

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Gegeben ist die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), 0 \leq r \leq \varphi, 0 \leq \varphi \leq 4\pi\}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G .

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die geschlossene Fläche S berandet das Gebiet

$$V := \{(x, r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) + x^2) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], x \in [-1, 1]\}.$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (0, 0, z).$$

Bestimmen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n \, dO$ von g durch den Rand S von V .

Aufgabe 3: (11 Punkte)

Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 2x + 10 \cos(2x)$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Für $y \neq 0$ ist die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y' = x^2 \frac{1}{y^2}.$$

Bestimmen Sie *die* reelle Lösung f der Differentialgleichung, welche $f(0) = 2$ erfüllt.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{für} \quad -\pi \leq x < \pi \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben. Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f .

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Gegeben ist die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), 0 \leq r \leq \varphi, 0 \leq \varphi \leq 4\pi\}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Die Menge G ist bereits in einer Parametrisierung in Polarkoordinaten gegeben.

Man erkennt, die „Rand“-Kurve der Parametrisierung $t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t))$ liegt für Parameter $t \in [0, 2\pi]$ im Inneren der Menge G . Relevant für die Bestimmung der Fläche ist also nur der Bereich $t \in [2\pi, 4\pi]$.

Für den Flächeninhalt A von G gilt also:

$$\begin{aligned} A &= \int_{2\pi}^{4\pi} \int_0^{\varphi} 1 \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 \, d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{6} \varphi^3 \right]_{2\pi}^{4\pi} = \frac{1}{6} (64\pi^3 - 8\pi^3) = \frac{28}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die geschlossene Fläche S berandet das Gebiet

$$V := \{(x, r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) + x^2) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], x \in [-1, 1]\}.$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (0, 0, z).$$

Bestimmen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n dO$ von g durch den Rand S von V .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**Variante 1: Direkte Berechnung**

Die Fläche S setzt sich zusammen aus den folgenden drei Flächenstücken:

$$S_1: \Phi_1: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: (r, \varphi) \mapsto (1, r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) + 1)$$

$$S_2: \Phi_2: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: (r, \varphi) \mapsto (-1, r \cos(-\varphi), r \sin(-\varphi) + 1)$$

$$S_3: \Phi_3: [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varphi, x) \mapsto (x, \cos(\varphi), \sin(\varphi) + x^2).$$

Die partiellen Ableitungen und die zugehörigen Normalenvektoren der einzelnen Parametrisierungen berechnen sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_1(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_1(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_1(r, \varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_1(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin(-\varphi) \\ -r \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2(r, \varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_3(\varphi, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x} \Phi_3(\varphi, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_3(\varphi, x) \times \frac{\partial}{\partial x} \Phi_3(\varphi, x) = \begin{pmatrix} -2x \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Insbesondere erkennt man hieran, dass die angegebenen Parametrisierungen für die Berechnung des Ausflusses richtig, also nach außen orientiert sind.

Hiermit kann der Ausfluss folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 \iint_S g \bullet n dO &= \iint_{S_1} g \bullet n dO + \iint_{S_2} g \bullet n dO + \iint_{S_3} g \bullet n dO \\
 &= \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \sin(\varphi) + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dr}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \sin(-\varphi) + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dr}_{=0} \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi) + x^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2x \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} dx d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\sin(\varphi))^2 + \sin(\varphi)x^2 dx d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[(\sin(\varphi))^2 x + \frac{1}{3} \sin(\varphi)x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} 2(\sin(\varphi))^2 + \frac{2}{3} \sin(\varphi) d\varphi \\
 &= \left[2 \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) - \frac{2}{3} \cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

Variante 2: Mit Hilfe des Satzes von Gauß

Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\iint_S g \bullet n dO = \iiint_V \operatorname{div} g(x, y, z) dx dy dz.$$

Es ist

$$\operatorname{div} g(x, y, z) = 1.$$

Das Gebiet V ist bereits in parametrisierter Form angegeben, allerdings nicht in kartesischen Koordinaten. Sei

$$\zeta: [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: (r, \varphi, x) \mapsto (x, r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) + x^2)$$

mit zugehöriger Funktional-Determinante

$$\det J\zeta(r, \varphi, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ 2x & \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} = r,$$

dann kann der Ausfluss wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\iint_S g \bullet n \, dO &= \iiint_V \operatorname{div} g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \cdot \det J\zeta(r, \varphi, x) \, dr \, d\varphi \, dx \\&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\varphi \, dx \\&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\varphi \, dx \\&= \int_{-1}^1 \pi \, dx = 2\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (11 Punkte)

Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 2x + 10 \cos(2x)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung**

Wir bestimmen zunächst die homogene Lösung.

Aus $y'' + y' = 0$ erhalten wir das charakteristische Polynom $q(t) = t^2 + t = t(t + 1)$.

Die homogene Lösung lautet somit

$$f_h(x) = c_1 + c_2 e^{-x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung**Variante 1: Inhomogene Lösung nach Art der Rechten Seite**

Nun wird die inhomogene Lösung nach Art der rechten Seite bestimmt. Ausserdem wird das Superpositionsprinzip genutzt.

Betrachte die Störfunktion $10 \cos(2x)$.

Es liegt keine Resonanz vor. Der Ansatz mitsamt seinen Ableitungen lautet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a \sin(2x) + b \cos(2x) \\ f_1'(x) &= 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) \\ f_1''(x) &= -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) &= 10 \cos(2x) \\ \sin(2x) (-4a - 2b) + \cos(2x) (-4b + 2a) &= 10 \cos(2x) \end{aligned}$$

Damit sind $a = 1$, $b = -2$ und

$$f_1(x) = \sin(2x) - 2 \cos(2x)$$

Nun wird die Störfunktion $2x$ betrachtet.

Es liegt Resonanz vor mit Vielfachheit $m = 1$. Ansatz und Ableitungen sind somit

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x(cx + d) \\ f_2'(x) &= 2cx + d \\ f_2''(x) &= 2c \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2c + 2cx + d = 2x$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $c = 1$ sowie $d = -2$ und somit

$$f_2(x) = x^2 - 2x$$

Die partikuläre Lösung ist

$$f_p(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sin(2x) - 2\cos(2x) + x^2 - 2x$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \sin(2x) - 2\cos(2x) + x^2 - 2x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Variante 2: Inhomogene Lösung mit Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix lautet

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{pmatrix}$$

Hiermit erhalten wir den Ansatz der Variation der Konstanten

$$M(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x + 10\cos(2x) \end{pmatrix}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & e^{-x} & 0 \\ 0 & -e^{-x} & 2x + 10\cos(2x) \end{array} \right)$$

Dies formen wir um zu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 1 & -2xe^x - 10e^x \cos(2x) \end{array} \right)$$

Daran kann man ablesen, dass

$$C_1(x) = \int 2x + 10\cos(2x) dx$$

$$C_2(x) = - \int 2xe^x + 10e^x \cos(2x) dx$$

Man sieht direkt, dass

$$C_1(x) = \int 2x + 10\cos(2x) dx = [x^2 + 5\sin(2x)]$$

Zur Bestimmung von $C_2(x)$ seien die folgenden Stammfunktionen berechnet. Partielle Integrationen ergeben:

$$\int xe^x dx = [xe^x] - \int e^x dx = [e^x(x-1)]$$

sowie

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(2x) dx &= [e^x \cos(2x)] + 2 \int e^x \sin(2x) dx \\ &= [e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)] - 4 \int e^x \cos(2x) dx\end{aligned}$$

was

$$\int e^x \cos(2x) dx = \frac{1}{5} [e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)]$$

zur Folge hat.

Damit ist

$$C_2(x) = -2e^x (x - 1 + \cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

Einsetzen ergibt

$$f_p(x) = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^{-x} = x^2 - 2x + 2 + \sin(2x) - 2 \cos(2x)$$

und

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + \sin(2x) - 2 \cos(2x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Für $y \neq 0$ ist die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y' = x^2 \frac{1}{y^2}.$$

Bestimmen Sie *die* reelle Lösung f der Differentialgleichung, welche $f(0) = 2$ erfüllt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Mit Satz 3.2.2 aus der Vorlesung, wobei $g(x) = x^2$ und $h(y) = \frac{1}{y^2}$ erhalten wir

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

Alternativ können wir durch Umformen und Integrieren folgern, dass

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + c \\ y &= \sqrt[3]{x^3 + c} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + c} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Das Anfangswertproblem lösen wir durch Auswertung an der Stelle $x = 0$.

Wir erhalten $\sqrt[3]{c} = 2$, also $c = 8$. Die gesuchte Lösung ist somit

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Das Differentialgleichungssystem besitzt das folgende Fundamentalsystem:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Alternative: Betrachtung als Anfangswertproblem

Wir wählen uns als Startvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A^2 v = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Diese drei Vektoren sind linear abhängig. Genauer: $A^2 v - 5Av + 6v = 0$. Daraus erhalten wir das Polynom

$$q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Die zugehörige Wronskimatrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix}$$

Einsetzen ergibt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung von Satz 6.3.4 aus der Vorlesung ist

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} - e^{3x} \end{pmatrix}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$f_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 2e^{2x} - 3e^{3x} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{für} \quad -\pi \leq x < \pi \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben. Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:**Variante 1: Reelle Rechnung**

Es gilt

$$b_k = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N},$$

da f eine gerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(kx) dx \end{aligned}$$

integriere partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{ke^{-x} \sin(kx) - e^{-x} \cos(kx)}{1+k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{0 - e^{-\pi}(-1)^k + 1}{1+k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2} \right) \end{aligned}$$

Es berechnet sich

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}.$$

und damit ist die reelle Fourierreihe bestimmt:

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2} \cdot \cos(kx).$$

Variante 2: Komplexe Rechnung

Möchte man bei dieser Aufgabe partielle Integration vermeiden, so bietet es sich an die komplexen Fourierkoeffizienten c_k zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^x e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} e^{-x} e^{-ikx} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{(1-ik)x} dx + \int_0^{\pi} e^{-(1+ik)x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{e^{-(1+ik)x}}{-1-ik} \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-(1-ik)\pi}}{1-ik} + \frac{e^{(-1-ik)\pi} - 1}{-1-ik} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-\pi}(-1)^k}{1-ik} + \frac{-e^{-\pi}(-1)^k + 1}{1+ik} \right) \\
 &= \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}
 \end{aligned}$$

Da c_k rein reell ist, gilt

$$b_k = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

(sieht man natürlich auch daran, dass f gerade ist).

Weiter ist

$$a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) = \frac{2(1 - (-1)^k e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)}$$

und

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}.$$

Damit ist die Fourierreihe S_f bestimmt:

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2} \cdot \cos(kx).$$

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Gegeben ist die Parametrisierung Φ eines Flächenstücks S durch

$$\Phi: [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varphi, \psi) \mapsto ((\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi), (\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi), \sin(\varphi)).$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (z, 0, 0).$$

Bestimmen Sie $\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 8 \cosh(x)$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \sinh(x)y = \sinh(x)$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Gegeben ist die folgende 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0] \\ 2 & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
 - (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.
-

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Es ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die reelle Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y(0) = (0, 1, 0).$$

Lösungsvorschläge zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Gegeben ist die Parametrisierung Φ eines Flächenstücks S durch

$$\Phi: [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3: (\varphi, \psi) \mapsto ((\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi), (\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi), \sin(\varphi)).$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (z, 0, 0).$$

Bestimmen Sie $\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**Variante 1: direkte Berechnung**

Es gilt

$$\operatorname{rot} g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\Phi_\varphi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\psi) \\ -\sin(\varphi) \sin(\psi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \Phi_\psi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -(\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi) \\ (\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n(\varphi, \psi) = \Phi_\varphi \times \Phi_\psi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi) \\ -\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi) \\ -\sin(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{rot} g(\Phi(\varphi, \psi))) \bullet n(\varphi, \psi) \, d\psi \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi) \\ -\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi) \\ -\sin(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \end{pmatrix} \, d\psi \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \sin(\psi) \, d\psi \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi)(\cos(\varphi) + 2) \cos(\psi)]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -(\cos(\varphi))^2 \, d\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} -2\cos(\varphi) \, d\varphi}_{=0} \\ &= -\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = -\pi \end{aligned}$$

Variante 2: Mit dem Satz von Stokes

Mit Hilfe des Satzes von Stokes kann die Flächenintegration durch die Integration über die Randkurve ersetzt werden

$$\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO = \int_{\Phi(K)} g(s) \bullet ds,$$

dabei ist K die Randkurve des Parametergebiets $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Es ergeben sich vier Teilkurven der Randkurve K , die wie folgt parametrisiert werden sollen

$$\begin{aligned} K_1: C_1: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, 0) \\ K_2: C_2: [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (2\pi, t) \\ K_3: C_3: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (2\pi - t, \frac{\pi}{2}) \\ K_4: C_4: [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (0, \frac{\pi}{2} - t) \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Kurven im Raum

$$\begin{aligned} \Phi(C_1): [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto ((\cos(t) + 2), 0, \sin(t)) \\ \Phi(C_2): [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (3 \cos(t), 3 \sin(t), 0) \\ \Phi(C_3): [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (0, (\cos(2\pi - t) + 2), \sin(2\pi - t)) \\ \Phi(C_4): [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (3 \cos(\frac{\pi}{2} - t), 3 \sin(\frac{\pi}{2} - t), 0) \end{aligned}$$

Man sieht dabei sofort, dass die Kurvenstücke $\Phi(K_2)$ und $\Phi(K_4)$ zusammenfallen und gegenseitig durchlaufen werden. Sie brauchen bei der weiteren Rechnung also nicht mehr beachtet werden. Außerdem ist

$$\begin{aligned} (\Phi \circ C_1)'(t) &= (-\sin(t), 0, \cos(t)) \\ (\Phi \circ C_3)'(t) &= (0, \sin(-t), -\cos(-t)) \end{aligned}$$

Damit kann das gesuchte Integral bestimmt werden

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO &= \int_{\Phi(K)} g(s) \bullet ds = \int_{\Phi(K_1)} g(s) \bullet ds + \int_{\Phi(K_3)} g(s) \bullet ds \\ &= \int_0^{2\pi} g(\Phi(C_1(t))) \bullet (\Phi \circ C_1)'(t) \, dt + \int_0^{2\pi} g(\Phi(C_3(t))) \bullet (\Phi \circ C_3)'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \, dt \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(2\pi - t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(-t) \\ -\cos(-t) \end{pmatrix} \, dt}_{=0} \\ &= \int_0^{2\pi} -(\sin(t))^2 \, dt = - \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = -\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 8 \cosh(x)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung**

Die Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

$$t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$$

Da $t = 1$ ein doppelter Eigenwert ist, folgt

$$f_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung**Variante 1: Inhomogene Lösung nach Art der Rechten Seite**

Wir betrachten nun den inhomogenen Teil

$$8 \cosh(x) = 4e^x + 4e^{-x}$$

Wir lösen nach Art der rechten Seite, unter Verwendung des Superpositionsprinzips.

Bei $4e^x$ liegt ein Resonanzfall vor. Ansatz und Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_1 &= ax^2 e^x \\ f_1' &= ae^x (x^2 + 2x) \\ f_1'' &= a(x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} ae^x (x^2 + 4x + 2) - 2ae^x (x^2 + 2x) + ax^2 e^x &= 4e^x \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Also ist

$$f_1(x) = 2x^2 e^x$$

Bei $4e^x$ liegt keine Resonanz vor. Ansatz und Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_2 &= be^{-x} \\ f_2' &= -be^{-x} \\ f_2'' &= be^{-x} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} be^{-x} + 2be^{-x} + b^{-x} &= 4e^{-x} \\ 4b &= 4 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$f_2(x) = e^{-x}$$

was

$$f_p(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2x^2e^x + e^{-x}$$

und

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + 2x^2e^x + e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ergibt.

Variante 2: Inhomogene Lösung mit Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix lautet

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{pmatrix}$$

Mit dieser Wronskimatrix erhalten wir mit dem Ansatz

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x(x+1) & 4e^x + 4e^{-x} \end{array} \right)$$

dies lässt sich umformen zu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4x - 4xe^{-2x} \\ 0 & 1 & 4 + 4e^{-2x} \end{array} \right)$$

Also ist

$$\begin{aligned} c_1 &= \int -4x - 4xe^{-2x} dx \\ c_2 &= \int 4 + 4e^{-2x} dx \end{aligned}$$

Man sieht direkt, dass

$$c_2 = \int 4 + 4e^{-2x} dx = [4x - 2e^{-2x}]$$

Partielle Integration ergibt

$$\int xe^{-2x} dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-2x} \right] + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \left[e^{-2x} \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

Damit ist

$$c_1 = -2x^2 + e^{-2x}(2x + 1)$$

sowie

$$f_p(x) = 2x^2 e^x + e^{-x}$$

und

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2x^2 e^x + e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \sinh(x)y = \sinh(x)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung**

Mit Satz 3.2.2 aus der Vorlesung, wobei $g(x) = -\sinh(x)$ und $h(y) = \frac{1}{y}$ sind, erhalten wir

$$y_h = c \cdot e^{-\cosh(x)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Alternativ können wir durch **formales** Umformen und Integrieren folgern, dass

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -\sinh(x)dx \\ \ln(y) &= -\cosh(x) + \tilde{c} \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ y &= c \cdot e^{-\cosh(x)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung

Mit Variation der Konstanten kommen wir auf den folgenden Ansatz

$$c(x) = \int e^{\cosh(x)} \sinh(x) dx$$

Wir substituieren $u = \cosh(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} c(x) &= \int e^{\cosh(x)} \sinh(x) dx \\ &= \int e^u du \\ &= \left[e^{\cosh(x)} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$y_p = e^{\cosh(x)} \cdot e^{-\cosh(x)} = 1$$

Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-\cosh(x)} + 1 \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Gegeben ist die folgende 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0] \\ 2 & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
 (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Man erkennt leicht, zum Beispiel anhand einer Skizze, dass die Funktion f weder gerade noch ungerade ist. Ihre Periode beträgt 2π . Wir berechnen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 dx = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \\ a_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos(jx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{j} \sin(jx) \right]_0^{\pi} = 0 \\ b_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin(jx) dx = \left[\frac{-2}{j\pi} \cos(jx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2}{j\pi} (\cos(j\pi) - 1) = \frac{-2}{j\pi} ((-1)^j - 1) = \frac{2}{j\pi} ((-1)^{j+1} + 1) \end{aligned}$$

wobei hier $j \in \mathbb{N}$. Als Fourierreihe erhalten wir

$$f(x) \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j\pi} ((-1)^{j+1} + 1) \sin(jx)$$

- (b) Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ stetig differenzierbar. Die Fourierreihe von f konvergiert somit für alle Elemente dieser Menge gegen f .

Für alle $\{x = k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Fourierreihe jeweils gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwerten an diesen Stellen. Dieser Mittelwert ist an allen diesen Stellen gleich 1.

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Es ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie *die* reelle Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y(0) = (0, 1, 0).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**Variante 1 mit minimalem Polynom**

$$Ay(0) = (-1, 2, 0)^T, \quad A^2y(0) = (-3, 4, 0)^T$$

Wir bestimmen das Polynom χ_A , indem wir in der mit den berechneten Vektoren gebildeten Matrix eine Nullzeile erzeugen und die entsprechenden Operationen zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3Z_2 + Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{-4Z_1 + Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$A^2v - 3(Av - 2v) - 4v = 0.$$

Das annullierende Polynom lautet somit

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Setzen wir in χ_A den Differentialoperator D ein, so ist χ_A charakteristisches Polynom zu der Differentialgleichung

$$\chi_A(D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Daraus folgt

$$\tilde{\chi}_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Das Fundamentalsystem von $\chi_A(D)y = 0$ wird somit von

$$g_1(x) = e^x, \quad g_2(x) = e^{2x}$$

aufgespannt.

Wir bestimmen die zugehörige und an der Stelle $x = 0$ ausgewertete transponierte Wronski-Matrix $M(0)$, sowie die für den Lösungsalgorithmus benötigte Inverse $(M^T(0))^{-1}$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(M^T(0))^{-1} = \frac{1}{\det(M(0))^T} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die gesuchte Lösung zu dem AWP:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Variante 2 mit charakteristischem Polynom

$$Ay(0) = (-1, 2, 0)^T, \quad A^2y(0) = (-3, 4, 0)^T$$

Das charakteristische Polynom von A liest man direkt ab:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Setzen wir in χ_A den Differentialoperator D ein, so erhalten wir das Fundamentalsystem der dadurch induzierten DGL $\chi_A(D)y = 0$ durch die Nullstellen von χ_A :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\Rightarrow g_1(x) = e^x, \quad g_2(x) = e^{2x}, \quad g_3(x) = xe^{2x}$$

Mit diesen Funktionen bilden wir die Wronski-Matrix:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & (4x+4)e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(M^T)^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Es sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -(x^2 + y^2) \leq z \leq xy + 1\}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie: M ist bezüglich der (x, y) -Ebene ein Normalbereich.
- (b) Bestimmen Sie für das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) := \left(1, 0, zx\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

den Ausfluss von f durch die Oberfläche von M .

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y' + y = 2x, \quad x > \frac{1}{2},$$

sowie die spezielle Lösung zum Anfangswert $y(1) = 2$.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 4(\sinh(x))^2 + 2.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = x + \sin(\pi x) \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \quad \text{und} \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.
- (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Lösungsvorschläge zur Klausur für bau, ern, fnt, IuI, mach, tema, umw, verf

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Es sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -(x^2 + y^2) \leq z \leq xy + 1\}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie: M ist bezüglich der (x, y) -Ebene ein Normalbereich.
- (b) Bestimmen Sie für das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) := (1, 0, zx\sqrt{x^2 + y^2})$$

den Ausfluss von f durch die Oberfläche von M .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Wir setzen im Folgenden zur Vereinfachung $k(x, y) := -(x^2 + y^2)$ und $\ell(x, y) := xy + 1$ sowie $D_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

- (a) Da ℓ, k auf $D_1(0)$ stetig sind und $D_1(0)$ als Kreisfläche selbst ein Normalbereich bezüglich der x respektive y -Achse darstellt, ist nur noch zu verifizieren, dass $k(x, y) \leq \ell(x, y)$ für alle $(x, y) \in D_1(0)$ gilt.

