

HM I: I Zahlen, Mengen & Ungleichungen

Vollständige Induktion:

Zu zeigen ist, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Beweis durch vollständige Induktion:

(IH) $A(n): \sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+3)$

(IA) $A(n_0)$ ist wahr für $n_0 = 1: 1(1+2) = 3 = \frac{1}{6}(1)(1+1)(2(1)+3) = 3$ ✓

(IS) Die Annahme $A(n)$ ist für jedes beliebige aber feste $n \geq n_0$ wahr, somit ist auch $A(n+1)$ wahr:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \sum_{k=1}^n k(k+2) + (n+1)(n+2)$$

$$\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+3) + (n+1)(n+2)$$

→ Durch Umformungen ergibt sich $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+5)$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

• Injektivität: $f(a) = f(b)$ für $a=b$, d.h. jedes y max. ein x
→ $R_g(\text{Def. Bereich}) = R_g(\text{Zielbereich})$

→ $R_g(A) = S$, Linksinverse, $\dim(\text{Kern}) = 0$, $S \subseteq Z$

• Surjektivität: für alle $z \in Z$ gibt es mind. ein $f(a) = z$

→ $\dim(\text{Def. Bereich}) = \dim(\text{Abbildungsmatrix})$

→ $R_g(A) = Z$, Rechtsinverse, $Z = S - \dim(\text{Kern})$, $Z \subseteq S$

• Bijektivität: injektiv & surjektiv, d.h. jedes y genau ein x

→ $n \times n$ -Matrix mit $R_g = n$

→ Umkehrfunktion f^{-1} existiert, 1:1-Abl.

→ Inverse Matrix

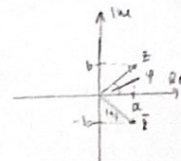
Komplexe Zahlen:

• Kartesische Form: $z = a + bi$, $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$

• Konjugation: $\overline{a+bi} = a-bi$

• Betrag $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

• Polarkoordinaten: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{i\varphi} \cdot |z|$
 $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\arg(z) = \varphi$



• Wurzelziehen: $z^n = a$ hat n Lösungen

→ Vorgehen: z in Polarkoordinaten darstellen

• z^n in Polarkoordinaten darstellen: $r^n e^{i n \varphi} = S e^{i \varphi} \rightarrow r = \sqrt[n]{S}$

• Winkel $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

• Lösungen: $z_k = r e^{i \varphi_k} = r \cdot (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$

→ Umformung in Kartesische Form!

Skizzieren in $\mathbb{C}$: mögliche geom. Elemente

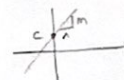
• Kreis: Radius r , Mittelpunkt $z_0 = x_0 + y_0 i$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$$



• Gerade mit Steigung m , y -Achsenabschnitt c

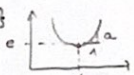
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + c\} \quad m = \frac{\text{Hoch}}{\text{Rechts}}$$



• Gerade mit Stützvektor $p \in \mathbb{R}^2$, Richtungsvektor $r: \{p + \lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

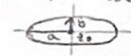
• Parabel mit Scheitelpunkt $(\frac{p}{2})$, Streckfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a(x-d)^2 + e\}$$



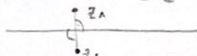
• Ellipse mit Hauptachsenlängen $a, b \in \mathbb{R}^+$, Mittelpunkt $z_0(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}) \in \mathbb{R}^2$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\}$$



• Mittelsenkrechte auf Verbindungsstrecke $\overline{z_1 z_2} \in \mathbb{C}$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| = |z - z_2|\}$$



II Vektorraum, $\mathbb{R}^n$: Vektoren, Skalar, Matrizen, LGS, Ebenen

Vektorrechnung:

• Winkel: $\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \alpha$

• Vektorprodukt: $x \times y = |x||y| \sin \alpha \cdot \vec{n}$, $\vec{n} = \frac{1}{|x \times y|} x \times y$

