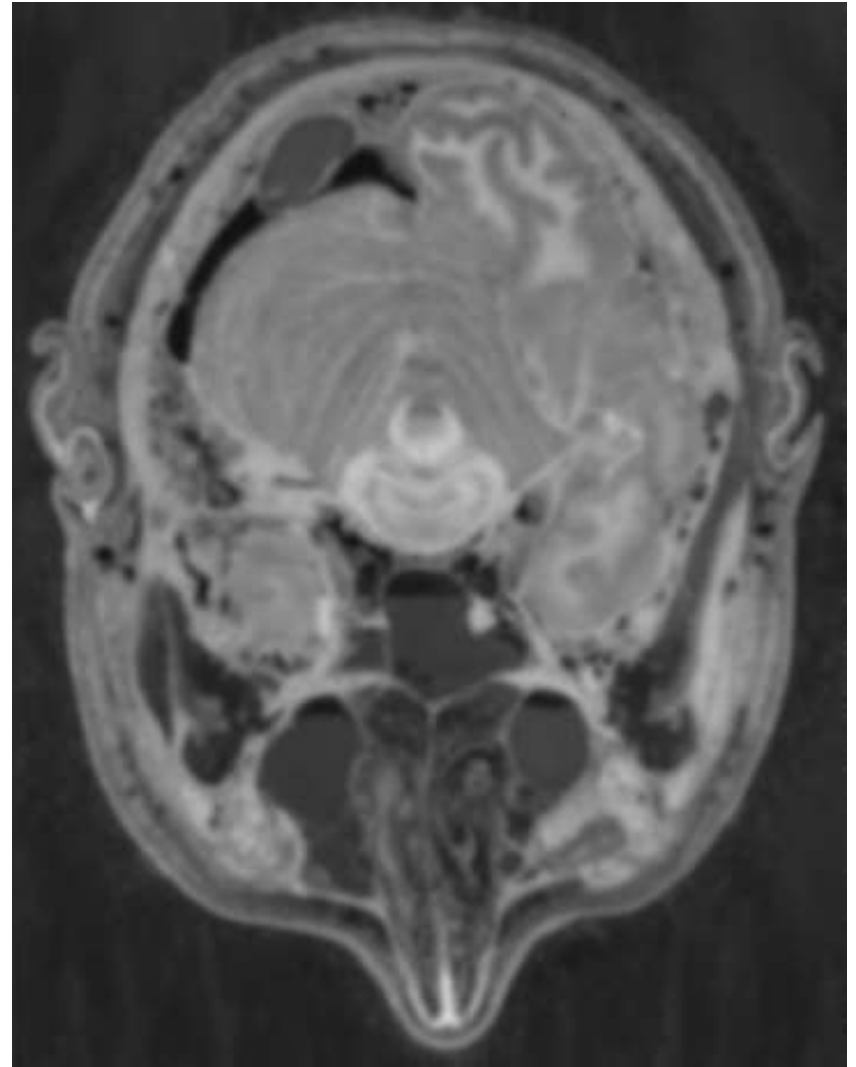
Gauß-Tiefpaß

Impulsantwort eines Gauß-Filters.





Original



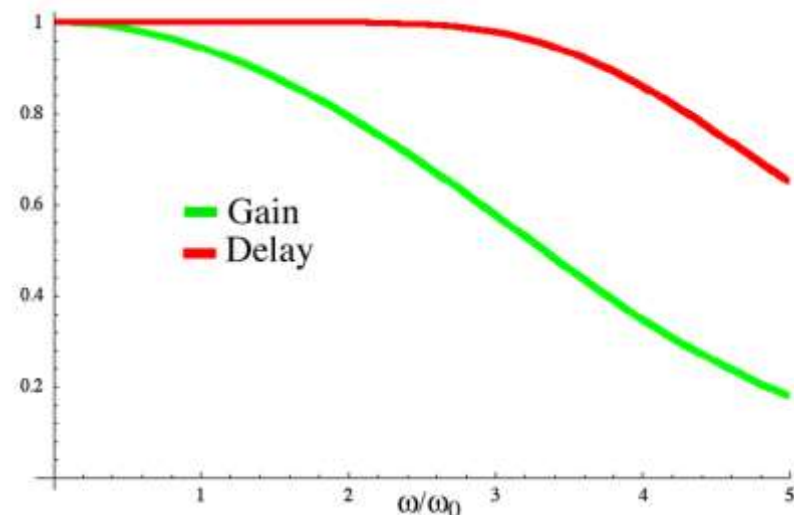
Gauß-Tiefpaß

Bessel-Filter

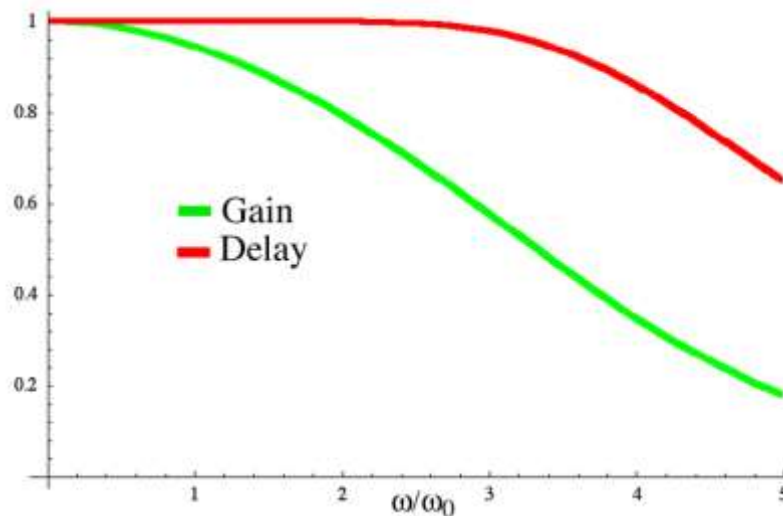
Ein Bessel-Filter ist ein Frequenzfilter, bei dessen Entwurf folgende (äquivalente) Eigenschaften angestrebt werden:

- optimales „Rechteckübertragungsverhalten“, d. h. eine Wellenform, deren Frequenzanteile innerhalb des Durchlassbereichs des Filters liegen, erscheint (bis auf eine Verzögerung) unverändert am Ausgang;
- konstante Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich;
- linearer Phasengang im Durchlassbereich.

Dabei wird in Kauf genommen, dass der Amplitudenverlauf nicht so scharf wie beim Butterworth-Filter oder Tschebyscheff-Filter abknickt.

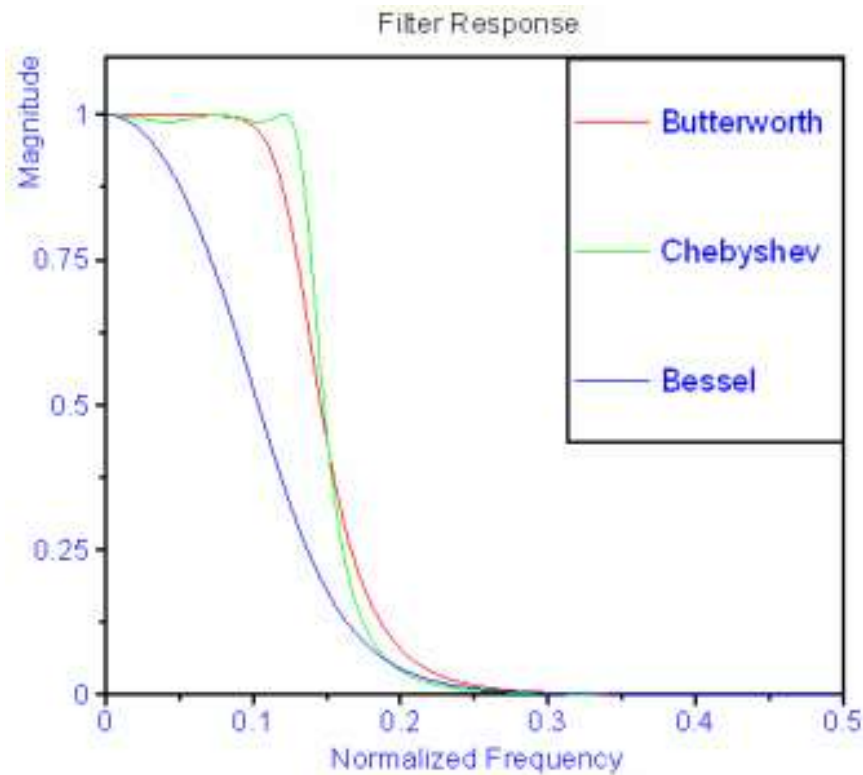


Bessel-Filter

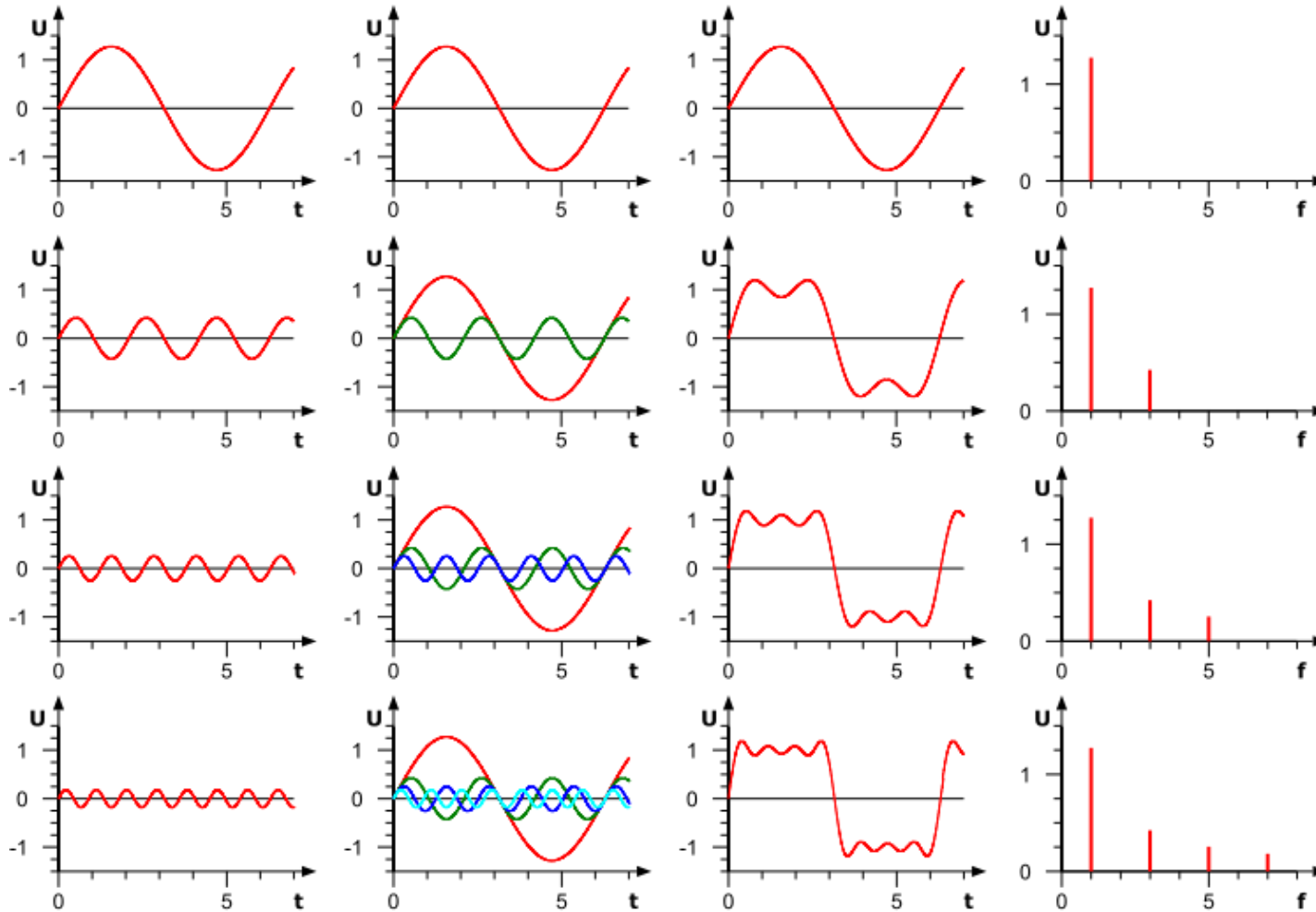


A plot of the gain and group delay for a fourth-order low pass Bessel filter. Note that the transition from the pass band to the stop band is much slower than for other filters, but the group delay is practically constant in the passband. The Bessel filter maximizes the flatness of the group delay curve at zero frequency.

Bessel-, Chebyshev- und Butterworth-Filter



Fourier-Synthese



Zur Erfordernis gleicher Gruppenlaufzeiten (d.h. linearer Phasengang) für alle Frequenzen bei Filtern zum Erhalt der Form des Signals. Bei unterschiedlichen Laufzeiten der Sinussignale ergibt sich als Summe kein Rechtecksignal mehr. Die Form eines EKGs wäre nach der Filterung nicht mehr interpretierbar, Ein Tumor würde im Bild eine falsche Form aufweisen.

1. Ableitung:

$$\begin{aligned}w_{DX}(x, y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & w_{DY}(x, y) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\w_{DXY}(x, y) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & (5.10)\end{aligned}$$

Die erste Ableitung kann aus der Differenz von zwei Operatorwerten gewonnen werden. Das Filter ist ein richtungsabhängiger Kantenoperator bzw. Hochpaßfilter und muß gegebenenfalls durch eine Normierung auf den Wertebereich des verwendeten Bildverarbeitungssystems angepaßt werden. Auftretende negative Grauwerte können durch eine Verschiebung des Grauwertbereichs verarbeitet werden. Die Summe aller Operatorwerte ist hierbei 0, dies bedeutet, daß der Gleichanteil des Originalbilds völlig unterdrückt wird.



Ableitung dB/dx



Ableitung dB/dxy

Ableitung mit Glättung:

$$\begin{aligned}w_{DXG}(x, y) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & w_{DYG}(x, y) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\w_{DXYG}(x, y) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & & (5.11)\end{aligned}$$

Durch eine Mittelung der Grauwerte senkrecht zur Richtung der durchgeführten Ableitung kann eine Glättung und damit eine Rauschunterdrückung erreicht werden. Auch diese Operatoren wirken als Hochpaß, da sie den Gleichanteil unterdrücken (Summe der Operatorwerte ist gleich 0).

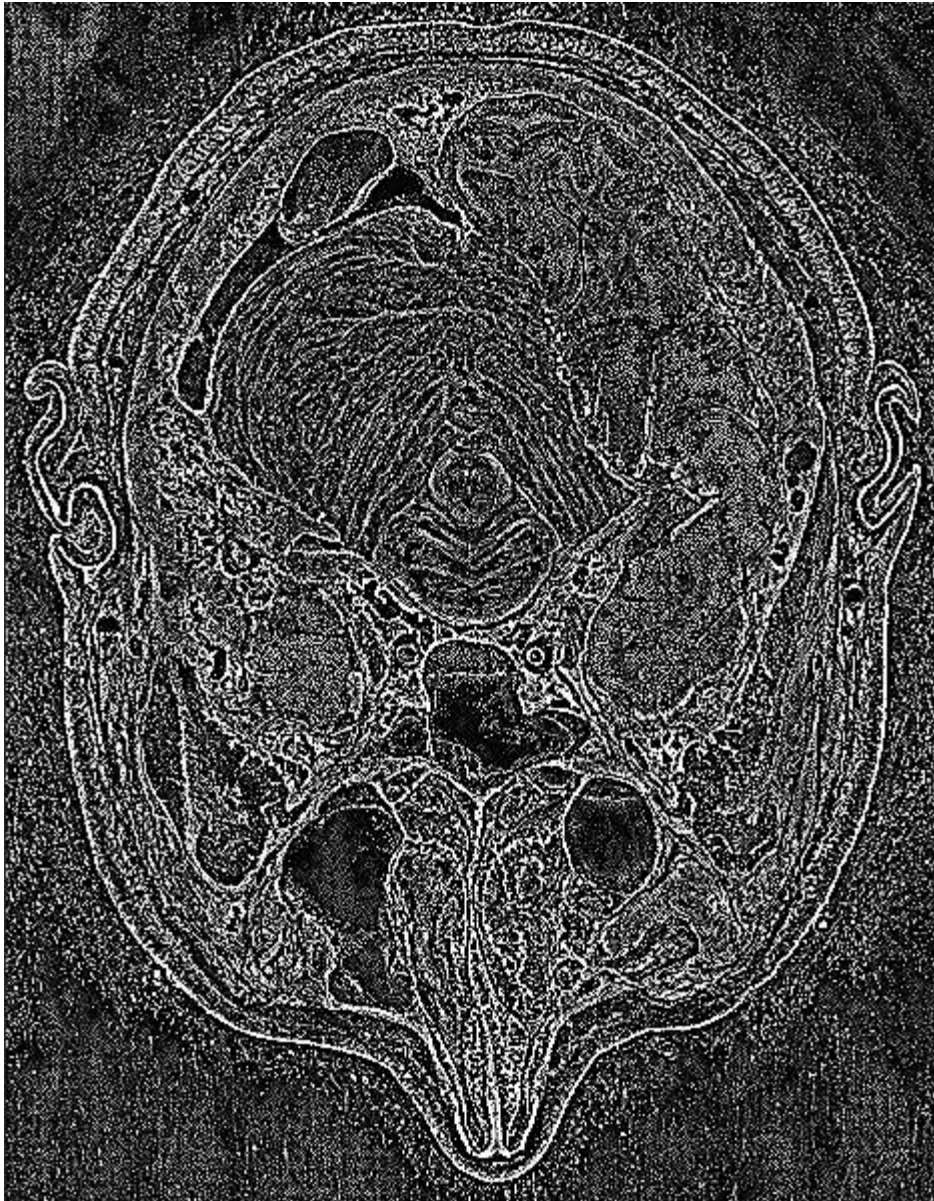


Ableitung mit Glättung
WDXG.TIF

2. Ableitung:

$$\begin{aligned}w_{DD1}(x, y) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & w_{DD2}(x, y) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\w_{DD3}(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & & (5.12)\end{aligned}$$

Auch die zweite Ableitung wirkt als Kantenfilter, jedoch (fast) ^{richtungsunabhängig} richtungsabhängig. Der erste Operator w_{DD1} wird auch als Laplace-Operator bezeichnet, da er eine Näherung der 2. Ableitung in x - und y -Richtung darstellt.

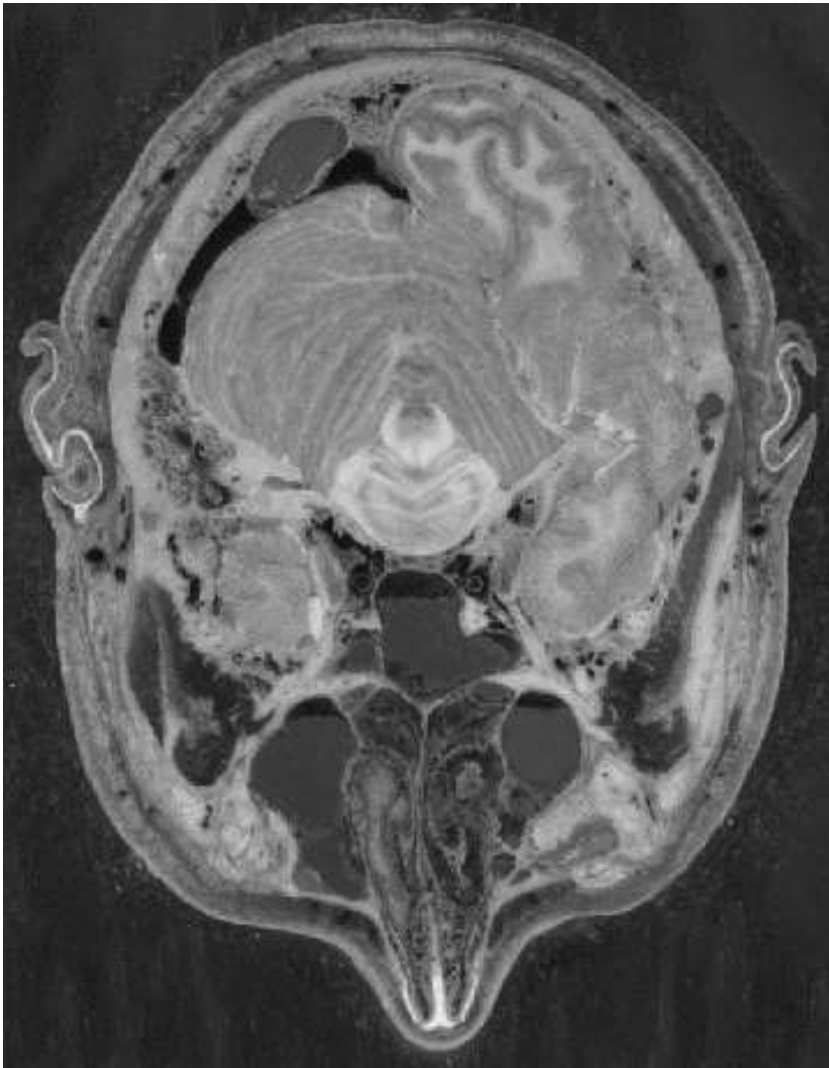


2. Ableitung (Laplace-Operator)

Kantenanhebung:

$$w_{KAN}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Eine Kantenanhebung kann durch die Überlagerung des Originalbilds (linker Summand) und eines kantengefilterten Bilds (rechter Summand) dargestellt werden. Die Stärke des Filters kann auch durch eine höhere Gewichtung des Originalbilds abgeschwächt werden.



Original



Kantenanhebung

Sobel-Operator

Der Sobel-Operator ist ein einfacher Kantendetektions-Filter, der die erste Ableitung der Bildpunkt-Helligkeitswerte berechnet, wobei gleichzeitig orthogonal zur Ableitungsrichtung geglättet wird.

$$\mathbf{G}_x = \mathbf{S}_x * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * A$$

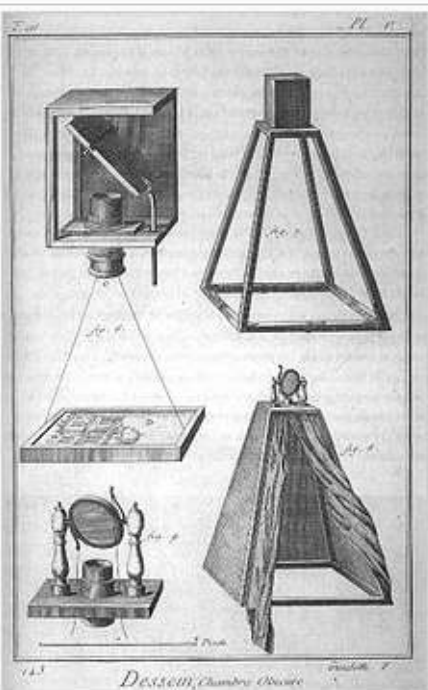
und

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{S}_y * A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * A$$

Eine richtungsunabhängige Information kann man durch die Kombination beider Ergebnisse erhalten:

$$\mathbf{G} = \sqrt{\mathbf{G}_x^2 + \mathbf{G}_y^2}.$$

Sobel-Operator



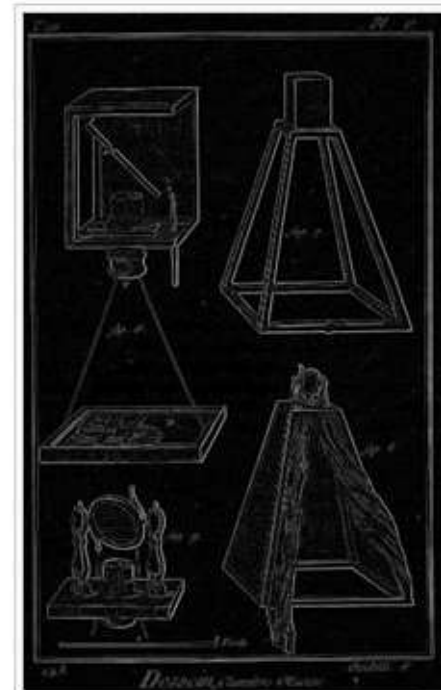
Originalbild "Camera Obscura", das zur weiteren Berechnung genommen wurde.



Camera Obscura mit vertikalem Sobel gefaltet. Da auch negative Werte entstehen, wird der Nullpunkt als mittleres Grau dargestellt



Camera Obscura mit horizontalem Sobel gefaltet. Da auch negative Werte entstehen, wird der Nullpunkt als mittleres Grau dargestellt



Camera Obscura mit horizontalem und vertikalem Sobel gefaltet, kombiniert und mit Absolutwerten dargestellt

Zur Berechnung der Randpunkte bei der Faltung wird das zu filternde Bild über die Ränder hinaus erweitert. Drei Möglichkeiten stehen zur Verfügung. Vor- und Nachteile?