Wir führen Zylinderkoordinaten ein: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ mit $r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$.
Damit erhalten wir

$$l(x, y) = r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1 \geq 1 - \underbrace{|r^2| \cdot |\cos \varphi \sin \varphi|}_{\leq 1} \geq 0 \geq -r^2 = k(x, y).$$

Folglich ist M ein Normalgebiet bezüglich der (x, y) -Ebene.

(b) 1. Variante (mit dem Satz von Gauß)

Aus dem Satz von Gauß wissen wir

$$A(f, \partial M) = \iiint_M \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

wobei wir die Randfläche von M mit ∂M bezeichnen.

Für die Divergenz in kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{D_1(0)} \int_{k(x, y)}^{\ell(x, y)} x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dz dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=k(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{\ell(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} r^2 \cos \varphi \cdot \underbrace{|\det J_\Phi|}_r \, dz dr d\varphi. \end{aligned}$$

wobei wir M in der zweiten Zeile auf Zylinderkoordinaten transformiert haben. Daraus erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=-r^2}^{r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1} r^3 \cos \varphi \, dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos \varphi (r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1 + r^2) \, dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5 + r^3) \cos \varphi \, dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{6} r^6 + \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi}_{=0} + \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{18} \cdot [\cos^3 \varphi]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $A(f, \partial M) = 0$.

2. Variante (per Definition)

Der Ausfluss von f durch die Oberfläche ∂M ist durch

$$A(f, \partial M) = \iint_{\partial M} f \cdot n \, dO$$

definiert, wobei wir mit n den auf ∂M nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor bezeichnen. Die Oberfläche von ∂M lässt sich nicht komplett stetig differenzierbar parametrisieren. Da M ein durch den Graphen von ℓ nach oben und durch den Graphen von k nach unten begrenzter Kreiszylinder ist, können wir ∂M jedoch in drei Flächen (Mantel ∂M_M , Boden ∂M_k , Deckel ∂M_ℓ) aufteilen, welche man jeweils stetig differenzierbar parametrisieren kann. Es ist dann

$$\iint_{\partial M} f \cdot n \, dO = \underbrace{\iint_{\partial M_M} f \cdot n \, dO}_{=\text{Mantel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_\ell} f \cdot n \, dO}_{=\text{Deckel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_k} f \cdot n \, dO}_{=\text{Boden}}.$$

Mantel: Die durch $\Phi^M : \{(\varphi, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -1 \leq z \leq \cos \varphi \sin \varphi + 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi^M(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)^\top$ definierte Abbildung parametrisiert stetig differenzierbar die Mantelfläche des Zylinders. Es ist

$$\Phi_\varphi^M(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^\top, \quad \Phi_z^M(\varphi, z) = (0, 0, 1)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_\varphi^M \times \Phi_z^M\right)(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^\top$$

und

$$f(\Phi^M(\varphi, z)) = (1, 0, z \cdot \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_M} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_{z=-1}^{\cos \varphi \sin \varphi + 1} \cos \varphi dz d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi) d\varphi \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi + 2 \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Deckel: Die durch $\Phi^\ell : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi^\ell(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1)^\top$$

definierte Abbildung parametrisiert den Deckel des Zylinders. Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_r^\ell(r, \varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 2r \cos \varphi \sin \varphi)^\top, \\ \Phi_\varphi^\ell(r, \varphi) &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi))^\top, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^\ell \times \Phi_\varphi^\ell\right)(r, \varphi) = (-r^2 \sin \varphi, -r^2 \cos \varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^\ell(r, \varphi)) = (1, 0, r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^2 \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Damit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_\ell} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 \sin \varphi + r^5 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^3 \cos \varphi) dr d\varphi \\ &= \left[-\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=0} + \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi + \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Zum Schluss berechnen wir noch das Oberflächenintegral bezüglich des Bodens.

Boden: Die durch $\Phi^k : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi^k(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, -r^2)^\top$ definierte Abbildung parametrisiert den Boden des Zylinders. Es ist

$$\Phi_r^k(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r)^\top, \quad \Phi_\varphi^k(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^k \times \Phi_\varphi^k\right)(r, \varphi) = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^k(r, \varphi)) = (1, 0, -r^4 \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Damit der Normalenvektor nach außen zeigt, muss er noch mit -1 multipliziert werden. Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_k} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5 \cos \varphi - 2r^2 \cos \varphi) dr d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{6} r^6 - \frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\iint_{\partial M_M} f \cdot n dO = \iint_{\partial M_\ell} f \cdot n dO = \iint_{\partial M_k} f \cdot n dO = 0$$

und damit insgesamt $A(f, \partial M) = 0$.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y' + y = 2x, \quad x > \frac{1}{2},$$

sowie die spezielle Lösung zum Anfangswert $y(1) = 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Umformen ergibt

$$y' + \frac{1}{x(2x-1)}y = \frac{2x}{x(2x-1)}.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$y' + g(x)y = h(x)$$

mit

$$g(x) = \frac{1}{x(2x-1)}, \quad h(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

Nach Satz 3.2.8 berechnen wir unter Verwendung einer Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x) dx = \int \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2x-1) - \ln(x), \\ e^{-G(x)} &= e^{\ln(x) - \ln(2x-1)} = \frac{x}{2x-1} \end{aligned}$$

und erhalten damit die homogene Lösung

$$f_h(x) = C \frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Für die partikuläre Lösung verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$f_p(x) = k(x) \frac{x}{2x-1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} k(x) &= \int h(x) e^{G(x)} \\ &= \int \frac{2}{2x-1} e^{\ln(2x-1) - \ln(x)} dx \\ &= \int \frac{2}{2x-1} \frac{2x-1}{x} dx = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x. \end{aligned}$$

Damit ist die gesamte Lösung

$$f(x) = (C + k(x)) e^{-G(x)} = (C + 2 \ln x) \frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ folgt durch Einsetzen $C = 2$ und damit die spezielle Lösung

$$y(x) = (2 + 2 \ln x) \frac{x}{2x-1}.$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 4(\sinh(x))^2 + 2.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Zuerst muss die homogene Lösung bestimmt werden. Aus $y'' - y' - 2y = 0$ ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Die homogene Lösung lautet daher

$$f_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Um die inhomogene Lösung zu bestimmen, bietet es sich an, die rechte Seite umzuformen:

$$h(x) = 4(\sinh(x))^2 + 2 = 4 \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)^2 + 2 = e^{2x} + e^{-2x}.$$

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten:

- **Ansatz nach Art der rechten Seite**

Hier wird das Superpositionsprinzip angewendet, d.h. es werden partikuläre Lösungen zu den beiden Störfunktionen $h_1(x) = e^{2x}$ und $h_2(x) = e^{-2x}$ gesucht. Dazu wird der Ansatz nach Art der rechten Seite genutzt.

1. Störfunktion h_1 :

Zunächst wird die Störfunktion $h_1(x) = e^{2x}$ betrachtet. Da das charakteristische Polynom die einfache Nullstelle 2 hat (Resonanz) und der polynomiale Faktor der Störfunktion vom Grad 0 ist, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

$$f_{p1}(x) = axe^{2x}$$

mit den Ableitungen

$$f'_{p1}(x) = a(1 + 2x)e^{2x} \quad \text{und} \quad f''_{p1}(x) = a(4 + 4x)e^{2x}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$a(4 + 4x)e^{2x} - a(1 + 2x)e^{2x} - 2axe^{2x} = 3ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} = h_1(x),$$

was auf $a = \frac{1}{3}$ führt. Alternativ kann der Operatorenkalkül verwendet werden:

$$(D + 1)(D - 2)axe^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x}$$

$$e^{2x}(D + 3)D(ax) \stackrel{!}{=} e^{2x}$$

$$(D + 3)a \stackrel{!}{=} 1$$

$$3a \stackrel{!}{=} 1,$$

was ebenfalls $a = \frac{1}{3}$ liefert. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_{p1} = \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

2. Störfunktion h_2 :

Die zweite Störfunktion lautet $h_2(x) = e^{-2x}$. Da -2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und der polynomiale Faktor der Störfunktion Grad 0 hat, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

$$f_{p2}(x) = ae^{-2x}$$

mit den Ableitungen

$$f'_{p2}(x) = -2ae^{-2x} \quad \text{und} \quad f''_{p2}(x) = 4ae^{-2x}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$4ae^{-2x} + 2ae^{-2x} - 2ae^{-2x} = 4ae^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x} = h_2(x),$$

was auf $a = \frac{1}{4}$ führt. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_{p2} = \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

• **Variation der Konstanten**

Der Ansatz $f_p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-x}$ führt auf

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Umformen liefert

$$\begin{pmatrix} 3e^{2x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} + e^{-2x} \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}$$

und damit

$$c'_1(x) = \frac{1}{3}(1 + e^{-4x}), \quad c'_2(x) = -\frac{1}{3}(e^{3x} + e^{-x}).$$

Integration ergibt

$$c_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}e^{-4x}, \quad c_2(x) = -\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-x}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = \frac{1}{3}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Insgesamt erhält man die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- **1. Variante (mit Minimalpolynom)** (siehe Satz 6.3.7)

Wir erhalten

$$v = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit $A^2v + 4v = 0$. Das zugehörige Polynom

$$p(X) = X^2 + 4$$

hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 2i$, und damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x).$$

Die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

- **2. Variante (mit charakteristischem Polynom)** (siehe Satz 6.3.4)

Wie oben erhalten wir

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(X) = (2 - X)((1 - X)(-1 - X) + 5) = (2 - X)(X^2 + 4)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 2i$, $\lambda_3 = 2$. Das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung lautet damit

$$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x), \quad g_3(x) = e^{2x}.$$

Die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) & e^{2x} \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) & 2e^{2x} \\ -4\cos(2x) & -4\sin(2x) & 4e^{2x} \end{pmatrix},$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = x + \sin(\pi x) \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \quad \text{und} \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.
 (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- (a) Da $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit ist $a_0 = a_n = 0$ für alle n .

Um die anderen Koeffizienten zu berechnen, bietet es sich an, die Summanden x und $\sin(\pi x)$ getrennt zu betrachten. Für den ersten Teil erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{n\pi} x \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand $\sin(\pi x)$ ist schon in Form einer Fourierreihe gegeben.

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sin(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin(\pi x) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

- (b) Die Funktion f ist nur an den Punkten $\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$ unstetig. An allen anderen Punkten konvergiert die Fourierreihe folglich gegen den Funktionswert, während sie an den Sprungstellen gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$ konvergiert. Der Grenzwert der Fourierreihe ist also die 2-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\begin{cases} x + \sin(x), & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Gegeben seien die beiden Mengen

$$M_1 := \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, x - 4 \leq y \leq \tfrac{1}{4}(x - 4)^2\} \right. \\ \left. \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 0, -\tfrac{1}{4}(x + 4)^2 \leq y \leq x + 4\} \right)$$

und

$$M_2 := [-4, 4] \times [-1, 1].$$

Mit diesen Mengen bilden wir $M := M_1 \setminus M_2$.

- (a) Fertigen Sie eine Skizze von M an.
- (b) Bestimmen Sie für $f(x, y) = |x|$ den Wert des Integrals

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy.$$

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 3 \sin(3x).$$

- (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung f , welche die Bedingungen

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{und} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}\pi$$

erfüllt.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2}{\pi}x, & \text{für } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.
- (b) Untersuchen Sie, ob f eine 2π -periodische Stammfunktion F besitzt. Wenn ja, geben Sie eine Fourier-Reihe von F an.

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ern, fnt, IuI, mach, tema, umw, verf

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Gegeben seien die beiden Mengen

$$M_1 := \left(\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, x-4 \leq y \leq \frac{1}{4}(x-4)^2 \} \right. \\ \left. \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 0, -\frac{1}{4}(x+4)^2 \leq y \leq x+4 \} \right)$$

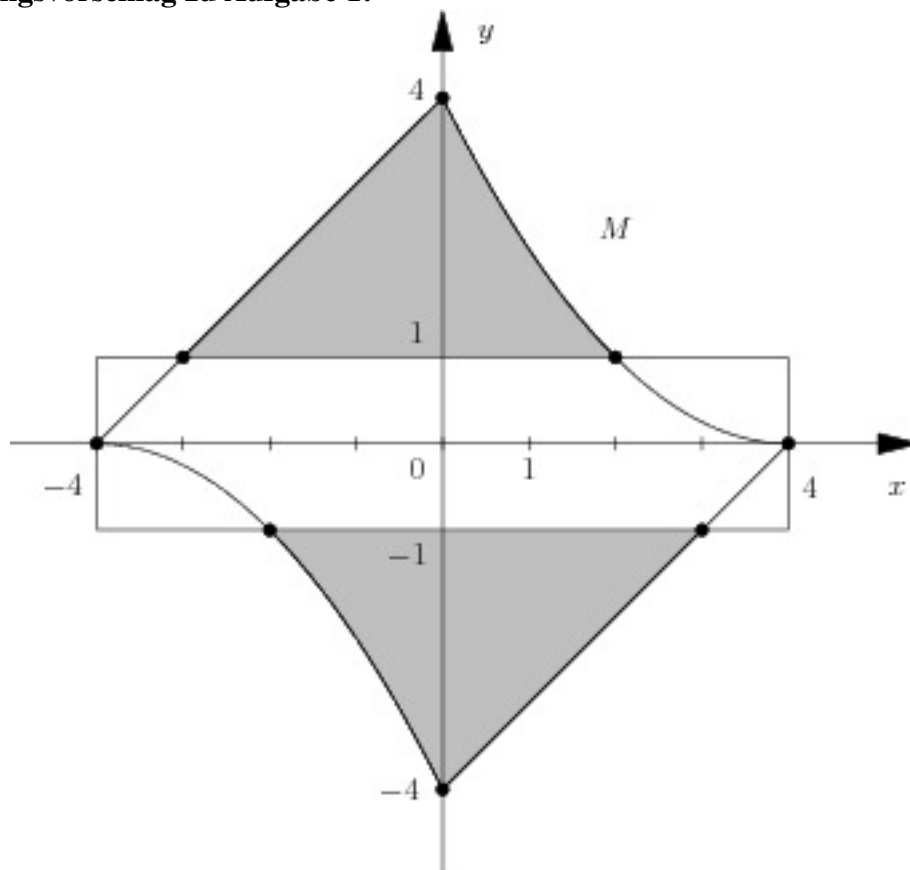
und

$$M_2 := [-4, 4] \times [-1, 1].$$

Mit diesen Mengen bilden wir $M := M_1 \setminus M_2$.

- (a) Fertigen Sie eine Skizze von M an.
- (b) Bestimmen Sie für $f(x,y) = |x|$ den Wert des Integrals

$$\iint_M f(x,y) \, dx \, dy.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a)

- (b) Aufgrund der Symmetrie von M und $f(x) = |x|$ genügt es, f über $M \cap H^+$ mit $H^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ zu integrieren:

$$\iint_M f(x, y) dx dy = 2 \cdot \iint_{M \cap H^+} |x| dx dy.$$

Wir setzen zur Vereinfachung $g(x) = x + 4$, $p(x) = \frac{1}{4}(x - 4)^2$ und zerlegen $M \cap H^+$ in die zwei Bereiche

$$N_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau_1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq g(x)\},$$

$$N_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \tau_2, 1 \leq y \leq p(x)\},$$

wobei $\tau_1 = -3$ und $\tau_2 = 2$ die Lösungen von $g(x) = 1$ sowie $p(x) = 1$ sind.

Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \iint_{N_j} |x| dx dy \right) \\ &= 2 \left(\underbrace{- \int_{-3}^0 \int_{y=1}^{g(x)} x dy dx}_{=A} + \underbrace{\int_0^2 \int_{y=1}^{p(x)} x dy dx}_{=B} \right). \end{aligned}$$

A berechnen wir durch

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-3}^0 \int_{y=1}^{g(x)} x dy dx = - \int_{-3}^0 [xy]_1^{g(x)} dx \\ &= - \int_{-3}^0 (x(x+4) - x) dx = - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 = \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

und analog dazu B

$$B = \int_0^2 \int_{y=1}^{p(x)} x dy dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x \right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 = \frac{5}{3}.$$

Somit erhalten wir:

$$\int_M |x| dx dy = 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{5}{3} \right) = \frac{37}{3}.$$

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 3 \sin(3x) .$$

- (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.
 (b) Bestimmen Sie die Lösung f , welche die Bedingungen

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{und} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}\pi$$

erfüllt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

- (a) Zuerst muss die homogene Lösung bestimmt werden. Aus $y'' + 9y = 0$ ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 + 9 = (X + 3i)(X - 3i)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Die homogene Lösung lautet daher

$$f_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Um die inhomogene Lösung zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- **Variante 1: komplexer Ansatz**

Anstelle von h wird zunächst die komplexe Störfunktion

$$\tilde{h}(x) = 3e^{3ix}$$

betrachtet. Nach Art der rechten Seite erhält man für die partikuläre Lösung $\tilde{f}_p$ der komplexen Störfunktion den Ansatz

$$\tilde{f}_p(x) = axe^{3ix} ,$$

da ein Resonanzfall vorliegt. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit dem Operatorenkalkül

$$(D + 3i)(D - 3i)axe^{3ix} \stackrel{!}{=} 3e^{3ix}$$

$$e^{3ix}(D + 6i)D(ax) \stackrel{!}{=} 3e^{3ix}$$

$$(D + 6i)a \stackrel{!}{=} 3$$

$$6ia \stackrel{!}{=} 3$$

und somit $a = -\frac{i}{2}$. Für die partikuläre Lösung $\tilde{f}_p$ ergibt sich also

$$\tilde{f}_p(x) = -\frac{i}{2}xe^{3ix} = \frac{1}{2}x \sin(3x) - \frac{i}{2}x \cos(3x) .$$

Da $h(x) = \text{Im}(\tilde{h}(x))$ folgt für die partikuläre Lösung f_p zur Störfunktion h

$$f_p(x) = \text{Im}(\tilde{f}_p(x)) = -\frac{1}{2}x \cos(3x) .$$

• **Variante 2: reeller Ansatz**

Nach Art der rechten Seite erhält man für die partikuläre Lösung f_p der reellen Störfunktion den Ansatz

$$f_p(x) = ax \sin(3x) + bx \cos(3x) ,$$

da ein Resonanzfall vorliegt. Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= (a - 3bx) \sin(3x) + (3ax + b) \cos(3x), \\ f_p''(x) &= -(9ax + 6b) \sin(3x) + (6a - 9bx) \cos(3x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$-6b \sin(3x) + 6a \cos(3x) \stackrel{!}{=} 3 \sin(3x),$$

was durch Koeffizientenvergleich zu $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ führt. Damit lautet die Partikulärlösung

$$f_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos(3x) .$$

Insgesamt erhält man die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{1}{2}x \cos(3x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

(b) Nach Ableiten der allgemeinen Lösung und Einsetzen der Anfangswerte erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_2 \stackrel{!}{=} 0, \\ -3c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -3c_1 + \frac{\pi}{4} \stackrel{!}{=} -\frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = \frac{\pi}{2}$ und $c_2 = 0$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cos(3x) - \frac{1}{2}x \cos(3x) .$$

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Für die **Lösung des homogenen Systems** ermitteln wir (analog zu 6.4.5) ein Fundamentalsystem. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\chi(X) = (4 - X)(2 - X) + 1 = X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 3$. Damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = e^{3x}, \quad g_2(x) = xe^{3x}.$$

Für die zugehörige Wronskimatrix und ihre Inverse in 0 ergibt sich

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (3x+1)e^{3x} \end{pmatrix}, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von dem ersten Einheitsvektor e_1 erhalten wir die linear unabhängigen Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Lösung des homogenen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = e_1$ gegeben ist durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix}.$$

Das zweite Element des Fundamentalsystems erhalten wir entweder über

$$\tilde{f}_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} (4+3x)e^{3x} \\ (3x+1)e^{3x} \end{pmatrix}$$

oder über die Bestimmung des Eigenvektors $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der zur Lösung $f_2(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$ führt.

Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2x \end{pmatrix}.$$

was auf $c_1(x) = 2x$, $c_2(x) = -x^2$ und damit auf die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = 2xe^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} - x^2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} x^2 + 2x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h + f_p$ gegeben:

$$f(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} + e^{3x} \begin{pmatrix} x^2 + 2x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2}{\pi}x, & \text{für } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.
 (b) Untersuchen Sie, ob f eine 2π -periodische Stammfunktion F besitzt. Wenn ja, geben Sie eine Fourier-Reihe von F an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Da $f(x)$ weder gerade noch ungerade ist, müssen alle Koeffizienten berechnet werden. Für a_0 ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x dx \right) = -1 + \frac{1}{\pi^2} [x^2]_0^{\pi} = 0.$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -\cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x \cos(nx) dx \right) \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi} \sin(nx) \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{2}{n\pi^2} x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi^2} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} [\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -\sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x \sin(nx) dx \right) \\ &= \left[\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{2}{n\pi^2} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi^2} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) - \frac{2}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2} [\sin(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - 3(-1)^n). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos(nx) + \frac{1}{n\pi} (1 - 3(-1)^n) \sin(nx) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \cos((2k-1)x) - \frac{1}{k\pi} \sin(2kx) + \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x) \right). \end{aligned}$$

- (b) Da $a_0 = 0$ ist, besitzt f eine 2π -periodische Stammfunktion F , deren Fourierreihe durch gliedweise Integration bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} F(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^3\pi^2} ((-1)^n - 1) \sin(nx) - \frac{1}{n^2\pi} (1 - 3(-1)^n) \cos(nx) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{(2k-1)^3\pi^2} \sin((2k-1)x) + \frac{1}{2k^2\pi} \cos(2kx) - \frac{4}{(2k-1)^2\pi} \cos((2k-1)x) \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die archimedische Spirale wird durch

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad A(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)^T$$

parametrisiert. Für $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ begrenzt diese zusammen mit dem Geradenstück

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3\pi \leq x \leq -\pi, y = 0\}$$

ein ebenes Gebiet $\bar{J}$. Bestimmen Sie für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = (-y, x)^T$ die Zirkulation von g entlang des Randes von $\bar{J}$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Rotiert man das in der (x, z) -Ebene gelegene Rechteck $[1, 2] \times [0, 2]$ um die z -Achse, so entsteht eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Ausfluss des Vektorfelds

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = (xz, 3yz^2 + y^2, zy - z^3)^T$$

durch den Rand von M .