• Untervektorraum UVR: $\rightarrow x+y \in U$ für alle $x, y \in U$

$\rightarrow \lambda x \in U \quad \rightarrow 0 \in U$

• Linearkombination: $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

→ Lineare Hülle $\hat{=}$ Menge aller Linearkombinationen, ist UVR $L(v_1, \dots, v_k)$

→ Erzeugendensystem $U = L(v_1, \dots, v_k) \cdot L(U)$, $\dim U = n$

• Rechtssystem: $\{u, v, u \times v\}$, $\det(u, v, u \times v) = 1$, ONB von $\mathbb{R}^3$

Linkssystem: $\{u, v, v \times u\}$, $\det(u, v, v \times u) = -1$, ONB von $\mathbb{R}^3$

→ Wenn $u, v, u \times v$ orthogonal & normiert $v \times u = -u \times v$

Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren:

→ liefert uns für l u Vektoren & ONB wenn Vektoren Basis von $\mathbb{R}^n$

→ Vorgehen: $f_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1$

$$f_{j+1}^* = v_{j+1} - \sum_{i=1}^j \langle v_{j+1}, f_i \rangle \cdot f_i$$

$$f_{j+1} = \frac{1}{|f_{j+1}^*|} f_{j+1}^*$$

Geraden & Ebenen

• Gerade $g = \{p + \lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

• Ebenen: - Parameterform $E = \{p + \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

- Normalform: $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - p, n \rangle = 0\}$

- Hesse-Normalform: $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = d\}$
mit $d = \langle p, n \rangle$, $|n| = 1$ und $d \geq 0$
 d Abstand zum Ursprung

Matrizen: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

• Rang einer Matrix: Anzahl l.u. Spalten $\hat{=}$ Dim UVR

$$R_g(A) = \dim(L(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n))$$

$$R_g(A) = R_g(A^T)$$

• reguläre Matrix: $R_g(A) = n$, A ist quadratisch, sonst singulär

→ $\det A \neq 0 \rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar, $A \cdot A^{-1} = E_n$

• Symmetrische Matrix: $A^T = A$, orthogonal diagonalisierbar: $T^{-1} A T = \Lambda$

• hermitesche Matrix: $A^T = \overline{A}$ (konjugierte Einträge)

• orthogonale Matrix: $A^T A = E_n$ Drehachse aus $(A - E)x = 0$

→ eigentlich orthogonal: $\det A = 1$ $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

ist Drehung mit Drehwinkel φ

→ uneigentlich orthogonal: $\det A = -1$ ist Spiegelung, $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$

Spiegelachse $\frac{1}{2}\varphi$ mit x -Achse

• Inverse Matrix:

- 3x3 durch Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

• Determinante: Sarrus, Entwicklung: Schreibe $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$

→ Regeln: $\det(A^T) = \det A$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ wenn invertierbar: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Lineare Gleichungssysteme

• homogen: $Ax = 0$, immer lösbar, Lösungsmenge ist UVR $\dim L = n - R_g A$

• inhomogenes LGS: $Ax = b$, Lösungsmenge affiner UVR

→ Lösbarkeit: lösbar, wenn $R_g(A) = R_g(A|b) = n$, $\det \neq 0$

unendlich viele Lösungen, wenn $R_g A = R_g(A|b) < n$, $\det = 0$

keine Lösung: $R_g A \neq R_g(A|b)$

→ bei $n \times n$: genau eine Lösung, invertierbar, regulär, $\det \neq 0$

Dimensionsformel:

$$\dim V = \dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A$$

• Rang: l.u. Zeilen / Spalten

• Kern: l.a. Spalten, bilden NvA

• Dim: Anzahl Spalten

• Bild: $R_g A =$ l.u. Spalten

III Abbildungen, Koordinatentransformationen

Lineare Abbildungen $x: V \rightarrow W$

- linear, wenn $x(u+v) = x(u) + x(v)$ additiv für $u, v \in V$
 $x(k \cdot u) = k \cdot x(u)$ homogen
- allgemeine Formel: $x: K^3 \rightarrow K^2: x \mapsto Ax$
- Basis & Basiswechsel: $f: V \rightarrow W$
 $f = B \circ B^{-1}$ Basis $B = E$
 $\rightarrow c \circ B = (c(b_1) \ c(b_2) \ c(b_3))$ ist Darstellungsmatrix in C
 $\rightarrow$ Basiswechselmatrix: $c \circ B = (c(b_1) \ c(b_2) \ c(b_3))$
 $B \circ C = (c \circ B)^{-1}$
- Kern $(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ l.a. Spalten / Vektoren die Nullvektor abbilden
- Bild $(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ Rang, l.u. Spalten / Zeilen / Funktionswert Bereich
- Dimensionsformel: $\dim V = \dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild})$