©Burger2005



(a)



(b)



(c)

Zero- o. Grauwert-Padding

(Zero-Padding ist ImageJ's Default, wenn man getPixel von "out-of-bounds"-Positionen macht)

Last Value

(meist einfach und sinnvoll für Filter im Ortsraum)

Periodische Fortsetzung

(sieht unsinnig aus, aber z.B. die Fouriertransformation arbeitet so)

Lokale Operatoren

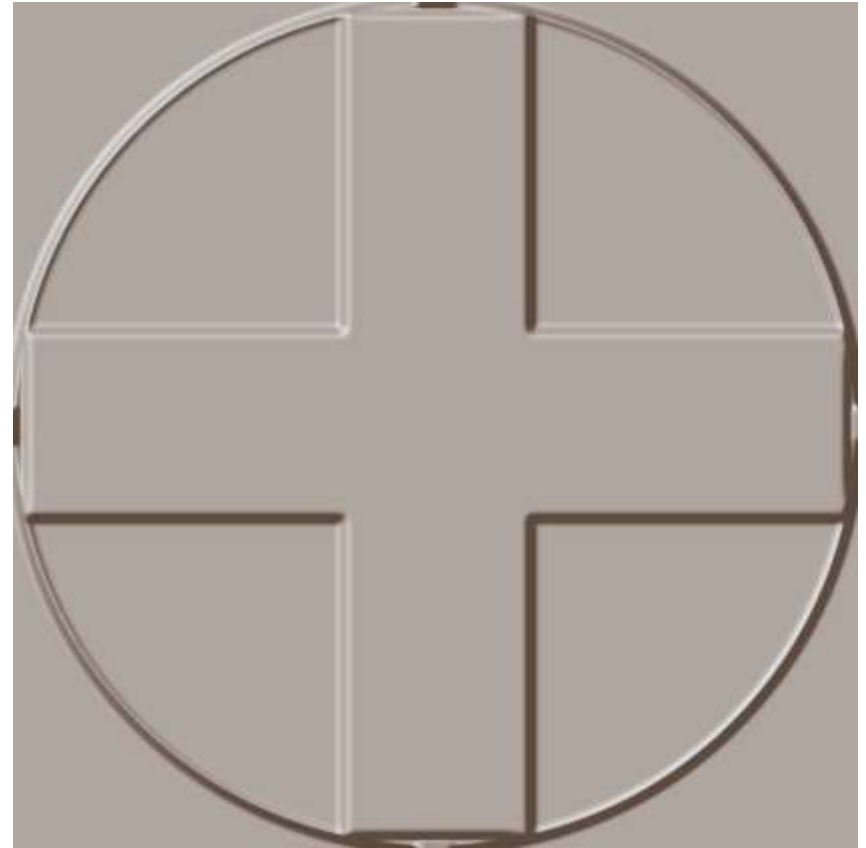
Beispiele mit Corel Photo-Paint

Bild: „Bleistrichraster.jpg“ und nachfolgende Bilder

„Effekte“ - „Angepasst“ - „Benutzerdefiniert“ und
vorinstallierte Effekte

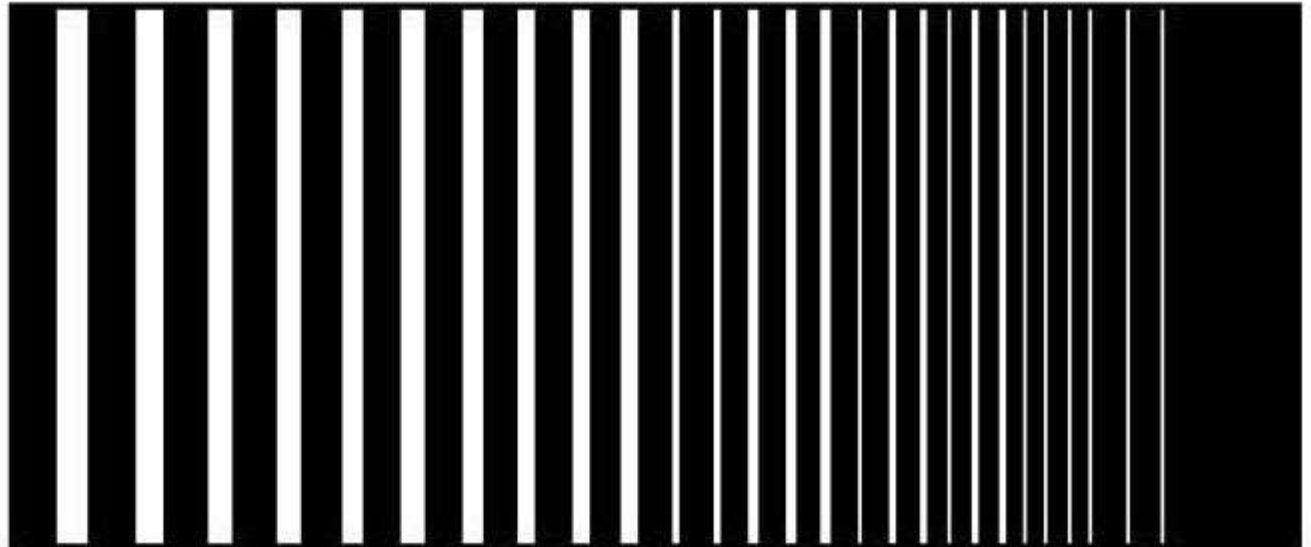
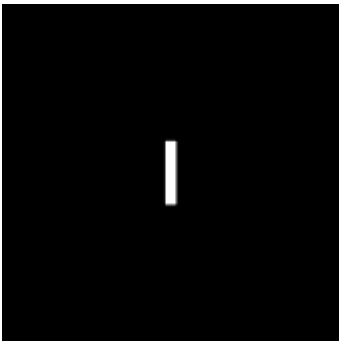


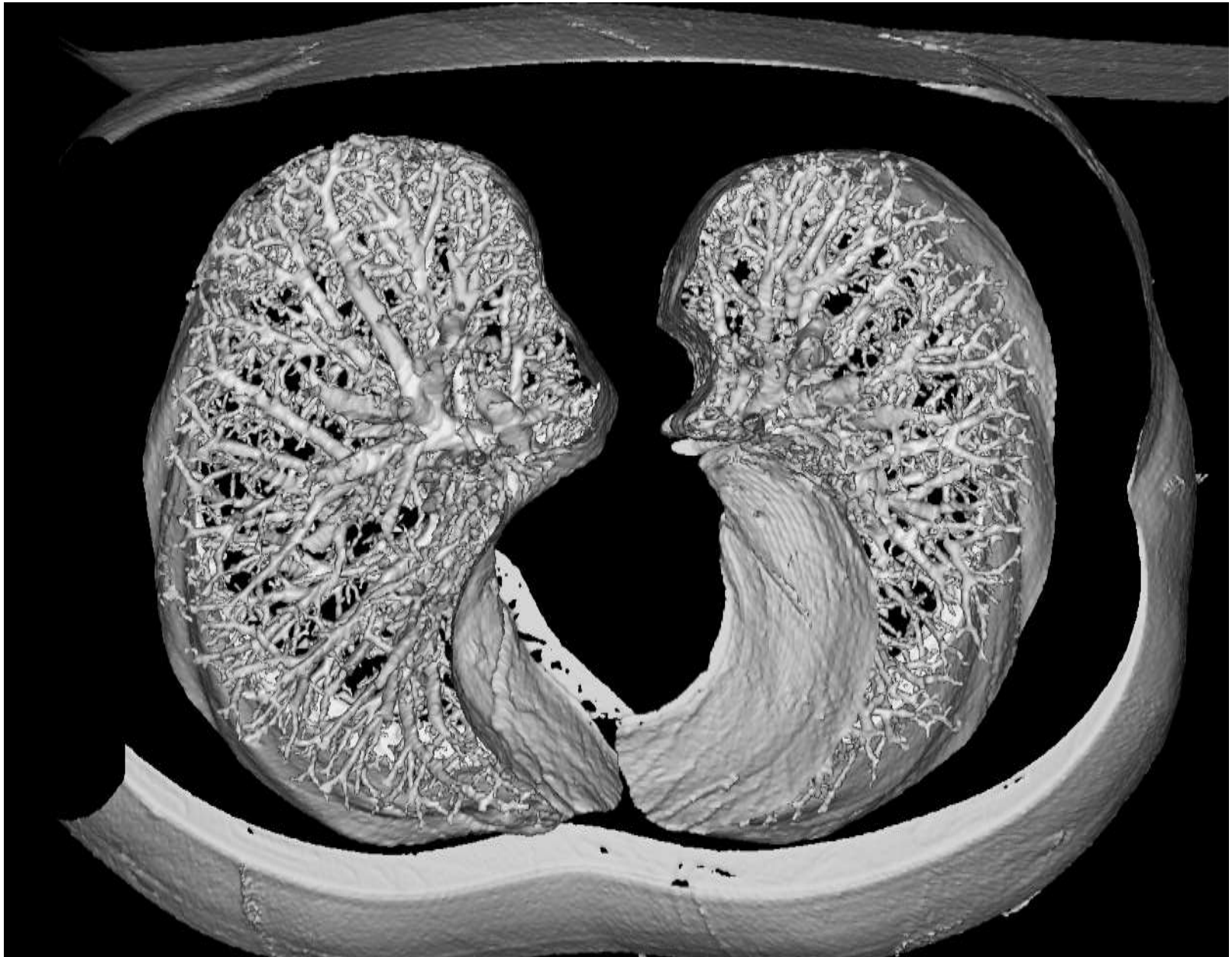
a



b

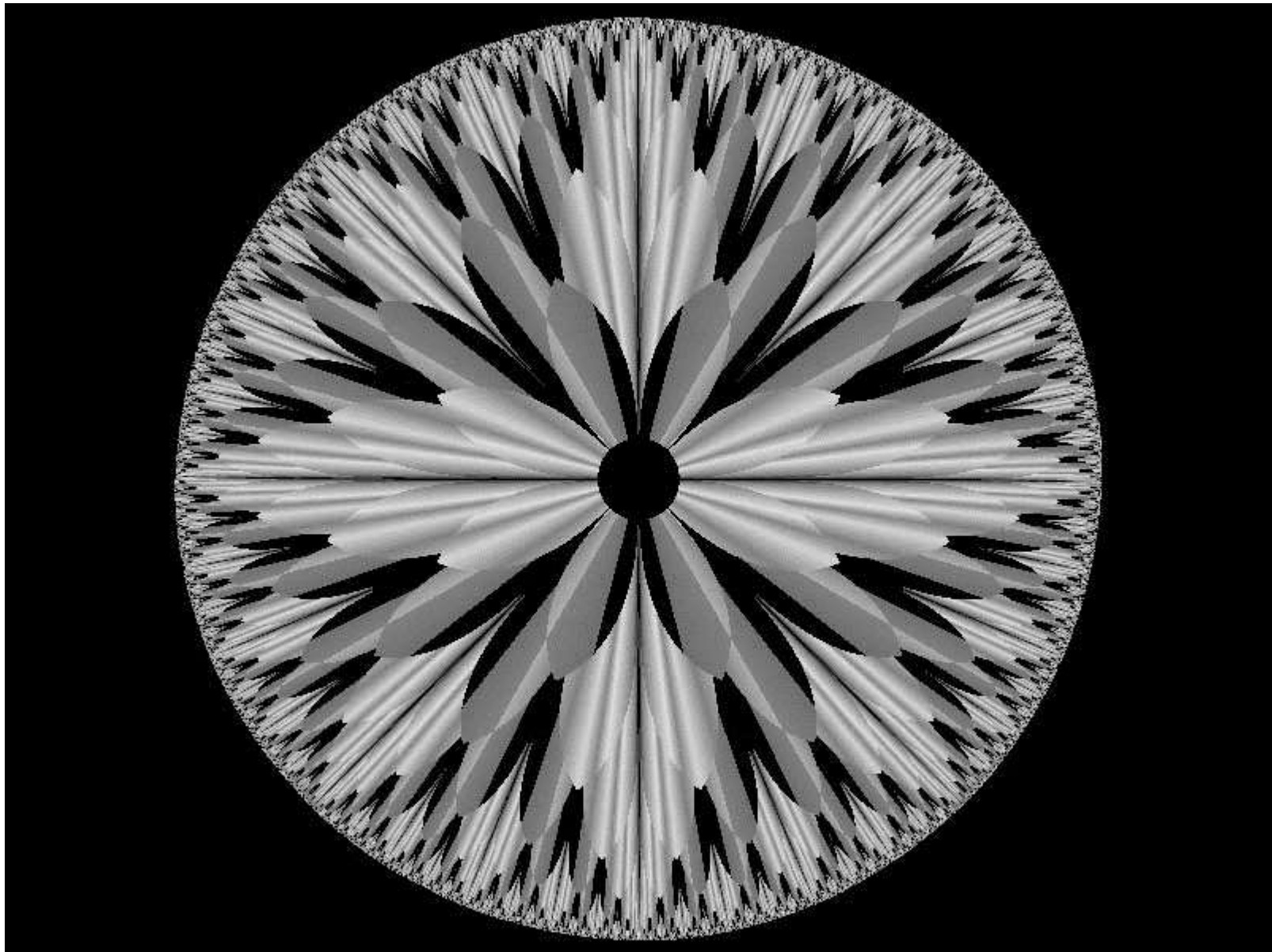
Einfluß von Erfahrung und Erwartung auf die Interpretation von Mustern. a und b sind identisch, nur um 180° gedreht, Beleuchtung erscheint aus unterschiedlichen Richtungen.











Nichtlineare lokale Operatoren

Enthalten nichtlineare oder logische Rechenvorschriften bzw. Operationen

Beispiele: Betragsbildung, Auswahl des kleinsten oder größten Wertes, Rangfolgeoperationen

Eine wichtige Gruppe von nichtlinearen Operatoren sind die *Rangfolgeoperatoren*. Hierbei werden alle Elemente im aktuellen Fenster ihrer Größe nach sortiert und in eine Liste eingetragen. Dann wird der Grauwert für das Ausgabebild aus einer bestimmten Position in der Rangfolge ausgewählt. Das Fenster wird dabei genau wie bei den linearen Operatoren Bildpunkt für Bildpunkt über das Bild geschoben.

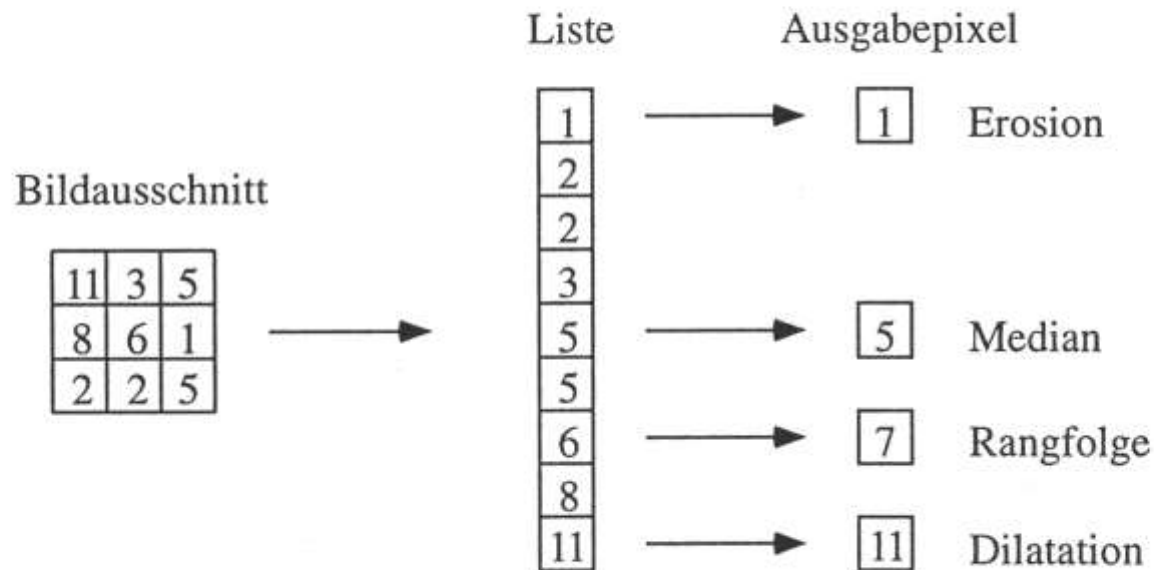
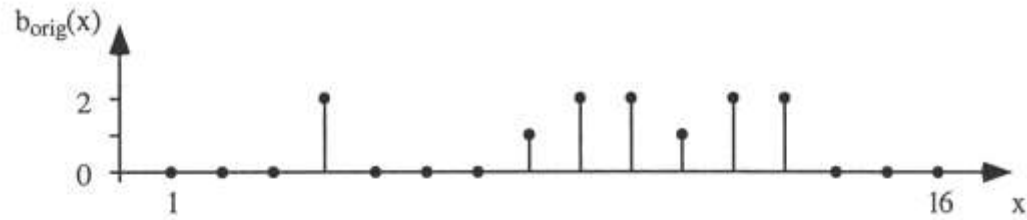


Bild 5.12: Beispiel für die Erosion, die Dilatation, die Medianfilterung und den Monotonieoperator anhand eines 3×3 Pixel großen Bildausschnitts

Drei wichtige Vertreter dieser Gruppe sind die Erosion, die Dilatation und die Medianfilterung. Bei der *Erosion* (engl. *shrink*) wird als neuer Grauwert der kleinste aus der Rangfolge gewählt. Der Operator bewirkt, daß helle Objekte mit großen Grauwerten auf dunklem Hintergrund mit kleinen Grauwerten kleiner werden. Die *Dilatation* (engl. *blow*) vergrößert die hellen Objekte, indem der größte Grauwert aus der Rangfolge gewählt wird. Bei der *Median*-Filterung wird der Grauwert aus der Mitte der Rangfolge in das Ausgabebild eingetragen. Diese Filterung hat eine Rausch- und Störunterdrückung als wesentlichen Eigenschaft, da singuläre Ausreißer im betrachteten Fenster am oberen und unteren Ende der Rangfolge nicht beachtet werden. Die oben erwähnten Sonderfälle eines Bilds mit konstantem Grauwert, eines Grauwertkeils und eines Grauwertsprungs bleiben bei der Medianfilterung unverändert. Beispiele zu diesen Operatoren sind in Bild 5.13 eindimensional und in Bild 5.14 zweidimensional zu sehen.

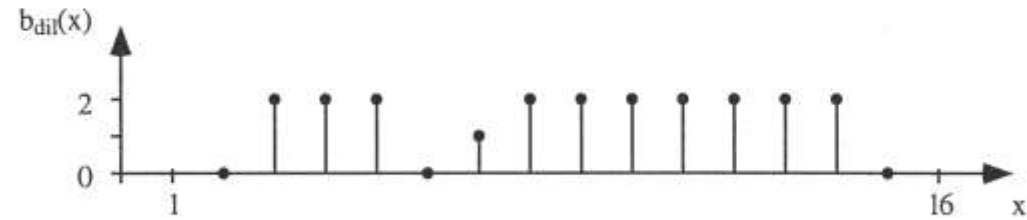
a) Originalbild



b) Erosion



c) Dilatation



d) Medianfilterung

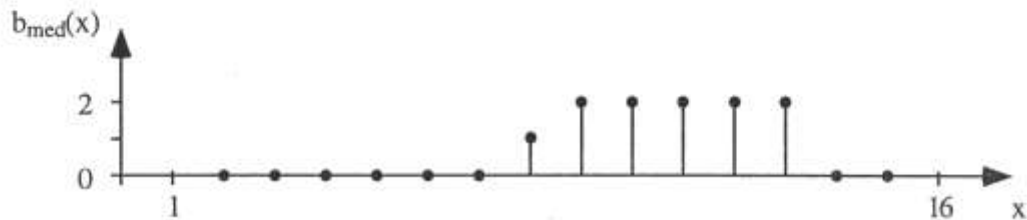
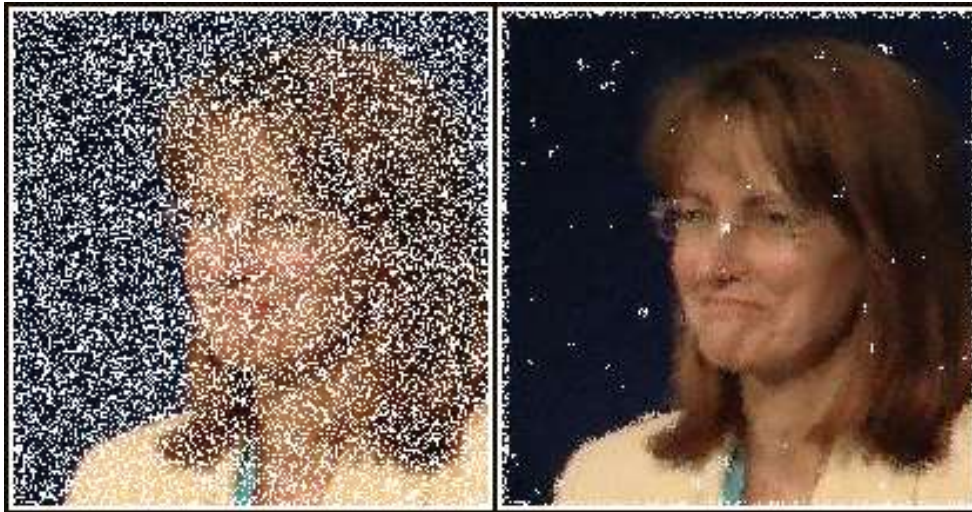


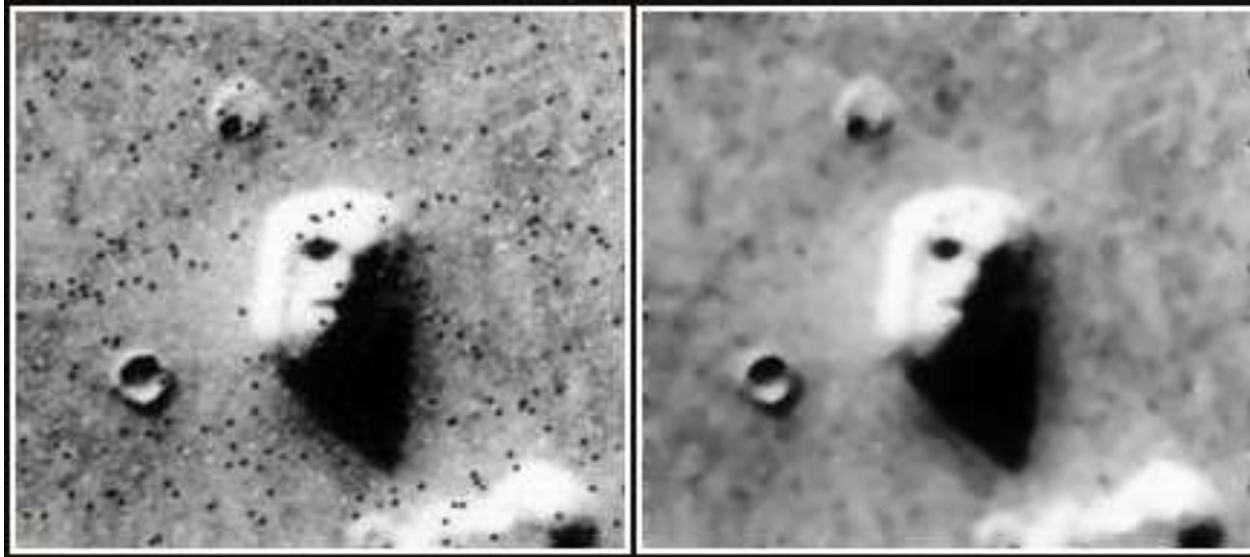
Bild 5.13: Darstellung der b) Erosion, c) Dilatation und d) Medianfilterung jeweils anhand des eindimensionalen Beispiels in a)

Medianfilter



Median-Bildfilterung eines Bildes mit
weißen Störpixeln

Medianfilter



Medianfilterung (rechts) einer Aufnahme des Mars (links) von 1976 durch Viking 1 aus der Cydonia-Region.

Medianfilter

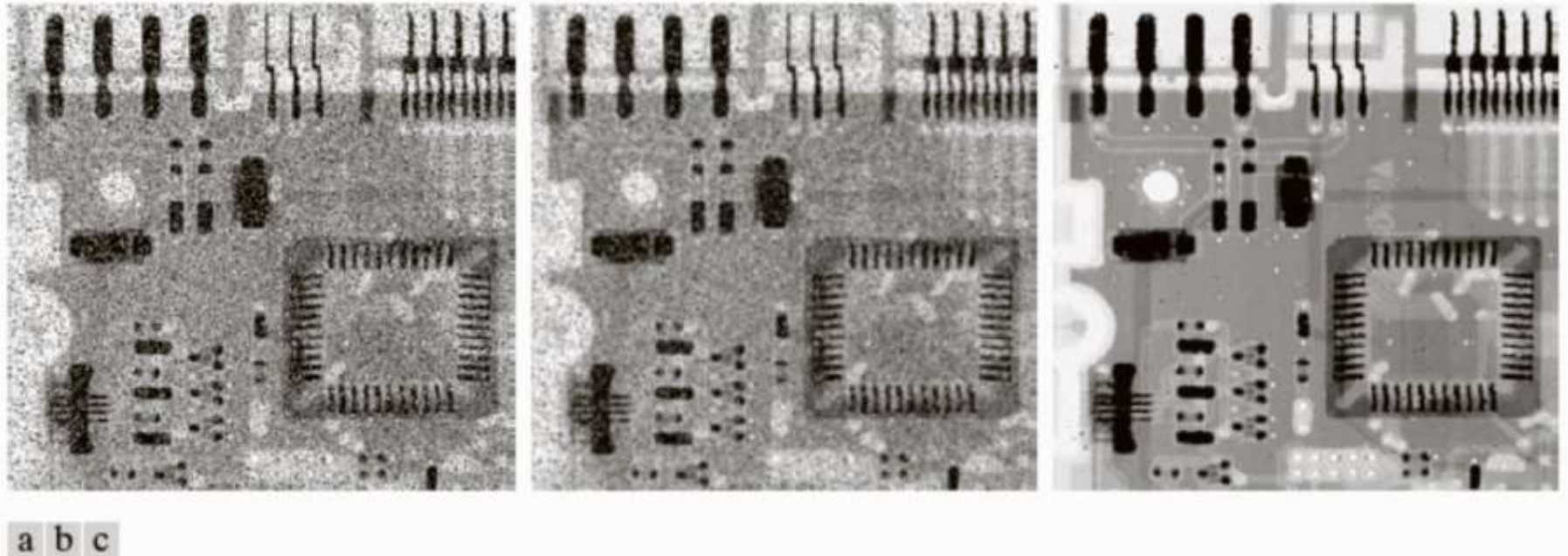
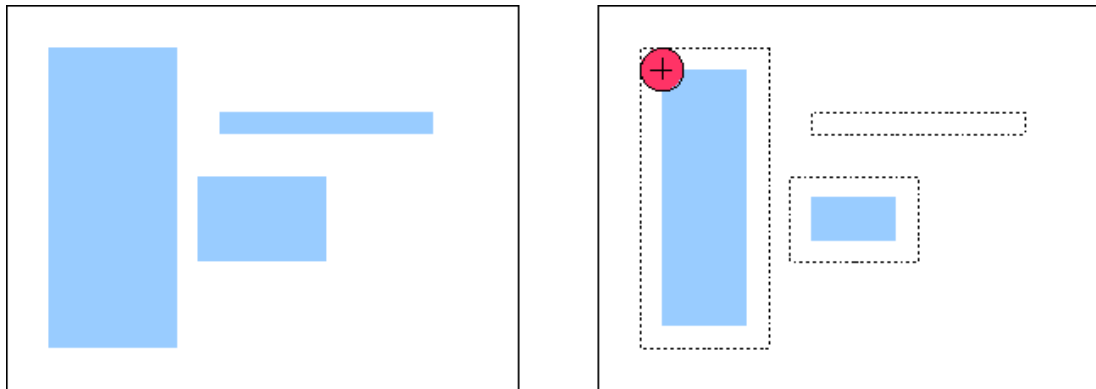
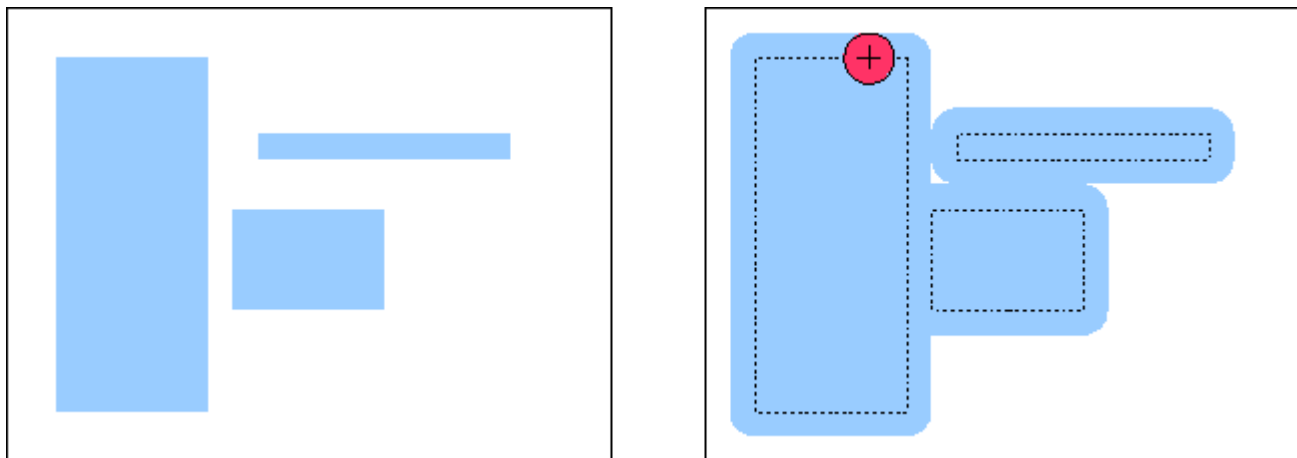


FIGURE 3.35 (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a 3×3 averaging mask. (c) Noise reduction with a 3×3 median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

Morphologische Erosion und Dilatation

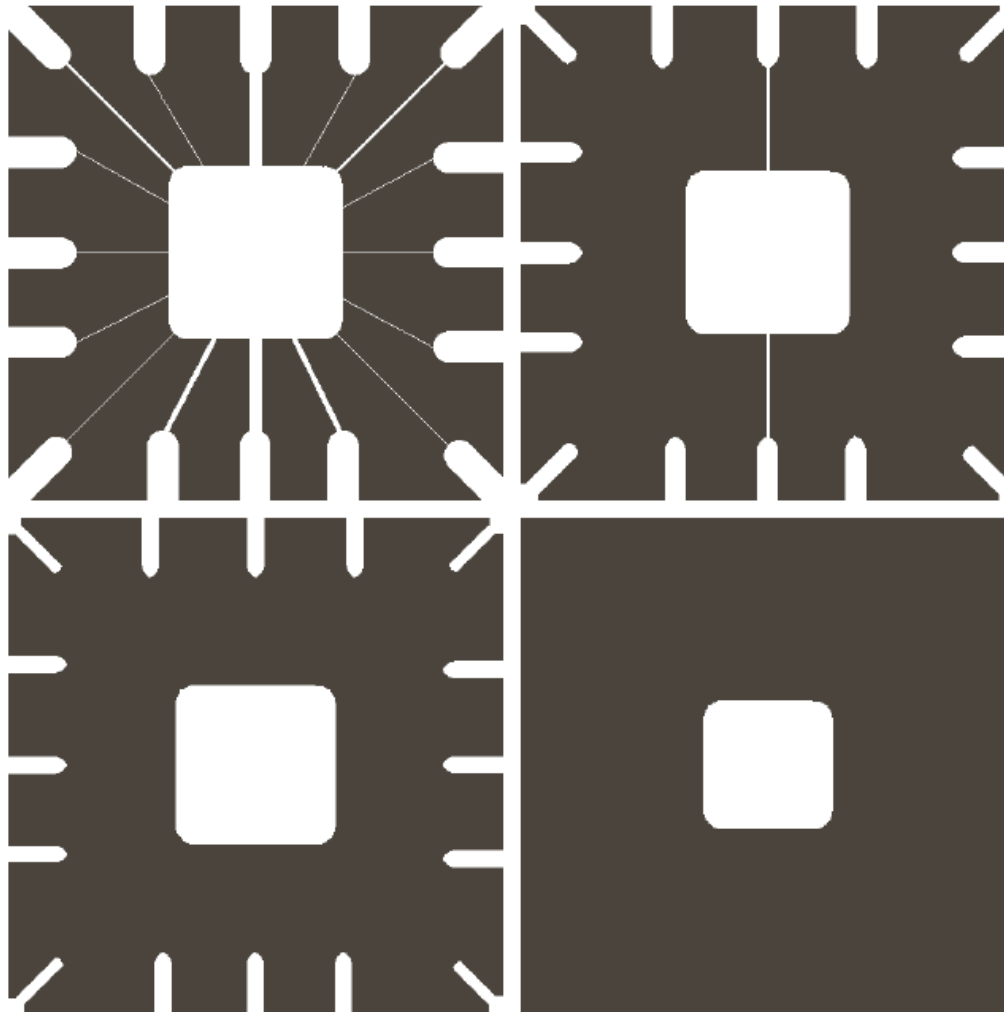


Erosion eines Bildes mit einem Kreis als strukturierendem Element



Dilatation eines Bildes mit einem Kreis als strukturierendem Element

Erosion



a	b
c	d

FIGURE 9.5 Using erosion to remove image components. (a) A 486×486 binary image of a wire-bond mask. (b)–(d) Image eroded using square structuring elements of sizes 11×11 , 15×15 , and 45×45 , respectively. The elements of the SEs were all 1s.