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = x.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(4 + x^2)y' = 4 + y^2, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: Den Definitionsbereich der Lösung müssen Sie nicht bestimmen.

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an, gegen welchen Wert die Fourier-Reihe von f im Punkt x konvergiert.
- Begründen Sie, ob f eine 2π -periodische Stammfunktion besitzt. Falls das so ist, geben Sie die Fourier-Reihe einer solchen Stammfunktion an.

Hinweise: Ausdrücke der Form $\sin(j\pi/2)$ bzw. $\cos(j\pi/2)$ müssen ausgerechnet werden. Ausdrücke der Form $1 \pm (-1)^j$ müssen nicht weiter vereinfacht werden ($j \in \mathbb{N}_0$).

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ern, fnt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die archimedische Spirale wird durch

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad A(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)^T$$

parametrisiert. Für $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ begrenzt diese zusammen mit dem Geradenstück

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3\pi \leq x \leq -\pi, y = 0\}$$

ein ebenes Gebiet $\bar{J}$. Bestimmen Sie für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = (-y, x)^T$ die Zirkulation von g entlang des Randes von $\bar{J}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

1. Variante: Direkt über Randintegral

Wir parametrisieren den linearen Teil des Rands $\partial\bar{J}$ durch

$$C_G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad C_G(\varphi) = (-3\pi + 2\pi\varphi, 0)^T$$

und den Rest wie in der Aufgabenstellung angegeben durch die archimedische Spirale A auf $[\pi, 3\pi]$ eingeschränkt. Damit folgt der Ansatz:

$$\begin{aligned} Z(g, \partial\bar{J}) &= \int_{\partial\bar{J}} g(s) ds \\ &= \int_0^1 g(C_G(\varphi)) \cdot C'_G(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{3\pi} g(A(\varphi)) \cdot A'(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld g u.a. die Koordinaten vertauscht, ist das Kurvenintegral über den linearen Teil identisch 0.

Mit

$$A'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

folgt also

$$\begin{aligned} Z(g, \partial\bar{J}) &= \int_{\pi}^{3\pi} g(A(\varphi)) \cdot A'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} \begin{pmatrix} -\varphi \sin(\varphi) \\ \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} -\varphi \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \varphi^2 \sin(\varphi)^2 + \varphi \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \varphi^2 \cos(\varphi)^2 d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{3} \varphi^3 \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{26}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

2. Variante: Mit Green

Die Fläche $\bar{J}$ kann mittels ebener Polarkoordinaten durch die Abbildung

$$\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T,$$
$$Q := \{(r, \varphi) \mid \pi \leq \varphi \leq 3\pi, 0 \leq r \leq \varphi\}$$

parametrisiert werden. Da

$$\operatorname{rot} g(x, y) = 1 - (-1) = 2,$$

folgt mit dem Greenschen Satz in der Ebene und weil

$$|\det \Phi'(r, \varphi)| = r :$$

$$\begin{aligned} Z(g, \partial \bar{J}) &= \int_{\bar{J}} \operatorname{rot} g(x, y) dx dy \\ &= 2 \int_{\pi}^{3\pi} \int_0^{\varphi} r dr d\varphi = \int_{\pi}^{3\pi} r^2 \Big|_0^{\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \varphi^3 \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{26}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Rotiert man das in der (x, z) -Ebene gelegene Rechteck $[1, 2] \times [0, 2]$ um die z -Achse, so entsteht eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Ausfluss des Vektorfelds

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = (xz, 3yz^2 + y^2, zy - z^3)^T$$

durch den Rand von M .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Offenbar ist

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\},$$

d.h. M lässt sich in Zylinderkoordinaten durch

$$\Phi : [1, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2] \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad \Phi(r, \varphi, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)^T$$

parametrisieren. Wir erhalten mit Gauss den Ausfluss von g durch den Rand ∂M von M somit durch

$$A(g, \partial M) = \iiint_M \operatorname{div} g(x, y, z) dx dy dz.$$

Da

$$\operatorname{div} g(x, y, z) = z + 3z^2 + 2y + y - 3z^2 = z + 3y$$

und $|\det \Phi'(r, \varphi, z)| = r$ folgt:

$$\begin{aligned} A(g, \partial M) &= \int_{r=1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^2 (z + 3r \sin(\varphi)) \cdot r \, dz d\varphi dr \\ &= \int_{r=1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} z^2 r + 3z r^2 \sin(\varphi) \right) \Big|_{z=0}^2 d\varphi dr \\ &= \int_{r=1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2r + 6r^2 \sin(\varphi)) d\varphi dr \\ &= \int_{r=1}^2 (2r\varphi - 6r^2 \cos(\varphi)) \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} dr \\ &= \int_{r=1}^2 4r\pi dr = 2r^2\pi \Big|_1^2 = 6\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1. Variante (mit Minimalpolynom) (siehe Satz 6.3.7) Wir erhalten

$$v = y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und damit $A^2v + 9v = 0$. Das zugehörige Polynom

$$p(X) = X^2 + 9$$

hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 3i$, und damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = \cos(3x), \quad g_2(x) = \sin(3x).$$

Das Anfangswertproblem hat dann die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v & Av \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} M(0)^{-T} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{pmatrix}$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(3x) - \sin(3x) \\ -2\sin(3x) \\ \cos(3x) + \frac{2}{3}\sin(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Variante (mit charakteristischem Polynom) (siehe Satz 6.3.4) Wie oben erhalten wir

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(X) = (3 - X)((3 - X)(-3 - X) + 18) = (3 - X)(X^2 + 9)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 3i$, $\lambda_3 = 3$. Das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung lautet damit

$$g_1(x) = \cos(3x), \quad g_2(x) = \sin(3x), \quad g_3(x) = e^{3x}.$$

Das Anfangswertproblem hat dann die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v & Av & A^2v \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} M(0)^{-T} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) & e^{3x} \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) & 3e^{3x} \\ -9\cos(3x) & -9\sin(3x) & 9e^{3x} \end{pmatrix},$$

also

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(3x) - \sin(3x) + e^{3x}) \\ \frac{1}{3}\sin(3x) \\ \frac{1}{18}(-\cos(3x) - \sin(3x) + e^{3x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(3x) - \sin(3x) \\ -2\sin(3x) \\ \cos(3x) + \frac{2}{3}\sin(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

1. **Berechnung der Lösung y_h der homogenen Gleichung.** Das charakteristische Polynom der Gleichung lautet:

$$p(X) = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1),$$

also lauten die Grundlösungen g_1, g_2 und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung so:

$$g_1(x) = e^{3x}, \quad g_2(x) = e^{-x}, \quad y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Berechnung einer Partikulärlösung y_p der inhomogenen Gleichung.**

Ansatz nach Art der rechten Seite. Resonanz liegt nicht vor, also lautet hier der Ansatz $y_p(x) = \alpha x + \beta$, das heißt:

$$y_p(x) = \alpha x + \beta, \quad y_p'(x) = \alpha, \quad y_p''(x) \equiv 0.$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$-2\alpha - 3\alpha x - 3\beta \stackrel{!}{=} x \iff \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} = 3\beta \iff \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{9}.$$

Damit lautet eine Partikulärlösung

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Alternativlösung: Variation der Konstanten. Ansatz $y_p(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x}$. Wronski-Matrix $M(x)$ zu den Grundlösungen:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -3e^x & e^x \end{pmatrix}.$$

Differentialgleichungen für die „Konstanten“:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -3e^x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}x \begin{pmatrix} -e^{-3x} \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Integration liefert als Stammfunktionen zum Beispiel

$$c_1(x) = -\frac{3x+1}{36}e^{-3x}, \quad c_2(x) = \frac{1}{4}(1-x)e^x,$$

was dann hier auf die Partikulärlösung $\tilde{y}_p$ führt:

$$\tilde{y}_p(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} = y_p(x).$$

Zufällig gilt hier $y_p = \tilde{y}_p$.

3. **Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.** Die Gesamtlösung y ist also durch

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(4 + x^2)y' = 4 + y^2, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: Den Definitionsbereich der Lösung müssen Sie nicht bestimmen.**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**Es ist $4 + x^2 > 0$ und $4 + y^2 > 0$, also kann man die Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ separieren:

$$\begin{aligned} (4 + x^2)y' = 4 + y^2 &\iff \frac{y'}{4 + y^2} = \frac{1}{4 + x^2} \\ &\iff \int \frac{y'}{4 + y^2} dx = \int \frac{1}{4 + x^2} dx \\ &\iff \int \frac{1}{4 + w^2} dw|_{w=y} = \int \frac{1}{4 + x^2} dx \\ &\iff \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (w/2)^2} dw|_{w=y} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (x/2)^2} dx \\ &\iff \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da 0 im Definitionsbereich ist, löst man nach y mit dem Hauptzweig der Tangens-Funktion auf:

$$y(x) = 2 \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\right),$$

Anfangswerte anpassen:

$$y(0) = 2 \tan C \stackrel{!}{=} 2 \iff C = \frac{\pi}{4},$$

also

$$y(x) = 2 \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right).$$

Variante „automatisch richtige Anfangswerte“: Natürlich könnte man auch bestimmt integrieren:

$$\begin{aligned} (4 + x^2)y' = 4 + y^2 \quad \text{und} \quad y(0) = 2 \\ &\iff \int_0^x \frac{y'(\xi)}{4 + (y(\xi))^2} d\xi = \int_0^x \frac{1}{4 + \xi^2} d\xi \quad \text{und} \quad y(0) = 2 \\ &\iff \int_2^y \frac{1}{4 + \eta^2} d\eta = \int_0^x \frac{1}{4 + \xi^2} d\xi \\ &\iff \arctan\left(\frac{\eta}{2}\right)\Big|_{\eta=2}^y = \arctan\left(\frac{\xi}{2}\right)\Big|_{\xi=0}^x \\ &\iff \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \arctan(1) \\ &\iff y(x) = 2 \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (b) Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an, gegen welchen Wert die Fourier-Reihe von f im Punkt x konvergiert.
- (c) Begründen Sie, ob f eine 2π -periodische Stammfunktion besitzt. Falls das so ist, geben Sie die Fourier-Reihe einer solchen Stammfunktion an.

Hinweise: Ausdrücke der Form $\sin(j\pi/2)$ bzw. $\cos(j\pi/2)$ müssen ausgerechnet werden. Ausdrücke der Form $1 \pm (-1)^j$ müssen nicht weiter vereinfacht werden ($j \in \mathbb{N}_0$).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

- (a) Die Funktion f ist offenbar ungerade, daher gilt $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.
Für die Sinus-Koeffizienten b_k , $k \in \mathbb{N}$, erhält man unter Ausnutzung der Eigenschaften von f

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx) dx = \frac{2}{k\pi} \left[-\cos(kx) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\frac{\pi}{2})) \end{aligned}$$

Also gilt

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{j\pi} (1 - (-1)^j) & \text{für } k = 2j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist dann

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^j}{2j} \sin(2jx) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2(2l+1)} \sin(2(2l+1)x) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1} + \frac{\sin((4j+2)x)}{2j+1} \right). \end{aligned}$$

- (b) f ist stetig differenzierbar in den Stellen $-\pi, \pi$ und in (π, π) bis auf die Sprungstellen bei $\pm \frac{\pi}{2}$ und 0, da f stückweise konstant ist existieren die einseitigen Grenzwerte, also konvergiert die Fourierreihe nach Satz 7.3.4 gegen die folgenden Werte in $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1} + \frac{\sin((4j+2)x)}{2j+1} \right) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}, \\ -\frac{1}{2} & x = -\frac{\pi}{2}, \\ 0 & x = 0, \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- (c) Da die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe ist, ist der erste Kosinuskoeffizient a_0 natürlich 0 und f besitzt eine (stückweise) Stammfunktion F , die ebenfalls 2π -periodisch ist.

Gliedweise integration liefert

$$\begin{aligned} F(x) &\sim -\frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^j}{4j^2} \cos(2jx) \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2} + \frac{\cos((4j+2)x)}{2(2j+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Rotiert man die Menge

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\pi, z = \cos y\}$$

um die z -Achse, so entsteht die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Zirkulation von

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = \left(-\frac{y}{4\pi^2}, 0, 0\right)^\top$$

längs des Flächenrandes von F .

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Es sei der Normalbereich

$$\bar{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq \sin(x^2)\}$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = (x^2, -2xy, \arcsin(z))^\top$$

gegeben. Bestimmen Sie den Ausfluss von g durch den Rand von $\bar{V}$.

Hinweis: Sie dürfen

$$\frac{d}{dt} \arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in (-1, 1),$$

verwenden.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' = \sin(4x) - 4x.$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.

Hinweis: Ausdrücke der Form $\sin(j\frac{\pi}{2})$ und $\cos(j\frac{\pi}{2})$, $j \in \mathbb{N}_0$, müssen ausgerechnet werden.

(b) Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an gegen welche Wert die Fourier-Reihe von f im Punkte x konvergiert.

(c) Besitzt f eine 2π -periodische Stammfunktion? Falls ja, geben Sie ihre Fourierreihe an.

Lösungsvorschläge zur Klausur für bau, ern, fnt, IuI, mach, tema, umw, verf

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Rotiert man die Menge

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\pi, z = \cos y\}$$

um die z -Achse, so entsteht die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Zirkulation von

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = \left(-\frac{y}{4\pi^2}, 0, 0\right)^\top$$

längs des Flächenrandes von F .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

1. Variante: Mit Stokes

Mit dem Satz von Stokes gilt für die Zirkulation längs des Randes ∂F von F :

$$Z(g, \partial F) = \iint_F \operatorname{rot} g \cdot n dO.$$

Eine reguläre Parametrisierung von F wird z.B. durch

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \cos r)^\top$$

gegeben. Damit ist

$$\Phi_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -\sin r)^\top, \quad \Phi_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)^\top$$

$$\Phi_r \times \Phi_\varphi(r, \varphi) = (r \sin r \cos \varphi, r \sin r \sin \varphi, r)^\top$$

und

$$\operatorname{rot} g(\Phi(r, \varphi)) = \left(0, 0, \frac{1}{4\pi}\right)^\top.$$

Somit

$$\begin{aligned} Z(g, \partial F) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(0, 0, \frac{1}{4\pi}\right)^\top \cdot (r \sin r \cos \varphi, r \sin r \sin \varphi, r)^\top dr d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} r^2 \Big|_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

2. Variante: Direkt über den Rand

Der Rand ∂F von F ist ein in der Ebene $z = 1$ gelegener Kreis mit Radius 2π .
Eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂F erhalten wir somit durch

$$C_{\partial F} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad C_{\partial F}(t) = (2\pi \cdot \cos t, 2\pi \cdot \sin t, 1)^\top.$$

Per Definition ist die Zirkulation von g längs ∂F das Wegintegral über ∂F :

$$Z(g, \partial F) = \int_{\partial F} g(s) ds = \int_0^{2\pi} g(C_{\partial F}(t)) \cdot C'_{\partial F}(t) dt.$$

Da

$$g(C_{\partial F}(t)) = \left(-\frac{\sin t}{2\pi}, 0, 0\right)^\top$$

$$C'_{\partial F}(t) = (-2\pi \sin t, 2\pi \cos t, 0)^\top$$

folgt

$$Z(g, \partial F) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Es sei der Normalbereich

$$\bar{V} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq \sin(x^2)\}$$

sowie

$$g: \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = (x^2, -2xy, \arcsin(z))^\top$$

gegeben. Bestimmen Sie den Ausfluss von g durch den Rand von $\bar{V}$.

Hinweis: Sie dürfen

$$\frac{d}{dt} \arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in (-1, 1),$$

verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Es ist $0 \leq \sin(x^2) \leq 1$ für $-1 \leq x \leq 1$. Die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, z = 0\}$$

ist somit ein zweidimensionaler Normalbereich und die gegebene Menge $\bar{V}$ ein Normalbereich bezüglich der (x, y) -Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Nach dem Gausschen Satz ist der Ausfluss

$$A(g, \bar{V}) = \iiint_{\bar{V}} \operatorname{div} g(x, y, z) dx dy dz.$$

Mit

$$\operatorname{div} g(x, y, z) = 2x - 2x + \frac{\partial}{\partial z} \arcsin(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

und den obigen Überlegungen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} A(g, \bar{V}) &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{1-x^2} \int_{z=0}^{\sin(x^2)} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz dy dx. \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{1-x^2} \arcsin(z) \Big|_0^{\sin(x^2)} dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 x^2 y \Big|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_{x=-1}^1 x^2 - x^4 dx = 2 \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 \right) \\ &= 2 \cdot (1/3 - 1/5) = 4/15. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Für die **Lösung des homogenen Systems** ermitteln wir (analog zu 6.4.5) ein Fundamentalsystem. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\chi(X) = (2 - X)(6 - X) + 4 = X^2 - 8X + 16 = (X - 4)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 4$. Damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = e^{4x}, \quad g_2(x) = x e^{4x}.$$

Für die zugehörige Wronskimatrix und ihre Inverse in 0 ergibt sich

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & (4x+1)e^{4x} \end{pmatrix}, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von dem ersten Einheitsvektor e_1 erhalten wir die linear unabhängigen Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Lösung des homogenen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = e_1$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4x} \\ x e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Das zweite Element des Fundamentalsystems erhalten wir

Variante 1: durch Ableiten von f_1

$$f_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{4x} \begin{pmatrix} (1-2x) & (2-8x) \\ x & (4x+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = e^{4x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4x+1) & -(2-8x) \\ -x & (1-2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was auf $c_1(x) = -4x$, $c_2(x) = x$ und damit auf die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} f_p(x) &= -4x \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + x \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x} \\ &= \begin{pmatrix} -4x+8x^2+2x-8x^2 \\ -4x^2+4x^2+x \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x} \end{aligned}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h + f_p$ gegeben:

$$f(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Variante 2: f_2 mittels Eigenvektor: man bestimmt einen Eigenvektor zum Eigenwert 4 und bestimmt damit die 2. Grundlösung zu

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Dann weiter wie oben aber mit geänderten Zahlen: Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{4x} \begin{pmatrix} (1-2x) & -2 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = e^{4x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -x & (1-2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was auf $c_1(x) \equiv 0$, $c_2(x) = x$

und damit auf die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h + f_p$ gegeben:

$$f(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 - 2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' = \sin(4x) - 4x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

1. **Berechnung der Lösung y_h der homogenen Gleichung.** Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$p(X) = X^2 - 4X = X(X - 4),$$

also lauten die Grundlösungen g_1 und g_2 und die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung wie folgt:

$$g_1(x) = e^{4x}, \quad g_2(x) = e^{0x} \equiv 1, \quad y_h(x) = c_1 e^{4x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Berechnung einer Partikulärlösung y_p der inhomogenen Gleichung.**

Ansatz nach Art der rechten Seite

Ausnutzen des Superpositionsprinzips, das heißt, $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ mit

$$y''_{p,1}(x) - 4y'_{p,1}(x) = \sin(4x) \text{ und } y''_{p,2}(x) - 4y'_{p,2}(x) = 4x.$$

zu $y_{p,1}$: Ansatz $y_{p,1}(x) = \Im(z e^{4ix})$ mit einer Konstanten $z \in \mathbb{C}$ liefert

$$-16z - 16iz \stackrel{!}{=} 1 \iff z = -\frac{1}{16} \frac{1}{1+i} = -\frac{1}{16} \frac{1-i}{2} = \frac{1}{32}(i-1).$$

Also:

$$\begin{aligned} y_{p,1}(x) &= \Im\left(\frac{1}{32}(i-1)(\cos(4x) + i \sin(4x))\right) \\ &= \frac{1}{32} \Im(-\cos(4x) - \sin(4x) + i(\cos(4x) - \sin(4x))) \\ &= \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32}. \end{aligned}$$

Alternative zu $y_{p,1}$ ohne komplexe Zahlen: Dann lautet der Ansatz natürlich $\tilde{y}_{p,1}(x) = c \cos(4x) + s \sin(4x)$, zugehörige zweite Ableitungen:

$$\tilde{y}'_{p,1}(x) = 4(-c \sin(4x) + s \cos(4x)), \quad \tilde{y}''_{p,1}(x) = -16(c \cos(4x) + s \sin(4x)).$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} -16(c \cos(4x) + s \sin(4x) - c \sin(4x) + s \cos(4x)) &\stackrel{!}{=} \sin(4x) \\ \iff -16 \cos(4x)(s+c) + 16 \sin(4x)(c-s) &= \sin(4x) \\ \iff s = -c \text{ und } c &= \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

also

$$\tilde{y}_{p,1}(x) = y_{p,1}(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32}.$$

zu $y_{p,2}$: Resonanzfall, Ansatz also $y_{p,2}(x) = x(\alpha x + \beta)$, das heißt:

$$y_{p,2}(x) = \alpha x^2 + \beta x, \quad y'_{p,2}(x) = 2\alpha x + \beta, \quad y''_{p,2}(x) = 2\alpha.$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert

$$2\alpha - 8\alpha x - 4\beta \stackrel{!}{=} -4x \iff \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 2\beta \iff \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}.$$

Also erhält man $y_{p,2}(x) = (2x^2 + x)/4$.

Insgesamt ist dann

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4}.$$

Alternativweg: Variation der Konstanten Ansatz $y_p(x) = c_1(x)e^{4x} + c_2(x)$. Wronski-Matrix $M(x)$ zu den Grundlösungen:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & 1 \\ 4e^{4x} & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = -\frac{1}{4}e^{-4x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix},$$

Differentialgleichungen für die „Konstanten“:

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}e^{-4x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(4x) - 4x \end{pmatrix}$$

Umformen liefert

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-4x}(\sin(4x) - 4x) \\ -\sin(4x) + 4x \end{pmatrix}$$

Integration liefert als Stammfunktionen z.B.

$$c_1(x) = \frac{8x + 2 - \cos(4x) - \sin(4x)}{32} e^{-4x},$$

$$c_2(x) = \frac{2\cos(4x) + 16x^2}{32},$$

was dann hier auf die folgende Partikulärlösung $\tilde{y}_p$ führt:

$$\tilde{y}_p(x) = c_1(x)e^{4x} + c_2(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4} + \frac{1}{16} = y_p + \frac{1}{16}.$$

3. Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Gesamtlösung $y(x)$ ist also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4} + c_1 e^{4x} + c_2,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.