Affine Abbildungen

- affin, wenn $A \in K^{n \times n}$ & $t \in K^n$, sodass $x(v) = Av + t$
 A : linearer Anteil, t : Translationsanteil
- Affinität: x bijektiv & regulär
 $\rightarrow$ Umkehrfunktion $x^{-1}: K^n \rightarrow K^n: v \mapsto A^{-1}v - A^{-1}t$
- affines Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; b_1, b_2, b_3) \rightarrow$ falls B ONB ist ist $\mathbb{F}$ kartesisch
- Koordinatentransformation: $\mathbb{F}$ & $\mathbb{G}$ als affine Koordinatensysteme
 $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}: K^n \rightarrow K^n: x \mapsto \mathbb{G}x$
 $\rightarrow$ allgemein $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2, g_3)$
 $\mathbb{E} \circ \mathbb{F} = Fv + P$ $\mathbb{F} \circ \mathbb{E} = F^{-1}(v - P)$
 $\mathbb{E} \circ \mathbb{G} = Gv + Q$ $\mathbb{G} \circ \mathbb{E} = G^{-1}(v - Q)$
 $\mathbb{G} \circ \mathbb{F} = \mathbb{G} \circ \mathbb{E} \circ \mathbb{E} \circ \mathbb{F} = \mathbb{G} \circ \mathbb{E} (\mathbb{E} \circ \mathbb{F})$
- affine Abbildung: $x: K^n \rightarrow K^n$ mit $\mathbb{E} \circ x \circ \mathbb{E} = x$
 $\mathbb{G} \circ x \circ \mathbb{F} = \mathbb{G} \circ \mathbb{E} \circ \mathbb{E} \circ x \circ \mathbb{E} \circ \mathbb{F}$
 $\mathbb{G} \circ x \circ \mathbb{F} = \mathbb{G} (x(x))$

IV Diagonalisierbarkeit & Eigenwerte

Diagonalisierbarkeit

- diagonalisierbar, wenn es reguläre Matrix T aus EW so gibt, dass $T^{-1}AT = D$
 $\rightarrow$ Einträge Hauptdiagonale = EW
- orthogonal diagonalisierbar, wenn $T^TAT = D$ & T orthogonal
- diagonalisierbar, wenn $d_\mu = e_\mu$ für alle μ
- jede reelle $n \times n$ -Matrix ist diagonalisierbar
 $\rightarrow$ EV in T normieren!

Eigenwerte

- $\lambda \in \mathbb{C}$ EW & $v \in V$ EV wenn $Av = \lambda v$
- charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$
- Diagonalmatrix D mit EW auf Diagonale
- algebraische Vielfachheit: e_μ = Anzahl der Nullstelle μ
- geometrische Vielfachheit: d_μ = Anzahl zugehöriger EV
 $\rightarrow d_\mu \leq e_\mu$
- Konjugierte Matrizen: $B = T^{-1}AT$, dann B zu A konjugiert
 $\rightarrow$ gleiche det, EW, Sp