Dilatation

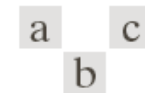
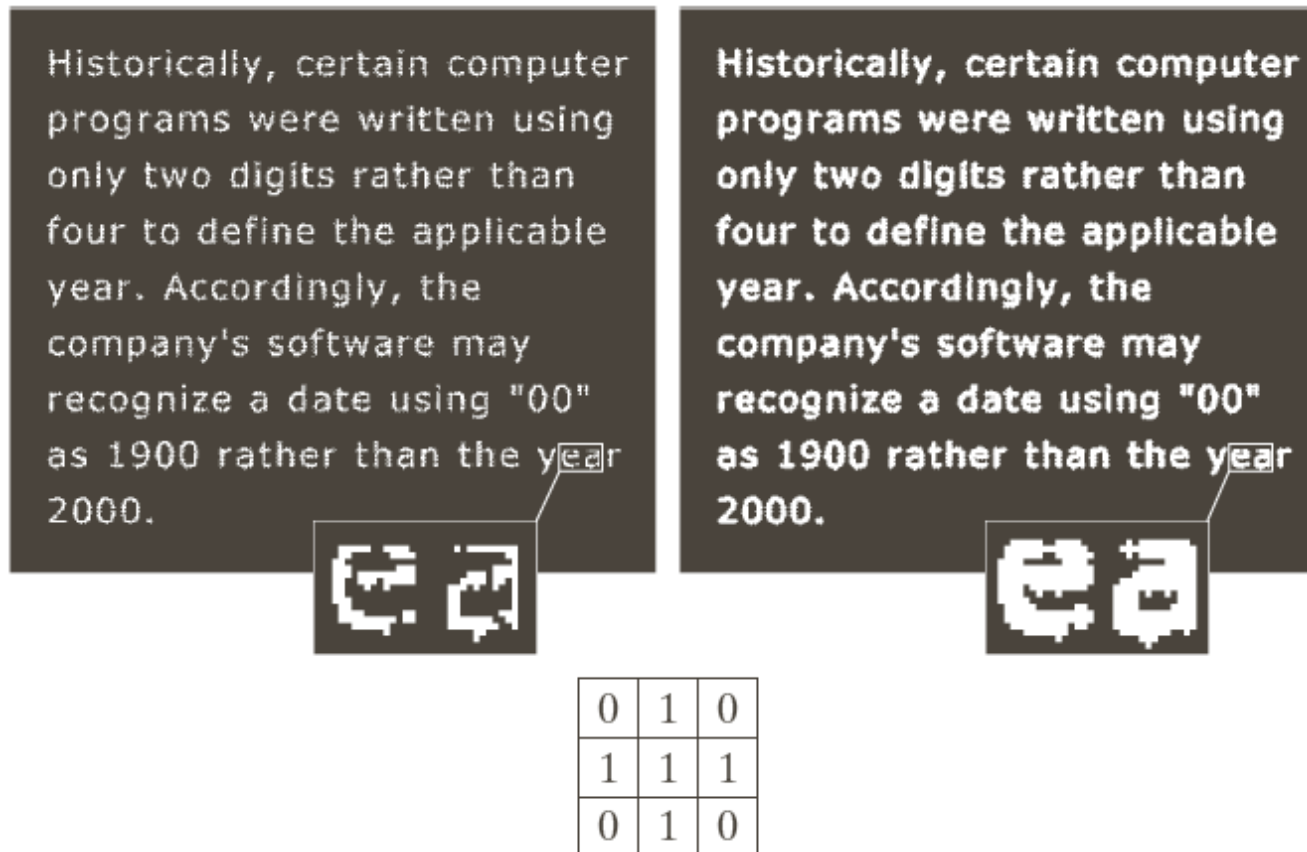
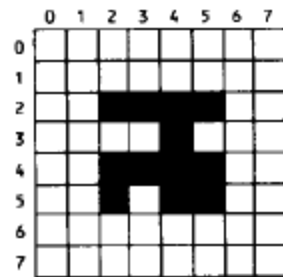
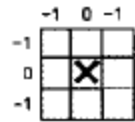


FIGURE 9.7

(a) Sample text of poor resolution with broken characters (see magnified view).
(b) Structuring element.
(c) Dilatation of (a) by (b). Broken segments were joined.

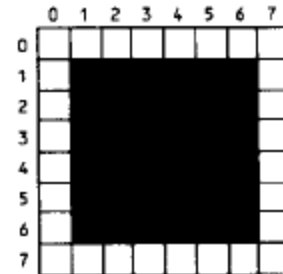


A

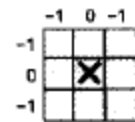


B

Dilation

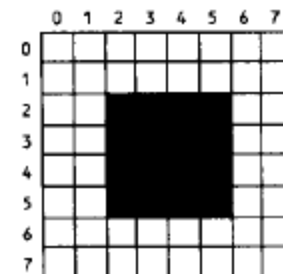


A*



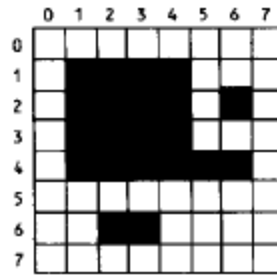
B

Erosion

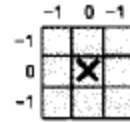


A**

a

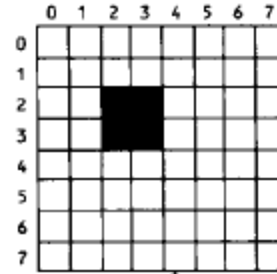


A

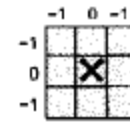


B

Erosion

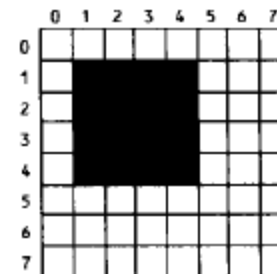


A*



B

Dilation



A**

b

a: Schließung

b: Öffnung

Schließung und Öffnung mittels Dilatation und Erosion

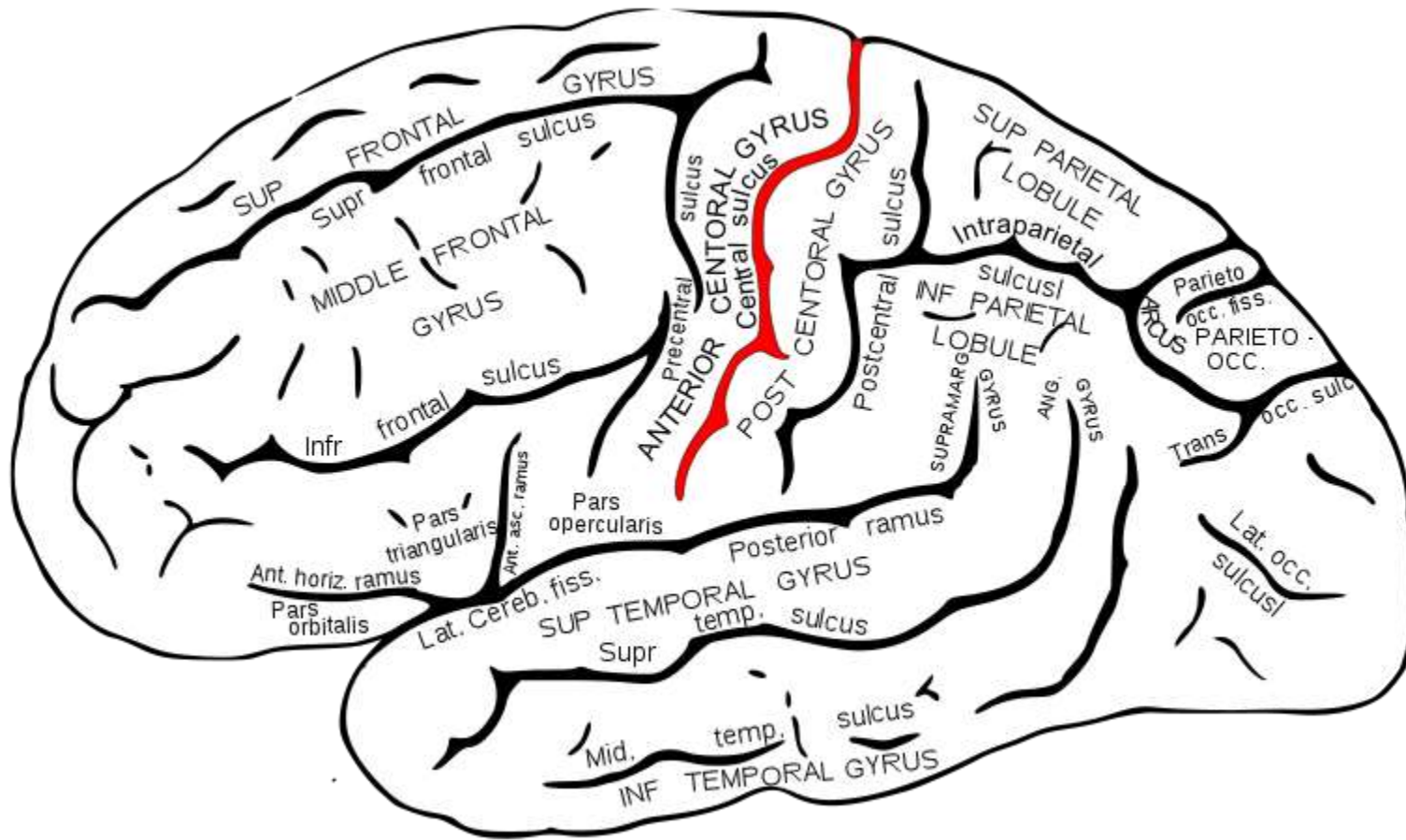


Öffnung: Erosion gefolgt von Dilatation
Schließung: Dilatation gefolgt von Erosion



FIGURE 9.11

(a) Noisy image.
(b) Structuring element.
(c) Eroded image.
(d) Opening of A .
(e) Dilation of the opening.
(f) Closing of the opening.
(Original image courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)



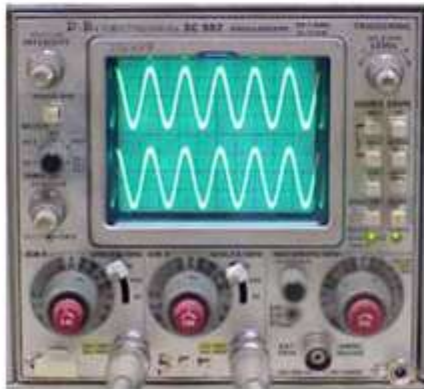
Anwendung Dilatation und Erosion:
 Automatische Segmentierung (Verfolgung der Hirnfurchen)

Bildverarbeitung im Ortsfrequenzbereich

Fouriertransformation

Zeitsignal

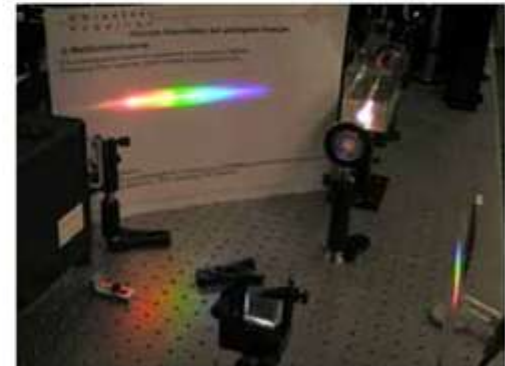
$$f(t)$$



Jean Baptiste Joseph
Fourier
1768-1830

Spektrum

$$|\tilde{F}(w)|$$



Fouriertransformation

Zeitbereich (Signal)

Kenngroße: Amplitude (z.B. Volt)

Ortsbereich (Bild)

Kenngroße: Intensität, Helligkeit
Grauwert (in der Regel 0-255)

Fouriertransformation

Frequenzbereich

Spektrum

Kenngroße: Frequenz

Schwingungen pro Sekunde

Einheit: Hertz (Hz)

Ortsfrequenzbereich

Ortsfrequenzspektrum

Kenngroße: Frequenz

Linienpaare pro Längeneinheit

Fouriertransformation bei Signalen

- Hintransformation
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$
- Rücktransformation
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

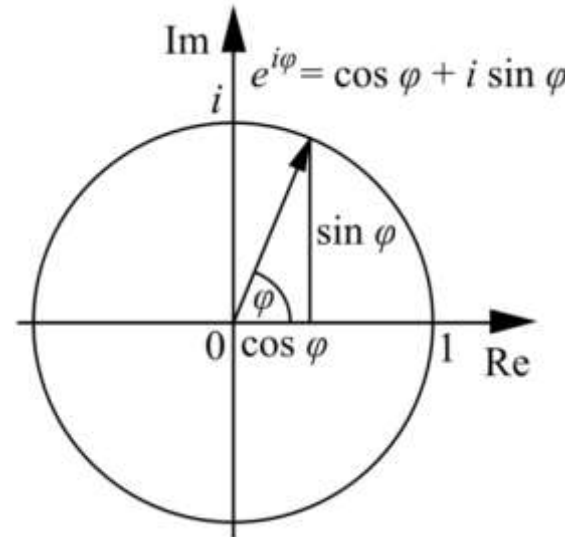
Existenzbedingung: $f(t)$ muss absolut integrierbar sein

Die Eulersche Formel bzw. Eulerformel, in manchen Quellen auch Eulersche Relation genannt, bezeichnet die Gleichung:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$$

$$e^{-i\omega} = \cos \omega - i \sin \omega$$

die damit das Bindeglied zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen bildet. Die Konstante e bezeichnet dabei die Eulersche Zahl (Basis des natürlichen Logarithmus), i bezeichnet die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.



■ Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (F(\omega) \cos \omega t + iF(\omega) \sin \omega t) d\omega$$

- Hintransformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

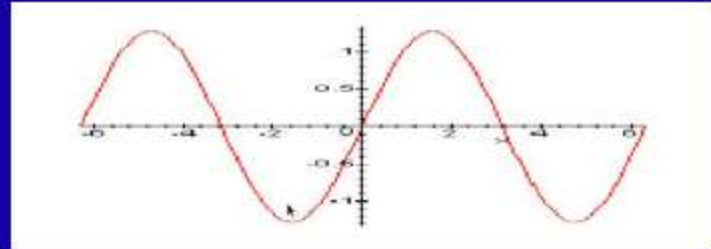
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) \cdot \cos \omega t - i \cdot f(t) \cdot \sin \omega t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos \omega_x t \cdot \cos \omega t) dt = 0$$

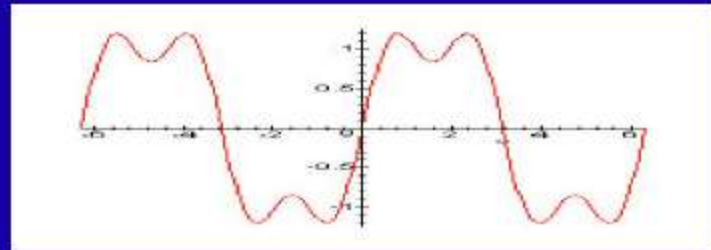
wenn ω_x ungleich ω ,
das gleiche gilt für den Sinusterm, d.h. das
Spektrum enthält nur Frequenzen, die im Signal
enthalten sind, und das Fourierintegral siebt
diese spektralen Komponenten aus.

Fourier Transformation

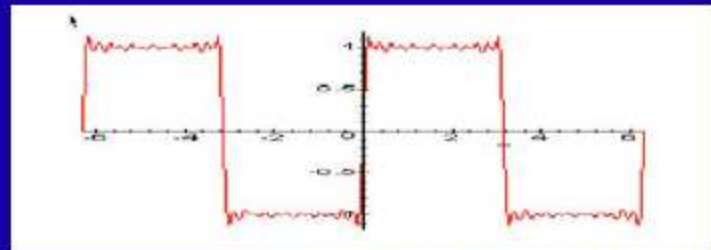
$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x$$



$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$



$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{25} \sin 25x \right)$$



Optimierung der Farbwiedergabe digitaler Kamerasystem
Dr. Peter R. Fornaro

Bestimmung des Ortsfrequenzspektrums

Die Umrechnung vom Ortsbereich in den Ortsfrequenzbereich geschieht mit Hilfe der Fouriertransformation, die hier auf zwei Dimensionen erweitert wird:

$$B(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} b(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad . \quad (2.3)$$

Die Rücktransformation geschieht in ähnlicher Weise mit:

$$b(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} B(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.4)$$

oder in der Kurznotation

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \mathcal{F}\{b(x, y)\} \\ b(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}\{B(u, v)\} \\ B(u, v) &\bullet\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\circ b(x, y) \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Fouriertransformation

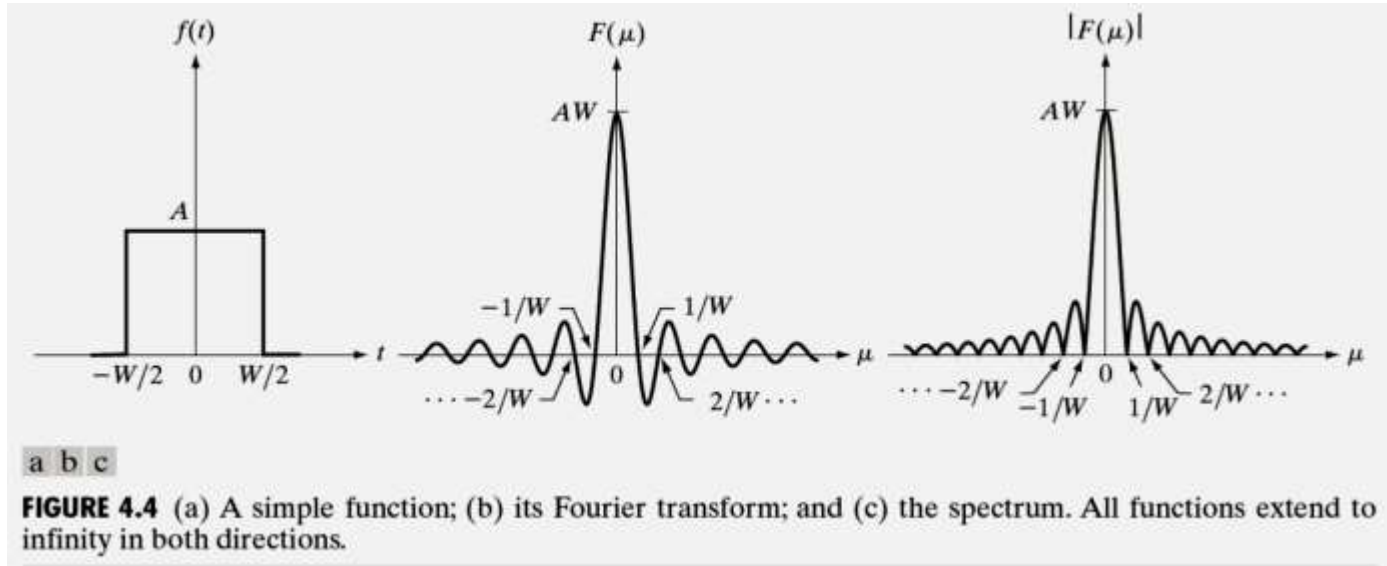
Die Fouriertransformierte ist eine komplexe Funktion!

Normale Darstellung mit Betrag und Phase!

Fouriertransformierte wichtiger Funktionen

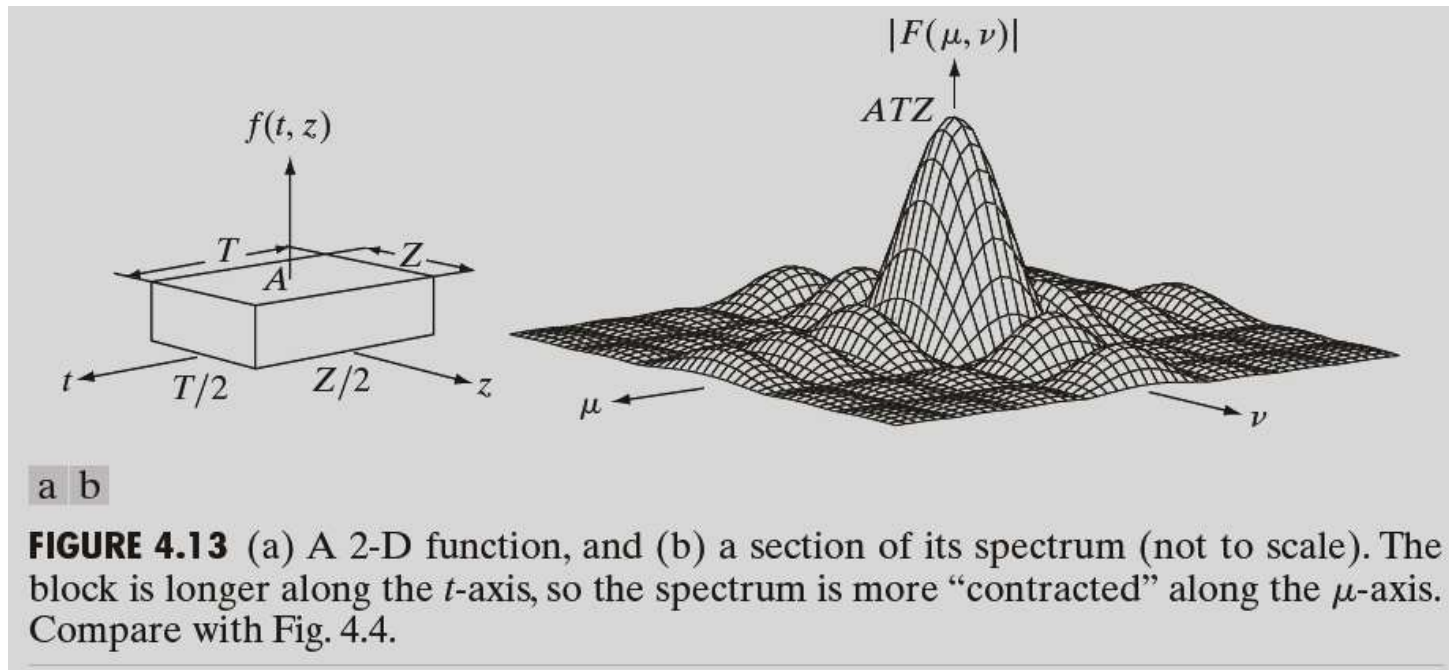
$s(t)$	$S(f)$	$ S(f) $
	$\frac{1}{1+j2\pi Tf}$	
	$\frac{1}{1+(2\pi Tf)^2}$	
	$-j \frac{2\pi Tf}{1+(2\pi Tf)^2}$	
	$\text{si}(\pi f)$	
	$\text{rect}(f)$	
	1	
	$\delta(f)$	
	$\text{III}(f)$	
	$\text{III}(f)$	
	$\text{III}(f)$	
	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
	$\frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	
	$\delta(f+F) + \delta(f-F) - j \frac{2f}{f^2 - F^2}$	

Fouriertransformierte wichtiger Funktionen



Extremwerte für $W=0$ und $W= \infty$?