Hinweis: Ausdrücke der Form $\sin(j\frac{\pi}{2})$ und $\cos(j\frac{\pi}{2})$, $j \in \mathbb{N}_0$, müssen ausgerechnet werden.

(b) Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an gegen welche Wert die Fourier-Reihe von f im Punkte x konvergiert.

(c) Besitzt f eine 2π -periodische Stammfunktion? Falls ja, geben Sie ihre Fourierreihe an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Es ist $b_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ da $f(x)$ gerade ist.

Für $j \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(jx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(jx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(jx)}{j} \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot \sin(\frac{j\pi}{2})}{\pi j} \end{aligned}$$

Durch eine Fallunterscheidung erhalten wir somit:

$$a_j = \frac{2}{\pi j} \cdot \begin{cases} 0, & \text{für } j = 2k, \\ +1, & \text{für } j = 4k-3, \\ -1, & \text{für } j = 4k-1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es fehlt noch der Fall $j = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{2}{\pi} [x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Somit ist

$$f(x) \sim \mathcal{F}_f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos((4k-3)x)}{(4k-3)\pi} - \frac{\cos((4k-1)x)}{(4k-1)\pi} \right).$$

- (b) f ist auf $[-\pi, \pi] \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}\}$ stetig und macht an den Stellen $\pm \frac{\pi}{2}$ einen Sprung der Höhe 1. Somit konvergiert die Fourierreihe $\mathcal{F}_f(x)$ für $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}\}$ gegen $f(x)$ und in den Punkten $x_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ ist

$$\mathcal{F}_f(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right) = \frac{1}{2}.$$

- (c) Da $a_0 \neq 0$ kann keine periodische Stammfunktion von f existieren.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Die Fläche T im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben als

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 - |z|\}.$$

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (xz, yz, \frac{1}{3}z^3)$ den Ausfluss $A(f, T)$.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x) + h(x)$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad h(x) := \begin{pmatrix} 4e^{-2x} \\ -4e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 8 + 4\cos(2x).$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad x \in [-1, 1), \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{mit}$$

$$f_1(x) := \sin(7\pi x) \quad \text{und} \quad f_2(x) := \begin{cases} 3x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Die Fläche T im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben als

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 - |z|\}.$$

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (xz, yz, \frac{1}{3}z^3)$ den Ausfluss $A(f, T)$.

Lösungsvorschlag: Nach dem Satz von Gauss gilt: $A(f, T) = \int \int \int_{\bar{V}} \operatorname{div} f \, dx \, dy \, dz$, wobei $\bar{V}$ das Innere von T bezeichnet. Es ist

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 2z + z^2.$$

Benutze Zylinderkoordinaten: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ mit $0 \leq r \leq \sqrt{1 - |z|}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ und $|z| \leq 1$.

Die Funktionaldeterminante für die Koordinatentransformation ist r .

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} A(f, T) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-|z|}} r \cdot \operatorname{div} f \, dr \, dz \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-|z|}} r(2z + z^2) \, dr \, dz \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} r^2 (2z + z^2) \right]_0^{\sqrt{1-|z|}} dz \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |z|) \left(\frac{1}{2} z^2 + z \right) dz \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 (1 + z) \left(\frac{1}{2} z^2 + z \right) dz + \int_0^1 (1 - z) \left(\frac{1}{2} z^2 + z \right) dz \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{8} z^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{8} z^4 \right]_0^1 \right) d\theta = \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Alternativ: Ohne den Satz von Gauss lässt sich der Ausfluss direkt berechnen als

$$A(f, T) = \int \int_T f \cdot n \, dO.$$

Dazu parametrisiert man T wieder durch Zylinderkoordinaten:

$$\Phi : [-1, 1] \times [0, 2\pi) \rightarrow T, \quad (z, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-|z|} \cos \theta \\ \sqrt{1-|z|} \sin \theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Normalenvektoren erhält man durch das Kreuzprodukt der Ableitungen: für $z > 0$ ist

$$\Phi_z \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{1-z}} \cos \theta \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-z}} \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z} \sin \theta \\ \sqrt{1-z} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z} \cos \theta \\ -\sqrt{1-z} \sin \theta \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und für $z < 0$ analog

$$\Phi_z \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{1+z}} \cos \theta \\ \frac{1}{2\sqrt{1+z}} \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{1+z} \sin \theta \\ \sqrt{1+z} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+z} \cos \theta \\ -\sqrt{1+z} \sin \theta \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmt man diese Vektoren an ausgewählten Punkten, zum Beispiel an $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(-\frac{1}{2}, 0)$, so sieht man, dass äusseren Normalenvektoren in beiden Fällen durch $-\Phi_z \times \Phi_\theta$ gegeben sind (der äussere Einheitsnormalenvektor n wäre dann $(-\Phi_z \times \Phi_\theta) \cdot |\Phi_z \times \Phi_\theta|^{-1}$, die Bestimmung von n ist aber für die Berechnung des Integrals nicht nötig). Damit berechnet man nun

$$\begin{aligned} A(f, T) &= \int \int_T f \cdot n \, dO = \int \int_T f(\Phi(z, \theta)) \cdot n |\Phi_z(z, \theta) \times \Phi_\theta(z, \theta)| \, dz \, d\theta = \\ &= \int \int_T f(\Phi(z, \theta)) \cdot (-\Phi_z \times \Phi_\theta) \, dz \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 \begin{pmatrix} z\sqrt{1+z} \cos \theta \\ z\sqrt{1+z} \sin \theta \\ \frac{1}{3}z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+z} \cos \theta \\ \sqrt{1+z} \sin \theta \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \begin{pmatrix} z\sqrt{1-z} \cos \theta \\ z\sqrt{1-z} \sin \theta \\ \frac{1}{3}z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-z} \cos \theta \\ \sqrt{1-z} \sin \theta \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dz \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 z(1+z) - \frac{1}{6}z^3 \, dz + \int_0^1 z(1-z) - \frac{1}{6}z^3 \, dz \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{24}z^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{24}z^4 \right]_0^1 d\theta = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x) + h(x)$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad h(x) := \begin{pmatrix} 4e^{-2x} \\ -4e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Zuerst bestimmen wir die Lösungen des homogenen Anteils $y'(x) = Ay(x)$. Wir lösen dazu zunächst ein Anfangswertproblem $y'(x) = Ay(x)$ mit $y(0) = v$. Wir wählen hier

$$v := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

betonen aber, dass man auch einen anderen Vektor wählen kann und analog vorgehen kann (solange dessen Bild unter A linear unabhängig zu diesem Vektor ist – ansonsten, also bei einem Eigenvektor, muss das Verfahren wiederholt werden). Es ist

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher sicherlich $Av \notin \langle v \rangle$. Für

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gilt jedoch $A^2v = 4Av - 4v$, wie man mit dem Gauß-Algorithmus sieht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $p(A)v = 0$ mit $p(X) := X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$.

Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $p(D) = 0$, d.h. $y'' - 4y' + 4y = 0$, ist

$$e^{2x}, \quad xe^{2x}.$$

Die Wronski-Matrix dieses Fundamentalsystems ist

$$M(x) := \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$(M(0)^{-1})^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen nun ein Element eines Fundamentalsystems von $y'(x) = Ay(x)$ durch

$$g_1(x) := (v \mid Av) (M(0)^{-1})^T \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} - xe^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Eine dazu linear unabhängige Lösung ist

$$g_2(x) := Ag_1(x) = g_1'(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - 2xe^{2x} \\ e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung zu $y'(x) = Ay(x)$ ist also $\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung von $y'(x) = Ay(x) + h(x)$ mittels Variation der Konstanten. Die Wronski-Matrix des Fundamentalsystems (g_1, g_2) von $y'(x) = Ay(x)$ ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - xe^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von $M(x)$ ist laut Vorlesung

$$M(x)^{-1} = M(0)^{-1}M(-x)M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} + 2xe^{-2x} & 2xe^{-2x} - e^{-2x} \\ -xe^{-2x} & -xe^{-2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Wir müssen nun Funktionen $c_1(x), c_2(x)$ finden für die gilt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} 8e^{-4x} \\ -4e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Wir integrieren dazu die rechte Seite einfach komponentenweise und erhalten:

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-4x} \\ e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung zu $y'(x) = Ay(x) + h(x)$ ist nun

$$g_p(x) := M(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$\alpha g_1(x) + \beta g_2(x) + g_p(x)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 8 + 4\cos(2x).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**(a) Lösung der homogenen Gleichung**

Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' + 4y = 0$:

$$p(X) = X^2 + 4 = (X + 2i)(X - 2i).$$

Dieses hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ und daher lautet die homogene Lösung:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Hier nutzt man das Superpositionsprinzip aus, d. h. man sucht Lösungen f_{p_1} von $y''_{p_1} + 4y_{p_1} = 8$ und f_{p_2} von $y''_{p_2} + 4y_{p_2} = 4\cos(2x)$ und bekommt damit die partikuläre Lösung $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

(1): Störfunktion h_1

Für die Störfunktion $h_1(x) = 8$ erhält man den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = ae^{0x},$$

da keine Resonanz vorliegt. Zweimaliges Differenzieren und Einsetzen liefert

$$0 + 4a \stackrel{!}{=} 8.$$

Somit lautet das Ergebnis nach Koeffizientenvergleich $f_{p_1}(x) = 2$.

(2): Störfunktion h_2 komplex

Anstatt $h_2(x)$ betrachtet man zunächst die komplexe Störfunktion

$$\tilde{h}_2(x) = 4e^{2ix}.$$

Es liegt Resonanz vor mit $\lambda_1 = 2i$ und Vielfachheit $m = 1$, daher lautet der Ansatz

$$\tilde{f}_{p_2}(x) = axe^{2ix}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit dem Operatorenkalkül

$$(D + 2i)(D - 2i)(axe^{2ix}) \stackrel{!}{=} 4e^{2ix}$$

$$e^{2ix}(D + 4i)D(ax) \stackrel{!}{=} 4e^{2ix}$$

$$(D + 4i)(a) \stackrel{!}{=} 4$$

$$4ia \stackrel{!}{=} 4$$

und somit $a = -i$. Die partikuläre Lösung $\tilde{f}_{p_2}$ lautet also

$$\tilde{f}_{p_2}(x) = -ixe^{2ix} = x \sin(2x) - ix \cos(2x).$$

Da die eigentliche Störfunktion der Realteil der komplexen Störfunktion ist $h_2(x) = \Re(\tilde{h}_2(x))$ folgt damit auch für die gesuchte Partikulärlösung

$$f_{p_2}(x) = \Re(\tilde{f}_{p_2}(x)) = x \sin(2x).$$

(3): **Störfunktion h_2 reell**

Man kann das Rechnen mit den komplexen Störfunktionen auch vermeiden, indem man direkt den folgenden reellen Ansatz macht

$$f_{p_2}(x) = ax \sin(2x) + bx \cos(2x).$$

Zweimaliges Ableiten dieser Ansatzfunktion liefert dann

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= (2ax + b) \cos(2x) + (a - 2bx) \sin(2x), \\ f''_{p_2}(x) &= (4a - 4bx) \cos(2x) - (4b + 4ax) \sin(2x). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man durch einen Koeffizientenvergleich somit ein Gleichungssystem für die Unbekannten a und b

$$4a \cos(2x) - 4b \sin(2x) \stackrel{!}{=} 4 \cos(2x).$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a = 1$, $b = 0$ und damit hat die partikuläre Lösung zu $h_2(x)$ wie vorher die Form

$$f_{p_2}(x) = x \sin(2x).$$

Die komplette Partikulärlösung erhält man durch Addition der Einzellösungen

$$f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = 2 + x \sin(2x).$$

(c) **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten**

Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $M^{-1}(x)$ berechnen

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad M^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4[2 + \cos(2x)] \end{pmatrix}$$

und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin(2x) - 2 \sin(2x) \cos(2x) \\ 4 \cos(2x) + 2 \cos^2(2x) \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass

$$-4 \int \sin(2x) dx = 2 \cos(2x) \quad \text{und} \quad 4 \int \cos(2x) dx = 2 \sin(2x).$$

Zur Bestimmung der restlichen Stammfunktionen kann man z.B. die Substitution $z = \sin(2x) \rightsquigarrow dz = 2 \cos(2x) dx$ oder $z = \cos(2x) \rightsquigarrow dz = -2 \sin(2x) dx$ nutzen

$$-\int 2 \sin(2x) \cos(2x) dx = -\int z dz = -\frac{\sin^2(2x)}{2} \quad \text{bzw.} \quad -\int z dz = \frac{\cos^2(2x)}{2}$$

bzw. partiell integrieren

$$\begin{aligned} \int \cos^2(2x) dx &= \int \cos(2x) \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} \cos(2x) + \int \sin^2(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) + \int (1 - \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x) + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 2 \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin^2(2x) \quad \text{bzw.} \quad c_1(x) = 2 \cos(2x) + \frac{1}{2} \cos^2(2x), \\ c_2(x) &= 2 \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \sin(2x) + x, \end{aligned}$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) \\ &= 2 \cos^2(2x) - \frac{1}{2} \sin^2(2x) \cos(2x) + 2 \sin^2(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \sin^2(2x) + x \sin(2x) \\ &= 2 + x \sin(2x) \quad \text{bzw.} \\ f_p(x) &= \frac{1}{2} \cos(2x) + 2 + x \sin(2x). \end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = 2 + c_1 \cos(2x) + (c_2 + x) \sin(2x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Die 2-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad x \in [-1, 1), \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{mit}$$

$$f_1(x) := \sin(7\pi x) \quad \text{und} \quad f_2(x) := \begin{cases} 3x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

- (a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
 (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Zum Entwickeln der reellen Fourierreihe von f bietet es sich an die Fourierreihen von f_1 und f_2 zunächst separat zu bestimmen und danach zu kombinieren.

- (1) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für f_1 sieht man sofort, dass

$$a_{1,k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad b_{1,k} = (\mathbb{1}_{\{7\}}(k)) = \begin{cases} 1, & k = 7 \\ 0, & k \neq 7 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- (2) Der erste Koeffizient $a_{2,0}$ für f_2 folgt durch einfache Integration sofort:

$$a_{2,0} = 3 \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 0 dx = 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{2}.$$

Zum Bestimmen der allgemeinen Koeffizienten ist es hilfreich zuerst die allgemeinen Stammfunktionen durch partielle Integration auszurechnen

$$F_1(x) = \int x \cos(k\pi x) dx = \frac{x}{k\pi} \sin(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x),$$

$$F_2(x) = \int x \sin(k\pi x) dx = -\frac{x}{k\pi} \cos(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2} \sin(k\pi x).$$

Die Koeffizienten erhält man dann durch Einsetzen in diese Stammfunktionen

$$a_{2,k} = 3 \int_{-1}^0 x \cos(k\pi x) dx + \int_0^1 0 \cos(k\pi x) dx = 3F_1(0) - 3F_1(-1)$$

$$= \frac{3}{k^2\pi^2} - \frac{3}{k^2\pi^2} \cos(-k\pi) = \frac{3}{k^2\pi^2} (1 - (-1)^k),$$

$$b_{2,k} = 3 \int_{-1}^0 x \sin(k\pi x) dx + \int_0^1 0 \sin(k\pi x) dx = 3F_2(0) - 3F_2(-1)$$

$$= -\frac{3}{k\pi} \cos(-k\pi) = -\frac{3(-1)^k}{k\pi}.$$

- (3) Alternativ führt auch die Rechnung im Komplexen für f_2 mit $T = 2$ und $\omega = \pi$ zum Ziel. Durch partielles Integrieren bekommt man

$$F_3(x) = \int x e^{-ik\pi x} dx = \left(\frac{ix}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} \right) e^{-ik\pi x}$$

und somit die Koeffizienten $c_{2,k}$ analog zu den Rechnungen im Reellen als

$$\begin{aligned} c_{2,k} &= \frac{3}{2} \int_{-1}^0 x e^{-ik\pi x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 0 e^{-ik\pi x} dx = \frac{3}{2} F_3(0) - \frac{3}{2} F_3(-1) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k^2\pi^2} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{-i}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} \right) (-1)^k \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{k^2\pi^2} (1 - (-1)^k) + i \frac{3}{2} \frac{(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $c_{2,-k} = \bar{c}_{2,k}$ gilt und bekommt somit wie vorher

$$a_{2,k} = 2\Re(c_{2,k}) = \frac{3}{k^2\pi^2} (1 - (-1)^k) \quad \text{und} \quad b_{2,k} = -2\Im(c_{2,k}) = -\frac{3(-1)^k}{k\pi}.$$

- (4) Fasst man nun alle vorher berechneten Koeffizienten zusammen und nutzt aus, dass die Koeffizienten mit geraden Indizes in der Cosinusreihe von f_2 verschwinden, so lautet die Fourierreihe von f

$$\begin{aligned} f(x) &\sim -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k^2} \cos(k\pi x) \\ &\quad - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\pi x) + \sin(7\pi x) \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{\{7\}}(k) - \frac{3(-1)^k}{k\pi} \right) \sin(k\pi x). \end{aligned}$$

- (b)** Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(2k-1, 2k) \cup (2k, 2k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(2k-1, 2k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$. In den Punkten $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 3, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow 2k+1} f(x) + \lim_{x \searrow 2k+1} f(x) \right) = \frac{1}{2} (0 - 3) = -\frac{3}{2}.$$

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Fläche T durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : [0, \frac{3\pi}{2}] \times [0, \frac{3\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \begin{pmatrix} (3 + \cos(t)) \cos(s) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

parametrisiert. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix}\end{aligned}$$

entlang der Randkurve von T .

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems $y' = Ay + h$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ 4e^x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2 + 3xe^{2x}.$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Abbildung, die gegeben ist durch

$$f(x) := \sinh(x), \quad x \in [-1, 1), \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f . Ihre Lösung darf Ausdrücke der Form $\sinh(a)$ bzw. $\cosh(b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ enthalten.
- (b) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f ? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernren, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Fläche T durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : [0, \frac{3\pi}{2}] \times [0, \frac{3\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \begin{pmatrix} (3 + \cos(t)) \cos(s) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

parametrisiert. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entlang der Randkurve von T .

Lösungsvorschlag: Bei der Zirkulation von f entlang der Randkurve von T handelt es sich um das Kurvenintegral

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot du,$$

wobei für die Randkurve eine Orientierung gewählt werden muss, wodurch das Ergebnis nur bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Sei $Q := [0, \frac{3\pi}{2}] \times [0, \frac{3\pi}{2}]$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot du = \iint_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO,$$

wobei hier die Orientierung der Randkurve ∂T verträglich sein muss mit der Einheitsnormalen n . Da das Ergebnis aber nur ohnehin bis auf Vorzeichen eindeutig ist, müssen wir uns im die im Satz von Stokes geforderte kompatible Orientierung keine Gedanken machen und werden im Folgenden einfach beide Seite als gleichwertige Lösungswege berechnen.

Lösungsweg 1: Es ist das Integral

$$\iint_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO,$$

wobei n eine Einheitsnormale an T ist, zu berechnen. Eine Einheitsnormale n an T ist gegeben durch

$$n := n(s, t) := \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|}.$$

Wir werden unten sehen, dass sich der Betrag $|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}|$ im zu berechnenden Integral rauskürzt, sodass man nicht notwendig eine Einheitsnormale bestimmen muss. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -(3 + \cos(t)) \sin(s) \\ (3 + \cos(t)) \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(t) \cos(s) \\ -\sin(t) \sin(s) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 + \cos(t)) \cos(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \sin(t) \sin(s) + \sin(t) \cos(s) (3 + \cos(t)) \cos(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 + \cos(t)) \cos(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin^2(s) \sin(t) + (3 + \cos(t)) \sin(t) \cos^2(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 + \cos(t)) \cos(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin(s) \cos(t) \\ (3 + \cos(t)) \sin(t) \end{pmatrix} = (3 + \cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(s) \cos(t) \\ \sin(s) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors ist $3 + \cos(t)$ und daher erhalten wir

$$n = \begin{pmatrix} \cos(s) \cos(t) \\ \sin(s) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - (-z) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $f_1, \dots, f_3$ die Komponentenfunktionen von f sind. In den Koordinaten von Φ ist also

$$(\operatorname{rot} f) \circ \Phi(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$((\operatorname{rot} f) \circ \Phi(s, t)) \cdot n(s, t) = \sin(t) \sin(s) \cos(t).$$

Für das Oberflächenintegral erhalten wir nun unter Berücksichtigung von 2.2.2 im HM-Skript

$$\begin{aligned} \int_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO &= \int_Q ((\operatorname{rot} f) \circ \Phi) \cdot n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| \, ds \, dt \\ &= \int_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO = \int_Q ((\operatorname{rot} f) \circ \Phi) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| \, ds \, dt \\ &= \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin(t) \sin(s) \cos(t)) (3 + \cos(t)) \, ds \, dt \\ &= \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} 3 \sin(t) \sin(s) \cos(t) + \sin(t) \sin(s) \cos(t)^2 \, ds \, dt \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration bestimmt man folgende Stammfunktionen

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta = -\frac{1}{2} \cos(\theta)^2 ,$$

$$\int \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \, d\theta = -\frac{1}{3} \cos(\theta)^3 ,$$

Damit sehen wir, dass

$$\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(t) \sin(t) \, dt = \frac{1}{2} ,$$

$$\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t) \cos(t)^2 \, dt = \frac{1}{3} ,$$

und daher

$$\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} 3 \sin(t) \sin(s) \cos(t) \, ds \, dt = 3 \frac{1}{2} \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(s) \, ds = \frac{3}{2} ,$$

$$\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t) \sin(s) \cos(t)^2 \, ds \, dt = \frac{1}{3} \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(s) \, ds = \frac{1}{3} .$$

Wir erhalten nun

$$\int_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} .$$

Lösungsweg 2: Es ist das Integral

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot du$$

zu berechnen. Die Randkurve ∂T ist durch die Einschränkung von Φ auf das Quadrat ∂Q parametrisiert. Wir durchlaufen ∂Q gegen den Uhrzeigersinn und parametrisieren die vier Seiten des Quadrats einzeln wie folgt:

$$K_1 : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$K_2 : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ t \end{pmatrix} ,$$

$$K_3 : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} - s \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} ,$$

$$K_4 : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} - t \end{pmatrix} .$$

Für die Parametrisierung des Quadrats gibt es einen Punkt.