V Quadriken

- allgemeine Form: $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Ax + 2a^T x + c = 0\}$
- affine Normalform = euklidische ohne Faktoren
- euklidische Normalform Vorgehen:
 - aus Q Matrix A , Vektor a und Skalar c ablesen
 - Eigenwerte & Eigenvektoren von A bestimmen
 $\rightarrow$ normiert in Matrix $T: T^{-1}AT = D$
 - $\tilde{a} = T^T \cdot a$ berechnen, dann erste Gleichung aufstellen:
 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + 2\tilde{a}_2 y_2 + 2\tilde{a}_3 y_3 + c = 0$
 Durch quadratische Ergänzungen Gleichung vereinfachen
 $(\lambda_1 y_1 + a_1)^2 + (\lambda_2 y_2 + a_2)^2 + (\lambda_3 y_3 + a_3)^2 + \tilde{c} = 0$
 - Neues Koordinatensystem definieren:
 $\mathbb{F} = (P; v_1, v_2, v_3)$ mit $P = T \cdot \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1/\lambda_1 \\ -\tilde{a}_2/\lambda_2 \\ -\tilde{a}_3/\lambda_3 \end{pmatrix}$
 normiert!
 - Neue Gleichung aufstellen:
 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \tilde{c} = 0 \quad 1: \tilde{c}$
 $\rightarrow \dots + 1 = 0$
 - Typ & Gestalt ablesen

Typ Quadrik: $A \text{ erw} = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & c \end{pmatrix}$

- kegelige Quadrik: $Rq(A) = Rq(A \text{ erw})$
- Mittelpunktsquadrik: $Rq(A) = Rq(A \text{ erw}) - 1$
- parabolische Quadrik: $Rq(A) = Rq(A \text{ erw}) - 2$

Gestalt Quadrik

$\mathbb{R}^2$		$\mathbb{R}^3$	
$\pm(x_1^2 + x_2^2) = 0$ $x_1^2 - x_2^2 = 0$ $\pm x_1^2 = 0$	Punkt Scheidendes Geradenpaar Doppelgerade	$\pm(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	Punkt Doppelkegel
$x_1^2 + x_2^2 + \lambda = 0$ $x_1^2 - x_2^2 + \lambda = 0$ $-x_1^2 + x_2^2 + \lambda = 0$ $-x_1^2 - x_2^2 + \lambda = 0$ $x_1^2 + \lambda = 0$ $-x_2^2 + \lambda = 0$	kein Punkt Hyperbel Ellipse kein Punkt paralleles Geradenpaar	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \lambda = 0$ $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda = 0$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda = 0$ $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \lambda = 0$ $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda = 0$	kein Punkt zweischaliges Hyperboloid einschaliges Hyperboloid Ellipsoid
$\pm x_1^2 + 2x_2 = 0$	Parabel	$\pm(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$ $-x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$	elliptisches Paraboloid hyperbolisches Paraboloid

Quadriken zeichnen

- Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
 Asymptoten: $y = \pm \frac{b}{a}x$
- paralleles Geradenpaar: $x^2 = a$
- Parabel: $y = ax^2$
- Scheidendes Geradenpaar: $y^2 = ax$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

ln-Gesetze

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln(u^v) = v \cdot \ln(u)$$

$$\ln a^u = \frac{1}{u} \cdot \ln(a)$$

e-Funktion

$$b^a = e^{a \cdot \ln(b)}$$

$$\ln(e^z) = z$$

$$\ln(e^0) = \ln(1) = 0$$

Wurzeln

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

Quadratzahlen

$11^2 = 121$	$18^2 = 324$
$12^2 = 144$	$19^2 = 361$
$13^2 = 169$	$20^2 = 400$
$14^2 = 196$	$21^2 = 441$
$15^2 = 225$	$22^2 = 484$
$16^2 = 256$	$23^2 = 529$
$17^2 = 289$	$24^2 = 576$
	$25^2 = 625$