Fouriertransformierte wichtiger Funktionen



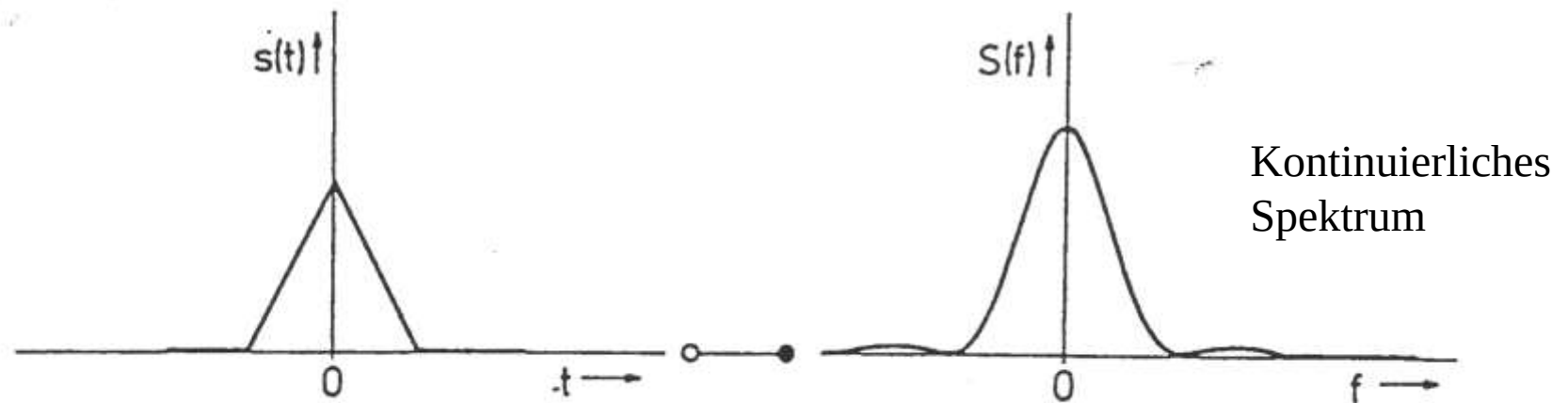
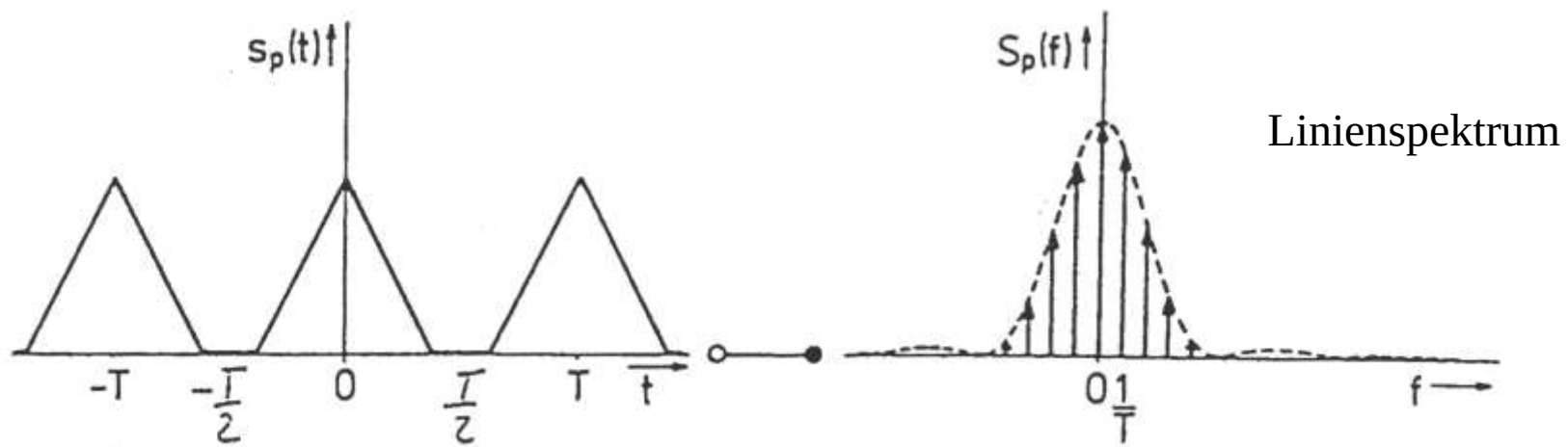


Bild A.2: Zusammenhang zwischen den Spektren eines einmaligen Signals und seiner periodischen Wiederholung

2.3 Eigenschaften der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation besitzt eine Reihe von Eigenschaften, die es erlauben, Rechnungen oder komplexe Sachverhalte zu vereinfachen. Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind im folgenden aufgeführt:

Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	$\Leftrightarrow F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	$\Leftrightarrow F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	$\Leftrightarrow F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$\Leftrightarrow F(u, v)$ complex and odd

[†]Recall that x, y, u , and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y , and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u,v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)

Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$ This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)

Name		DFT Pairs
7)	Correlation theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8)	Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9)	Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10)	Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11)	Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.		
12)	Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$.)	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13)	Gaussian	$A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2} \quad (A \text{ is a constant})$

[†] Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

Linearität:

Werden Bilder oder vielfache davon im Ortsbereich addiert, so addieren sich auch die entsprechenden Fouriertransformierten im Ortsfrequenzraum.

$$c_1 b_1(x, y) + c_2 b_2(x, y) \circ \longrightarrow c_1 B_1(u, v) + c_2 B_2(u, v) \quad (2.7)$$

Verschiebung:

Die Verschiebung eines Bilds im Ortsbereich bewirkt eine lineare Phasenänderung im Frequenzbereich, die Amplituden im Ortsfrequenzraum bleiben jedoch erhalten.

$$b(x - x_0, y - y_0) \circ \longrightarrow B(u, v) e^{-j2\pi(x_0 u + y_0 v)} \quad (2.8)$$

$$b(x, y) e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)} \circ \longrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (2.9)$$

Umgekehrt ist eine Verschiebung im Ortsfrequenzraum mit einer Phasendrehung im Ortsraum verbunden. Hierbei muß man jedoch bedenken, daß dies i.a. komplexe Werte im Ortsraum zur Folge hat.

Rotation:

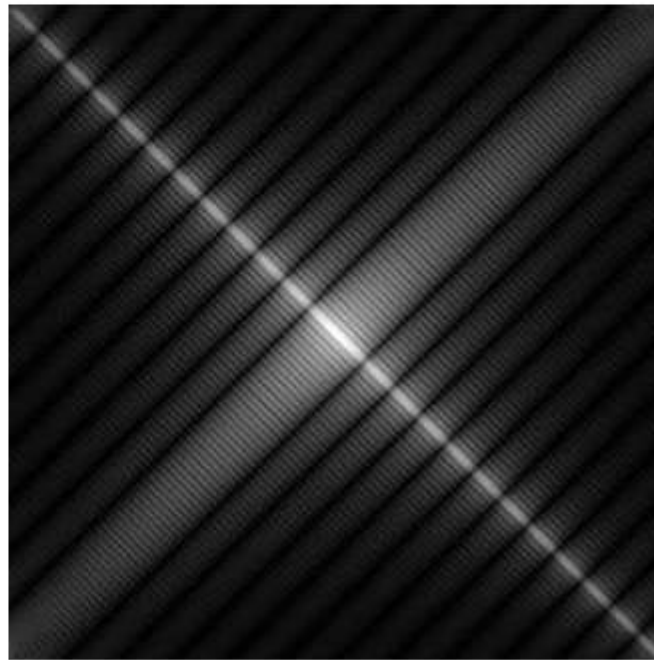
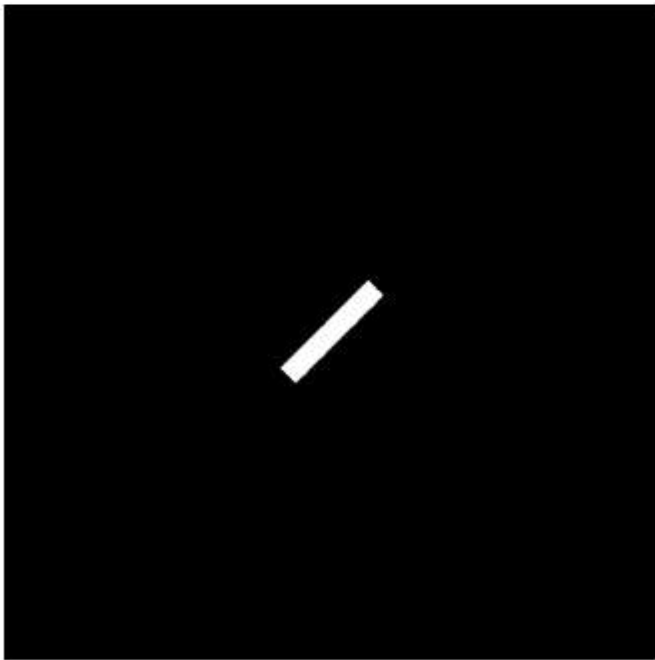
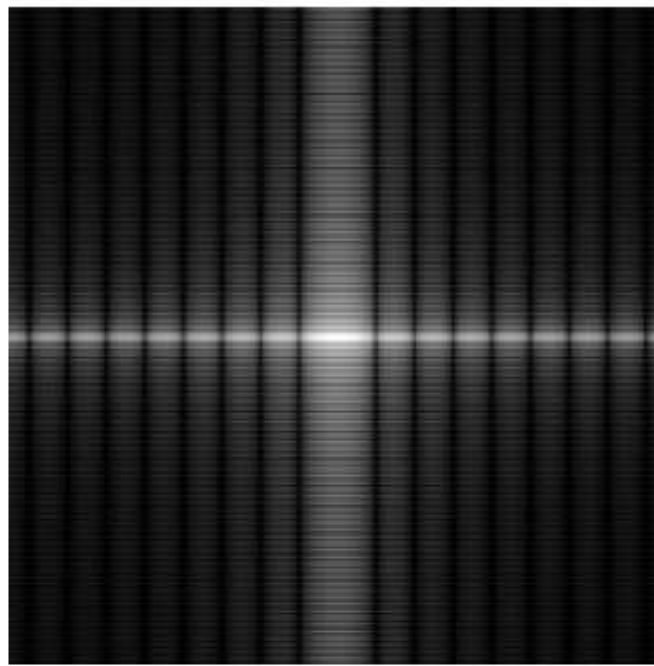
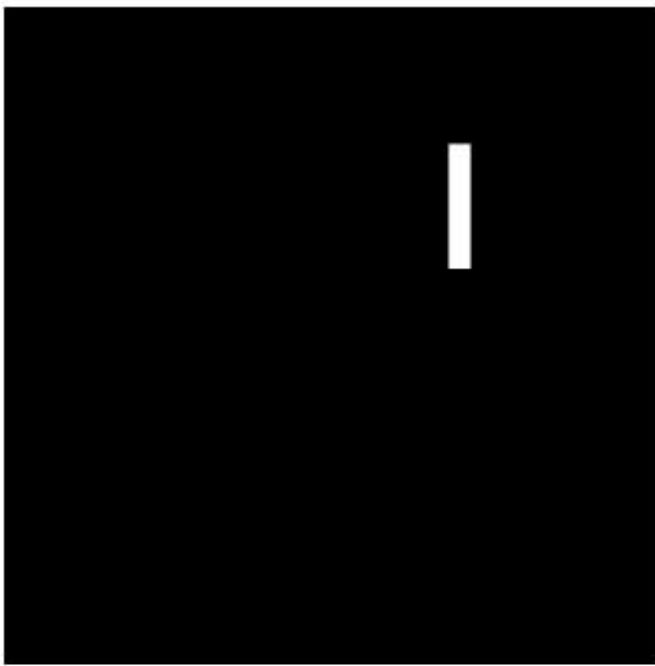
Die Drehung des Bilds im Ortsbereich um den Winkel α bewirkt ebenfalls eine Drehung um den Winkel α im Ortsfrequenzbereich.

$$b_\alpha(x, y) \circ \longrightarrow B_\alpha(u, v) \quad (2.11)$$

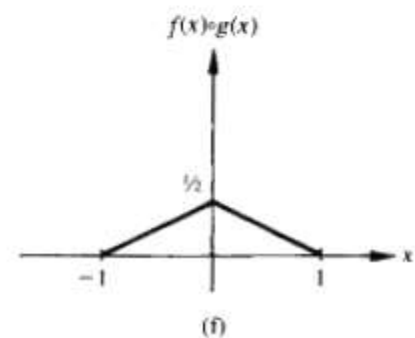
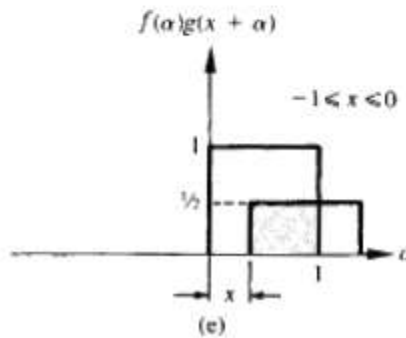
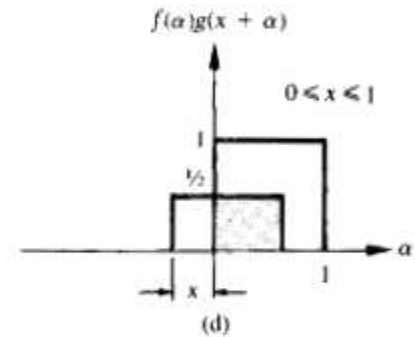
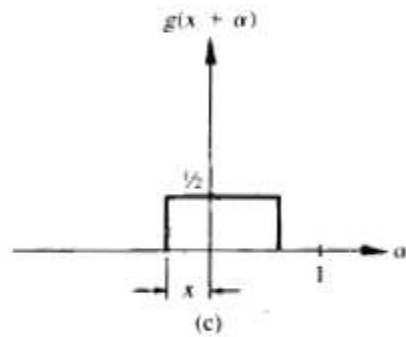
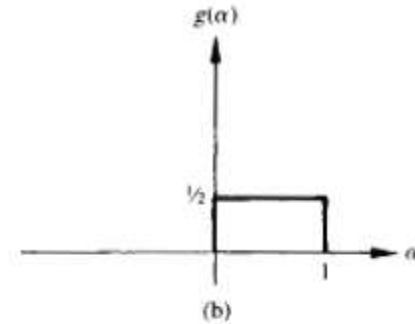
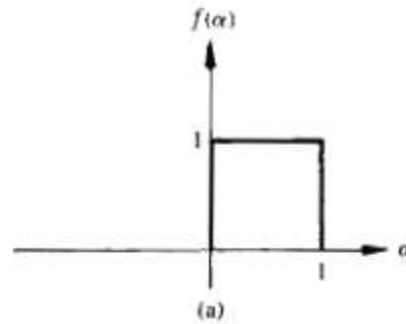
Ähnlichkeit:

Wenn im Ortsbereich eine Vergrößerung des Bilds $b(x, y)$ vorgenommen wird, so führt dies zu einer Verkleinerung des Spektrums $B(u, v)$ in der Ortsfrequenzebene und umgekehrt.

$$b(mx, ny) \circ \longrightarrow \frac{1}{|mn|} B\left(\frac{u}{m}, \frac{v}{n}\right) \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$



Faltungstheorem



Faltung

Faltungstheorem

Das Faltungstheorem stellt ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel bereit, das es erlaubt, die Faltung zweier Ortsfunktionen im Frequenzbereich zu berechnen.

Das Faltungstheorem besagt:

1. Einer Faltung im Ortsbereich entspricht eine Multiplikation im Frequenzbereich.
2. Einer Faltung im Frequenzbereich entspricht eine Multiplikation im Ortsbereich.

Es gilt also:

$$B_F(u, v) = B_1(u, v) \cdot B_2(u, v)$$

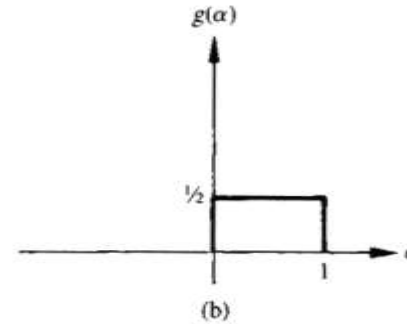
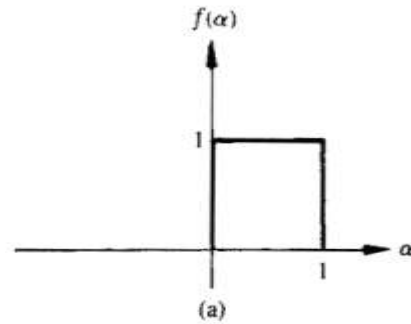
$$b_F(\alpha, \beta) = b_1(x, y) \otimes b_2(x, y)$$

$$b_F(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b_1(x, y) \cdot b_2(\alpha - x, \beta - y) dx dy$$

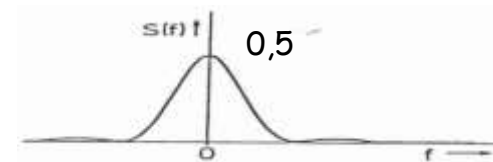
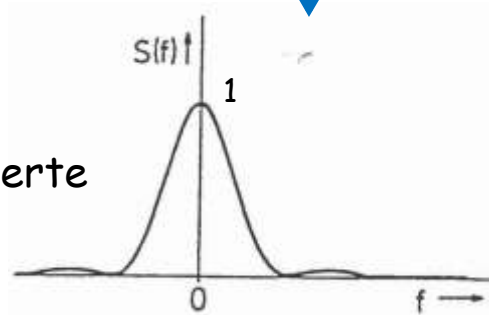
mit

$$B_F(u, v) = F b_F(\alpha, \beta)$$

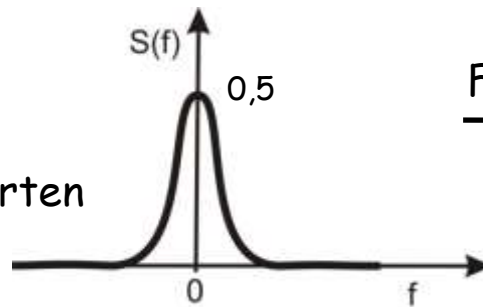
Ortsfunktionen



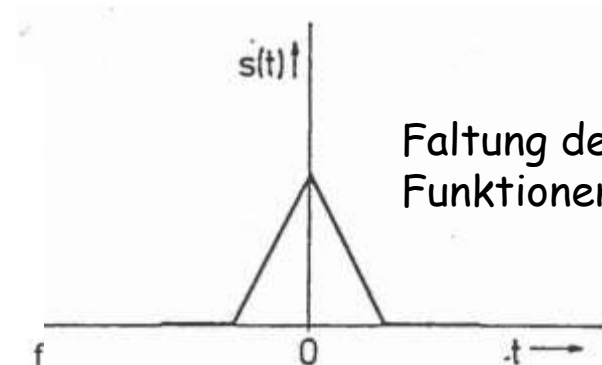
Fouriertransformierte



Produkt der Fouriertransformierten



FT⁻¹
→



Faltung der beiden
Funktionen

Filterung im Ortsbereich (Faltung)

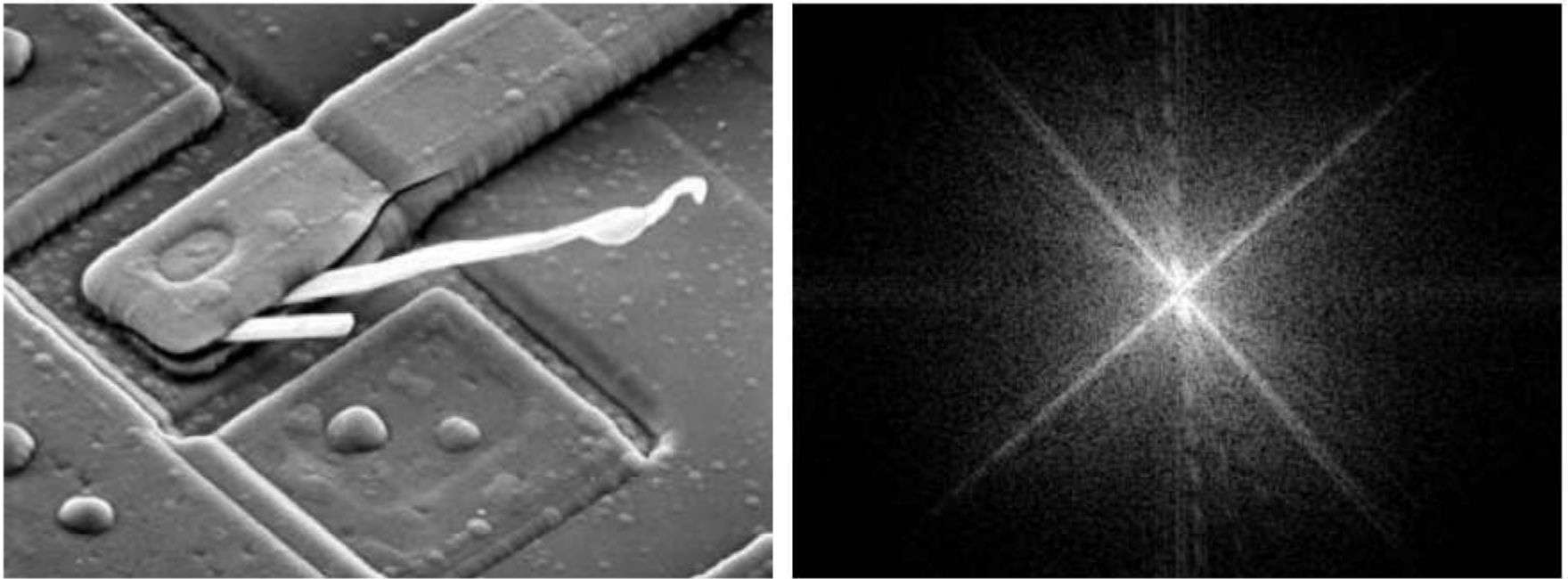
Streng betrachtet ist eine Faltung nur mit zwei Bildern definiert, die unendlich ausgedehnt sind, hier haben wir es aber mit einem endlich großen Bild und einem noch kleineren Faltungskern zu tun. Der Faltungskern kann jedoch als unendlich ausgedehntes Bild betrachtet werden, das nur im Bereich des Fensters Werte aufweist und sonst überall den Wert Null besitzt. Die Grenzen bei der Summation in der Faltungssumme können somit auf die Operatorgröße gesetzt werden. Wenn man nun noch auf die Spiegelung eines der beiden Operanden bei der Faltung verzichtet und die Werte des Operators entsprechend wählt, dann ergibt sich folgende Summationsformel für einen linearen lokalen Operator:

$$b_2(x, y) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=-k}^k b_1(x + i, y + j)w(i, j) \quad (5.7)$$

Hierbei ist ein quadratischer Operator der Größe $2k + 1$ in der Formel vorausgesetzt worden, bei anderen Operatorabmessungen müssen die Grenzen bei der Summation entsprechend angepaßt werden.

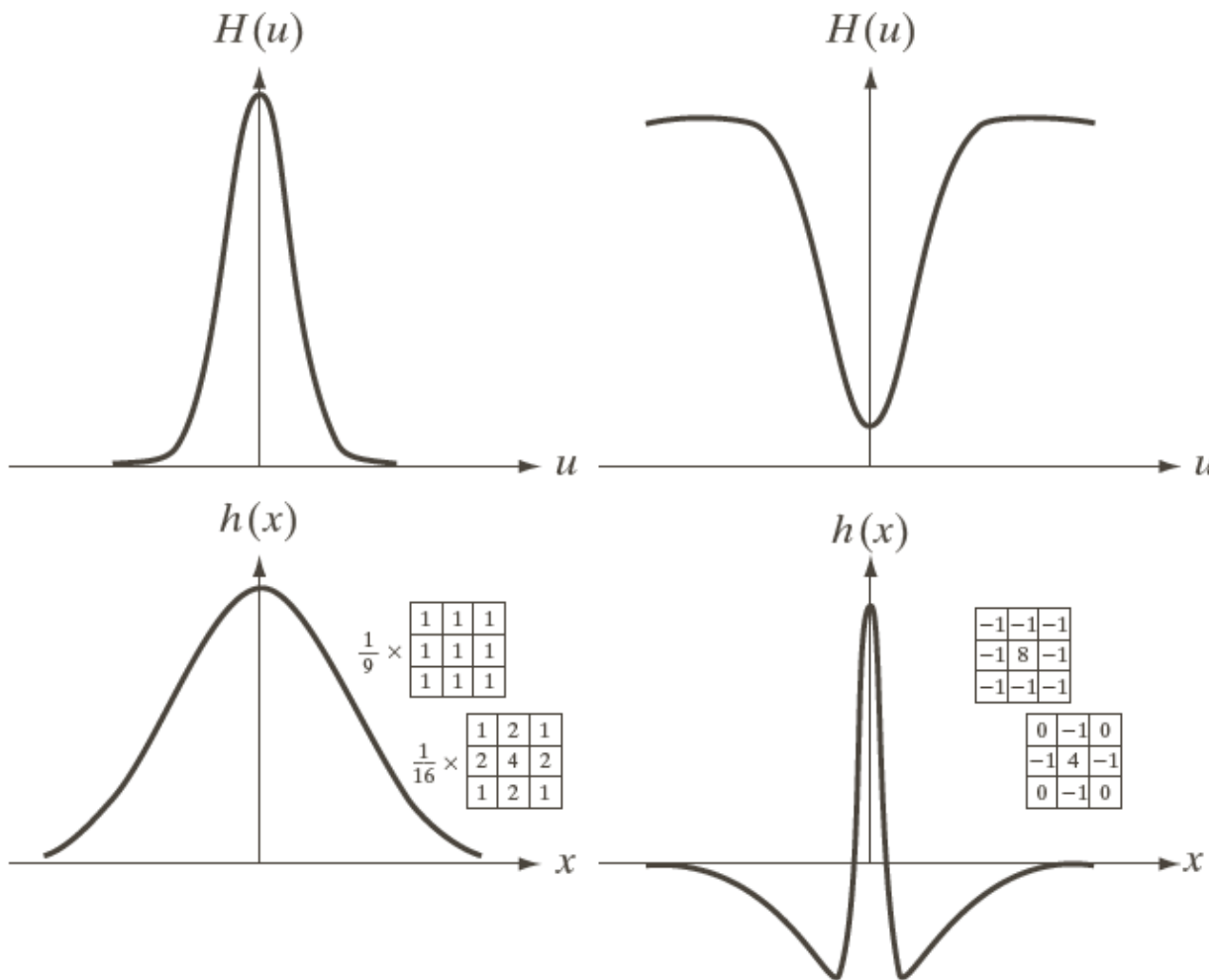
Filterung im Frequenzbereich

Multiplikation der Spektren von Bild und Operator



a b

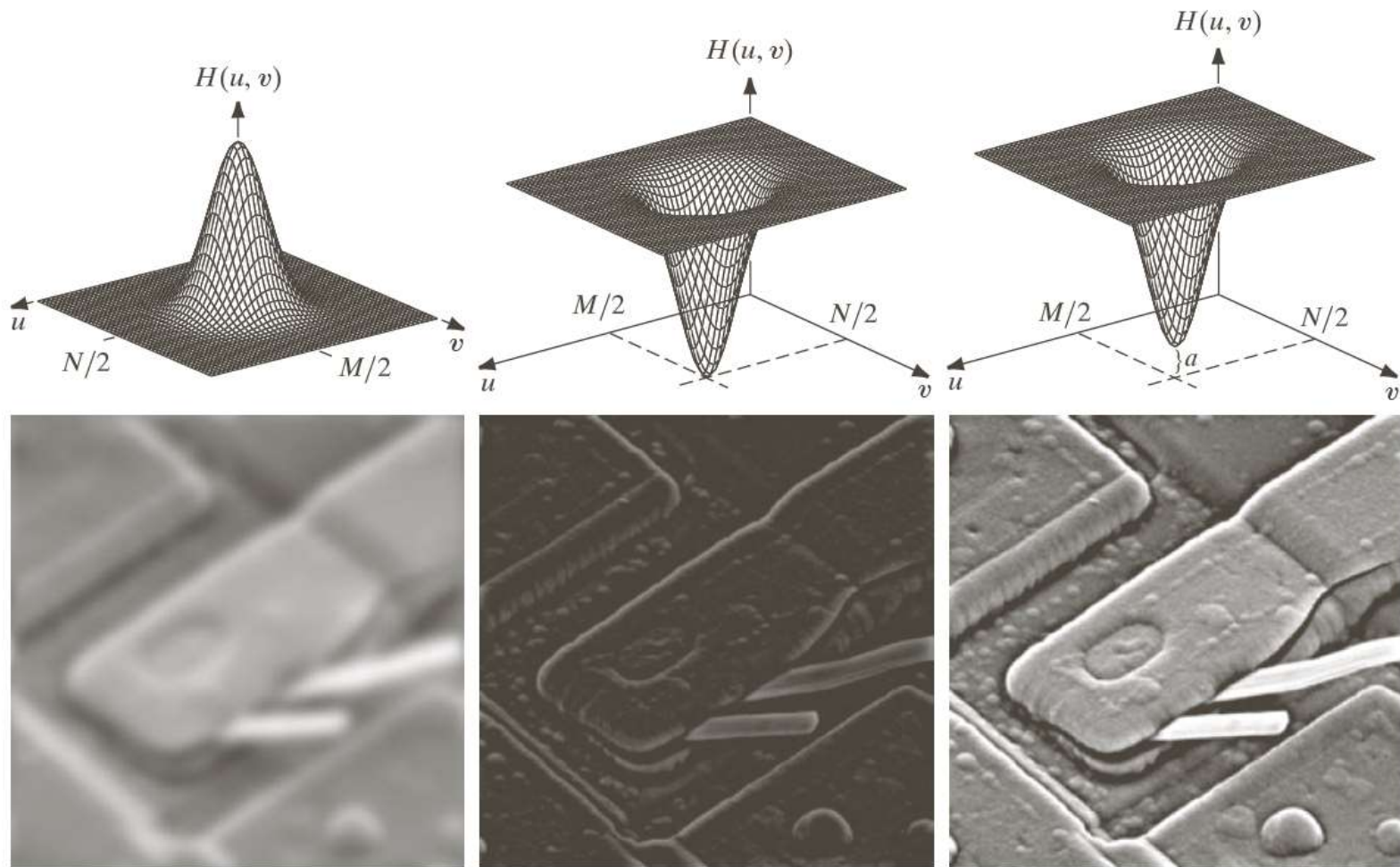
FIGURE 4.29 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)



a	c
b	d

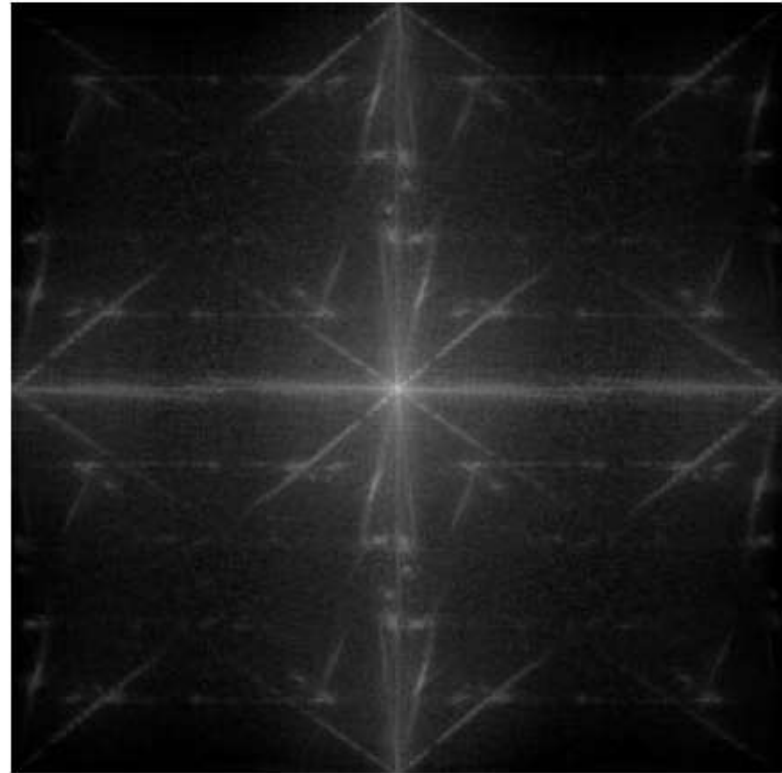
FIGURE 4.37

(a) A 1-D Gaussian lowpass filter in the frequency domain. (b) Spatial lowpass filter corresponding to (a). (c) Gaussian highpass filter in the frequency domain. (d) Spatial highpass filter corresponding to (c). The small 2-D masks shown are spatial filters we used in Chapter 3.