Es gilt dann (siehe auch 2.2.2 im HM-Skript)

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot du = \sum_{i=1}^4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f \circ \Phi \circ K_i(u) \cdot (\Phi \circ K_i)'(u) \, du .$$

Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_1(s) = f \begin{pmatrix} 4 \cos(s) \\ 4 \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist das Integral über K_1 gleich 0.

Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_2(t) = f \begin{pmatrix} 0 \\ -3 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist auch das Integral über K_2 gleich 0.

Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_3(s) = f \begin{pmatrix} 3 \cos(\frac{3\pi}{2} - s) \\ 3 \sin(\frac{3\pi}{2} - s) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cos(\frac{3\pi}{2} - s) \end{pmatrix},$$

$$(\Phi \circ K_3)'(s) = \begin{pmatrix} 3 \cos(\frac{3\pi}{2} - s) \\ 3 \sin(\frac{3\pi}{2} - s) \\ -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 \sin(\frac{3\pi}{2} - s) \\ -3 \cos(\frac{3\pi}{2} - s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und daher ist auch das Integral über K_3 gleich 0.

Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_4(t) = f \begin{pmatrix} 3 + \cos(\frac{3\pi}{2} - t) \\ 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(3 + \cos(\frac{3\pi}{2} - t)) \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \end{pmatrix},$$

$$(\Phi \circ K_4)'(t) = \begin{pmatrix} 3 + \cos(\frac{3\pi}{2} - t) \\ 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \\ 0 \\ -\cos(\frac{3\pi}{2} - t) \end{pmatrix},$$

und daher ist

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f \circ \Phi \circ K_4(t) \cdot (\Phi \circ K_4)'(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(3 + \cos(\frac{3\pi}{2} - t) \right) \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \cos(\frac{3\pi}{2} - t) dt.$$

Wir können dieses Integral entweder analog zu oben mittels partieller Integration berechnen, können es aber auch mittels Substitution berechnen:

$$w := \cos(\frac{3\pi}{2} - t) \rightsquigarrow dw = \sin(\frac{3\pi}{2} - t) dt$$

und obiges Integral wird dann gleich

$$\int_0^1 (3 + w)w dw = \left[\frac{3}{2}w + \frac{1}{3}w^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Also ist auch hier

$$\int_{\partial T} f(u) \, du = \frac{11}{6} .$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems $y' = Ay + h$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ 4e^x \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Berechne zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Systems $y' = Ay$. Wähle dazu einen beliebigen Startwert, etwa $v = (1, 0)^T$, dann sind v und $Av = (-1, -4)^T$ linear unabhängig.

Das charakteristische Polynom von A ist $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, was man entweder durch Berechnung von $\det(A - \lambda I)$ oder aus der Gleichung $A^2v = 2Av - v$ erhält. Ein Fundamentalsystem der zugehörigen Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ bilden die Funktionen $g_1(x) = e^x$ und $g_2(x) = xe^x$, und daraus erhält man die Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}.$$

Auswerten bei $x_0 = 0$, Transponieren und Invertieren ergibt

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich als Lösung f_1 der homogenen Gleichung zum Anfangswert $f_1(0) = v$:

$$f_1(x) = (v|Av)(M(0)^T)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x \\ -4xe^x \end{pmatrix}.$$

Da v und Av linear unabhängig sind, kann als zweite, linear unabhängige Lösung $f_2 = f_1'$ gewählt werden:

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -e^x - 2xe^x \\ -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix}$$

Also ist mit f_1 und f_2 ein Fundamentalsystem für das homogene System gefunden. Alternativ, aber aufwendiger, kann zur Bestimmung einer zweiten, linear unabhängigen Lösung auch ein weiterer Startwert, etwa $v = (0, 1)^T$ gewählt und obige Rechnung dafür wiederholt werden.

Nun muss noch eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten berechnet werden. Die Wronski-Matrix $M(x)$ des homogenen Systems ist

$$M(x) = (f_1|f_2) = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x & -e^x - 2xe^x \\ -4xe^x & -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix}$$

Auswerten bei $x = 0$ und Invertieren ergibt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet man nun

$$M(x)^{-1} = M(0)^{-1}M(-x)M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} \\ -xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz

$$c'(x) = M(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} \\ -xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^x \\ 4e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt jetzt zu

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems als

$$f_p(x) = M(x)c(x) = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x & -e^x - 2xe^x \\ -4xe^x & -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^x \\ 4xe^x \end{pmatrix},$$

sowie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$f = f_p + c_1 f_1 + c_2 f_2 = e^x \begin{pmatrix} 2x + c_1(1 - 2x) + c_2(-1 - 2x) \\ 4x - 4c_1x + c_2(-4 - 4x) \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2 + 3xe^{2x}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y'' - 3y' + 2y = 0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

und hat die Nullstellen 1 und 2. Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h :

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1) oder durch Variation der Konstanten (Variante 2).

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - 3y' + 2y = 2 + 3xe^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p1} von $y'' - 3y' + 2y = 2 = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p2} von $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p1} + f_{p2}$.

- Zunächst zu $y'' - 3y' + 2y = 2 = h_1(x)$! Weil 0 keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p1}(x) = ae^{0x}.$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$0 + 2a = h_1(x) = 2.$$

Also $a = 1$ und $f_{p1}(x) = 1$.

- Jetzt zu $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} = h_2(x)$! Weil 2 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p2}(x) = (b + cx)x^1 e^{2x}.$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p2}(x) &= (b + 2(b + c)x + 2cx^2)e^{2x}, \\ f''_{p2}(x) &= (4b + 2c + (4b + 8c)x + 4cx^2)e^{2x}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2cxe^{2x} + (b + 2c)e^{2x} = 3xe^{2x}$$

und damit $c = \frac{3}{2}$ und $b = -3$ (Koeffizientenvergleich!). Also $f_{p2}(x) = -3xe^x + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p1}(x) + f_{p2}(x) = 1 - 3xe^x + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind, sodass

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 3xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} - 3xe^x \\ 2e^{-2x} + 3x \end{pmatrix}.$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten c_{10}, c_{20}):

$$c_1(x) = 2e^{-x} - 3(x-1)e^x + c_{10},$$

$$c_2(x) = -e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 + c_{20}$$

(partielle Integration für c_1 !). Wählt man die Integrationskonstanten c_{10}, c_{20} beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p durch

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) = (2e^{-x} - 3(x-1)e^x)e^x + (-e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2)e^{2x} \\ &= 1 + 3e^{2x} - 3xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}. \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto 3e^{2x}$ der homogenen Gleichung. Wählt man die Integrationskonstanten c_{01}, c_{02} als $c_{01} = 0$ und $c_{02} = -3$, so erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 1 - 3xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Abbildung, die gegeben ist durch

$$f(x) := \sinh(x), \quad x \in [-1, 1), \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f . Ihre Lösung darf Ausdrücke der Form $\sinh(a)$ bzw. $\cosh(b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ enthalten.
- (b) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f ? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) Weil $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (in Worten: weil $\sinh$ der ungerade Anteil von $\exp$ ist), ist $\sinh$ ungerade und damit gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir müssen also nur noch

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) dx = \int_{-1}^1 \sinh(x) \sin(n\pi x) dx$$

berechnen für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei $T = 2$ die Periode von f ist).

Variante 1: Ausnutzung von $\sinh = \cosh'$ und $\cosh = \sinh'$

Wegen $\sinh = \cosh'$ und $\cosh = \sinh'$ kann man das b_n -Integral mithilfe (zweimaliger) partieller Integration berechnen, und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \sinh(x) \sin(n\pi x) dx &= \cosh(x) \sin(n\pi x) - n\pi \int \cosh(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \cosh(x) \sin(n\pi x) - n\pi \left(\sinh(x) \cos(n\pi x) + n\pi \int \sinh(x) \sin(n\pi x) dx \right) \\ &= \cosh(x) \sin(n\pi x) - n\pi \sinh(x) \cos(n\pi x) - n^2 \pi^2 \int \sinh(x) \sin(n\pi x) dx, \end{aligned}$$

das heißt (Auflösen der obigen Gleichung!)

$$\int \sinh(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{1+n^2\pi^2} \left(\cosh(x) \sin(n\pi x) - n\pi \sinh(x) \cos(n\pi x) \right)$$

und damit ergibt sich mit $\sin(\pm n\pi) = 0$ und $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 \sinh(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{1+n^2\pi^2} \left(\cosh(x) \sin(n\pi x) - n\pi \sinh(x) \cos(n\pi x) \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{1+n^2\pi^2} \left(-n\pi \sinh(1) \cos(n\pi) + n\pi \sinh(-1) \cos(n\pi) \right) \\ &= \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \sinh(1). \end{aligned}$$

Variante 2: Ausschreiben von $\sinh$ in die exp-Bestandteile

Wegen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ kann man das b_n -Integral auch in zwei Integrale aufteilen und diese dann wieder mit (zweimaliger) partieller Integration getrennt berechnen.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(n\pi x) dx &= e^x \sin(n\pi x) - n\pi \int e^x \cos(n\pi x) dx \\ &= e^x \sin(n\pi x) - n\pi \left(e^x \cos(n\pi x) + n\pi \int e^x \sin(n\pi x) dx \right), \\ \int e^{-x} \sin(n\pi x) dx &= -e^{-x} \sin(n\pi x) + n\pi \int e^{-x} \cos(n\pi x) dx \\ &= -e^{-x} \sin(n\pi x) + n\pi \left(-e^{-x} \cos(n\pi x) - n\pi \int e^{-x} \sin(n\pi x) dx \right),\end{aligned}$$

das heißt (Auflösen der obigen Gleichungen!)

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(n\pi x) dx &= \frac{1}{1+n^2\pi^2} \left(e^x \sin(n\pi x) - n\pi e^x \cos(n\pi x) \right), \\ \int e^{-x} \sin(n\pi x) dx &= \frac{1}{1+n^2\pi^2} \left(-e^{-x} \sin(n\pi x) - n\pi e^{-x} \cos(n\pi x) \right)\end{aligned}$$

und damit ergibt sich mit $\sin(\pm n\pi) = 0$ und $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\begin{aligned}b_n &= \int_{-1}^1 \sinh(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 e^x \sin(n\pi x) dx - \int_{-1}^1 e^{-x} \sin(n\pi x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2(1+n^2\pi^2)} \left(e^x \sin(n\pi x) - n\pi e^x \cos(n\pi x) + e^{-x} \sin(n\pi x) + n\pi e^{-x} \cos(n\pi x) \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2(1+n^2\pi^2)} \left(-n\pi e^1 \cos(n\pi) + n\pi e^{-1} \cos(n\pi) + e^{-1} \cos(n\pi) - e^1 \cos(n\pi) \right) \\ &= \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \sinh(1).\end{aligned}$$

Schließlich müssen wir die eben bestimmten reellen Fourierkoeffizienten noch zur reellen Fourierreihe Sf von f zusammensetzen:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = -2\pi \sinh(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2\pi^2} \sin(n\pi x).$$

- (b) Wie man sofort sieht, ist $f|_{(-1+2k, 1+2k)}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ stetig differenzierbar und sowohl f als auch f' sind stetig fortsetzbar auf das abgeschlossene Intervall $[-1+2k, 1+2k]$, mit anderen Worten: die einseitigen limites

$$\lim_{x \searrow -1+2k} f(x), \quad \lim_{x \searrow -1+2k} f'(x), \quad \lim_{x \nearrow 1+2k} f(x), \quad \lim_{x \nearrow 1+2k} f'(x)$$

existieren in den reellen Zahlen. Also konvergiert die Fourierreihe von f nach einem Satz der Vorlesung in jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gegen das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten, kurz:

$$Sf(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y) \right)$$

Weil nun f in den Stellen $1 + 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Sprungstellen hat und in allen anderen Stellen stetig ist, ergibt sich

$$Sf(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{\sinh(1) + \sinh(-1)}{2} = 0 \quad \text{für } x \in \{1 + 2k : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$Sf(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = f(x) \quad \text{für } x \notin \{1 + 2k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 1: (11 Punkte)

Gegeben ist der Körper $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; \quad x, y, z \geq 0\}$.

- (a) Geben Sie K in Kugelkoordinaten an.
- (b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K .
- (c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von K .

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = v,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Sei $x = x(t)$, $v = v(t)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x' = v, \quad v' = -v^3 - x,$$

und sei $E = \frac{x^2 + v^2}{2}$. Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = \cosh(x).$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) + x^2 y(x) &= x^2 \\ y(0) &= 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Die $\frac{\pi}{2}$ -periodische Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) := -x; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right); \quad g(x) = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

- (a) Entwickeln Sie g in eine reelle Fourier-Reihe.
- (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.
- (c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) = \sin(8x)$.

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ern, fnt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk)

Aufgabe 1: (11 Punkte)

Gegeben ist der Körper $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; \quad x, y, z \geq 0\}$.

- (a) Geben Sie K in Kugelkoordinaten an.
- (b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K .
- (c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von K .

Lösungsvorschlag:

- (a) Eine mögliche Parametrisierung des Hohlkugeloktanten lautet:

$$\kappa(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

- (b) Das Volumen des Körpers berechnet sich über das Volumenintegral wie folgt:

$$\begin{aligned} V_K &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

Alternativ: Es gilt für das Volumen eines Kugeloktanten mit dem Radius r :

$$\frac{V(r)}{8} = \frac{4/3\pi r^3}{8}.$$

Somit ist das gesuchte Volumen gegeben durch

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{V(2) - V(1)}{8} \\ &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

- (c) Für Koordinaten des Schwerpunkts berechnen wir einer der folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{V_K} \iiint_K x dx dy dz = \frac{6}{7\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{45}{56} \end{aligned}$$

oder

$$S_z = \frac{6}{7\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^3 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta = \frac{45}{56}$$

Aus Symmetriegründen gilt $S_x = S_y = S_z$.

Alternativ Kartesische Koordinaten:

(a)

(b) Berechnung des Volumens mit kartesischen Koordinaten: Es gilt $V = V_2 - V_1$, wobei V_r das Volumen des Kugeloktantes mit dem Radius r bezeichnet. Für das entsprechende Integral schreiben wir:

$$\begin{aligned} V_r &= \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-z^2-y^2}} dx dy dz \\ &= \int_0^r \left[\frac{1}{2} \left((r^2 - z^2) \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}\right) + y \sqrt{r^2-z^2-y^2} \right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-z^2}} dz \\ &= \int_0^r \frac{\pi}{4} (r^2 - z^2) dz = \frac{\pi r^3}{6} \\ V &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

(c)

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, y(0) = v,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$(v|Av) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2.$$

2 ist die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms, und sie ist zweifach. Deswegen bekommen wir

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Also ist die Wronski Matrix

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ (e^{2t})' & (te^{2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

und wir bekommen

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir

$$M(0)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} f &= (v|Av)(M(0)^T)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Sei $x = x(t)$, $v = v(t)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x' = v, \quad v' = -v^3 - x,$$

und sei $E = \frac{x^2 + v^2}{2}$. Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

Lösungsvorschlag: Mit der Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= xx' + vv' \\ &= xv + v(-v^3 - x) \\ &= -v^4 \leq 0 \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = \cosh(x).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:• **Lösung der homogenen Gleichung**

Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$:

$$p(X) = X^2 - 4X - 5 = (X - 5)(X + 1).$$

Dieses hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ und daher lautet die homogene Lösung:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite ($e^{\mu x}$)**

Wir verwenden $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und setzen nach Superposition zwei partikuläre Lösungen an. Zunächst $f_{p_1}(x) = ae^x$

$$f'_{p_1}(x) = ae^x \quad \text{und} \quad f''_{p_1}(x) = ae^x.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} f''_{p_1} - 4f'_{p_1} - 5f_{p_1} &= ae^x - 4ae^x - 5ae^x \\ &= -8ae^x \\ &= \frac{e^x}{2}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a = -\frac{1}{16}$$

Als zweiten Ansatz wählen wir wegen der Resonanz $f_{p_2}(x) = bxe^{-x}$.

$$f'_{p_2}(x) = b(e^{-x} - xe^{-x}) \quad \text{und} \quad f''_{p_2}(x) = b(-2e^{-x} + xe^{-x}).$$

Einsetzen in die Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} f''_{p_2} - 4f'_{p_2} - 5f_{p_2} &= b(-2e^{-x} + xe^{-x}) - 4b(e^{-x} - xe^{-x}) - 5(bxe^{-x}) \\ &= -6be^{-x} \\ &= \frac{e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$b = -\frac{1}{12}.$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_p = f_{p_1} + f_{p_2} = -\frac{1}{16}e^x - \frac{1}{12}xe^{-x}.$$

• **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite(cosh(x))**

Wir verwenden direkt den cosh und müssen wegen der Resonanz $f_p = a \cosh(x) + b \sinh(x) + cx \cosh(x) + dx \sinh(x)$ ansetzen. Dies führt auf

$$f'_p(x) = (a + d) \sinh(x) + (b + c) \cosh(x) + cx \sinh(x) + dx \cosh(x)$$

und

$$f''_p(x) = (b + 2c) \sinh(x) + (a + 2d) \cosh(x) + dx \sinh(x) + cx \cosh(x).$$

Einsetzen in die Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} f''_p - 4f'_p - 5f_p &= (b + 2c) \sinh(x) + (a + 2d) \cosh(x) + dx \sinh(x) + cx \cosh(x) \\ &\quad - 4((a + d) \sinh(x) + (b + c) \cosh(x) + cx \sinh(x) + dx \cosh(x)) \\ &\quad - 5(a \cosh(x) + b \sinh(x) + cx \cosh(x) + dx \sinh(x)) \\ &= (a + 2d - 4b - 4c - 5a) \cosh(x) + (b + 2c - 4a - 4d - 5b) \sinh(x) \\ &\quad + (c - 4d - 5c)x \cosh(x) + (d - 4c - 5d)x \sinh(x) \\ &= (-4b - 4c - 4a + 2d) \cosh(x) + (-4a - 4d - 4b + 2c) \sinh(x) \\ &\quad + (-4d - 4c)x \cosh(x) + (-4c - 4d)x \sinh(x) \\ &= \cosh(x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt sofort $d = -c$ und durch Subtraktion der ersten von der zweiten Zeile

$6c - 6d = -1$ und damit

$$c = -d = -\frac{1}{12}.$$

Die letzte verbleibende Gleichung reduziert sich durch Einsetzen auf $-4a - 4b = \frac{1}{2}$ und damit

$$b = -\frac{1}{8} - a.$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_p = (a(\cosh(x) - \sinh(x))) - \frac{1}{8} \sinh(x) - \frac{1}{12} x \cosh(x) + \frac{1}{12} x \sinh(x).$$

bzw, da a und b vertauschbar sind,

$$f_p = (b(\sinh(x) - \cosh(x))) - \frac{1}{8} \cosh(x) - \frac{1}{12} x \cosh(x) + \frac{1}{12} x \sinh(x).$$

Da $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$ gilt, kann man die Konstante a (bzw. b) in der Konstante c_1 der homogenen Lösung verschwinden lassen.

• **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten**

Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $M(x)^{-1}$ berechnen

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 5e^{5x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^x & -e^x \\ e^{-5x} & e^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^x & -e^x \\ e^{-5x} & e^{-5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(x) \end{pmatrix}$$

und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}(e^{2x} + 1) \\ \frac{1}{12}(e^{-4x} + e^{-6x}) \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass

$$-\frac{1}{12} \int e^{2x} + 1 dx = -\frac{1}{24} e^{2x} - \frac{1}{12} x, \quad \frac{1}{12} \int e^{-4x} + e^{-6x} dx = -\frac{1}{48} e^{-4x} - \frac{1}{72} e^{-6x}.$$

Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{1}{24} e^{2x} - \frac{1}{12} x \\ c_2(x) &= -\frac{1}{48} e^{-4x} - \frac{1}{72} e^{-6x}, \end{aligned}$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) \\ &= -\frac{1}{24} e^{2x} e^{-x} - \frac{1}{12} x e^{-x} - \frac{1}{48} e^{-4x} e^{5x} - \frac{1}{72} e^{-6x} e^{5x} \\ &= -\frac{1}{16} e^x - \frac{1}{12} x e^{-x} \left(-\frac{1}{72} e^{-x} \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = -\frac{1}{16}e^x + (c_1 - \frac{1}{12}x)e^{-x} + c_2e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

bzw, wenn mit dem $\cosh(x)$ gerechnet wurde

$$f(x) = -\frac{1}{8}\sinh(x) + \frac{1}{12}x(\sinh(x) - \cosh(x)) + c_1e^{-x} + c_2e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

oder

$$f(x) = -\frac{1}{8}\cosh(x) + \frac{1}{12}x(\sinh(x) - \cosh(x)) + c_1e^{-x} + c_2e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(x) + x^2 y(x) &= x^2 \\ y(0) &= 5.\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- **Lösung der homogenen Gleichung**

Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dies erreichen wir, indem wir den Ansatz der getrennten Variablen wählen.

$$\frac{f'_h(x)}{f_h(x)} = -x^2.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln(f_h(x)) = -\frac{x^3}{3} + \tilde{c}$$

und daraus

$$f_h(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}}.$$

- **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite (Glück oder genaues Hinschauen)**

Wir wählen als Ansatz $f_p(x) = ax^2 + bx + c$ und damit $f'_p = 2ax + b$. Dann ist

$$x^2 = f'_p(x) + x^2 f_p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2ax + b$$

und es folgt direkt, dass $f_p(x) = 1$ eine partikuläre Lösung ist.