HM II I Folgen & Reihen, Funktionsgrenzwerte, Konvergenzkriterien

Folgen & Reihen

- Häufungspunkte: Grenzwerte von Teilfolgen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$
 - konvergente Reihe, wenn $\lim = \lim = a$
- geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert immer
- Exponentialreihe: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} = e^z \rightarrow \exp(x+iy) = e^x (\cos y + i \sin y)$
 $\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$
 → nach Euler & de Moivre: $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Potenzreihe: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ z_0 : Entwicklungspunkt
 ρ : Konvergenzradius } unabh. vons
 → Konvergenzradius ρ durch Quotienten- oder Wurzelkriterium
 → falls $\rho = +\infty$ alternierend
 $\left. \begin{array}{l} a > 0 \quad \rho = \frac{1}{a} \\ a = 0 \quad \rho = +\infty \\ a = \infty \quad \rho = 0 \end{array} \right\}$
- konvergiert absolut für $|z-z_0| < \rho$, divergiert für $|z-z_0| > \rho$
 für $|z-z_0| = \rho$ Reihe genauer untersuchen & einsetzen
- Konvergenzkreis $U_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \rho\}$
- Sinusreihe: $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
 Cosinusreihe: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ } $\rho = +\infty$
- Ln-Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1+x)$ für $x \in (-1, 1]$

Folgen- und Funktionsgrenzwerte:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ für $a > 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k})^k = e$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x) = 0$ für $a > 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^a} = 0$ für $a > 0$

Konvergenzkriterien

- absolute Konvergenz auch $\sum |a_k|$ konvergiert
- Quotientenkriterium $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ konvergiert
 $= 1$: keine Aussage
 > 1 : divergiert
- Wurzelkriterium: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$
- Leibnizkriterium: $(a_k)_{k \geq k_0}$ alternierend & monoton Nullfolge, $(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0)$, dann konvergiert $\sum (-1)^k a_k$
- Minoranten- & Majorantenkriterium konvergiert Minorante / Majorante, dann konvergiert Folge auch
- Sandwichsatz: Gibt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = z = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ dann konvergiert auch $h(x)$ gegen z

Stetigkeit

- δ - ϵ -Definition: $|x-x_0| < \delta \rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$
 ϵ gegeben oder frei wählbar, δ Genauigkeit
- stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
- Stetige Funktionen: Polynome, Betragfunktion, Projektionen, Potenzreihen, $\ln$, $\cos$, $\sin$, e -Funktionen

Topologische Begriffe: $D \subseteq \mathbb{R}^n$

- beschränkt, wenn $\exists M \in \mathbb{R} : |a| \leq M$
- konvex, wenn $a, b \in D$ und Strecke $\overline{ab}$ in D
- $\bar{D}$: Abschluss von D , wenn D abgeschlossen & $D = \bar{D}$
- D° : Inneres von D , $a \in D^\circ$ wenn $U_\epsilon(a) \subseteq D$ mit $|x-a| < \epsilon$
- D kompakt, wenn D beschränkt & abgeschlossen

Sätze über Maximum / Minimum / Nullstellen

- Weierstraßscher Satz vom Minimum & Maximum: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt & stetig $\rightarrow f$ nimmt Max. & Min. an!
- Nullstellensatz von Bolzano: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann $\exists \xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$
 → Intervallhalbierungsmethode um ξ zu approximieren:
 falls $f(a_k) \cdot f(\frac{a_k+b_k}{2}) \leq 0$ Setze $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$
 falls $f(b_k) \cdot f(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0$ Setze $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$, $b_{k+1} = b_k$

II Differentiation in einer und in mehreren Veränderlichen

Differenzierbarkeit

- f differenzierbar, wenn Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert
- Ableitung längs v von f in a : $D_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$
 $|v| = 1$: Richtungsableitung
- Differenzenquotient: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ muss existieren für Diff. $\rightarrow h = x - x_0$
- total differenzierbar: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - Jf(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0$
- Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen: $C^1(D)$
- Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Ableitung der Umkehrfunktion: $f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
- Gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$ → Richtung von ∇g ist Richtung des steilsten Anstiegs
- Jacobi-Matrix: $Jg(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \end{pmatrix}$ alle Abl. von f_i
- $J(g \circ f) = J(g(f)) \cdot J(f)$ → lin. Approx: $f(x) \approx f(a) + Jf(a)(x-a)$ oder df_a
- Ableitungen von linearen & affinen Abbildungen: $Jf(a) = A$
- Hesse Matrix $Hf(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$
 ist immer symmetrisch → Satz von Schwarz
- Potenzreihen differenzieren:
 $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k (x-x_0)^{k-1}$