a	b	c
d	e	f

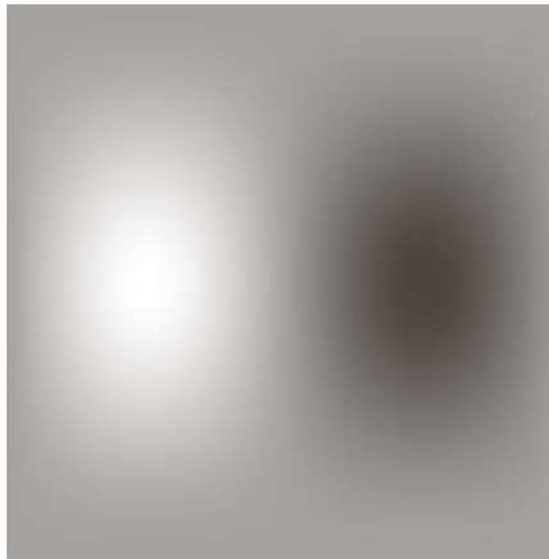
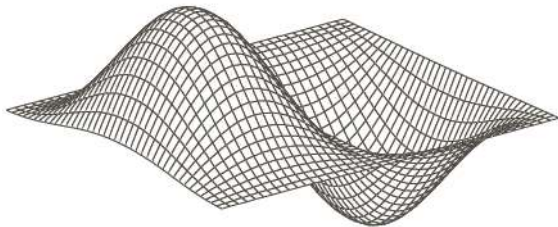
FIGURE 4.31 Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used $a = 0.85$ in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).



a b

FIGURE 4.38
(a) Image of a building, and
(b) its spectrum.

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

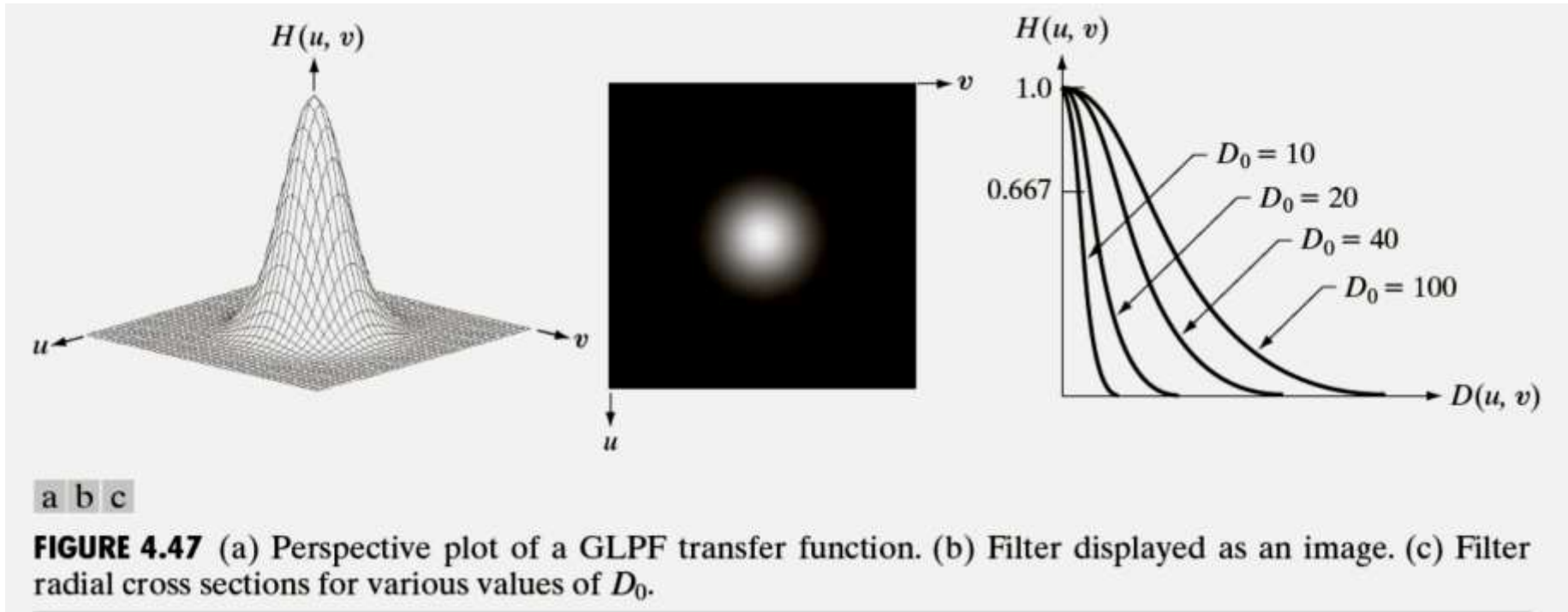


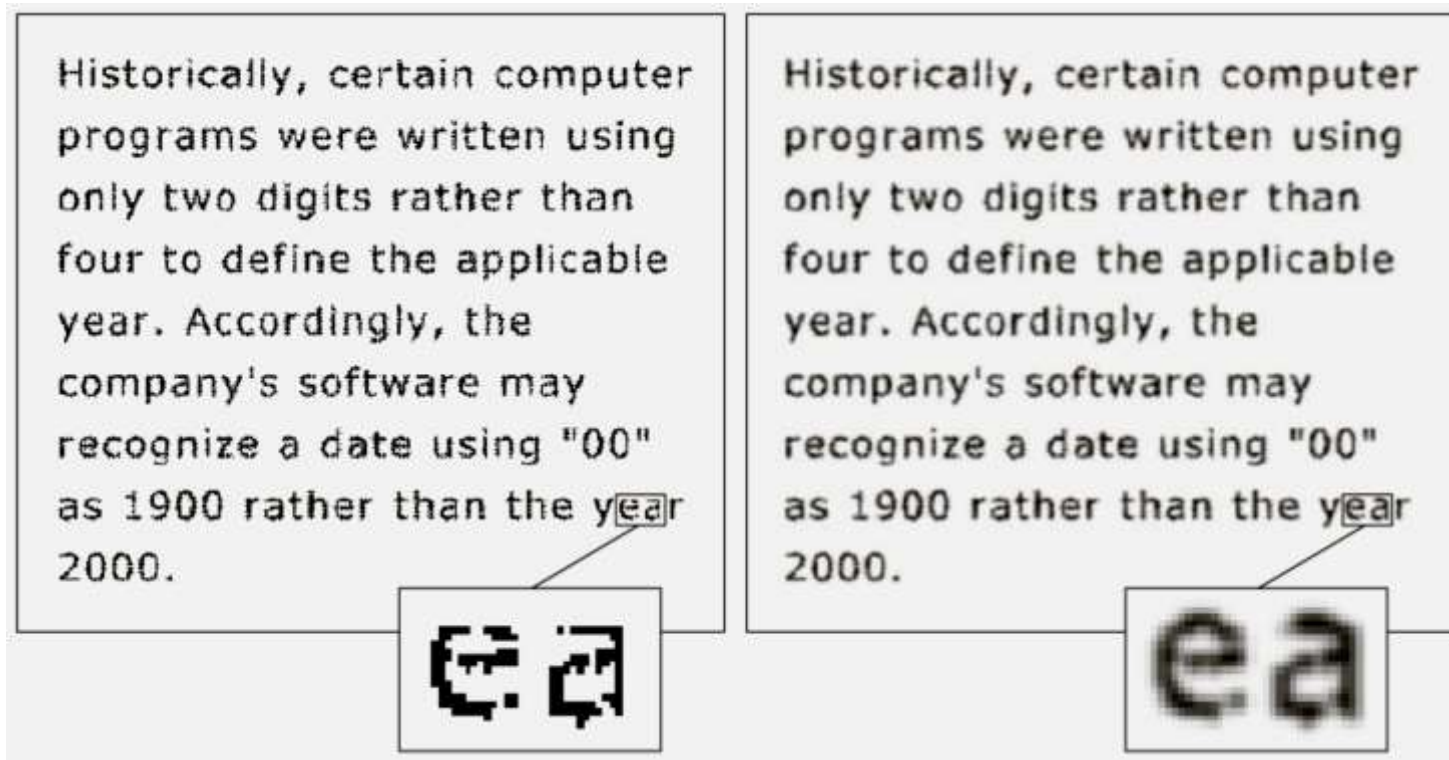
a	b
c	d

FIGURE 4.39

(a) A spatial mask and perspective plot of its corresponding frequency domain filter. (b) Filter shown as an image. (c) Result of filtering Fig. 4.38(a) in the frequency domain with the filter in (b). (d) Result of filtering the same image with the spatial filter in (a). The results are identical.

Gaußsche Tiefpassfilter

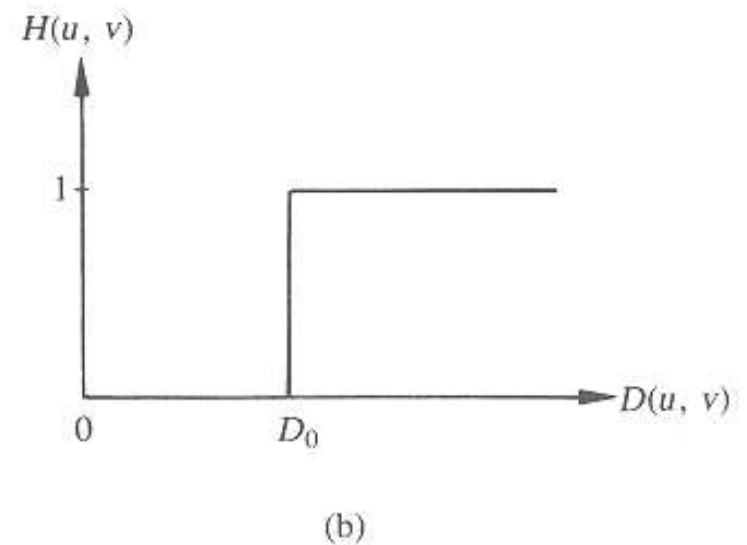
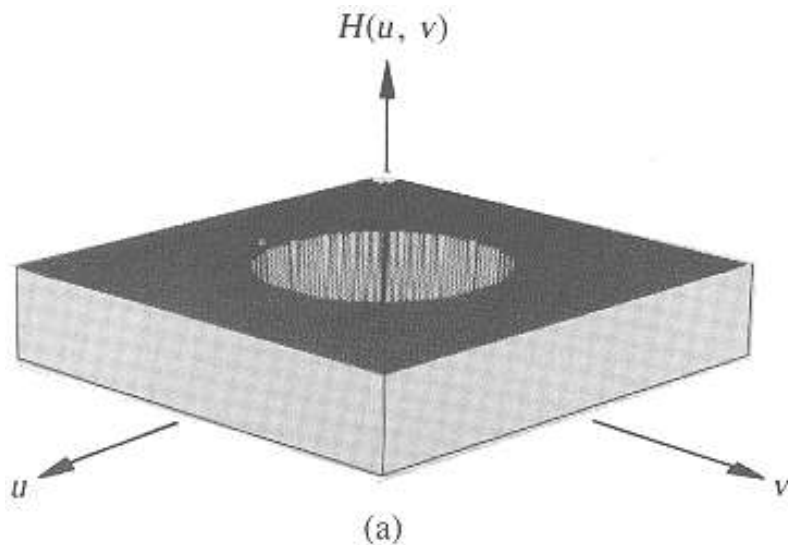




a b

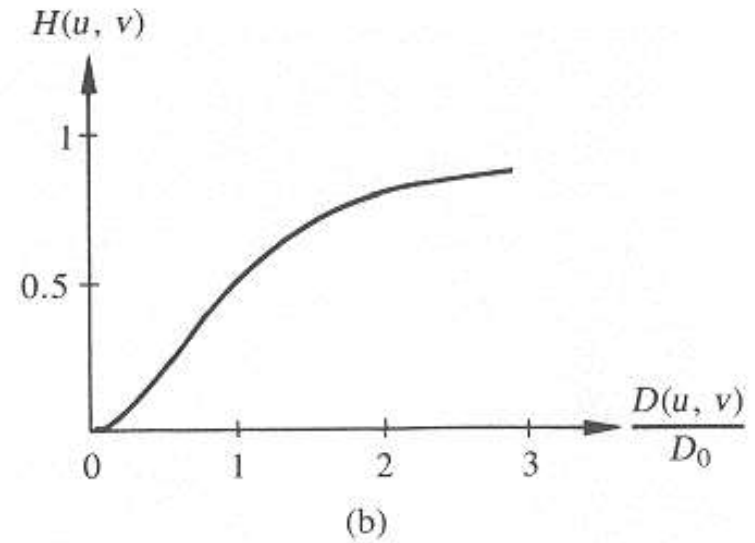
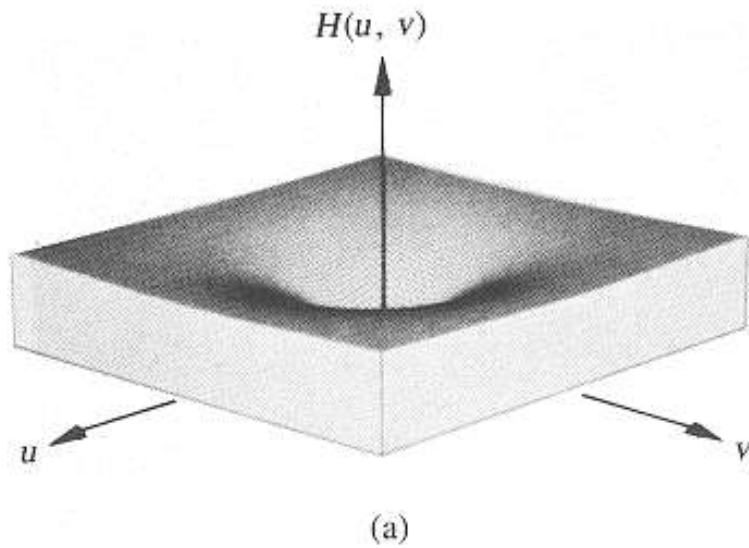
FIGURE 4.49
(a) Sample text of low resolution (note broken characters in magnified view).
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Filterung



Ideales Hochpaßfilter

Filterung



Reales Hochpaßfilter

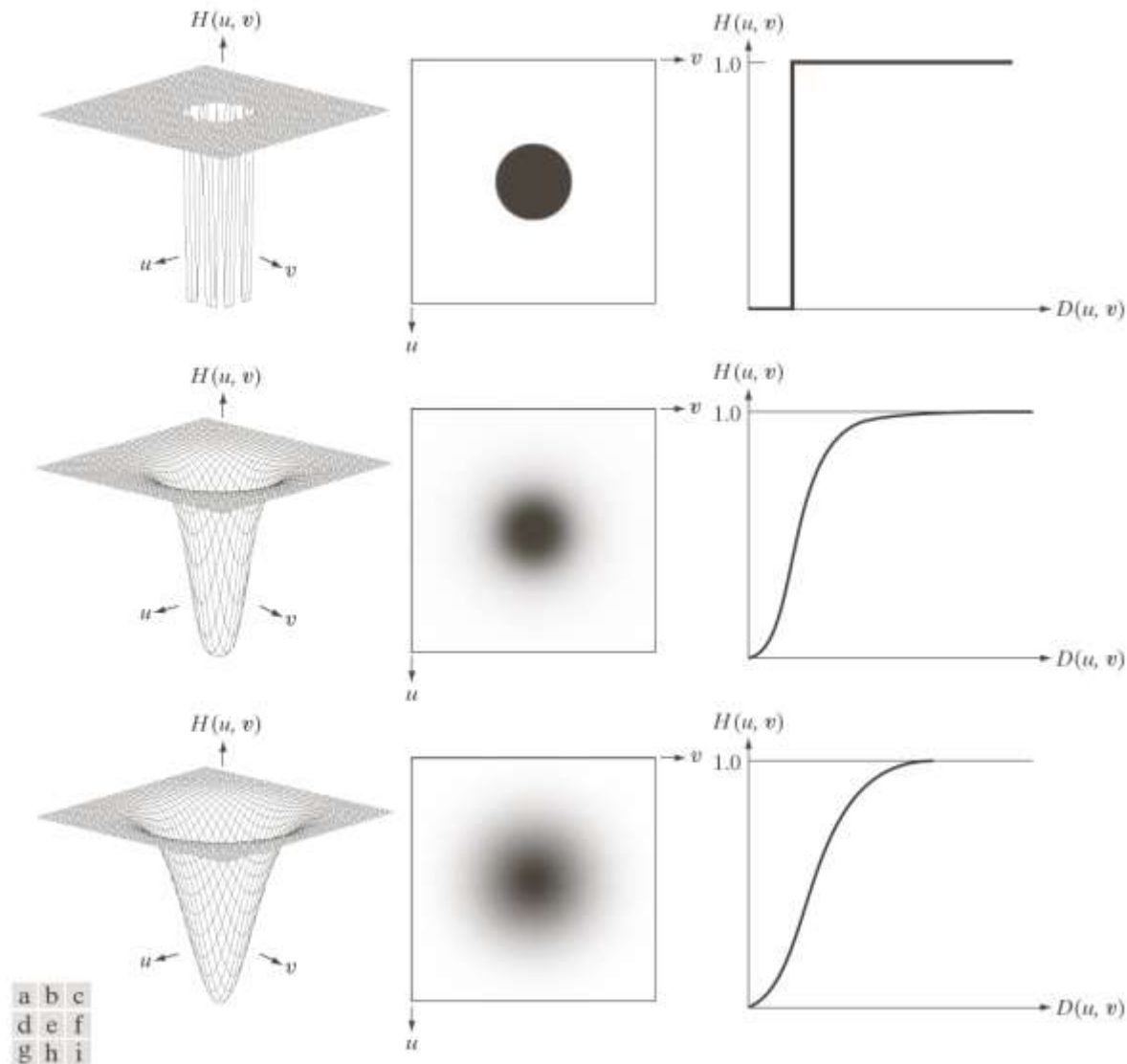


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

TABLE 4.5

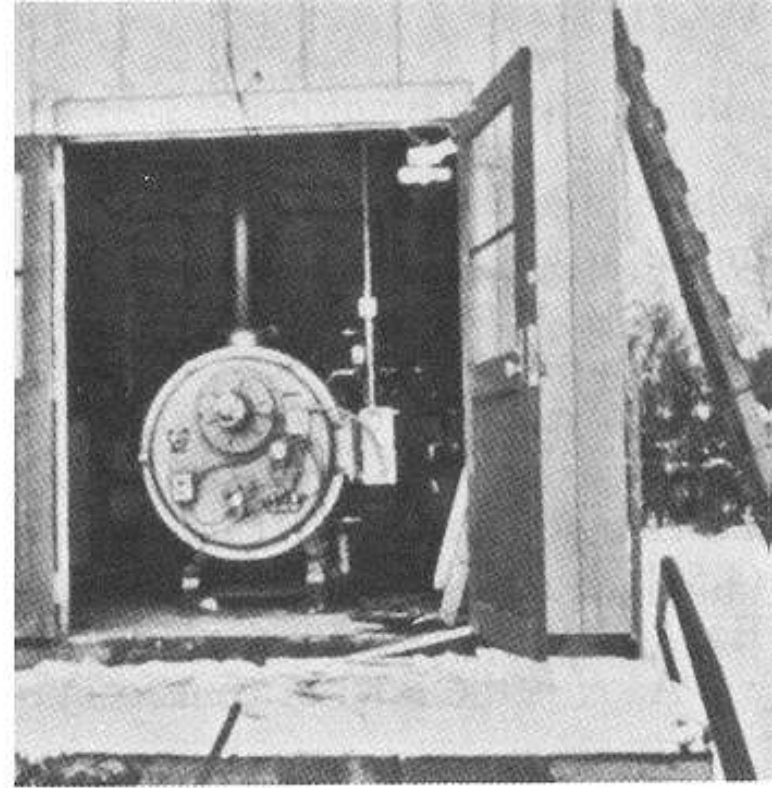
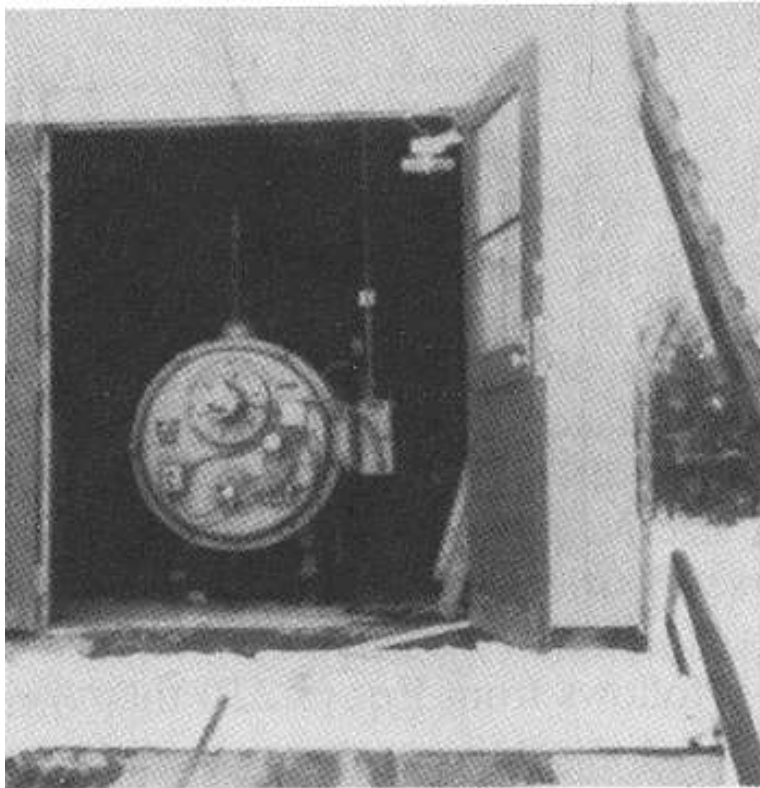
Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$



a b c

FIGURE 4.57 (a) Thumb print. (b) Result of highpass filtering (a). (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of the U.S. National Institute of Standards and Technology.)



Wirkung Hochpaßfilter

Laplace Operator (zweite Ableitung)

im Ortsbereich:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

im Ortsfrequenzbereich:

$$H(u, v) = -(u^2 + v^2) F(u, v)$$



a b

FIGURE 4.58

(a) Original, blurry image.
(b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain. Compare with Fig. 3.38(e).

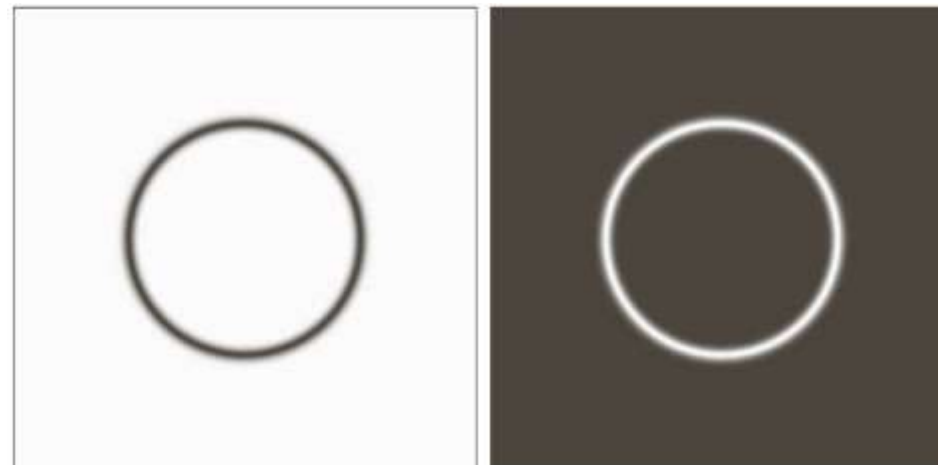
Nordpol des Mondes

Selektive Filter: Bandpaß und Bandstop Filter

TABLE 4.6

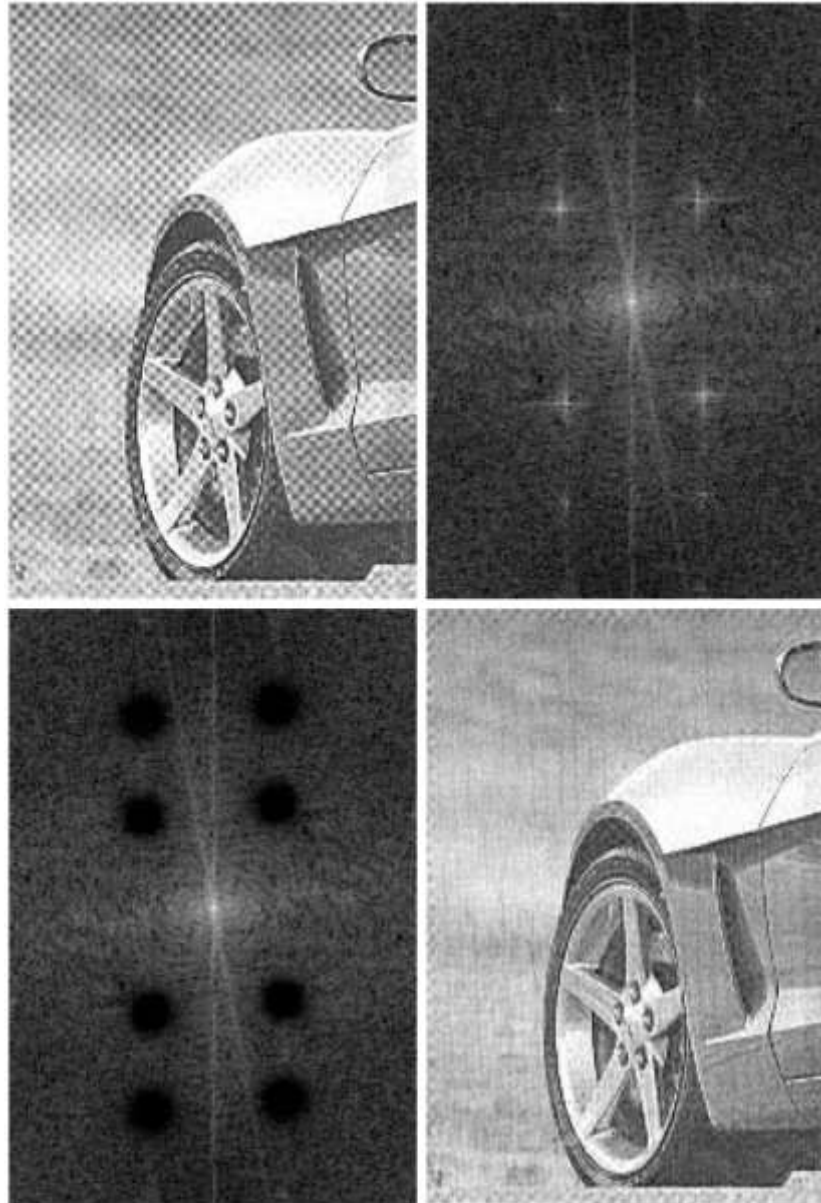
Bandreject filters. W is the width of the band, D is the distance $D(u, v)$ from the center of the filter, D_0 is the cutoff frequency, and n is the order of the Butterworth filter. We show D instead of $D(u, v)$ to simplify the notation in the table.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$



a b

FIGURE 4.63
(a) Bandreject Gaussian filter.
(b) Corresponding bandpass filter.
The thin black border in (a) was added for clarity; it is not part of the data.



a	b
c	d

FIGURE 4.64

(a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.