- **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten**

Wir variieren die Konstante c der homogenen Lösung und wählen als Ansatz $f_p(x) = c(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$. Dies führt auf die Gleichung

$$c'(x) = x^2 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Wenn wir dies nun integrieren, benötigen wir die Substitution $z = x^3$ mit $\frac{dz}{dx} = 3x^2$ und erhalten

$$\begin{aligned}c(x) &= \int c'(x) dx = \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx \\ &= \int \frac{1}{3} e^{\frac{z}{3}} dz \\ &= e^{\frac{z}{3}} \\ &= e^{\frac{x^3}{3}}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, die partikuläre Lösung lautet $f_p(x) = e^{\frac{x^3}{3}} e^{-\frac{x^3}{3}} = 1$.

- **Allgemeine Lösung aus homogener und inhomogener Lösung**

Die allgemeine Lösung lautet

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1.$$

- **Lösung der allgemeinen Gleichung nach getrennten Veränderlichen**

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$\frac{f'(x)}{f(x) - 1} = x^2$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln(f(x) - 1) = -\frac{x^3}{3} + \tilde{c}$$

und daraus

$$f(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

- **Lösung des Anfangswertproblems aus der allgemeinen Lösung**

Es gilt also $f(0) = c + 1 = 5$ und damit $c = 4$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$f(x) = 4e^{-\frac{x^3}{3}} + 1.$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Die $\frac{\pi}{2}$ -periodische Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) := -x; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right); \quad g(x) = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

- (a) Entwickeln Sie g in eine reelle Fourier-Reihe.
- (b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.
- (c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) = \sin(8x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

- (a) (1) Weil $g(x) = -x$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 (2) Die Koeffizienten b_n für g folgen durch einfache Integration sofort:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -x \sin(4nx) dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{x \cos(4nx)}{4n} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(4nx) dx \\ &= \left[\frac{x \cos(4nx)}{n\pi} - \frac{\sin(4nx)}{4n^2\pi} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(-1)^n}{2n}. \end{aligned}$$

- (3) Die Fourierreihe von g ist

$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} \sin(4kx).$$

- (b) Die Funktion g ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für g als auch g' in allen Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da die Funktion g insbesondere stetig ist in $\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $g(x)$. In den Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ hingegen macht g einen Sprung der Höhe $\frac{\pi}{2}$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{4} - 0} g(x) + \lim_{x \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{4} + 0} g(x) \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

- (c) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für $\sin(8x)$ sieht man sofort, dass

$$\sin(8x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(4kx) + b_k \sin(4kx)$$

mit

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = (\delta_{2,k}) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\iint_K \sin(x^2 + y^2) dx dy$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Sei $h(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(z^2) \\ x^{10} - z + 2y \\ xy \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} h$ und $\operatorname{div} h$.

(b) (4 Punkte) Es seien die Flächenstücke $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, 0 \leq z \leq 1\}$ und $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ gegeben.
Bestimmen Sie den Ausfluss $A(h, T \cup D) = \iint_{T \cup D} h \cdot n dO$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A .
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor von A .
- (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.
- (d) (6 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= xy(x) - x^2 y'(x) \\ y(0) &= 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Die 4-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x+2, & x \in [-2, 0) \\ x-2, & x \in [0, 2) \end{cases}.$$

- (a) (1 Punkt) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-8, 8]$.
- (b) (5 Punkte) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.
- (d) (2 Punkte) Entwickeln Sie die reelle Fourierreihe für $\cos(5\pi x)$.

Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\iint_K \sin(x^2 + y^2) dx dy$.

Lösungsvorschlag:

Durch Einführung von Polarkoordinaten bekommen wir das Integral:

$$\begin{aligned} \iint_K \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin(r^2) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} (\cos(r^2)) \right]_0^1 d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} (\cos(1) - 1) d\varphi \\ &= \pi(1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Sei $h(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(z^2) \\ x^{10} - z + 2y \\ xy \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} h$ und $\operatorname{div} h$.

(b) (4 Punkte) Es seien die Flächenstücke $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, 0 \leq z \leq 1\}$ und $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ gegeben. Bestimmen Sie den Ausfluss $A(h, T \cup D) = \iint_{T \cup D} h \cdot ndO$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} h &= \begin{pmatrix} x + 1 \\ 2z \cos(z^2) - y \\ 10x^9 \end{pmatrix} \\ \operatorname{div} h &= 2 \end{aligned}$$

(b) $T \cup D$ ist der Rand des Körpers $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Wir beschreiben den Körper mit Hilfe von Zylinderkoordinaten als

$$V = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq z, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Wir benutzen den Satz von Gauss und erhalten dann für den Ausfluss

$$\begin{aligned} A(h, T \cup D) &= \iiint_V \operatorname{div} h \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z 2r dr dz d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^2]_0^z dz d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 dz d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Alternativ: Der Körper V ist ein Kegel der Höhe 1 mit einem Kreis vom Radius 1 als Grundfläche. Da die Divergenz konstant ist, erhält man nach dem Satz von Gauss für den Ausfluss das Produkt aus der Divergenz und dem Volumen des Kegels.

$$A(h, T \cup D) = \iiint_V \operatorname{div} h \, dx dy dz = 2 \frac{1}{3} \pi$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A .
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor von A .
- (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.
- (d) (6 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2).$$

Also $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

- (b) Ein Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_1 = 0$ erfüllt die Gleichung $A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. Das gibt $v_1 + v_2 = 0$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

Ein Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_2 = 2$ erfüllt die Gleichung $(A - 2E_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. Das gibt $v_1 - v_2 = 0$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

(c) Mit Hilfe der Teile (a), (b) bekommen wir, dass die allgemeine Lösung ist

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Die Wronski Matrix des Systems ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Man kann die Inverse berechnen

$$(M(x))^{-1} = \frac{1}{2e^{2x}} \begin{pmatrix} e^{2x} & -e^{2x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-2x} & \frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ansatz

$$c'(x) = (M(x))^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

erhalten wir durch Integration

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{e^{-2x}}{2} \end{pmatrix}$$

Also hat das System eine partikuläre Lösung der Form

$$f_p(x) = M(x)c(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{e^{-2x}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Bestimmen sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

• Lösung der homogenen Gleichung

Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' - 2y' + 1y = 0$:

$$p(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Dieses hat die doppelte Nullstelle $\lambda_{1/2} = 1$ und daher lautet die homogene Lösung:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite**

Da 1 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist liegt doppelte Resonanz vor. Daher muss hier der Ansatz $f_p(x) = ax^2e^x$ lauten.

Mit den Ableitungen

$$f_p'(x) = 2axe^x + ax^2e^x \quad \text{und} \quad f_p''(x) = 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x$$

folgt für die Differentialgleichung

$$e^x = f_p''(x) - 2f_p'(x) + f_p(x) = 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x - 2(2axe^x + ax^2e^x) + ax^2e^x = 2ae^x$$

und damit $a = \frac{1}{2}$.

Die partikuläre Lösung lautet also

$$f_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x$$

• **Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten**

Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $(M(x))^{-1}$ berechnen

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix}, \quad (M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass

$$\int -x dx = -\frac{x^2}{2}, \quad \int 1 dx = x.$$

Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{2},$$

$$c_2(x) = x,$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned}f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) \\&= -\frac{x^2}{2}e^x + xxe^x \\&= \frac{x^2}{2}e^x.\end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = (c_1 + c_2x + \frac{x^2}{2})e^x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(x) &= xy(x) - x^2y'(x) \\y(0) &= 3.\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

• **Lösung der Gleichung**

Durch Umstellen der Gleichung sieht man, dass es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen handelt.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln|f(x)| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \tilde{c}$$

und daraus

$$f(x) = c\sqrt{1+x^2}.$$

• **Lösung des Anfangswertproblems**

Es gilt also $f(0) = c = 3$ und damit $c = 3$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$f(x) = 3\sqrt{1+x^2}.$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

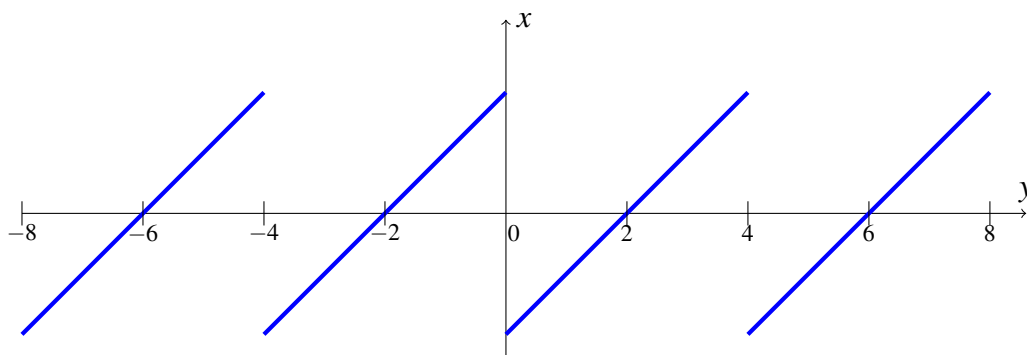
Die 4-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x+2, & x \in [-2, 0) \\ x-2, & x \in [0, 2) \end{cases}.$$

- (a) (1 Punkt) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-8, 8)$.
- (b) (5 Punkte) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.
- (d) (2 Punkte) Entwickeln Sie die reelle Fourierreihe für $\cos(5\pi x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

- (a) Skizzieren von f :



(b) Bestimmung der Fourierreihe:

- (1) Weil f ungerade ist gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(2) Lösung mit Berücksichtigung der Symmetrie:

Mit $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir für die Koeffizienten

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 (x-2) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - 2 \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{2x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \left[\frac{4 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_0^2 \\ &= \left[-\frac{2x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} + \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{4n^2\pi^2} + \frac{4 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$

Alternative Lösung ohne Berücksichtigung der Symmetrie:

Mit $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir für die Koeffizienten

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{-2}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_{-2}^2 + \frac{1}{n\pi} \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &\quad - \left[\frac{2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_0^2 \\ &= \left[-\frac{x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} + \frac{2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2 \pi^2} \right]_{-2}^2 \\ &\quad - \left[\frac{2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} \right]_0^2 \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} = -\frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

- (c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(4k-4, 4k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(4k-4, 4k)$ ($k \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 4, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 4k+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 4k-0} f(x) \right) = \frac{1}{2}(2-2) = 0.$$

(d) Wir betrachten $\cos(5\pi x)$ als 4-periodische Funktion.

$$\cos(5\pi x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für $\cos(5\pi x)$ sieht man, dass

$$a_k = (\delta_{10,k}) = \begin{cases} 1, & k = 10 \\ 0, & k \neq 10 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 2\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfelds $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ längs ∂S mit

$$f(x, y, z) = (z + \sin^3(x), x - \cos^3(y), y + e^{2z}).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{y'}{x^3y - 2y} &= 5x, & x &> \frac{3}{2} \\ y(2) &= 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' - 6y' + 9y = 18 \sin(3x) + e^{3x}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y. \tag{1}$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren. Geben Sie damit ein Fundamentalsystem für das Problem (1) an.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $v = y(0) = (2, 0, 1)^T$.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \pi x + \sin x, x \in [-\pi, \pi) \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) (1 Punkt) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) (7 Punkte) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 2\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfelds $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ längs ∂S mit

$$f(x, y, z) = (z + \sin^3(x), x - \cos^3(y), y + e^{2z}).$$

(a)

Eine mögliche Parametrisierung der Fläche lautet:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u} \cos v \\ \sqrt{u} \sin v \\ u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2} \cos v \\ \frac{1}{2}u^{-1/2} \sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} -u^{1/2} \sin v \\ u^{1/2} \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -u^{1/2} \cos v \\ -u^{1/2} \sin v \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt der Fläche S ist

$$F(S) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} |\Phi_u \times \Phi_v| \, dv \, du = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{u + \frac{1}{4}} \, dv \, du = 2\pi \int_0^2 \sqrt{u + \frac{1}{4}} \, du.$$

Mit der Substitution $t = u + \frac{1}{4}$, also $dt = du$, ergibt dies:

$$F(S) = 2\pi \int_{1/4}^{9/4} \sqrt{t} \, dt = 2\pi \left. \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_{1/4}^{9/4} = \frac{13\pi}{3}.$$

(b)

Aus dem Satz von Stokes wissen wir:

$$Z(f, \partial S) = \iint_S (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO,$$

wobei wir die Randfläche von S mit ∂S und den Einheitsnormalenvektor auf S mit n bezeichnen. Für die Rotation in kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} f) \cdot n \, dO &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{rot} f(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \, dv \, du \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1, 1, 1)^\top \cdot (-\sqrt{u} \cos v, -\sqrt{u} \sin v, \frac{1}{2})^\top \, dv \, du \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-\sqrt{u} \cos v - \sqrt{u} \sin v + \frac{1}{2}) \, dv \, du = 2\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die entgegengesetzte Normale wählt, erhält man $Z(f, \partial S) = -2\pi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{x^3y - 2y} = 5x, \quad x > \frac{3}{2}$$
$$y(2) = 5.$$

Variante 1: Lösen mit Hilfe der Formel von Satz 3.3.8

Hierfür müssen wir die DGL in die Form

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

bringen.

Dies kann man erreichen, indem man beide Seiten der Gleichung mit $x^3y(x) - 2y(x)$ multipliziert und dann alles auf eine Seite bringt:

$$\frac{y'(x)}{x^3y(x) - 2y(x)} = 5x$$
$$y'(x) = (5x^4 - 10x)y(x)$$
$$y'(x) + (-5x^4 + 10x)y(x) = 0.$$

Es ist also $g(x) = -5x^4 + 10x$ und $h(x) = 0$

Bestimme eine Stammfunktion G von g :

$$\int (-5x^4 + 10x)dx = -x^5 + 5x^2 + C_1.$$

Setze also $G(x) = -x^5 + 5x^2$.

Die Lösungen der DGL lauten laut Satz 3.3.8

$$y = k(x)e^{-G(x)} + Ce^{-G(x)},$$

wobei $k(x) = \int e^{G(x)}h(x)dx$ und $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $h(x) = 0$ ist auch $k(x) = 0$ und daher

$$y(x) = Ce^{x^5 - 5x^2}.$$

Bestimme nun C so, dass $y(2) = 5$. Es muss also gelten

$$y(2) = C \cdot e^{32-20} = Ce^{12} \stackrel{!}{=} 5$$
$$C = 5e^{-12}.$$

Die Lösung des AWP lautet also $y(x) = 5e^{-12}e^{x^5 - 5x^2}$.

Variante 2: Logarithmische Integration

Es gilt allgemein $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|)$.

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{x^3y(x) - 2y(x)} &= 5x \\ \frac{y'(x)}{(x^3 - 2)y(x)} &= 5x \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= 5x^4 - 10x\end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned}\ln(|y(x)|) &= x^5 - 5x^2 + C \\ |y(x)| &= e^{x^5 - 5x^2 + C} \\ y(x) &= \tilde{C}e^{x^5 - 5x^2},\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dabei wurde das Vorzeichen beim Auflösen des Betrags damit berücksichtigt, dass $\tilde{C} < 0$ zugelassen wurde).

Die Konstante für die Lösung des AWP's berechnet sich wie in Variante 1.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' - 6y' + 9y = 18 \sin(3x) + e^{3x}.$$

Variante 1: Als erstes ist die homogene Gleichung zu lösen. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Es hat offenbar die doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 3$.

Ein reelles Fundamentalsystem der Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$e^{3x}, xe^{3x}.$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, kann man nach dem Superpositionsprinzip für jeden Summanden der rechten Seite getrennt vorgehen.

Beim Summanden $18 \sin(3x)$ liegt keine Resonanz vor. Deshalb macht man den Ansatz $y_{p,1}(x) = a \sin(3x) + b \cos(3x)$.

Es gilt offenbar $y'_{p,1}(x) = 3a \cos(3x) - 3b \sin(3x)$ und $y''_{p,1}(x) = -9a \sin(3x) - 9b \cos(3x)$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -9a \sin(3x) - 9b \cos(3x) - 6(3a \cos(3x) - 3b \sin(3x)) + 9(a \sin(3x) + b \cos(3x)) &= 18 \sin(3x) \\ -18a \cos(3x) + 18b \sin(3x) &= 18 \sin(3x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun unmittelbar $a = 0, b = 1$, also $y_{p,1}(x) = \cos(3x)$.

Beim Summanden e^{3x} liegt Resonanz vor. Hier macht man daher den Ansatz $y_{p,2}(x) = ax^2 e^{3x}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(x) &= 3ax^2 e^{3x} + 2axe^{3x} \\ y''_{p,2}(x) &= 9ax^2 e^{3x} + 12axe^{3x} + 2ae^{3x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 9ax^2 e^{3x} + 12axe^{3x} + 2ae^{3x} - 6(3ax^2 e^{3x} + 2axe^{3x}) + 9ax^2 e^{3x} &= e^{3x} \\ 2ae^{3x} &= e^{3x} \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit gilt $y_{p,2}(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als Summe homogenen Lösung und $y_{p,1}$, $y_{p,2}$, also

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \cos(3x) + \frac{1}{2} x^2 e^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Variante 2: Verwende bei dieser Lösung komplexe Ansätze.

Wie in der reellen Variante bestimmt man ein Fundamentalsystem der Gleichung.

Ebenfalls wie davor betrachtet man nach dem Superpositionsprinzip jeden Summanden der rechten Seite getrennt.

Es ist $18 \sin(3x)$ der Imaginärteil von $18e^{3ix}$. Es liegt keine Resonanz vor, also macht man den komplexen Ansatz $y_{p,1} = ae^{3ix}$.

Es gilt offenbar $y'_{p,1} = 3iae^{3ix}$ und $y''_{p,1} = -9ae^{3ix}$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -9ae^{3ix} - 18iae^{3ix} + 9ae^{3ix} &= 18e^{3ix} \\ -18iae^{3ix} &= 18e^{3ix} \\ a &= i. \end{aligned}$$

Also ist

$$y_{p,1} = ie^{3ix} = i(\cos(3x) + i\sin(3x)) = -\sin(3x) + i\cos(3x).$$

Da $18 \sin(3x)$ der Imaginärteil von $18e^{3ix}$ ist, erhält man die reelle Lösung, indem man wieder den Imaginärteil der komplexen Lösung nimmt. Dieser ist offenbar $\cos(3x)$.

Beim Summanden e^{3x} ist der komplexe und reelle Ansatz identisch, d.h. die restliche Lösung ist dieselbe wie im reellen Fall.

Bemerkung: Es ist zwar möglich die Lösung mittels des Variations-der-Konstanten-Verfahrens zu berechnen, aber dies ist deutlich aufwändiger und an dieser Stelle nicht ratsam!

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y. \quad (1)$$

- (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren. Geben Sie damit ein Fundamentalsystem für das Problem (1) an.
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $v = y(0) = (2, 0, 1)^T$.

- (a) Wir bestimmen die Eigenwerte und berechnen (z.B. Entwicklungssatz oder Sarrus-Regel)

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1). \quad (2)$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_{0,1} = \mp 1$ (wobei der Eigenwert 1 zweifach ist).

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ ergeben sich durch Lösen von

$$(A - E_3)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

und damit folgt offensichtlich $x_1 = x_2$ und $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Somit ist $v_1 = (1, 1, 0)^T$ (oder ein skalares Vielfaches davon) ein Eigenvektor. Ein weiterer ist $v_2 = (0, 0, 1)^T$, es handelt sich also um eine diagonalisierbare Matrix. Natürlich ist auch jede Linearkombination von v_1, v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 (es gibt hier einen zweidimensionalen Eigenraum).

Der Eigenvektor zu $\lambda_0 = -1$ ergibt sich durch Lösen von

$$(A + E_3)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

und damit folgt offensichtlich $x_1 = -x_2$ und $x_3 = 0$. Damit sind alle skalaren Vielfachen von $v_0 = (1, -1, 0)^T$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ_0 .

Da wir eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren gefunden haben, wissen wir (Satz 6.4.1), dass $\{v_0 e^{\lambda_0 x}, v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_1 x}\}$ ein Fundamentalsystem sind, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x \right\}. \quad (5)$$

- (b) Wir können das Fundamentalsystem aus Teil (a) nutzen und müssen dann für $x = 0$ die Koeffizienten α_i mit $i = 0, 1, 2$ bestimmen, so dass sich

$$f(0) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

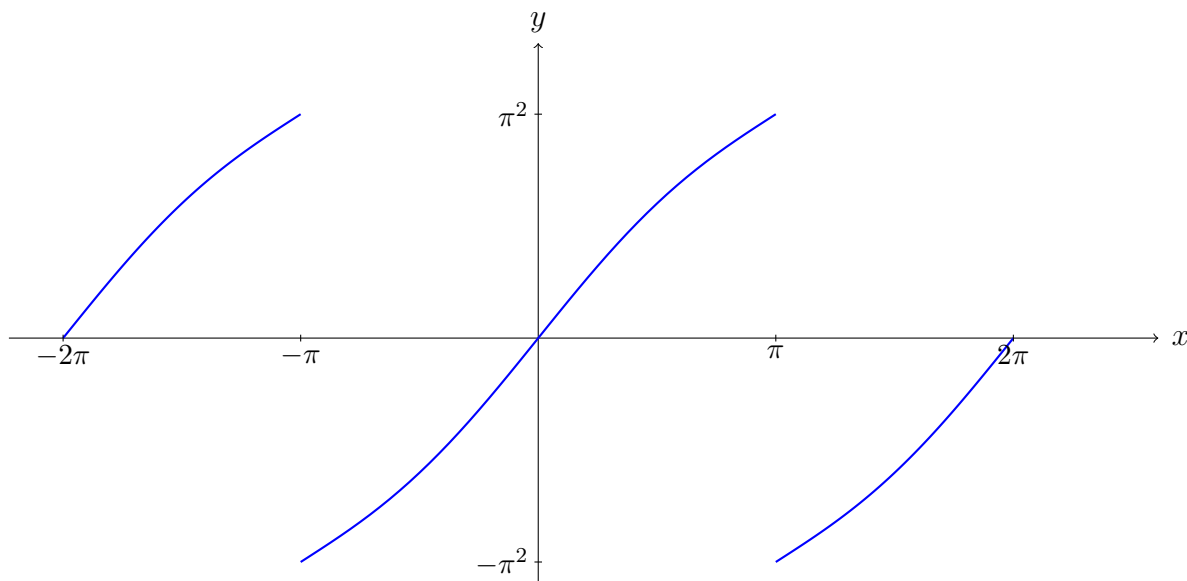
ergibt (dann stimmt die Linearkombination wegen der Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$). Damit folgt sofort, dass $\alpha_2 = 1$ sein muss und weiter dass dann $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ sein müssen. Also ist die Lösung gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x. \quad (7)$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \pi x + \sin x, x \in [-\pi, \pi) \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

- (a) (1 Punkt) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.
- (b) (7 Punkte) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.
- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.