Satz von Taylor

- Jede Funktion: $f(x) = T_n(f, x, a) + R_n(f, x, a)$
 mit Taylorpolynom $T_n(f, x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$
 mit Restglied $R_n(f, x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ ξ oft $\xi \in (a, x)$
 wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, a) = 0$, dann $T_n(f, x, a) = f(x)$
 am Entwicklungspunkt z_0 : $T_n(f, x, z_0) = f(x)$
- $T_1(f, x, a) = f(a) + \text{grad } f(a) \cdot (x-a)$
 $T_2(f, x, a) = f(a) + \text{grad } f(a)(x-a) + \frac{1}{2} (x-a)^T Hf(a) (x-a)$

Kritische Stellen / Extremstellen

- lok. Extremstellen von $f \rightarrow \text{grad } f = 0$
- Typ: $\det Hf(x_0) < 0$: Sattelpunkt
 $\det Hf(x_0) > 0$: $\text{Sp } Hf(x_0) > 0$: lok. Minimum
 $\text{Sp } Hf(x_0) < 0$: lok. Maximum
- allgemein: Maximum: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$
 Minimum: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$
 Sattelpunkt: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$
 Wendepunkt: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$

Niveaumenge $N_t = \{x \in D \mid f(x) = t\}$ mit t : Niveau

Multiplikatormethode nach Lagrange

- I Nebenbedingung $g(x) = 0$
- II & III: $\text{grad } f(a) + \lambda \text{ grad } g(a) = 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ } Lösungen = kritische Stellen

Tangenten & Tangentialebenen

- Tangente $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
- Tangentialebene / Tangente an Niveaumenge $\nabla f(a)(x-a) = 0$

HM II: III Integralrechnung

- Unbestimmtes Integral: $\int f(x) dx$
- bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- Partielle Integration: $\int f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x) dx$
- Substitution: $\int f(x)g(x) dx \xrightarrow{\text{Sub } f(x)=u} \int u \cdot g(x) \frac{1}{g'(x)} du = \int u du$
- Partialbruchzerlegung:** $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$
 - Wenn Grad von $q(x) \geq$ Grad von $p(x)$: Polynomdivision
 - Wenn Grad von $q(x) <$ Grad von $p(x)$: Partialbruchzerlegung
 - einfache Nullstelle: $\frac{q(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
 - n-fache Nullstelle: $\frac{q(x)}{(x-a)^n} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{Z}{(x-a)^n}$
 - komplexe Nullstelle: $\frac{q(x)}{x^2+a} = \frac{Ax+B}{x^2+a}$
- LGS lösen ergibt Partialbrüche
- uneigentliche Integrale: $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$
- Integration reeller Potenzreihen: $\int_{x_0}^x a_k (x-x_0)^k dx = \left[\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} \right]$
- Integral-Vergleichskriterium: f positiv & monoton fallend
 $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \downarrow \int_m^{+\infty} f(x) dx$ haben gleiches Konvergenzverhalten aber nicht q. Grenzwert!

Übersicht wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
b^x	$\frac{1}{\ln(b)} \cdot b^x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{-1}{1-x^2}$	$\arccos x$
$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + \tan(x)^2$	$\tan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
		$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$

IV Potentialtheorie, Vektorfelder & Kurvenintegrale

Vektorfelder & Potentiale: $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

- Gradientenfeld / konservativ: Potential $u \in C^1(D)$ mit $\nabla u = g$ existiert
- Existenz von Potentialen: g Gradientenfeld, dann Jacobi-M. symmetrisch
 $\rightarrow D$ einfach zusammenhängend & symm., dann Gradientenfeld
- Divergenz: $\operatorname{div} g(a) = \operatorname{Sp}(\operatorname{Jg}(a)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(a) \rightarrow \operatorname{div} g = \nabla g$
 $\rightarrow$ quellenfrei, wenn $\operatorname{div} g = 0$
- Rotation: $n=2$: $\operatorname{rot} g(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}(a) \rightarrow \operatorname{rot} g = \nabla \times g$
 $n=3$: $\operatorname{rot} g(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}(a) \rightarrow$ Wirbelfrei, wenn $\operatorname{rot} g = 0$
- ist g ein Gradientenfeld: $\operatorname{rot} g = 0 \rightarrow g$ einfach zusammenhängend folgt