(b) Spectrum.

(c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.

(d) Filtered image.

Homomorphes Filtern

Was sind Homomorphe Systeme bzw. homomorphe Filter?

Lineare Systeme (z.B. lineare Filter) sind gut geeignet für die Entfernung von additivem Rauschen (gleichverteilt, gleiches Verhältnis) => für nicht-additives z.B. multiplikatives Rauschen nicht geeignet!

Homomorphe Systeme sind Generalisierungen von linearen Systemen.

Idee: nicht-additives Signal und Rauschen in additives
Reduzieren/Transformieren und dort die lineare Operation
ausführen => dann wieder zurücktransformieren.

1. nicht-additiv -> additiv mit Transformation T_c
(charakteristisches System)

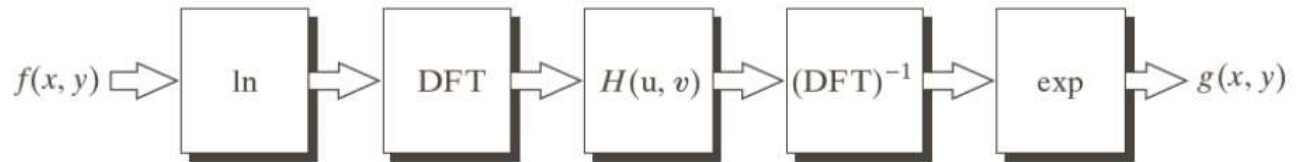
2. lineare Transformation (lineare Faltung) T_L

3. wieder zurücktransformieren T_c^{-1}

=> nicht-lineare Transformation: $h = T_c^{-1}\{T_L\{T_c\{f\}\}\}$

Homomorphes Filtern

FIGURE 4.60
Summary of steps
in homomorphic
filtering.



Durch Logarithmieren wird multiplikative Verknüpfung in additive Verknüpfung transformiert!

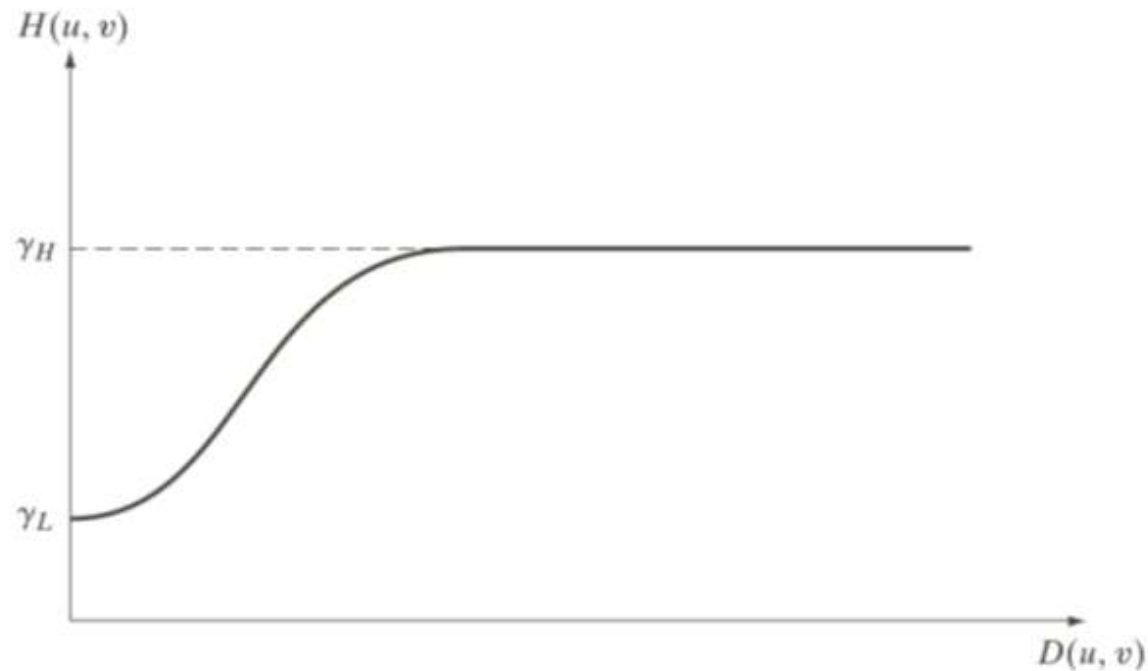
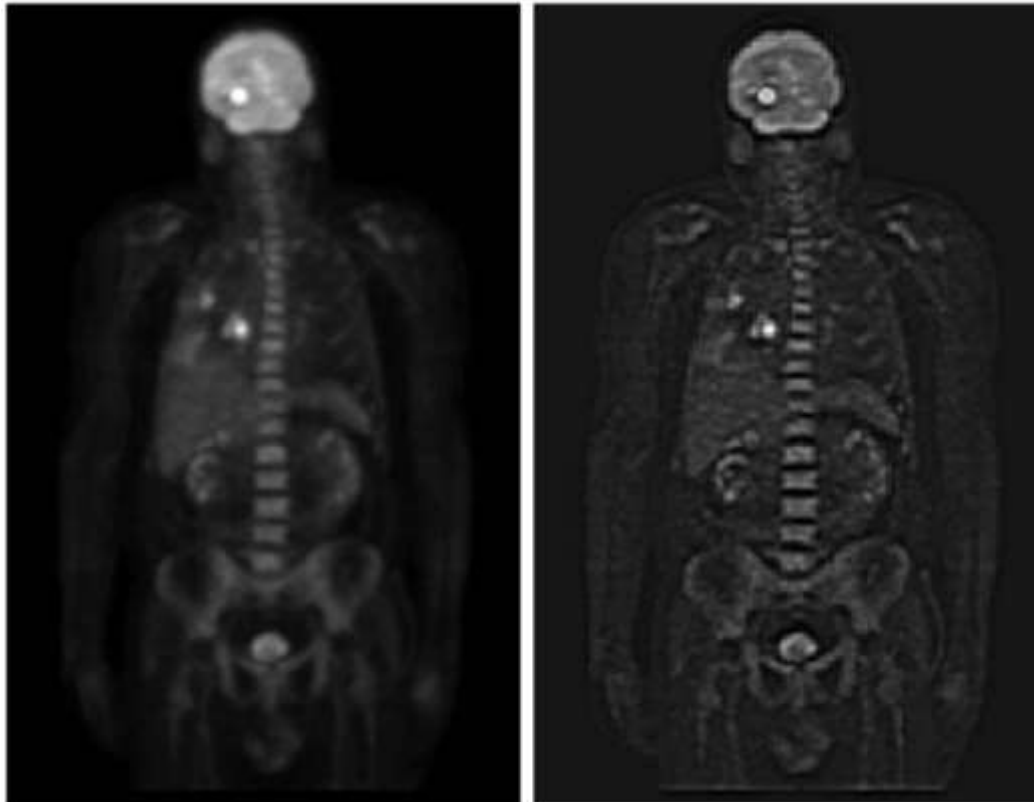


FIGURE 4.61
Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and $D(u, v)$ is the distance from the center.

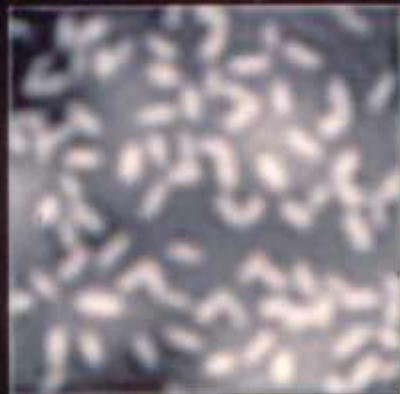


a b

FIGURE 4.62

(a) Full body PET scan. (b) Image enhanced using homomorphic filtering. (Original image courtesy of Dr. Michael E. Casey, CTI PET Systems.)

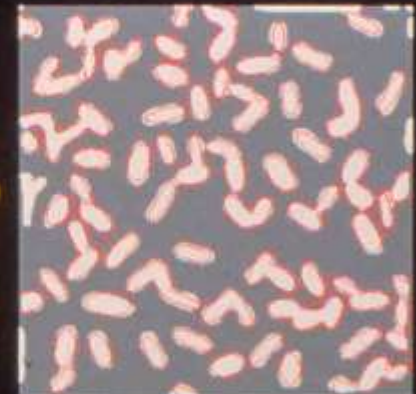
Boundary Extraction – Bestimmung der Umgrenzung eines Objekts (Hüllkurve), Segmentierung



**SIMULATED
IMAGE**



"AND"



**MULTI-SCALE
SEGMENTATION &
ORIGINAL OBJECTS**

Boundary Extraction mittels Erosion

Die Grenze eines Objekts A , bezeichnet als $\beta(A)$, kann bestimmt werden durch Berechnung der Erosion des Objekts und anschließende Subtraktion der Erosion vom Originalobjekt.

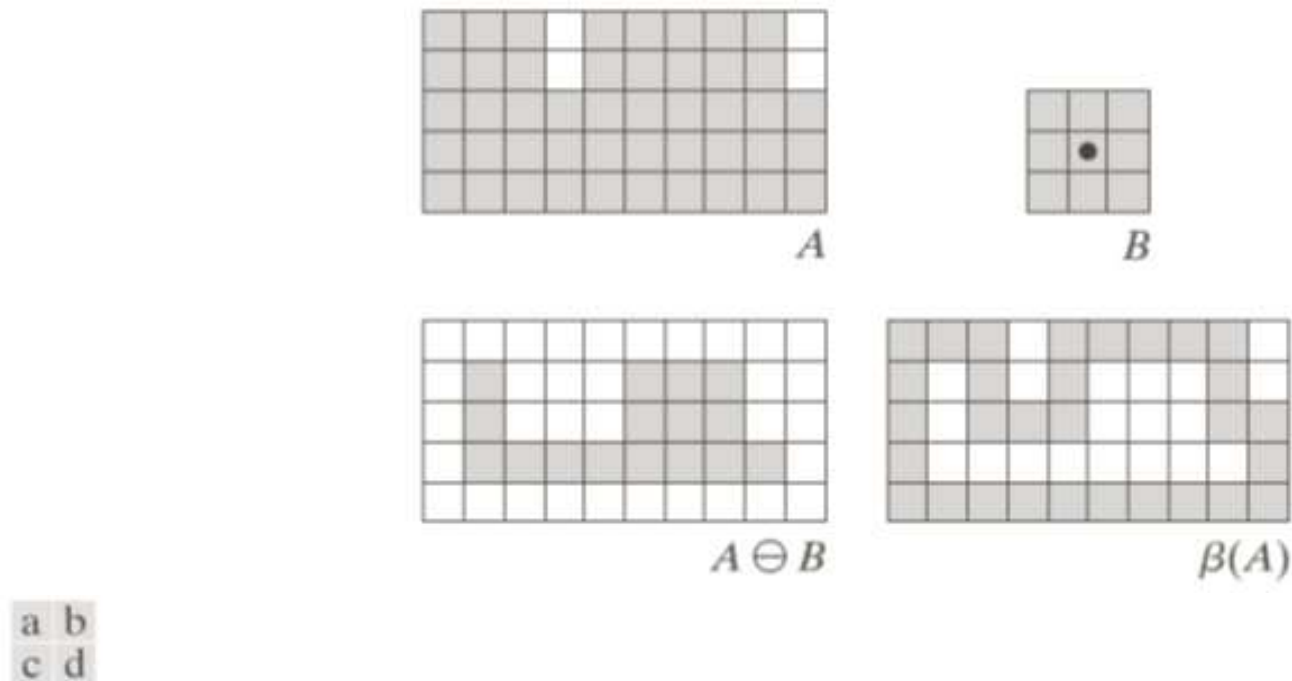
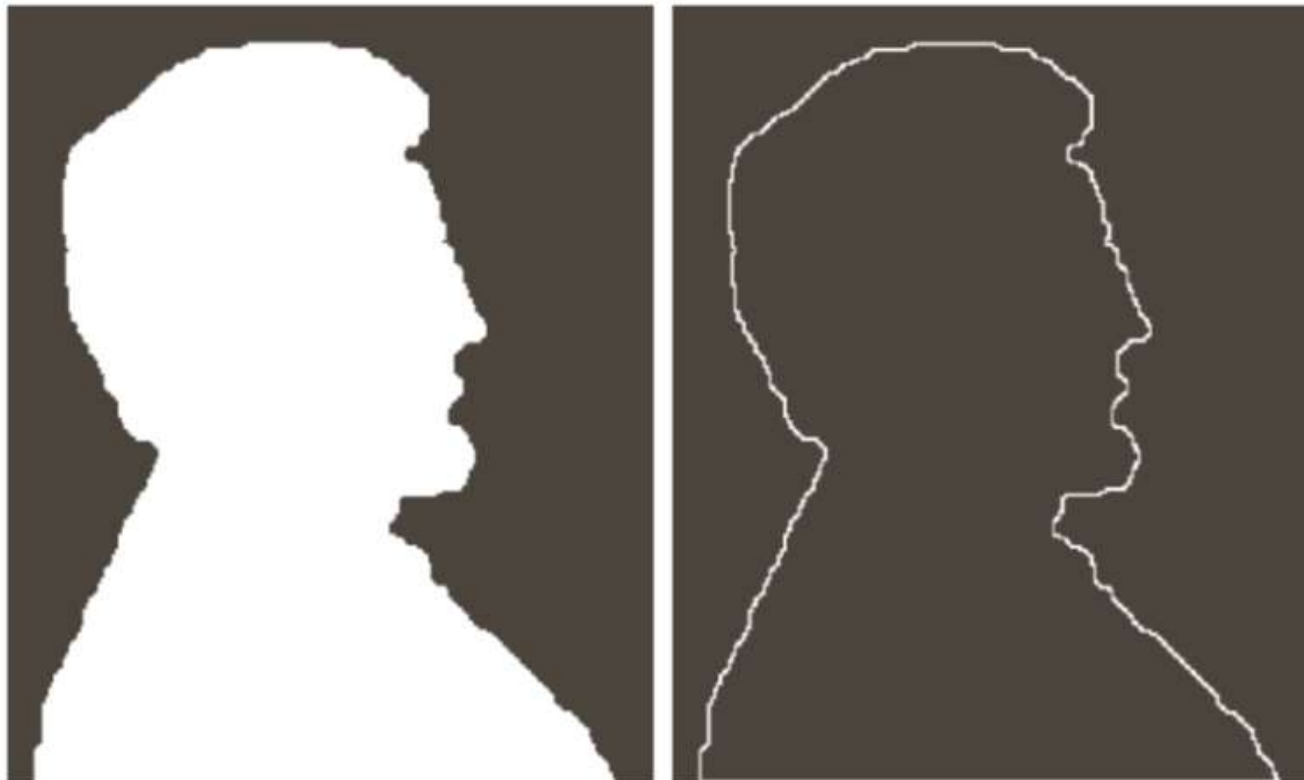


FIGURE 9.13 (a) Set A . (b) Structuring element B . (c) A eroded by B . (d) Boundary, given by the set difference between A and its erosion.

Boundary Extraction mittels Erosion

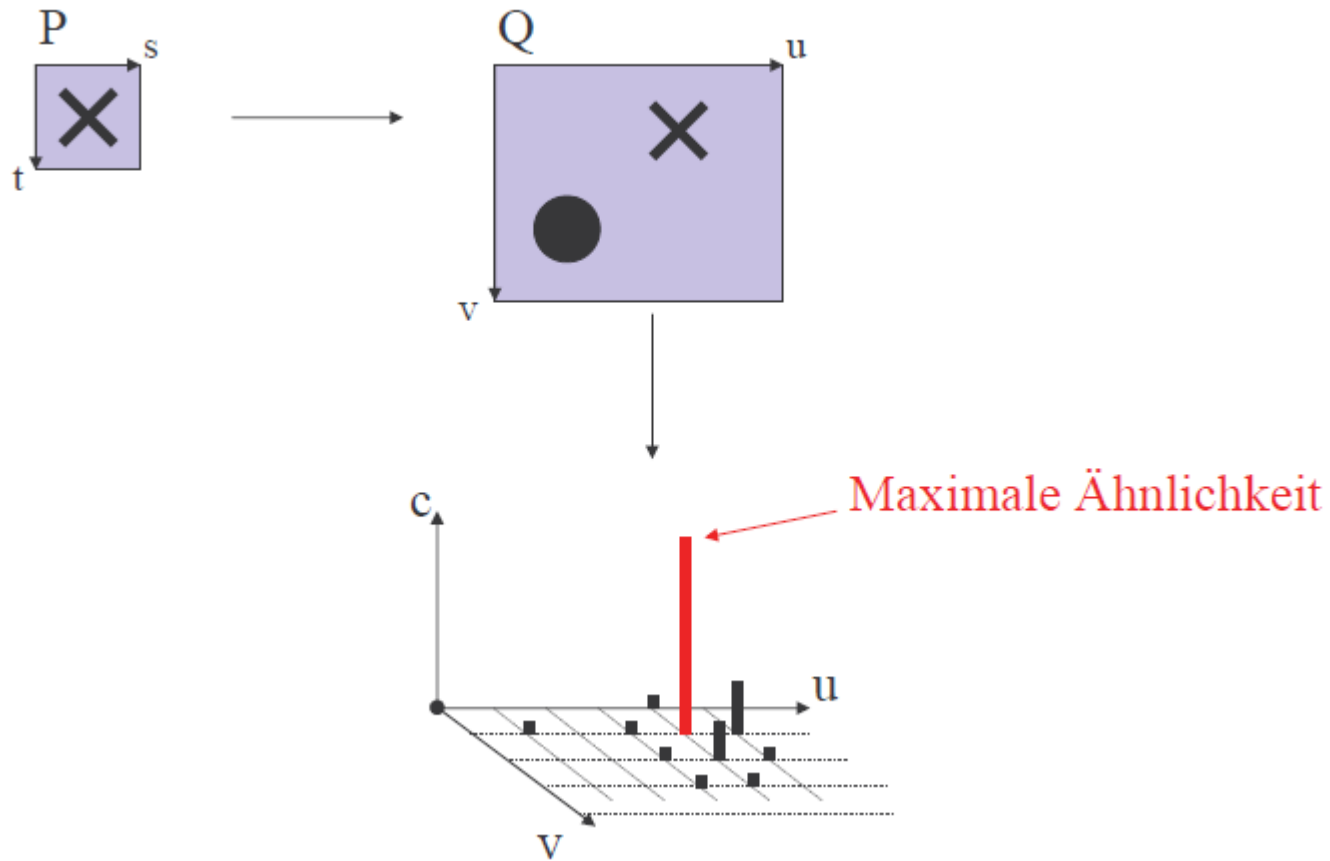


a b

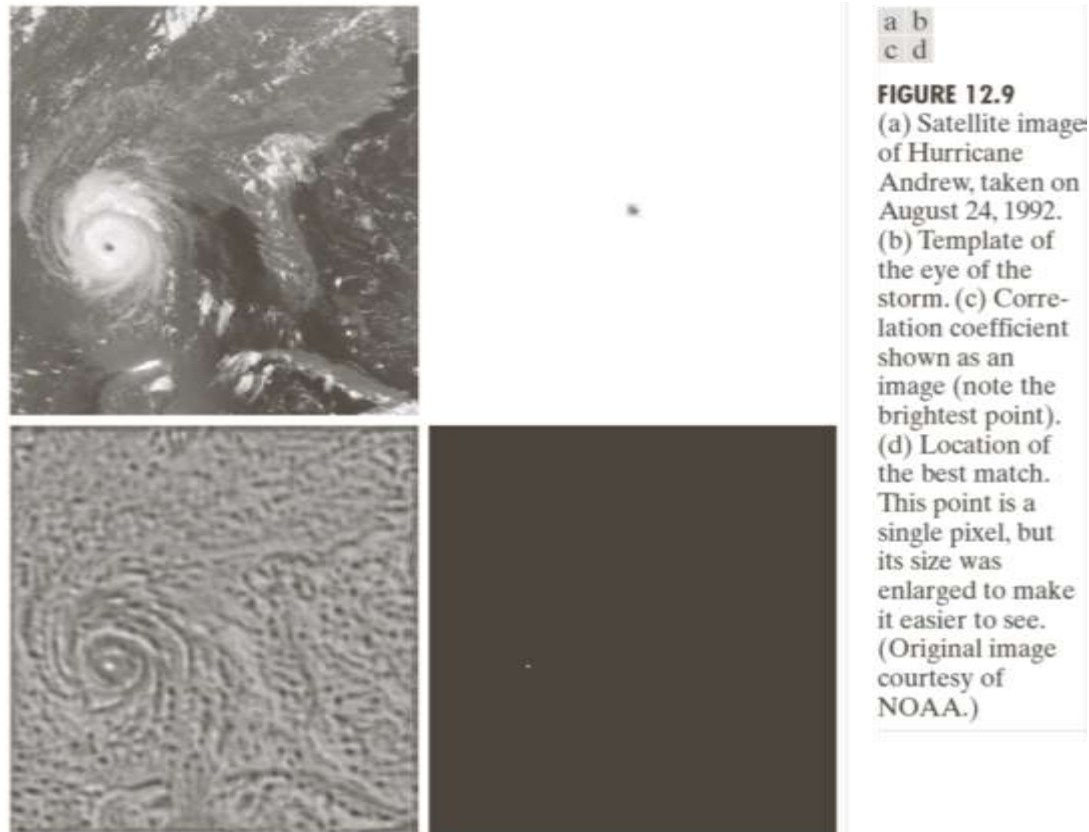
FIGURE 9.14

(a) A simple binary image, with 1s represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

Objekterkennung mittels Kreuzkorrelationsfunktion (matched filter)



Objekterkennung mittels Kreuzkorrelationsfunktion (matched filter)



Beschreibung linearer ortsinvarianter Systeme

Beschreibung linearer ortsinvarianter Systeme

1. Übertragungsfunktion und Impulsantwort

Der Einfachheit halber wollen wir uns zunächst auf die Beschreibung von Systemen beschränken, die linear und ortsinvariant sind. Linear bedeutet dabei, daß die Wirkung am Ausgang eines Systems sich linear mit der Ursache am Eingang ändert. Lineare Systeme bieten den Vorteil, daß ihre Eigenschaften in der Regel analytisch beschreibbar sind.

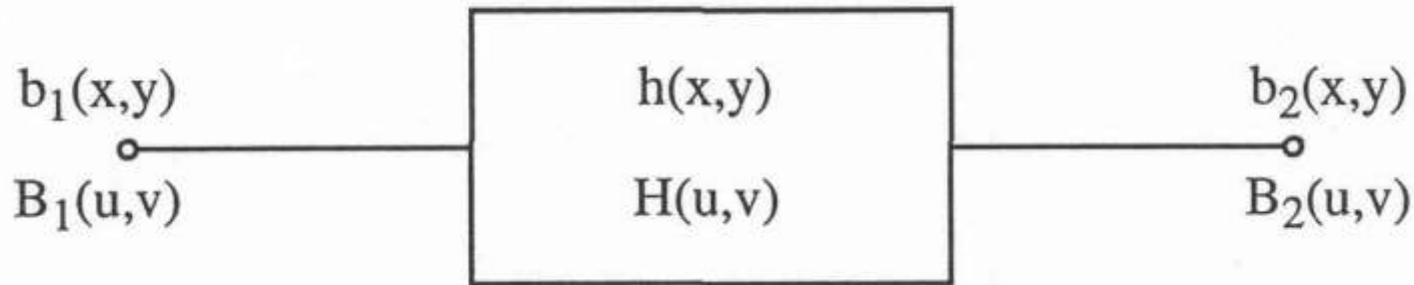


Abb.: Darstellung eines linearen, ortsinvarianten Systems mit der **Impulsantwort h** und der **Übertragungsfunktion H** ; Mit b_1 ist hier das Eingangsbild, mit b_2 das Ausgangsbild bezeichnet.