- (a)
- (b) Zum Entwickeln der reellen Fourierreihe von $f(x) = \sin(x) + \pi x = f_1(x) + f_2(x)$ bietet es sich an die Fourierreihen von f_1 und f_2 zunächst separat zu bestimmen und danach zu kombinieren.
- (1) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für f_1 sieht man sofort, dass

$$a_{1,n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad b_{1,n} = \delta_{1,n} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Weil $f_2(x)$ ungerade ist, gilt $a_{2,n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(3) Die Koeffizienten $b_{2,n}$ für f_2 folgen durch einfache Integration sofort:

$$\begin{aligned} b_{2,n} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

(4) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \delta_{1,n} \right) \sin(nx).$$

- (c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$. In den Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe $2\pi^2$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+0} f(x) \right) = \frac{1}{2}(\pi^2 - \pi^2) = 0.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' + 9y = 36e^{3x} + 12 \cos(3x).$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay \quad (1)$$

mit einem Parameter $\tau \geq 0$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A an und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie dazu gehörige Eigenvektoren von A .
- (b) Bestimmen Sie im Fall $\tau = 1$ die Lösung des Problems zu den Anfangsbedingungen

$$\text{i) } v_1 = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } v_2 = y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Geben Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an (für alle $\tau \geq 0$).

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ oder } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

- (a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi)$.
- (b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f ? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (8 Punkte) Gegeben ist der Körper $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 3\}$.

Berechnen Sie den Ausfluss von $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch den Rand ∂K mit

$$g(x, y, z) = (x^3, 2xy^2, z).$$

1. Variante

Da ∂K geschlossene Oberfläche, können wir den Satz von Gauss verwenden:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, dO = \iiint_K \operatorname{div} g \, dx \, dy \, dz.$$

Für die Divergenz erhalten wir

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 3x^2 + 4xy + 1.$$

Damit folgt

$$A(g, \partial K) = \iiint_K \operatorname{div} g \, dx \, dy \, dz = \iiint_K (3x^2 + 4xy + 1) \, dx \, dy \, dz.$$

Die Fläche wird parametrisiert durch:

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ \frac{1}{2}r \sin \theta \\ z \end{pmatrix},$$

und wir erhalten:

$$J\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \frac{1}{2}r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det J\Phi(r, \theta, z) = \frac{1}{2}r.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} A(g, \partial K) &= \iiint_K (3x^2 + 4xy + 1) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^3 (3r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1) \cdot |\det J\Phi(r, \theta, z)| \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(3r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1) \cdot \frac{1}{2}r \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin \theta + r) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}3r^3(\cos 2\theta + 1) + r^3 \sin 2\theta + r \right] \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \left[3r^3 \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{2}r^3 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(3r^3 + 2r)\theta \right]_0^{2\pi} \, dr \\ &= \int_0^1 \pi(3r^3 + 2r) \, dr = \pi \left[\frac{3}{4}r^4 + r^2 \right]_0^1 = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

2. Variante

Wir können den Ausfluss direkt wie folgt berechnen:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, dO.$$

Die Randfläche ∂K von K können wir aufgrund der auftretenden Schnittkanten nicht stetig differenzierbar parametrisieren. Sie lässt sich aber offenbar in drei Komponenten aufteilen: Mantel M , Boden B und Deckel D mit

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 = 1, 1 \leq z \leq 3\},$$

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, z = 1\}$$

und

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, z = 3\}$$

für welche wir eine stetig differenzierbare Parametrisierung angeben können. Es gilt:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, dO = \iint_M g \cdot n \, dO + \iint_B g \cdot n \, dO + \iint_D g \cdot n \, dO.$$

Mantel M : Eine Parametrisierung des Mantels erhalten wir durch

$$\Phi^M : [0, 2\pi] \times [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (v, z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2} \sin v \\ z \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\Phi_v^M = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \frac{1}{2} \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_z^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^M \times \Phi_z^M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_M g \cdot n \, dO &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} g(\Phi^M(z, v)) \cdot (\Phi_v^M \times \Phi_z^M(z, v)) \, dv \, dz \\ &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} (\cos^3 v, \frac{1}{2} \cos v \sin^2 v, z)^\top \cdot (\frac{1}{2} \cos v, \sin v, 0)^\top \, dv \, dz \\ &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^4 v + \frac{1}{2} \cos v \sin^3 v \right) \, dv \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 v + \cos v \sin^3 v) \, dv \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 v \, dv = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2v)^2 \, dv = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2v + \frac{1}{2} \cos 4v \right) \, dv = \frac{3\pi}{4},$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, dv = \sin^4 v \Big|_0^{2\pi} - 3 \int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, dv.$$

Somit,

$$\int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, dv = 0 \quad \text{und} \quad \iint_M g \cdot n \, dO = \frac{3\pi}{4}.$$

Boden B : Durch $\Phi^B : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit:

$$\Phi^B(v, u) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ \frac{1}{2}u \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisieren wir den Boden B . Damit ist

$$\Phi_v^B = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ \frac{1}{2}u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_u^B = \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2} \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^B \times \Phi_u^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_B g \cdot n \, dO &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\Phi^B(u, v)) \cdot (\Phi_v^B \times \Phi_u^B(u, v)) \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^3 \cos^3 v, \frac{1}{2}u^3 \cos v \sin^2 v, 1)^\top \cdot (0, 0, -\frac{1}{2}u)^\top \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}u\right) \, dv \, du = -\pi \int_0^1 u \, du = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Deckel D : Ähnlich, durch $\Phi^D : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit:

$$\Phi^D(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ \frac{1}{2}u \sin v \\ 3 \end{pmatrix}$$

parametrisieren wir den Deckel D . Damit ist

$$\Phi_u^D = \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2} \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^D = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ \frac{1}{2}u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_u^D \times \Phi_v^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_D g \cdot n \, dO &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\Phi^D(u, v)) \cdot (\Phi_u^D \times \Phi_v^D(u, v)) \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^3 \cos^3 v, \frac{1}{2}u^3 \cos v \sin^2 v, 3)^\top \cdot (0, 0, \frac{1}{2}u)^\top \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}u\right) \, dv \, du = 3\pi \int_0^1 u \, du = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit,

$$A(g, \partial K) = \iint_M g \cdot n \, dO + \iint_B g \cdot n \, dO + \iint_D g \cdot n \, dO = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{(\ln(x) + 1)y} = 1, \quad x > 1$$
$$y(2) = 5.$$

Variante 1: Behandlung als lineare Differentialgleichung

Hierfür müssen wir die DGL in die Form

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

bringen.

Dies kann man erreichen, indem man beide Seiten der Gleichung mit $(\ln(x) + 1)y(x)$ multipliziert und dann alles auf eine Seite bringt:

$$\frac{y'(x)}{(\ln(x) + 1)y(x)} = 1$$
$$y'(x) = (\ln(x) + 1)y(x)$$
$$y'(x) + (-\ln(x) - 1)y(x) = 0.$$

Es ist also $g(x) = -\ln(x) - 1$ und $h(x) = 0$

Bestimme eine Stammfunktion G von g :

$$\int (-\ln(x) - 1)dx = -x \ln(x) + C_1.$$

Setze also $G(x) = -x \ln(x)$.

Die Lösungen der DGL lauten laut Satz 3.3.8

$$y = k(x)e^{-G(x)} + Ce^{-G(x)},$$

wobei $k(x) = \int e^{G(x)}h(x)dx$ und $C \in \mathbb{R}$. Wegen $h(x) = 0$ ist auch $k(x) = 0$ und daher

$$y(x) = Ce^{x \ln(x)} = Cx^x.$$

Bestimme nun C so, dass $y(2) = 5$. Es muss also gelten

$$y(2) = C \cdot 2^2 = 4C \stackrel{!}{=} 5$$
$$C = \frac{5}{4}.$$

Die Lösung des AWP lautet also $y(x) = \frac{5}{4}x^x$.

Variante 2: Logarithmische Integration

Es gilt allgemein $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|)$.

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{(\ln(x) + 1)y(x)} &= 1 \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln(x) + 1.\end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned}\ln(|y(x)|) &= x \ln(x) + C \\ |y(x)| &= e^{x \ln(x) + C} \\ |y(x)| &= x^x e^C \\ y(x) &= \tilde{C} x^x,\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Konstante für die Lösung des AWP's berechnet sich wie in Variante 1.

Variante 3: Behandlung als Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln(x) + 1 \\ \frac{dy}{y} &= (\ln(x) + 1)dx.\end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int (\ln(x) + 1)dx + C \\ \ln(|y(x)|) &= x \ln(x) + C \\ |y(x)| &= e^{x \ln(x) + C} \\ |y(x)| &= x^x e^C \\ y(x) &= \tilde{C} x^x,\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Konstante für die Lösung des AWP's berechnet sich wie in Variante 1.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' + 9y = 36e^{3x} + 12 \cos(3x).$$

Als erstes ist die homogene Gleichung zu lösen. Ihr charakteristisches Polynom lautet $\lambda^2 + 9$.

Es hat offenbar die Nullstellen $\pm 3i$.

Ein reelles Fundamentalsystem der Lösung der homogenen Gleichung lautet also $\cos(3x), \sin(3x)$.

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, kann man nach dem Superpositionsprinzip für jeden Summanden der rechten Seite getrennt vorgehen.

Beim Summanden $36e^{3x}$ liegt keine Resonanz vor. Deshalb macht man den Ansatz $y_{p,1}(x) = ae^{3x}$. Es gilt offenbar $y''_{p,1}(x) = 9ae^{3x}$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$9ae^{3x} + 9ae^{3x} = 36e^{3x}$$

$$18a = 36$$

$$a = 2,$$

also $y_{p,1}(x) = 2e^{3x}$.

Beim Summanden $12 \cos 3x$ liegt Resonanz vor. Hier macht man daher den Ansatz $y_{p,2}(x) = x(a \sin(3x) + b \cos(3x))$.

Es gilt

$$y'_{p,2}(x) = (a \sin(3x) + b \cos(3x)) + x(3a \cos(3x) - 3b \sin(3x))$$

$$\begin{aligned} y''_{p,2}(x) &= (3a \cos(3x) - 3b \sin(3x)) + (3a \cos(3x) - 3b \sin(3x)) + x(-9a \sin(3x) - 9b \cos(3x)) \\ &= 6a \cos(3x) - 6b \sin(3x) + x(-9a \sin(3x) - 9b \cos(3x)). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$6a \cos(3x) - 6b \sin(3x) + x(-9a \sin(3x) - 9b \cos(3x)) + 9x(a \sin(3x) + b \cos(3x)) = 12 \cos(3x)$$

$$6a \cos(3x) - 6b \sin(3x) = 12 \cos(3x),$$

also $a = 2$ und $b = 0$. Somit gilt $y_{p,2}(x) = 2x \sin(3x)$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als Summe der Linearkombinationen des Fundamentalsystems und $y_{p,1}, y_{p,2}$, also

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 2e^{3x} + 2x \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay \quad (1)$$

mit einem Parameter $\tau \geq 0$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A an und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie dazu gehörige Eigenvektoren von A .
- (b) Bestimmen Sie im Fall $\tau = 1$ die Lösung des Problems zu den Anfangsbedingungen

$$\text{i) } v_1 = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } v_2 = y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Geben Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an (für alle $\tau \geq 0$).

(a) Wir berechnen also

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \tau - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\tau - \lambda)(1 - \lambda). \quad (2)$$

Damit sind offensichtlich τ und 1 Eigenwerte von A . Dies hätte man natürlich auch direkt sehen können, da bei einer oberen (oder auch unteren) Dreiecksmatrix die Eigenwerte schon auf der Diagonalen stehen und damit direkt das Polynom angeben können.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_0 = 1$ errechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} \tau - 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

und damit offensichtlich $(1 - \tau)x_1 = x_2$. Also ist $w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \tau \end{pmatrix}$ und jedes skalare Vielfache davon ein Eigenvektor.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = \tau$ errechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

und damit offensichtlich $x_2 = 0$. Also ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und jedes skalare Vielfache davon ein Eigenvektor.

Bemerkung: Offensichtlich fallen für den Fall $\tau = 1$ die beiden Eigenvektoren zusammen. Das heißt, in diesem Fall ist die Matrix nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert $\lambda = 1$ zweifach.

- (b) i) Man sieht entweder direkt, dass es sich gerade um den obigen Eigenvektor zum Eigenwert $\tau = 1$ handelt und weiß dann aus der Vorlesung, dass die Lösung damit

$$f_1(x) = v_1 e^{\tau x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x \quad (5)$$

ist.

- ii) Dies ist offensichtlich kein Eigenvektor mehr und für $\tau = 1$ gibt es auch keine Basis aus Eigenvektoren (der vorher zweite Eigenvektor fällt für $\tau = 1$ mit dem ersten zusammen). Also wenden wir den üblichen Algorithmus aus der Vorlesung an und berechnen

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(weitere Rechnungen sind unnötig, da diese linear unabhängig sind und im $\mathbb{R}^2$ damit eine Basis bilden, also jeder weitere Vektor linear abhängig sein muss). Als Polynom $q(A)$ benutzen wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ (wenn man $A^2 v_2 = (2, 1)^T$ berechnet und damit eine nicht triviale Linearkombination der 0 erstellen möchte, bekommt man dasselbe Ergebnis, da $A^2 v_2 - 2Av_2 + v_2 = (A^2 - 2A + 1)v_2 = 0$ gilt).

Die 2. Ordnungsgleichung, die dazugehört, ist dann

$$y'' - 2y' + 1 = 0 \quad (7)$$

und das Polynom $(1 - \nu)^2 = \nu^2 - 2\nu + 1$ hat die Nullstellen $\nu_{0,1} = 1$. Damit ist das Fundamentalsystem der 2. Ordnungsgleichung gegeben durch

$$\{e^x, xe^x\}. \quad (8)$$

Die Wronski-Matrix in $x_0 = 0$ der 2. Ordnungsgleichung ist

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

und die Transponierte der Inversen berechnet sich zu (z.B. Cramersche Regel oder direkt oder man sieht es)

$$(M(0)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Dann bekommt man die Lösung als

$$f_2(x) = (v_2 | Av_2)(M(0)^{-1})^T \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xe^x = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x. \quad (12)$$

- (c) Wir stellen fest, dass wir in Teil (a) für alle $\tau \neq 1$ eine Basis aus Eigenvektoren gefunden haben, also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \tau \end{pmatrix} e^x \right\}, \text{ für } \tau \neq 1. \quad (13)$$

Im Fall $\tau = 1$ haben wir in Teil (b) zum Startwert $x_0 = 0$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ gehabt (nämlich die Anfangswerte). Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten dann zu jedem Wert x eine Basis des $\mathbb{R}^2$ sind, also ein Fundamentalsystem. Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x \right\}, \text{ für } \tau = 1 \quad (14)$$

ein Fundamentalsystem.

Natürlich ist auch jede Linearkombination davon wieder ein Fundamentalsystem.

Alternativ könnte man im Fall $\tau = 1$ auch f_2, f'_2 wählen, da v_2, Av_2 linear unabhängig sind. Damit ergibt sich das Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 1 + x \\ 1 \end{pmatrix} e^x \right\}, \text{ für } \tau = 1 \quad (15)$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ oder } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben.

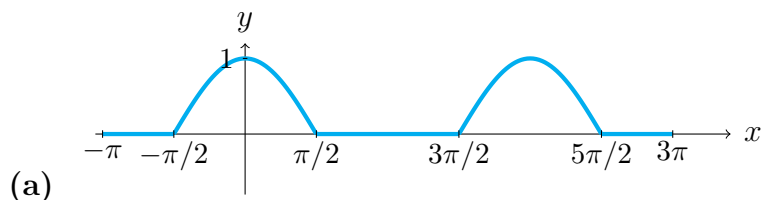
- (a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi)$.
- (b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f ? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$



- (b) (1) Weil $f(x)$ gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (2) Die Koeffizienten a_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}.$$

und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)] dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{(n+1)\pi}{2})}{n+1} + \frac{\sin(\frac{(n-1)\pi}{2})}{n-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n+1} - \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n-1} \right] \\
 &= -\frac{2 \cos(\frac{n\pi}{2})}{\pi (n^2 - 1)} \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k)^2 - 1}, & n = 2k \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi - 4\pi k^2} \cos(2kx).$$

- (c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $\mathbb{R}$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig**!
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier**. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11.04.2016 über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 11.04.2016 bis 15.04.2016 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben.
(<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1516/>)

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

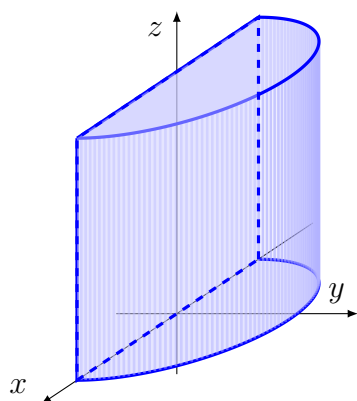
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18.04.2016** bis **19.04.2016** jeweils zwischen 11:00 und 13:00 Uhr mit Fernando Gaspoz (Raum 7.154) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (9 Punkte) Sei K der Halbzylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}.$$



(a) Wir betrachten Zylinderkoordinaten (r, φ, z) .

Aus welchem Bereich sind (r, φ, z) zu wählen um eine Parametrisierung von K zu erhalten?

(b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7y + z^3 + 12xy \\ 4x - y - \pi z + 4y^2x \\ e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie den Ausfluss von f durch den Rand von K .

Aufgabe 2 (3 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{x^2 + x}{\sin(y)}, \quad y(0) = \pi/2 \quad (y \in (0, \pi)).$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 2\sin(x).$$

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi, 0) \\ -\cos x, & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

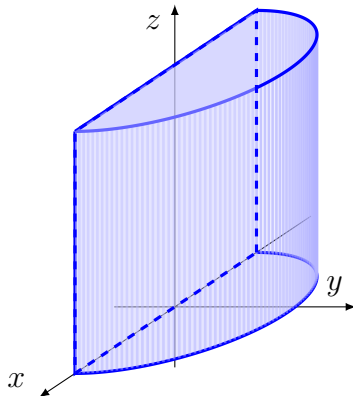
(c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (9 Punkte) Sei K der Halbzylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}.$$



(a) Wir betrachten Zylinderkoordinaten (r, φ, z) .

Aus welchem Bereich sind (r, φ, z) zu wählen um eine Parametrisierung von K zu erhalten?

(b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7y + z^3 + 12xy \\ 4x - y - \pi z + 4y^2x \\ e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie den Ausfluss von f durch den Rand von K .

(a)

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq 4, \\ 0 \leq z \leq 4. \end{aligned} \right\}$$

(b) Man hat $\operatorname{div}(f) = 3 + 12y - 1 + 8xy = 2 + 8xy + 12y$.

(c) Nach dem Satz von Gauß ist der Ausfluss von f aus K gleich dem Volumenintegral über $\operatorname{div} f$.

Man hat

$$\begin{aligned}
 \int_K \operatorname{div} f \, dx \, dy \, dz &= \int_K 2 + 8xy + 12y \, dx \, dy \, dz \\
 &= \underbrace{\int_0^4 \int_0^\pi \int_0^4 (2 + 8r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 12r \sin(\varphi)) r \, dr \, d\varphi \, dz}_{=0} \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_0^\pi \int_0^4 8r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 12r^2 \sin(\varphi) \, dr \, d\varphi \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_0^\pi \frac{8}{4} 4^4 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 12 \cdot \frac{4^3}{3} \sin(\varphi) \, d\varphi \\
 &= 4^3 \pi + 8 \cdot 4^4 \underbrace{\int_0^\pi \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi}_{=0} + 4^5 \underbrace{\int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi}_{=2} \\
 &= 64\pi + 2 \cdot 4^5 \\
 &= 64\pi + 2048
 \end{aligned}$$

Alternativ: Integration in kartesischen Koordinaten (x, y, z) , das Volumen $\operatorname{Vol}(K)$ wird als bekannt vorausgesetzt: Man hat

$$\begin{aligned}
 \int_K \operatorname{div} f \, dx \, dy \, dz &= \int_K 2 + 8xy + 12y \, dx \, dy \, dz \\
 &= 2 \operatorname{Vol}(K) + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^4 8xy + 12y \, dx \, dy \, dz \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_{-4}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} 8xy + 12y \, dy \, dx \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_{-4}^4 [4xy^2 + 6y^2]_0^{\sqrt{16-x^2}} \, dx \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_{-4}^4 [(4x+6)(16-x^2)] \, dx \\
 &= 4^3 \pi + 4 \int_{-4}^4 -4x^3 - 6x^2 + 64x + 6 \cdot 16 \, dx \\
 &= 4^3 \pi + 8 [-2x^3 + 6 \cdot 16x]_0^4 \\
 &= 4^3 \pi + 8 \cdot (-2 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^3) \\
 &= 64\pi + 2 \cdot 4^5 \\
 &= 64\pi + 2048
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{x^2 + x}{\sin(y)}, \quad y(0) = \pi/2 \quad (y \in (0, \pi)).$$

Sei $y : I \rightarrow (0, \pi)$ die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems (diese existiert eindeutig aufgrund des Picard-Lindelöf'schen Satzes!). Wir erhalten dann mittels Separation der Variablen, dass

$$\begin{aligned} \sin(y) dy &= (x^2 + x) dx \\ \int \sin(y) dy &= \int (x^2 + x) dx \end{aligned}$$

und damit

$$-\cos y(x) = 1/3x^3 + 1/2x^2 + c \quad (x \in I)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Also

$$\cos y(x) = -1/3x^3 - 1/2x^2 - c \quad (x \in I)$$

und damit folgt wegen $\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$

$$y(x) = \arccos(-1/3x^3 - 1/2x^2 - c) \quad (x \in I)$$

und

$$\pi/2 = y(0) = \arccos(-c) \quad \text{bzw.} \quad c = -\cos(\pi/2) = 0.$$

Wir erhalten also

$$y(x) = \arccos(-1/3x^3 - 1/2x^2) \quad (x \in I).$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 2\sin(x).$$

In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1).$$

und hat die Nullstellen 3 und -1 . Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h :

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1) oder durch Variation der Konstanten (Variante 2).