Berechnung eines Potentials: $\nabla u = g$

- Integration von g_1 nach x_1 : $\int g_1 dx_1 = [u(x_1, x_2, x_3)]$
- Integrationskonstante: $u(x_1, x_2, x_3) = \int g_1 dx_1 + c(x_2, x_3)$
- Integration von g_2 nach x_2 : $\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2, x_3) = g_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} c(x_2, x_3)$
 $\rightarrow c(x_2, x_3) = \int$ Teil der sich hier nicht wegkürzt $\uparrow dx_2$
- $u(x_1, x_2, x_3) = \int g_1 dx_1 + c(x_2, x_3) + b(x_3)$
 mit $\frac{\partial}{\partial x_3} u(x_1, x_2, x_3) = g_3 + c'(x_2, x_3) + b'(x_3)$
 $\rightarrow [b(x_3)] = \int \operatorname{Rest} dx_3 = b(x_3) + a \leftarrow$ Konstante wähle $a=0$

Topologische Begriffe: $n \in \mathbb{N}, D \subset \mathbb{R}^n$ offen

- zusammenhängend: $p, q \in D \rightarrow$ stetige Abbildung $c: [a, b] \rightarrow D$ d.h. p & q lassen sich durch Weg in D verbinden
- einfach zusammenhängend: D zusammenhängend & jeder geschl. Weg in D lässt sich zu Punkt zusammenziehen
 z.B. $\mathbb{R}^n$, konvexe Mengen, $\mathbb{S}^1$ -Umgebung, $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Parametrisierung: $c: [a, b] \rightarrow D$

- regulär, wenn $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$
- doppelpunktfrei wenn injektiv & geschlossen wenn $c(a) = c(b)$
- Kreis: $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto m + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ Radius r , Mittelpunkt m
- Ellipse: $\frac{(x-m_x)^2}{a^2} + \frac{(y-m_y)^2}{b^2} = 1 \rightarrow c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto m + \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$
- regulär & doppelpunktfrei (beides) $\rightarrow$ auch
- $t: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar $\rightarrow c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Kurvenintegrale von Vektorfeldern: $c: [a, b] \rightarrow D$

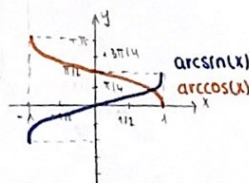
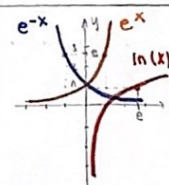
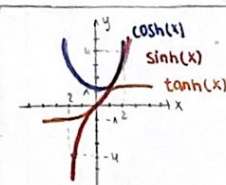
- $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b g(c(t)) \cdot c'(t) dt$ $\leftarrow$ auch durch Teilstücke
 Skalarprodukt möglich
- Umlaufintegral = Kurvenintegral geschlossene Kurve $\rightarrow \oint g(x) dx = 0$
- g Gradientenfeld: $\oint g(x) dx = u(c(b)) - u(c(a))$

Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen: $c: [a, b] \rightarrow D$

- $\int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(c(t)) \cdot |c'(t)| dt$
- Länge der Kurve: $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$
- Zirkulation: $Z(g, c) = \oint g(c(t)) \cdot c'(t) dt$
- Ausfluss: $A(g, c) = \oint g(c(t)) \cdot \begin{pmatrix} -c_2'(t) \\ c_1'(t) \end{pmatrix} dt$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
 $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
 $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
 $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
 $\operatorname{arccos}(\frac{a}{b}) = x$



Additionstheoreme

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
 $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
 $\sin(2z) = 2\cos(z)\sin(z)$
 $\cos(2z) = (\cos(z))^2 - (\sin(z))^2$
 $= 1 - 2(\sin(z))^2$
 $= 2(\cos(z))^2 - 1$
 $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$
 $(\sin(x))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$