Ein lineares ortsinvariantes System lässt sich durch seine Übertragungsfunktion bzw. durch seine Impulsantwort beschreiben (siehe Bild 2.8). Im Ortsbereich erhält man das Ausgangssignal durch die Faltung der Impulsantwort mit dem Eingangssignal

$$b_2(x, y) = b_1(x, y) \otimes h(x, y) \quad , \quad (2.19)$$

wobei $h(x, y)$ die Impulsantwort des Systems ist. Dadurch ergibt sich mit der Übertragungsfunktion $H(u, v)$ im Ortsfrequenzbereich der folgende Zusammenhang:

$$B_2(u, v) = B_1(u, v) \cdot H(u, v) \quad (2.20)$$

mit den Korrespondenzen der Fouriertransformation

$$B_1(u, v) \bullet \longleftrightarrow b_1(x, y)$$

$$B_2(u, v) \bullet \longleftrightarrow b_2(x, y)$$

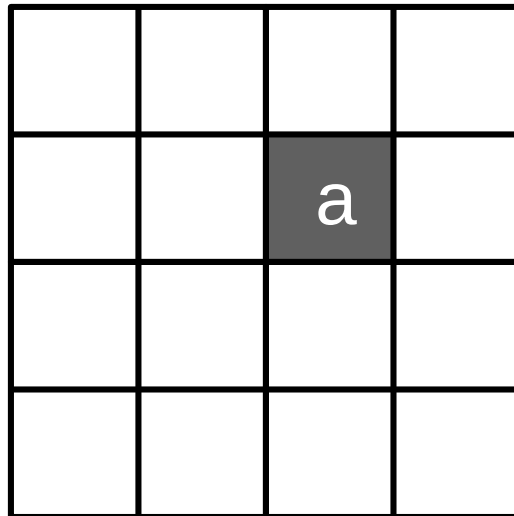
$$H(u, v) \bullet \longleftrightarrow h(x, y)$$

Die Übertragungsfunktion $H(u, v)$ beschreibt, wie die einzelnen Frequenzen des Eingangsbilds $B_1(u, v)$ durch das System bewertet werden. Bei Kenntnis von H kann aus dem Ortsfrequenzspektrum des Eingangsbilds das Spektrum des Ausgangsbilds berechnet werden. Hierzu völlig äquivalent ist die Beschreibung des Systems durch die Impulsantwort $h(x, y)$. Mit ihr kann über die Faltung aus dem Eingangsbild direkt das Bild am Ausgang des Systems berechnet werden. Der Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion und der Impulsantwort ist durch die Fouriertransformation gegeben:

$$h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)\} \quad \text{bzw.} \quad H(u, v) = \mathcal{F}\{h(x, y)\} \quad (2.22)$$

2.5.2 Bestimmung der Impulsantwort

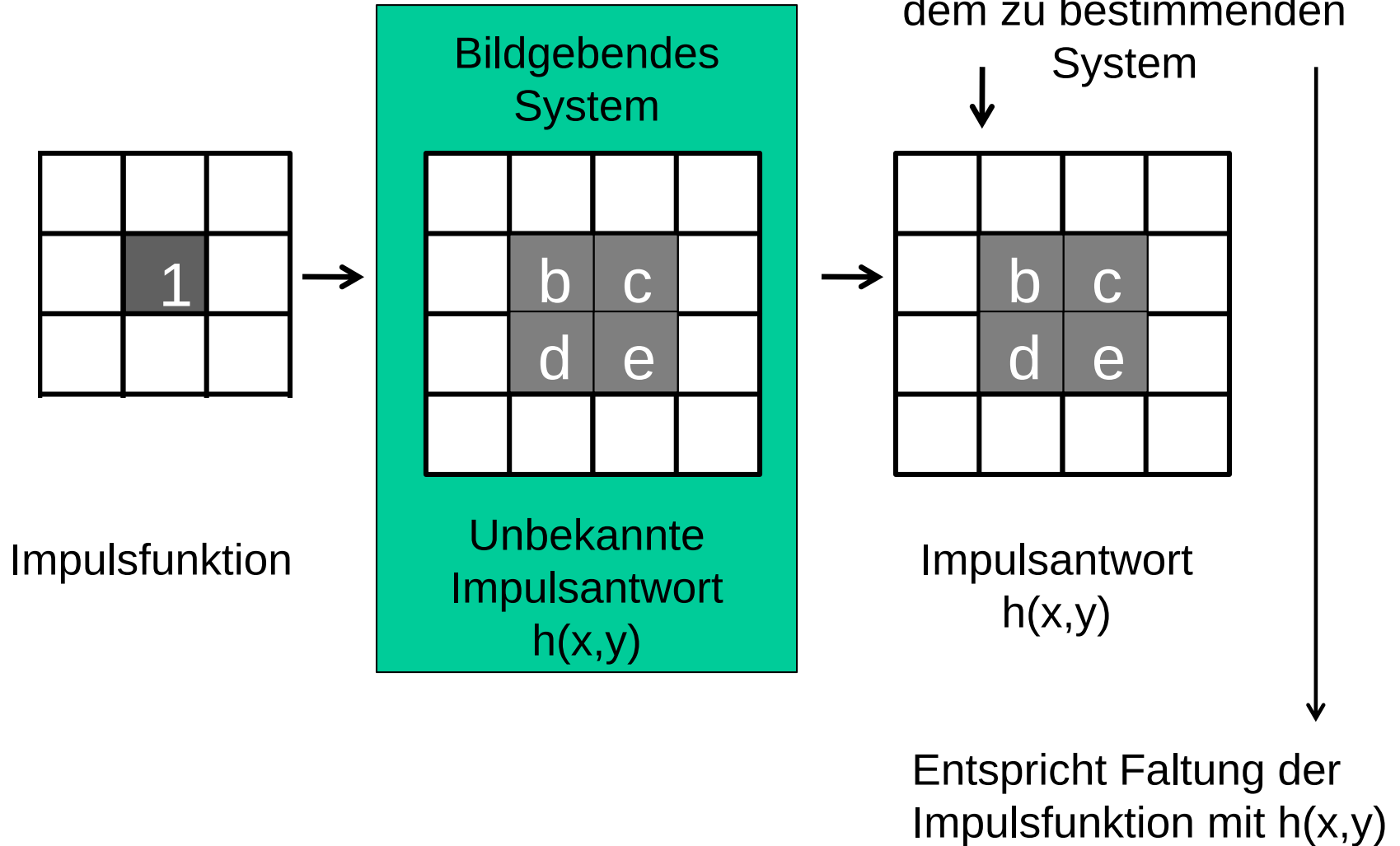
Die Impulsantwort eines Systems ist, wie es der Name sagt, das Ausgangssignal des Systems, wenn am Eingang ein Impuls angelegt wird. Mathematisch betrachtet handelt es sich hier um einen Dirac-Impuls (δ -Impuls), den es aber bei realen Systemen so nicht geben kann. Hierbei kann man von einem Impuls reden, wenn die Antwort des Systems unabhängig von der Form des Eingangssignals ist und nur vom Integral $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy$ abhängt.



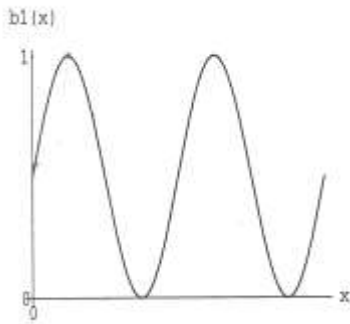
Impulsfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy = a$$

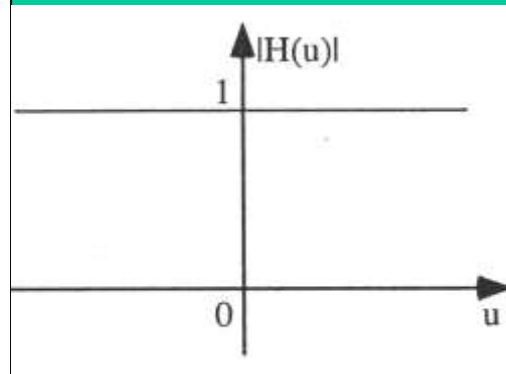
Bestimmung der Impulsantwort



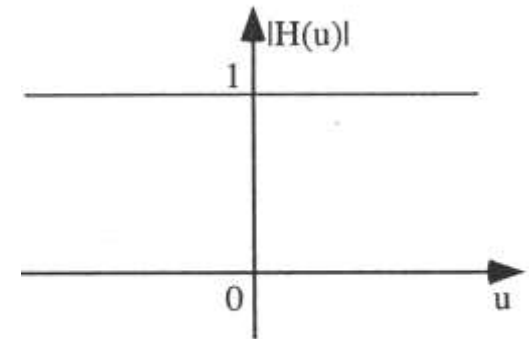
Bestimmung der Übertragungsfunktion



Bildgebendes System

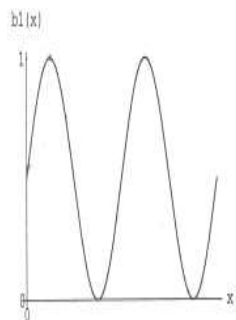
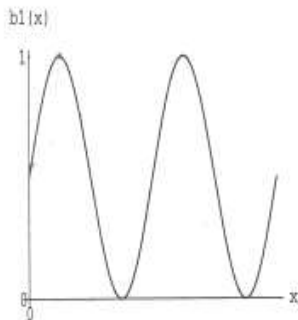


Unbekannte Übertragungsfunktion $H(u,v)$



Betrag der Übertragungsfunktion $H(u,v)$

Aufnahme vieler Bilder mit sinusförmigem Intensitätsverlauf unterschiedlicher Frequenzen und Messung der jeweiligen Verstärkung oder Schwächung.



2.5.3 Anforderungen an die Bildaufnahme

Um eine möglichst getreue Abbildung des Originals durch das System zu erhalten, wird oft gefordert, daß alle Frequenzen des Eingangssignals vom System gleich bewertet werden, d.h. $H = \text{const}$ ist. Daraus folgt für die Impulsantwort durch die Fouriertransformation:

$$h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)\} = \text{const} \cdot \delta(x, y) \quad (2.23)$$

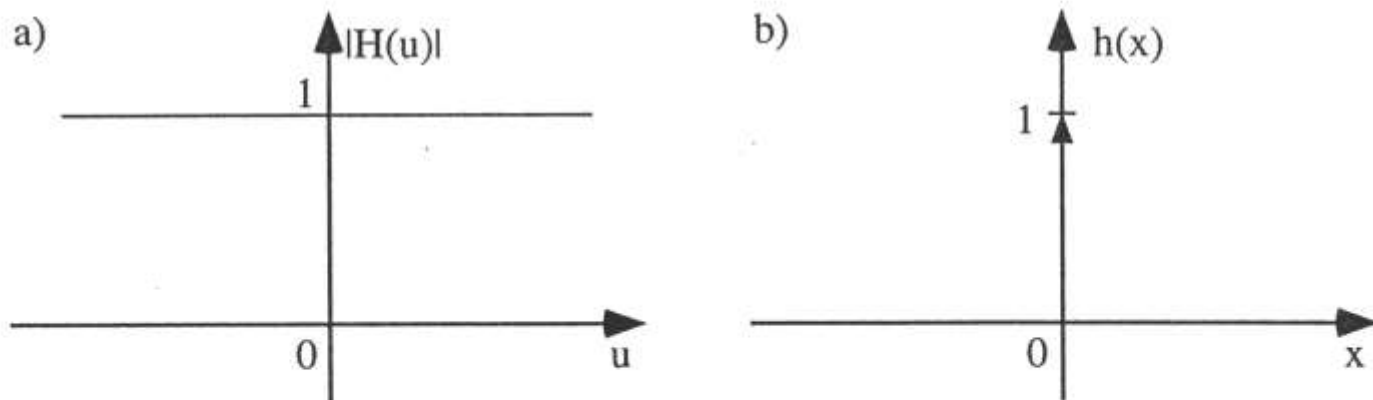


Bild 2.9: a) eindimensionale Darstellung der Übertragungsfunktion eines Systems, das alle Ortsfrequenzen gleich bewertet; b) dazugehörige Impulsantwort

Damit gilt für das Ausgangssignal b_2 :

$$\begin{aligned} b_2(x, y) &= b_1(x, y) \otimes h(x, y) \\ &= b_1(x, y) \otimes \delta(x, y) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int b_1(\xi, \eta) \cdot \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &= b_1(x, y) \quad , \end{aligned} \tag{2.24}$$

wobei die Ausblendeigenschaft der Deltafunktion benutzt und $H(u, v) = 1$ vorausgesetzt wurde.

Bildaufnahme und Bildrekonstruktion

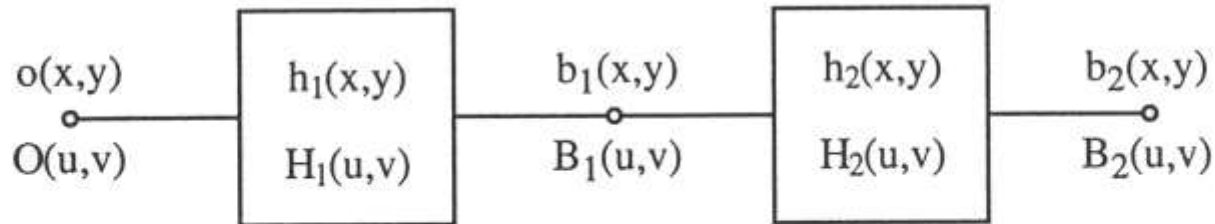


Bild 3.1: Bildaufnahme durch einen zweistufigen Prozeß

Jetzt sei das in Bild 3.1 gezeigte System gegeben, das den Aufnahme-prozeß in zwei Schritte zerlegt. Die Eigenschaften der Systeme sind jeweils durch die Übertragungsfunktion H bzw. durch die Impulsantwort h gegeben. Im ersten Schritt ist die eigentliche Bildaufnahme enthalten, die das Originalbild $o(x,y)$ auf das Zwischenbild $b_1(x,y)$ mit den Systemparametern $h_1(x,y)$ bzw. $H_1(u,v)$ abbildet:

$$b_1(x,y) = o(x,y) \otimes h_1(x,y) \quad . \quad (3.1)$$

Bildaufnahme und Bildrekonstruktion

Die Systemeigenschaften der Bildaufnahmeeinheit sind oftmals festgelegt und besitzen teilweise nicht den gewünschten Frequenzverlauf. Dieser kann nun durch eine nachgeschaltete Einheit zur Bildrekonstruktion verbessert werden.

$$\begin{aligned} b_2(x, y) &= b_1(x, y) \otimes h_2(x, y) \\ &= o(x, y) \otimes h_1(x, y) \otimes h_2(x, y) \\ &= o(x, y) \otimes h(x, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit $h(x, y) = h_1(x, y) \otimes h_2(x, y)$ als der Impulsantwort des Gesamtsystems.

Mit den Korrespondenzen der Fouriertransformation erhält man entsprechend für die Übertragungsfunktion des gesamten Systems

$$H(u, v) = H_1(u, v) \cdot H_2(u, v) \quad , \quad (3.3)$$

d.h. die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems lässt sich aus dem Produkt der beiden Übertragungsfunktionen der einzelnen Systeme berechnen.

Um die Möglichkeiten der Bildverbesserung aufzuzeigen, sei ein einfaches Beispiel zur Illustration gezeigt. Die Übertragungsfunktion H_1 ist hierbei nicht konstant, für eine originalgetreue Aufnahme wird aber $H = H_1 \cdot H_2 = \text{const.} = 1$ gefordert. Somit ergibt sich für die Übertragungsfunktion H_2 des Korrektursystems (vgl. Bild 3.2):

$$H_2(u, v) = \frac{1}{H_1(u, v)} \quad (3.4)$$

Für die Impulsantwort h_2 gilt daher

$$h_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{H_1}\right\} \quad (3.5)$$

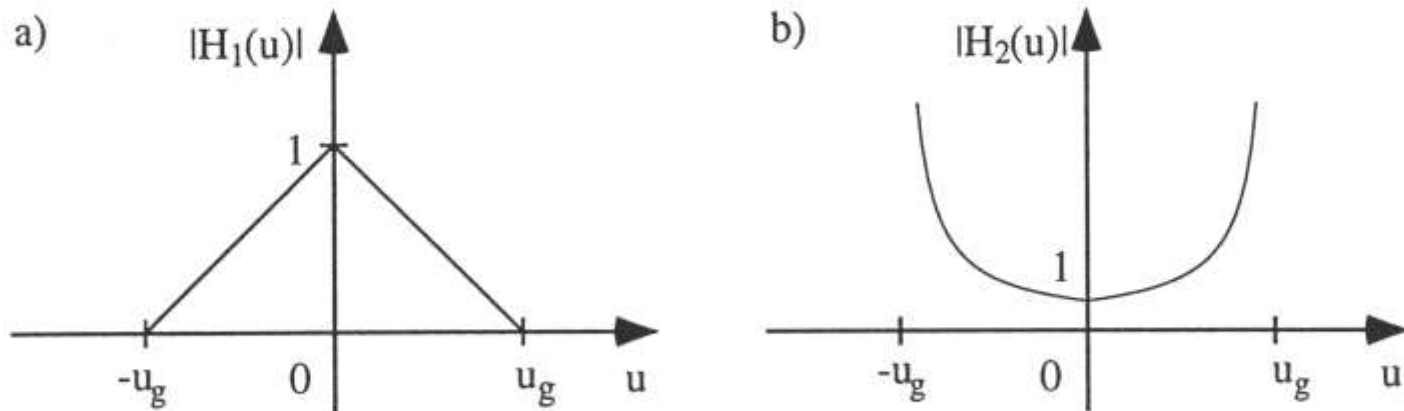
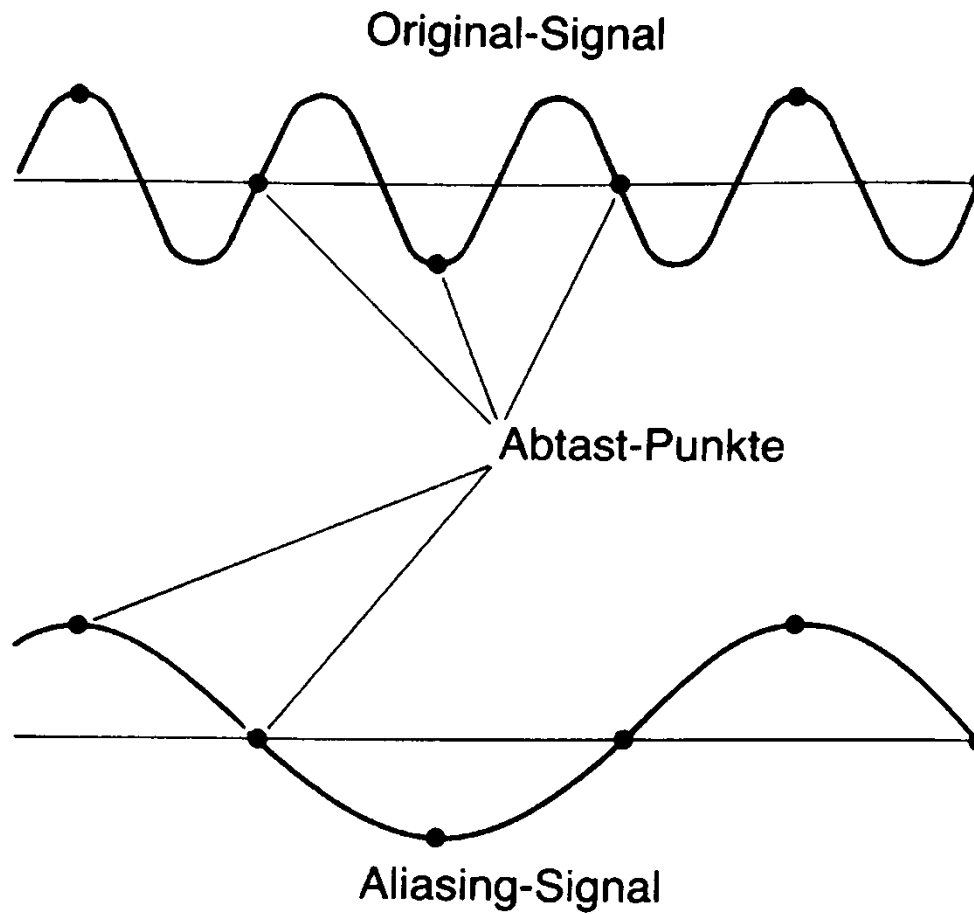


Bild 3.2: a) Beispiel für eine Übertragungsfunktion H_1 , wie sie bei der Bildaufnahme vorliegen kann und b) die inverse Funktion H_2

Abtastung



Abtastung eines sinusförmigen Signals:

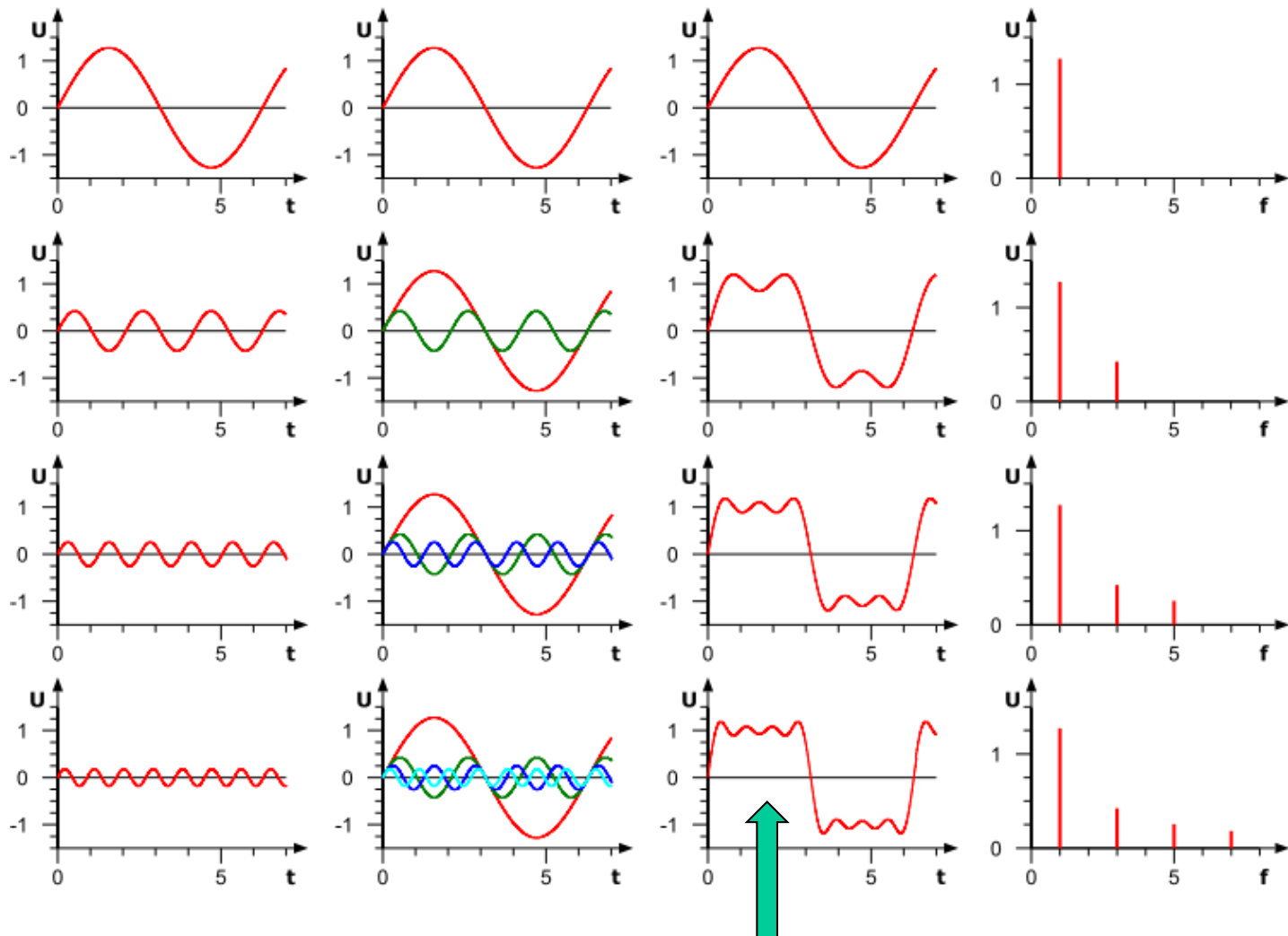
$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Wie viele Messpunkte werden benötigt, um das Signal ohne Informationsverlust zu bestimmen?

Unbekannte: A , ω , φ

Zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich: drei Messpunkte $s(t_1)$, $s(t_2)$ und $s(t_3)$ innerhalb einer Wellenlänge. Dies ergibt drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Daraus werden A , ω und φ bestimmt.

Danach kann jeder beliebige Punkt auf dem Signal rekonstruiert werden.



Wie viele Messpunkte werden benötigt, um dieses Signal verlustfrei abzutasten?
 Wie groß darf der zeitliche Abstand zwischen diesen Messpunkten höchstens sein?

Abtastung

Eine analoge Funktion kann dann vollständig durch eine Summe diskreter Werte beschrieben werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Bild des Objekts muß bandbegrenzt sein, d.h. für das Ortsfrequenzspektrum gilt:

$$B(u, v) = \begin{cases} B(u, v) & \text{für } |u| \leq u_g \wedge |v| \leq v_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1)$$

2. Die Abtastung erfolgt mit der Funktion

$$s(x, y) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta(x - \mu x_T, y - \nu y_T) \quad , \quad (4.2)$$

wobei $x_T = 1/u_T$ der Abstand zweier benachbarter Abtastwerte in x-Richtung und $y_T = 1/v_T$ der Abstand zweier Abtastwerte in y-Richtung ist. u_T und v_T sind dabei die entsprechenden Abtastfrequenzen. Das Abtasttheorem nach Shannon besagt nun, daß kein Informationsverlust beim Abtasten auftritt, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

$$u_T \geq 2 \cdot u_g \quad \text{und} \quad v_T \geq 2 \cdot v_g \quad (4.3)$$

Dies bedeutet, daß die originale Bildfunktion $b_0(x, y)$ zunächst mit einem Tiefpaß gefiltert werden muß, wenn Frequenzen oberhalb der halben Abtastfrequenz auftreten.

Beschreibung der Abtastung im Ortsbereich

Tastet man das analoge Bildsignal $b(x, y)$ mit der Abtastfunktion $s(x, y)$ ab, so gilt für die abgetastete Funktion $b_T(x, y)$:

$$\begin{aligned} b_T(x, y) &= b(x, y) \cdot s(x, y) \\ &= b(x, y) \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta(x - \mu x_T, y - \nu y_T) \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mit der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion erhält man schließlich

$$b_T(x, y) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} b(\mu x_T, \nu y_T) \cdot \delta(x - \mu x_T, y - \nu y_T) \quad . \quad (4.5)$$

Beschreibung der Abtastung im Ortsfrequenzbereich

Die Multiplikation der Bildfunktion mit der Abtastfunktion im Ortsbereich entspricht im Ortsfrequenzbereich einer Faltung des Bildspektrums mit dem Spektrum der Abtastfunktion, also gilt

$$B_T(u, v) = B(u, v) \otimes S(u, v) \quad . \quad (4.6)$$

Die Transformation der Abtastfunktion vom Orts- in den Ortsfrequenzbereich ergibt:

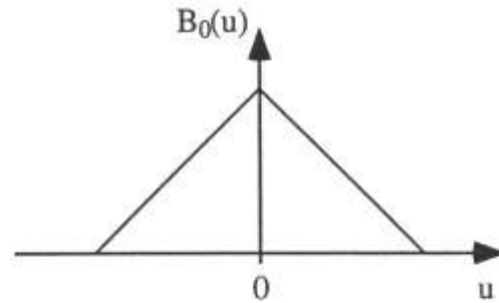
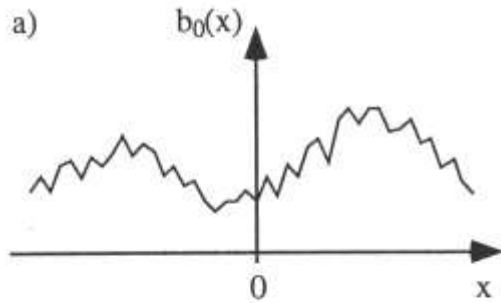
$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta(x - \mu x_T, y - \nu y_T) \circ \longrightarrow u_T v_T \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta(u - \mu u_T, v - \nu v_T) \quad . \quad (4.7)$$

Damit ist

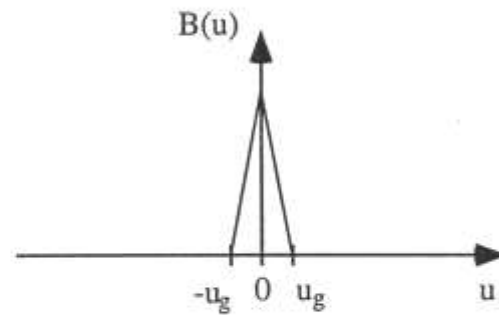
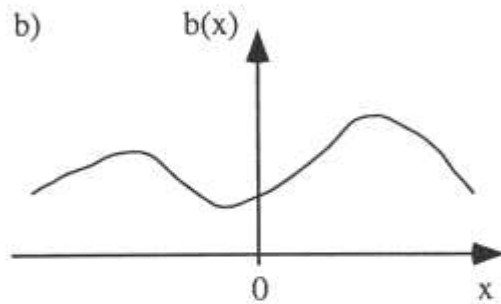
$$B_T(u, v) = u_T v_T \sum_{\mu} \sum_{\nu} B(u - \mu u_T, v - \nu v_T) \quad . \quad (4.8)$$

Ortsbereich

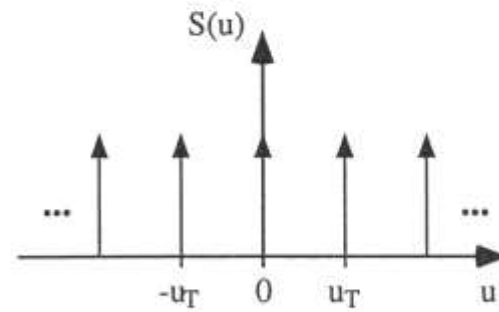
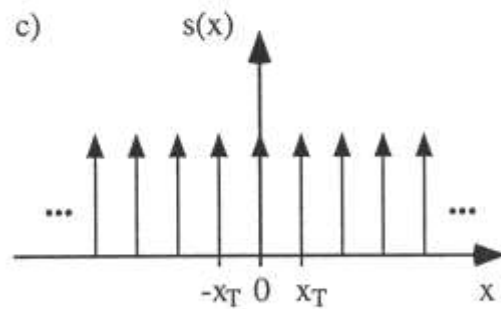
Ortsfrequenzbereich



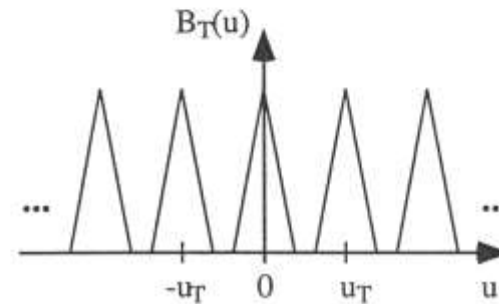
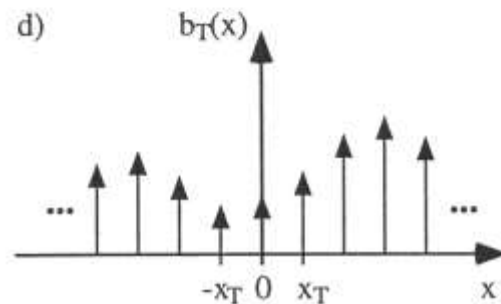
Nicht hinreichend
bandbegrenzte Funktion



Hinreichend
bandbegrenzte Funktion



Abtastfunktion



Abgetastete Funktion

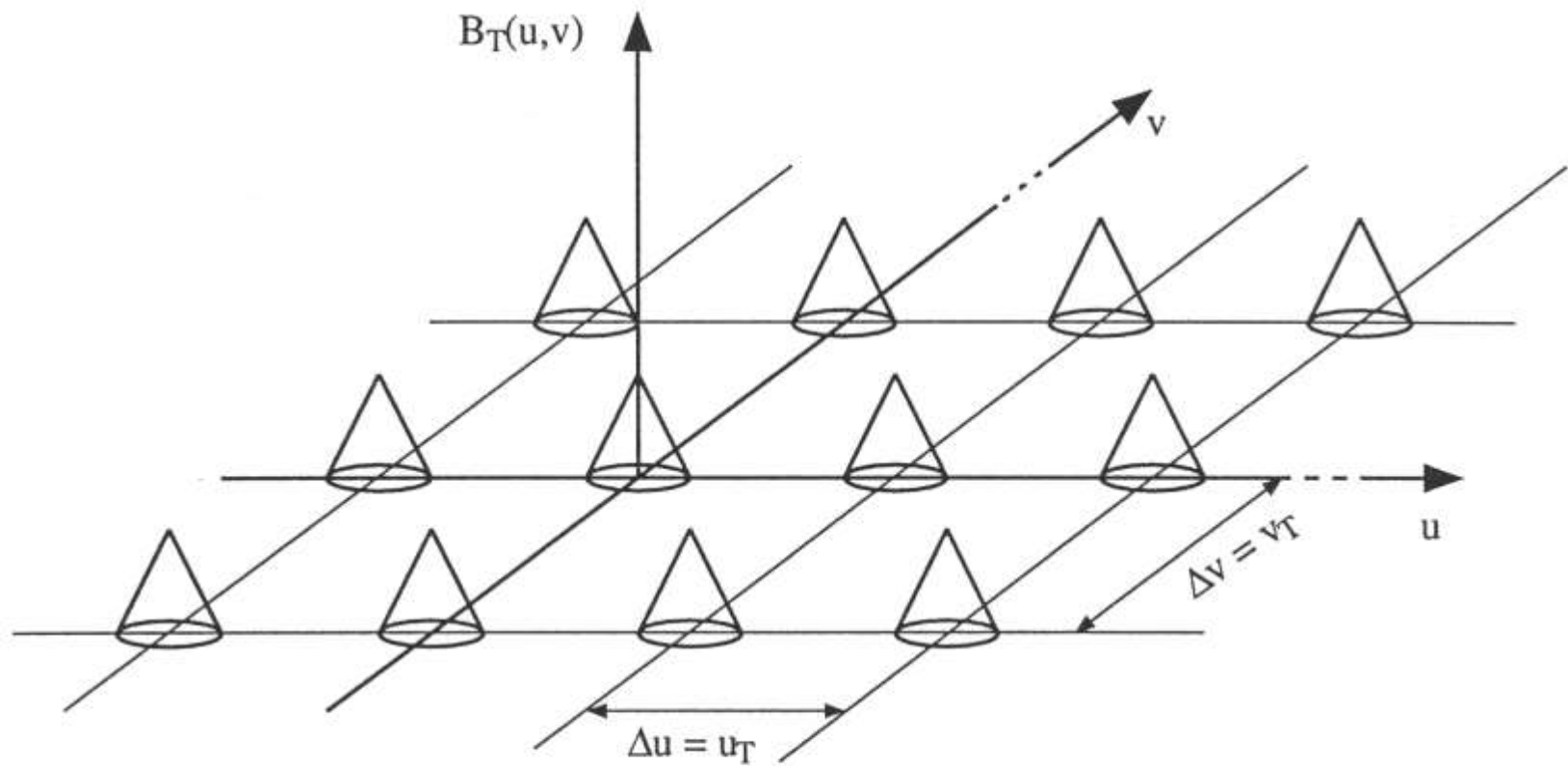
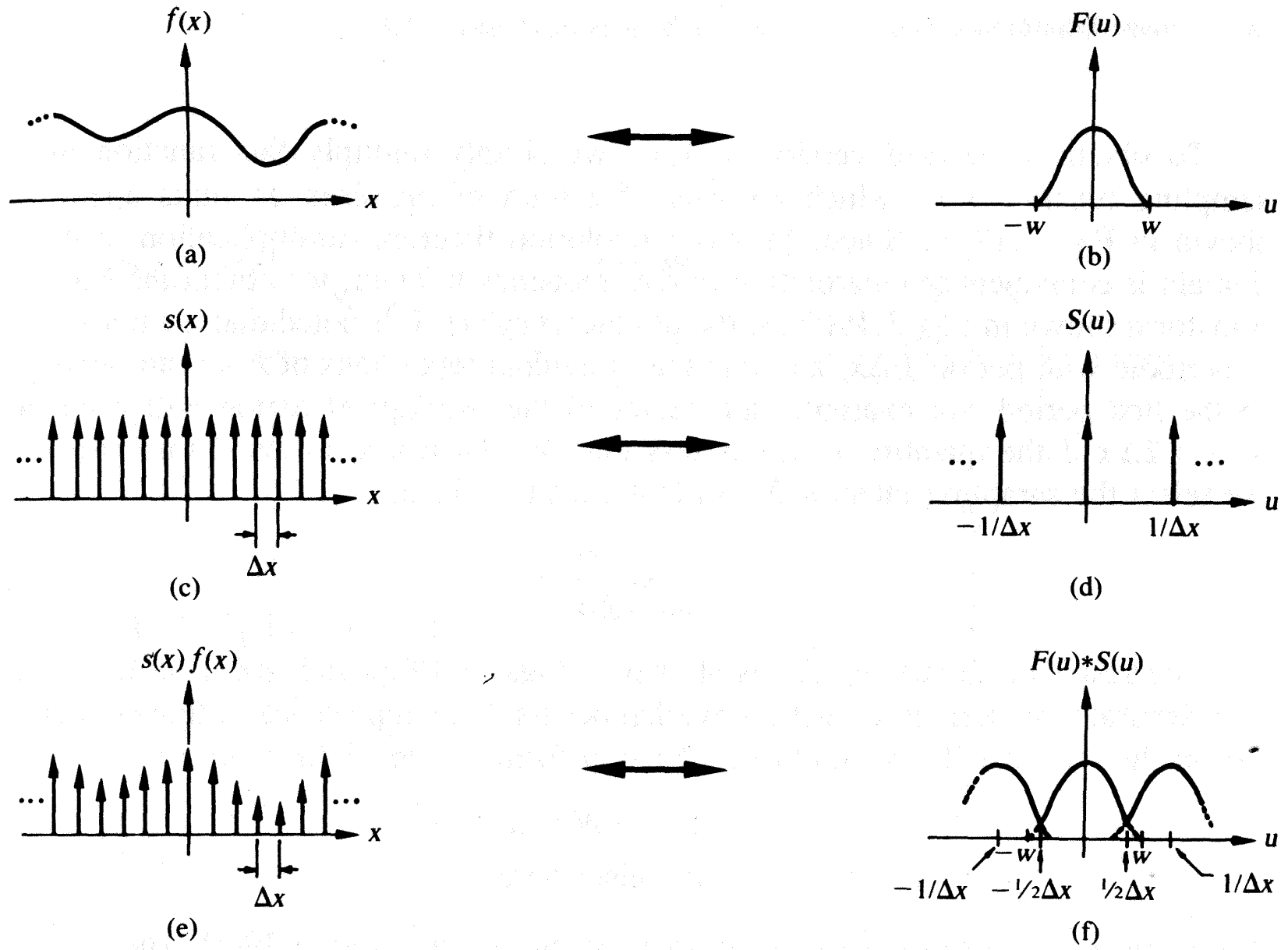
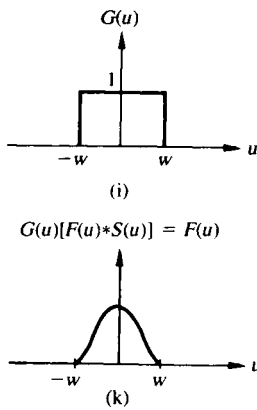
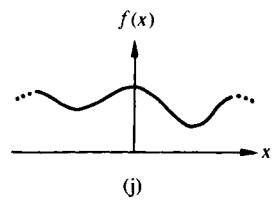
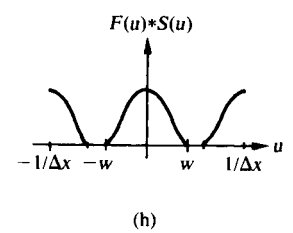
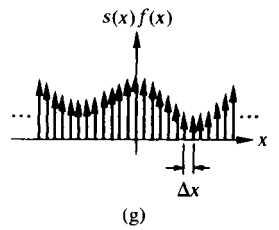
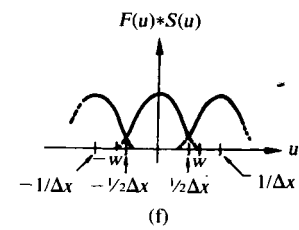
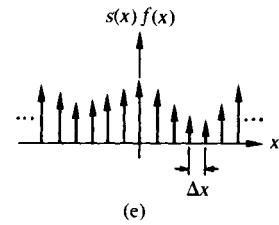
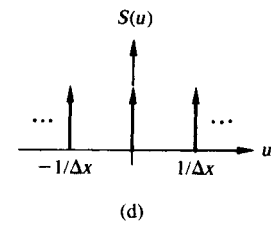
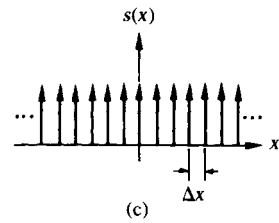
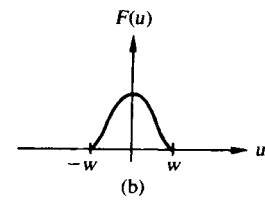
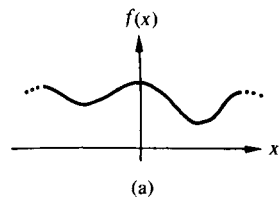
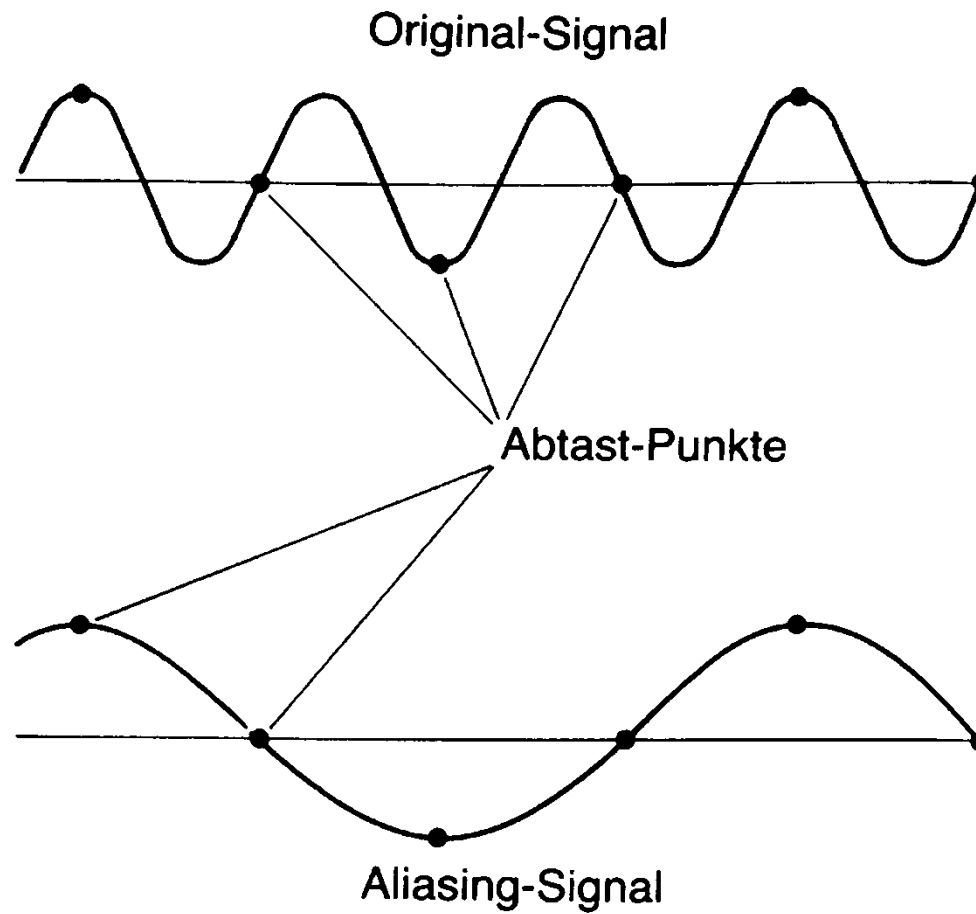
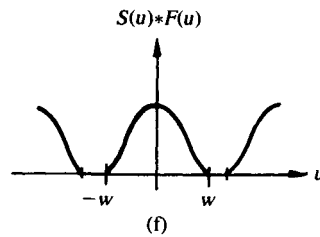
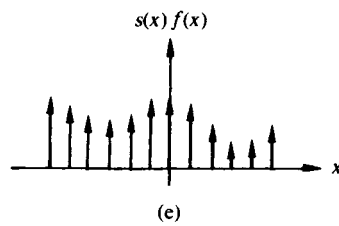
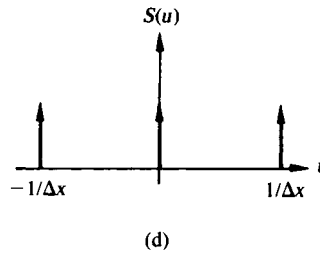
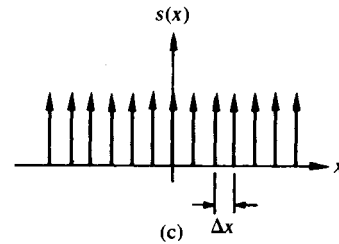
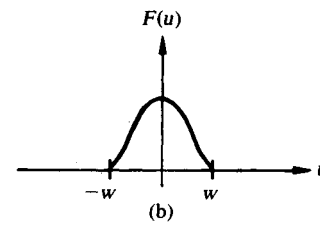
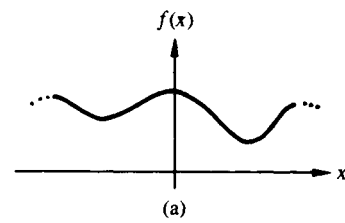


Bild 4.2: Zweidimensionale Darstellung der abgetasteten Funktion $B_T(u, v)$ im Ortsfrequenzbereich

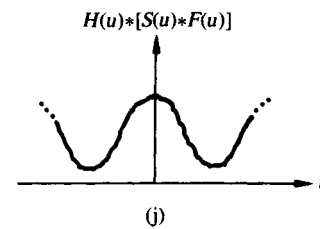
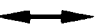
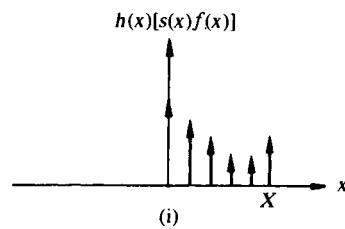
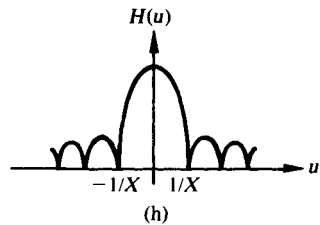
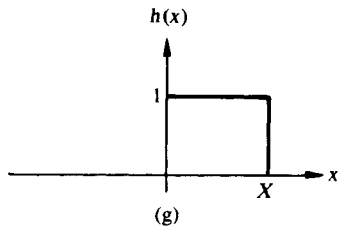








„Fenster“



4.1.3 Rekonstruktion der ortskontinuierlichen Funktion

Die Rekonstruktion des Signales $b(x, y)$ aus den Abtastwerten $b_T(x, y)$ wollen wir zunächst im Ortsfrequenzbereich betrachten. In Bild 4.1 d) ist der Frequenzverlauf $B_T(u, v)$ von $b_T(x, y)$ skizziert. Man sieht dort unmittelbar, daß das Originalspektrum $B(u, v)$ durch einen Tiefpaß mit den Grenzfrequenzen $u_g = u_t/2$ und $v_g = v_t/2$ aus der abgetasteten Funktion $B_T(u, v)$ wiedergewonnen werden kann. Die Gleichung für diesen Tiefpaß lautet:

$$G(u, v) = \text{rect}\left(\frac{u}{u_g}, \frac{v}{v_g}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |u| < u_g, |v| < v_g \\ 1/2 & \text{für } |u| = u_g, |v| = v_g \\ 0 & \text{für } |u| > u_g, |v| > v_g \end{cases} \quad (4.9)$$

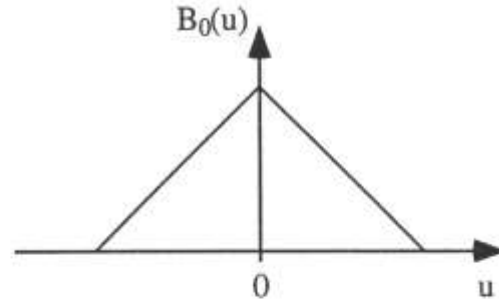
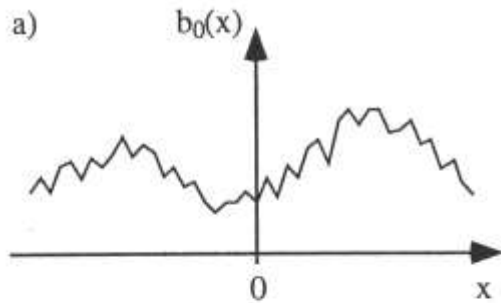
Das Ergebnis der Filterung ist also

$$B(u, v) = B_T(u, v) \cdot G(u, v) \quad (4.10)$$

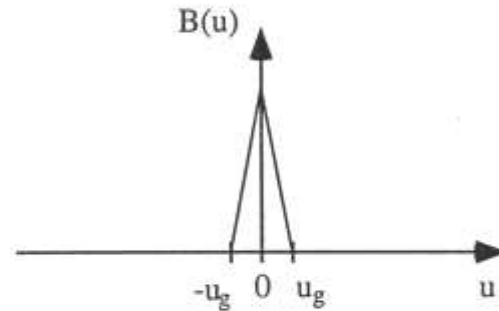
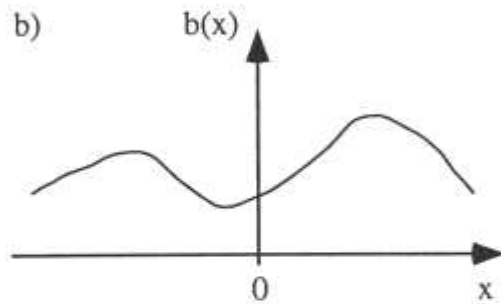
mit der Fourierkorrespondenz $b(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{B(u, v)\}$.

Ortsbereich

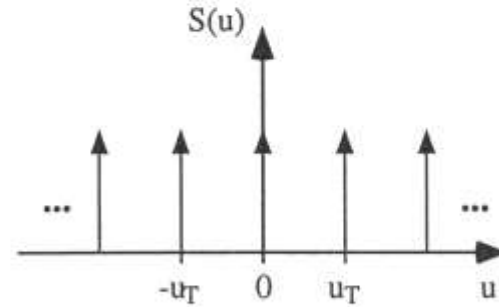
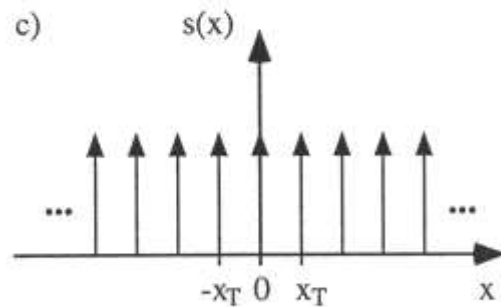
Ortsfrequenzbereich



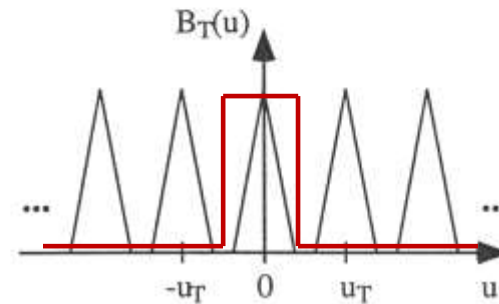
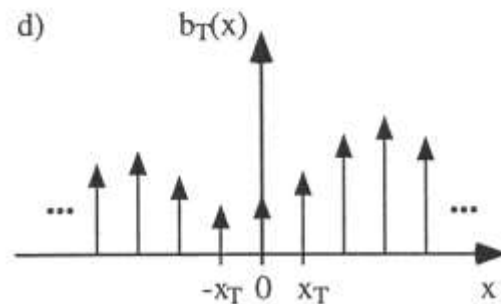
Nicht hinreichend
bandbegrenzte Funktion



Hinreichend
bandbegrenzte Funktion



Abtastfunktion



Abgetastete Funktion

Die Rekonstruktion kann aber auch direkt im Ortsbereich durchgeführt werden. Dazu wird das abgetastete Signal mit der Impulsantwort des Rekonstruktionstiefpasses gefaltet, also

$$b(x, y) = b_T(x, y) \otimes g(x, y) \quad (4.11)$$

mit der Fourierkorrespondenz

$$G(u, v) \longleftrightarrow g(x, y) = \frac{4}{x_g y_g} \text{sinc}\left(2\pi \frac{x}{x_g}\right) \text{sinc}\left(2\pi \frac{y}{y_g}\right) \quad \text{mit} \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad , \quad (4.12)$$

wobei $x_g = 1/u_g$ und $y_g = 1/v_g$ ist. In Bild 4.4 ist die Rekonstruktion zweier Punkte von $b(x)$ in einer eindimensionalen Skizze gezeigt. Im Teil a) sieht man, daß bei der Rekonstruktion eines Abtastpunktes genau der Wert an dieser Stelle für kontinuierliche Funktion $b(x)$ zu tragen kommt, während alle anderen Abtastpunkte in den Nullstellen der Impulsantwort des Rekonstruktionstiefpasses $g(x)$ liegen. Bei einem beliebigen Punkt zwischen zwei Abtastwerten muß die Faltungssumme explizit berechnet werden. Dazu wird jeder Abtastwert von $b_T(x)$ mit dem entsprechenden Wert der verschobenen *sinc*-Funktion multipliziert und über alle diese Produkte summiert.

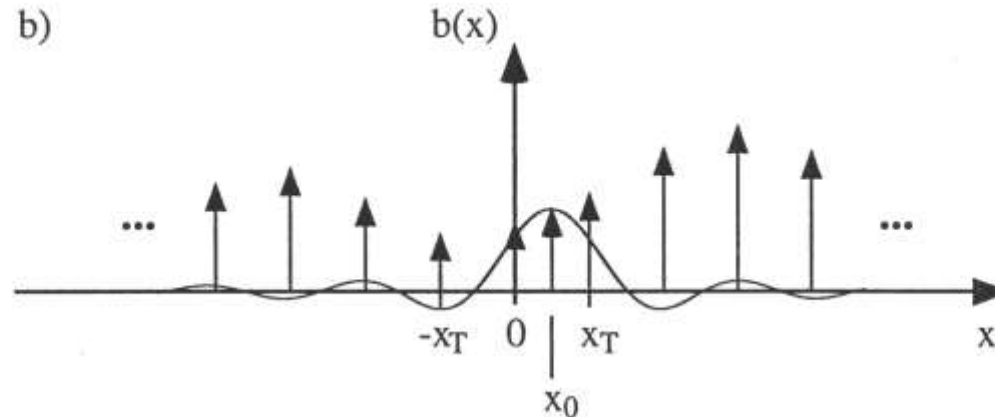
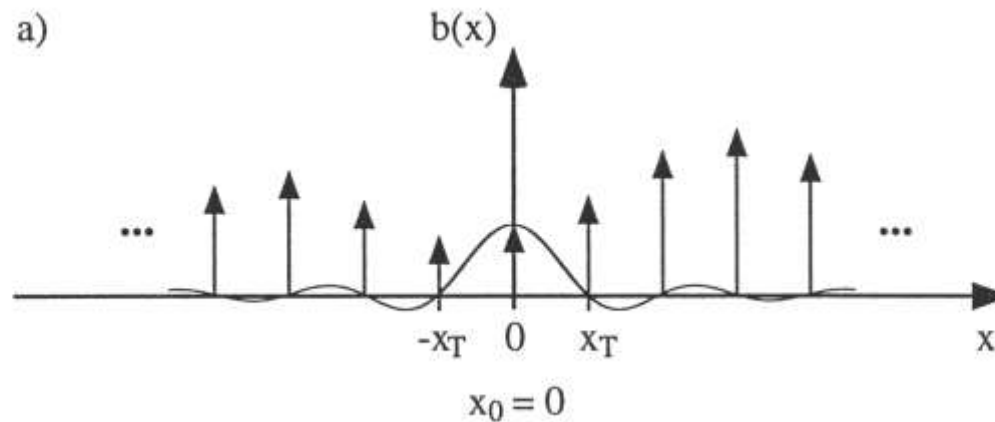


Bild 4.4: Rekonstruktion der kontinuierlichen Originalfunktion aus den Abtastwerten der ortsdiskreten Funktion. Die Pfeile stellen die abgetastete Funktion $b_T(x)$ (siehe Bild 4.1) dar. Einen Wert der Originalfunktion $b(x_0)$ an der Stelle x_0 erhält man, wenn die um x_0 verschobene Fouriertransformierte des Rekonstruktionstiefpasses $g(x-x_0) = \text{sinc}(x-x_0)$ mit der abgetasteten Funktion an den Abtaststellen multipliziert und von $-\infty$ bis ∞ aufsummiert wird.

a) rekonstruierter Punkt ist ein Abtastwert selbst,

b) rekonstruierter Punkt liegt zwischen zwei Abtastwerten