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + \sin(x)$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p1} von $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p2} von $y'' - 2y' - 3y = 2\sin(x) = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p1} + f_{p2}$.

- Zunächst zu $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} = h_1(x)$! Weil 3 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p1}(x) = c x^1 e^{3x} = c x e^{3x}.$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p1}(x) = (c + 3cx)e^{3x},$$

$$f''_{p1}(x) = (6c + 9cx)e^{3x}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$e^{3x} = h_1(x) = (6c + 9cx - 2c - 6cx - 3cx)e^{3x} = 4ce^{3x}$$

und damit $c = \frac{1}{4}$. Also $f_{p1}(x) = \frac{1}{4}x e^{3x}$.

- Jetzt zu $y'' - 2y' - 3y = 2\sin(x) = h_2(x)$! Weil $0 + i = i$ keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p2}(x) = x^0 e^{0x}(a \cos(x) + b \sin(x)) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p2}(x) = -a \sin(x) + b \cos(x),$$

$$f''_{p2}(x) = -a \cos(x) - b \sin(x).$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2 \sin(x) = h_2(x) = (-4a - 2b) \cos(x) + (-4b + 2a) \sin(x)$$

und damit $a = \frac{1}{5}$ und $b = -2a = -\frac{2}{5}$ (Koeffizientenvergleich!). Also $f_{p2}(x) = \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x)$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p1}(x) + f_{p2}(x) = \frac{1}{4}xe^{3x} + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x)$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{-3x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix}.$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind so, dass

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{-3x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} + 2 \sin(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3x} \sin(x) \\ -e^{4x} - 2e^x \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten c_{10}, c_{20}):

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{20} \sin(x)e^{-3x} - \frac{1}{20} \cos(x)e^{-3x} + c_{10}, \\ c_2(x) &= -\frac{1}{16}e^{4x} + \frac{1}{4} \cos(x)e^x - \frac{1}{4} \sin(x)e^x + c_{20} \end{aligned}$$

(benutze $e^{\alpha x} \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i)x})$ und $\int e^{(\alpha+i)x} dx = \frac{1}{\alpha+i} e^{(\alpha+i)x}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ oder zweifache partielle Integration!). Wählt man die Integrationskonstanten c_{10}, c_{20} beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p mit

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) = \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{3}{20} \sin(x) - \frac{1}{20} \cos(x) - \frac{1}{16}e^{3x} + \frac{1}{4} \cos(x) - \frac{1}{4} \sin(x) \\ &= -\frac{1}{16}e^{3x} + \frac{1}{4}xe^{3x} + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x). \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto -\frac{1}{16}e^{3x}$ der homogenen Gleichung. Durch entsprechend andere Wahl der Integrationskonstanten c_{01}, c_{02} erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) = f_h(x) + f_{p1}(x) + f_{p2}(x) \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x e^{3x} + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T.$$

Analog zu Beispiel 6.3.5. berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der offenbar linear unabhängig von v ist. Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit, und schreiben dazu die Vektoren v , Av und A^2v zeilenweise in eine Matrix durch elementare Zeilenumformungen in der letzten Zeile eine Nullzeile zu erzeugen. Es erweist sich als zweckmäßig, eine zusätzliche Spalte mit den Einträgen v , Av , A^2v einzufügen, und auf diese alle Eliminationsschritte des Gauß-Algorithmus anzuwenden. Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ 1 & 0 & 1 & Av \\ 1 & 0 & 3 & A^2v \end{array} \right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{array}{l} Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & Av - v \\ 0 & 0 & 3 & A^2v - v \end{array} \right]$$

und im zweiten

$$Z_3 - 3Z_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & Av - v \\ 0 & 0 & 0 & A^2v - 3Av + 2v \end{array} \right]$$

Nun kann man in der rechten unteren Ecke der Matrix das gesuchte Polynom ablesen. Es gilt ja

$$A^2v - 3Av + 2v = 0,$$

also können wir

$$q(X) = X^2 - 3X + 2$$

wählen. Daraus erhält man z.B. mit der Mitternachtsformel oder durch scharfes hinsehen die Nullstellen

$$X_{1,2} = 1, 2.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^x$ und $g_2(x) = e^{2x}$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = e^x$ und $g_2'(x) = 2e^{2x}$. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^x + e^{2x} \end{pmatrix}$$

Variante 2

Alternativ kann man das Anfangswertproblem auch mit dem Satz von Cayley-Hamilton lösen.

Dazu berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = e^{2x}$ und $g_3(x) = xe^{2x}$ gebildet. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & (4x+4)e^{2x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av & A^2v \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^x + e^{2x} \end{pmatrix}$$

Variante 3 Lösung mit Hilfe eines Fundamentalsystems.

Dazu berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2.$$

Als nächstes bestimmt man die Eigenvektoren indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k E) = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^x v_1, \quad f_2(x) = e^{2x} v_2, \quad f_3(x) = e^{2x} v_3.$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

Um die Lösung zum Anfangswertproblem zu bestimmen löst man das LGS $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

gegeben ist und erhält

$$c = (1, 0, 1)^T$$

und damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^x + e^{2x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi, 0) \\ -\cos x, & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

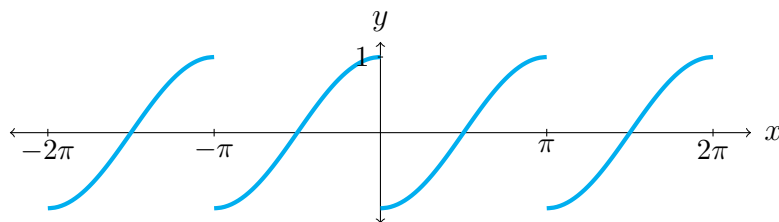
gegeben.

- (a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.
- (b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

(a)



- (b) (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (2) Die Koeffizienten b_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(x) dx = 0,$$

und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx) dx \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)] dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{(n+1)}}{n+1} + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n-1} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{(n+1)} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{(n-1)} - 1}{n-1} \right) \\
 &= -\frac{2n(1 + (-1)^n)}{\pi(n^2 - 1)}. \quad \left(= \begin{cases} -\frac{4n}{\pi(n^2 - 1)}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases} \right)
 \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2n(1 + (-1)^n)}{\pi(n^2 - 1)} \sin(nx). \quad \left(= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{-8\ell}{\pi(4\ell^2 - 1)} \sin(2\ell x) \right)$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(n\pi - \pi, n\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(n\pi - \pi, n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 2, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow n\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow n\pi-0} f(x) \right) = 0.$$

Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 24.10.2016 über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 24.10.2016 bis 28.10.2016 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben.
(<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1516/>)

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **31.10.2016** bis **02.11.2016** jeweils zwischen 10:00 bis 12:00 Uhr mit Fernando Gaspoz (Raum V57.7.154) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{e^{-y}}{2} \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei F das Rotationsparaboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

(a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (r, φ) und die Parametrisierung

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \\ z(r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}$$

Wie ist z in Abhängigkeit von (r, φ) zu definieren um eine Parametrisierung von F zu erhalten?
Aus welchem Bereich müssen dabei r und φ gewählt werden?

(b) Berechnen Sie die Flächennormale

$$N(r, \varphi) := \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1)$$

und deren Länge $\|N(r, \varphi)\|$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|F|$.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

(c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (3 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{e^{-y}}{2} \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems (diese existiert eindeutig aufgrund des Picard-Lindelöf'schen Satzes!). Wir erhalten dann mittels Separation der Variablen, dass

$$\begin{aligned} e^y dy &= \frac{1}{2} \cos(x) dx \\ \int e^y dy &= \frac{1}{2} \int \cos(x) dx \end{aligned}$$

und damit

$$e^{y(x)} = \frac{1}{2} \sin(x) + c \quad (x \in I)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Also

$$y(x) = \log\left(\frac{1}{2} \sin(x) + c\right) \quad (x \in I)$$

und

$$1 = y(0) = \log(c) \quad \text{bzw.} \quad c = e.$$

Wir erhalten also

$$y(x) = \log\left(\frac{1}{2} \sin(x) + e\right) \quad (x \in I).$$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y'' - y' - 2y = 0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

und hat die Nullstellen 2 und -1 . Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h :

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1) oder durch Variation der Konstanten (Variante 2).

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p1} von $y'' - y' - 2y = 2x = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p2} von $y'' - y' - 2y = e^{2x} = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p1} + f_{p2}$.

- Zunächst zu $y'' - y' - 2y = 2x = h_1(x)$! Weil 0 keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p1}(x) = (ax + b) x^0 e^{0x} = ax + b.$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$0 - a - 2(ax + b) = h_1(x) = 2x.$$

Also $a = -1$ und $b = \frac{1}{2}$ (Koeffizientenvergleich!) und damit $f_{p1}(x) = -x + \frac{1}{2}$.

- Jetzt zu $y'' - y' - 2y = e^{2x} = h_2(x)$! Weil 2 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p2}(x) = c x^1 e^{2x} = c x e^{2x}.$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p2}(x) = (c + 2cx) e^{2x},$$

$$f''_{p2}(x) = (4c + 4cx) e^{2x}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$e^{2x} = h_2(x) = (4c + 4cx - c - 2cx - 2cx)e^{2x} = 3ce^{2x}$$

und damit $c = \frac{1}{3}$. Also $f_{p2}(x) = \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p1}(x) + f_{p2}(x) = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^x & -e^x \end{pmatrix}.$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind so, dass

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2x + e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2xe^{-2x} \\ -e^{3x} - 2xe^x \end{pmatrix}.$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten c_{10}, c_{20}):

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}xe^{-2x} - \frac{1}{6}e^{-2x} + c_{10}, \\ c_2(x) &= -\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^x + \frac{2}{3}e^x + c_{20} \end{aligned}$$

(partielle Integration!). Wählt man die Integrationskonstanten c_{10}, c_{20} beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p mit

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) = \frac{1}{3}xe^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{9}e^{2x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}. \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto -\frac{1}{9}e^{2x}$ der homogenen Gleichung. Durch entsprechend andere Wahl der Integrationskonstanten c_{01}, c_{02} erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) = f_h(x) + f_{p1}(x) + f_{p2}(x) \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (9 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T$$

.

Analog zu Beispiel 6.3.5. berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

der offenbar linear unabhängig von v ist. Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit, und schreiben dazu die Vektoren v , Av und A^2v zeilenweise in eine Matrix um durch elementare Zeilenumformungen in der letzten Zeile eine Nullzeile zu erzeugen. Es erweist sich als zweckmäßig, eine zusätzliche Spalte mit den Einträgen v , Av , A^2v einzufügen, und auf diese alle Eliminationsschritte des Gauß-Algorithmus anzuwenden. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ -1 & 6 & 3 & Av \\ 1 & 6 & 3 & A^2v \end{array} \right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{array}{l} Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 6 & 3 & Av + v \\ 0 & 6 & 3 & A^2v - v \end{array} \right]$$

und im zweiten

$$Z_3 - Z_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 6 & 3 & Av + v \\ 0 & 0 & 0 & A^2v - Av - 2v \end{array} \right]$$

Nun kann man in der rechten unteren Ecke der Matrix das gesuchte Polynom ablesen. Es gilt ja

$$A^2v - Av - 2v = 0,$$

also können wir

$$q(X) = X^2 - X - 2$$

wählen. Daraus erhält man z.B. mit der Mitternachtsformel oder durch scharfes Hinsehen die Nullstellen

$$X_{1,2} = -1, 2.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^{-x}$ und $g_2(x) = e^{2x}$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = -e^{-x}$ und $g_2'(x) = 2e^{2x}$. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Variante 2

Wer lieber mit 3×3 -Matrizen arbeiten möchte, kann die Aufgabe auch wie folgt lösen.

Dazu berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^{2x}$, $g_2(x) = e^{-x}$ und $g_3(x) = xe^{-x}$ gebildet. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} & xe^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & (-x+1)e^{-x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} & (x-2)e^{-x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av & A^2v \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{-x} \\ xe^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Variante 3 Lösung mit Hilfe eines Fundamentalsystems.

Dazu berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1.$$

Als nächstes bestimmt man die Eigenwerte indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k E) = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{2x}v_1, \quad f_2(x) = e^{-x}v_2, \quad f_3(x) = e^{-x}v_3.$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2x} \\ 1e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

Um die Lösung zum Anfangswertproblem zu bestimmen löst man das LGS $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

gegeben ist und erhält

$$c = (1, 1, -2)^T$$

und damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei F das Rotationsparaboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

(a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (r, φ) und die Parametrisierung

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \\ z(r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}$$

Wie ist z in Abhängigkeit von (r, φ) zu definieren um eine Parametrisierung von F zu erhalten?

Aus welchem Bereich müssen dabei r und φ gewählt werden?

(b) Berechnen Sie die Flächennormale

$$N(r, \varphi) := \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1)$$

und deren Länge $\|N(r, \varphi)\|$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|F|$.

(a)

$$z = 9 - r^2$$

$$r \in [0, 3]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi] \text{ (oder jedem anderen Intervall der Länge } 2\pi \text{)}$$

(b) Die Flächennormale ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos(\varphi) \\ 2r^2 \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Deren Länge ist

$$\|N(r, \varphi)\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

(c) Wir haben also

$$|F| = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1} dr d\varphi = 2\pi \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1} dr.$$

Substitution von $u = 4r^2 + 1$ und folglich $du = 8r dr$ mit anschliessender Rücksubstitution liefert

$$|F| = 2\pi \frac{1}{8} \int_1^{37} \sqrt{u} du = 2\pi \frac{2}{3 \cdot 8} [u^{3/2}]_1^{37} = \frac{\pi}{6} (\sqrt[3]{37^2} - 1).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

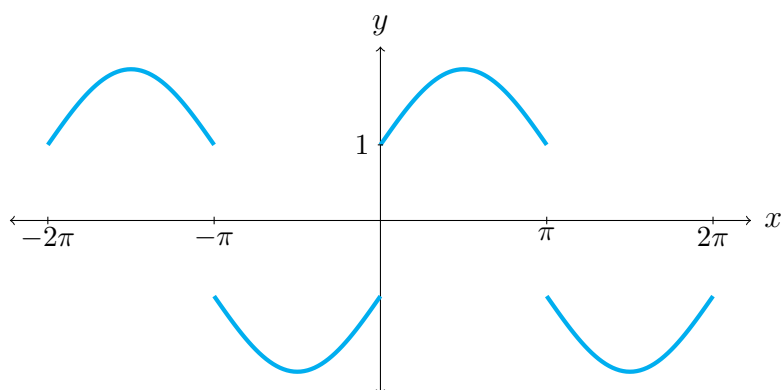
gegeben.

- (a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.
- (b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

(a)



- (b) (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (2) Die Koeffizienten b_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \sin(x)) \sin(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x) + \sin(x)^2) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} + 1, \end{aligned}$$

und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \sin(x)) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} + 0 \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}. \quad \left(= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} \right)
 \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$\begin{aligned}
 f(x) &\sim \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \sin(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(nx). \\
 &\left(= \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \sin(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)\pi} \sin((2\ell+1)x) \right)
 \end{aligned}$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(n\pi - \pi, n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(n\pi - \pi, n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 2, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow n\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow n\pi-0} f(x) \right) = 0.$$

Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 24.04.2017 über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 24.04.2017 bis 28.04.2017 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben.
(<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1617/>)

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **02.05.2017** bis **03.05.2017** jeweils zwischen 11:00 und 13:00 Uhr mit Anne-Laure Thiel (Raum 7.548) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x + y^2 \\ \cos y + x^2 \\ e^z + xy \end{pmatrix}$$

längs ∂S .

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x) - 16e^x.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (7 Punkte) Bestimmen Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \quad y(0) = v_i,$$

wobei

$$v_1 := (1, 0, 0)^\top, \quad v_2 := (0, 1, 0)^\top, \\ v_3 := (0, 0, 1)^\top.$$

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = |\sin(\pi x)|, \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1, \quad f(x+2) = f(x).$$

(a) (8 Punkte) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x + y^2 \\ \cos y + x^2 \\ e^z + xy \end{pmatrix}$$

längs ∂S .

(a) Eine Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$\Phi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -4r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Normale

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot (-4r^2 \sin \theta \cos \theta) - 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot r \cos \theta \\ 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot (-r \sin \theta) - \cos \theta \cdot (-4r^2 \sin \theta \cos \theta) \\ \cos \theta \cdot r \cos \theta - \sin \theta \cdot (-r \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \sqrt{4r^4 \cos^2 \theta + 4r^4 \sin^2 \theta + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |S| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Phi_r \times \Phi_\theta| \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(4r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (4u + 1)^{\frac{1}{2}} \, du = \left[\frac{\pi}{6} (4u + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1)\pi \end{aligned}$$

mit der Substitution $u := r^2$.

(b) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 2x - 2y \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad (\operatorname{rot} f)(\Phi(r, \theta)) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ 2r(\cos \theta - \sin \theta) \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt somit

$$\begin{aligned} Z(f, \partial S) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} f)(\Phi(r, \theta)) \cdot (\Phi_r(r, \theta) \times \Phi_\theta(r, \theta)) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ 2r(\cos \theta - \sin \theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2r^3 + 2r^2(\cos \theta - \sin \theta)) \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (-2r^3) \, dr = [-\pi r^4]_0^1 = -\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die entgegengesetzte Normale wählt, so erhält man π .

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x) - 16e^x.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 1.

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 7X - 5 = (X - 1)(X^2 - 2X + 5) = (X - 1)(X - 1 + 2i)(X - 1 - 2i)$$

und hat die übrigen Nullstellen $1 - 2i$ und $1 + 2i$.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^x \cos(2x) + ce^x \sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – beispielsweise durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x) - 16e^x$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = -16e^x$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x)$:

Weil $1 \pm i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = x^0 e^x (\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) = e^x (\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)).$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_1}(x) = e^x ((\alpha + \beta) \cos(x) + (\beta - \alpha) \sin(x)),$$

$$f^{(2)}_{p_1}(x) = e^x (2\beta \cos(x) - 2\alpha \sin(x)),$$

$$f^{(3)}_{p_1}(x) = e^x (2(\beta - \alpha) \cos(x) - 2(\beta + \alpha) \sin(x)).$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$e^x (3\beta \cos(x) - 3\alpha \sin(x)) = 2e^x \cos(x)$$

und damit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{2}{3}$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{2}{3}e^x \sin(x).$$

- Jetzt zu $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = -16e^x$:

Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha x^1 e^x = \alpha x e^x.$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_2}(x) = \alpha(x+1)e^x,$$

$$f^{(2)}_{p_2}(x) = \alpha(x+2)e^x$$

$$f^{(3)}_{p_2}(x) = \alpha(x+3)e^x.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\alpha((x+3) - 3(x+2) + 7(x+1) - 5x)e^x = -16e^x$$

$$4\alpha e^x = -16e^x$$

und damit $\alpha = -4$. Also $f_{p_2}(x) = -4xe^x$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{2}{3}e^x \sin(x) - 4xe^x$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^x \cos(2x) + ce^x \sin(2x) + \frac{2}{3}e^x \sin(x) - 4xe^x \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (7 Punkte) Bestimmen Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \quad y(0) = v_i,$$

wobei

$$v_1 := (1, 0, 0)^\top, \quad v_2 := (0, 1, 0)^\top, \\ v_3 := (0, 0, 1)^\top.$$

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

(a) **Die Lösung des Anfangswertproblems:** $y' = Ay, \quad y(0) = v_1.$ $Av_1 = (1, 0, 0)^\top$. Es gilt $Av_1 = v_1$. Die Lösung zum Anfangswert v_1 ergibt sich also durch

$$f_1(x) = e^x v_1 = (e^x, 0, 0)^\top$$

Die Lösung des Anfangswertproblems: $y' = Ay, \quad y(0) = v_2.$ Es gilt $Av_2 = (1, 1, 0)^\top$ und $A^2 v_2 = (2, 1, 0)^\top$.

Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 2 & 1 & 0 & A^2 v_2 \end{array} \right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$Z_3 - 2Z_2 : \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 0 & -1 & 0 & A^2 v_2 - 2Av_2 \end{array} \right]$$

und im zweiten

$$Z_3 + Z_1 : \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 0 & 0 & 0 & A^2 v_2 - 2Av_2 + v_2 \end{array} \right]$$

Nun kann man in der rechten unteren Ecke der Matrix das gesuchte Polynom ablesen. Es gilt ja

$$A^2 v_2 - 2A v_2 + v_2 = 0,$$

also können wir

$$q(X) = X^2 - 2X + 1$$

wählen. Daraus erhält man z.B. mit der Mitternachtsformel oder durch scharfes hinsehen die Nullstellen

$$X_{1,2} = 1.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^x$ und $g_2(x) = xe^x$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = e^x$ und $g_2'(x) = xe^x + e^x$. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_2 & Av_2 \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix}$$

Die Lösung zum Anfangswert v_2 ergibt sich also durch

$$f_2(x) = (xe^x, e^x, 0)^\top$$

Die Lösung des Anfangswertproblems: $y' = Ay$, $y(0) = v_3$.

$Av_3 = (0, 0, 2)^\top$. Es gilt $Av_3 = 2v_3$. Die Lösung zum Anfangswert v_3 ergibt sich also durch

$$f_3(x) = e^{2x}v_3 = (0, 0, e^{2x})^\top$$

(b) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ist ein Fundamentalsystem mit Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Es gibt

$$W(0) = I_3$$

Das inverse der Wronski-Matrix ist dann, mit Hilfe von Satz 6.5.5, nur $W(x)^{-1} = W(-x)$. Mit der Methode der Variation der Konstanten nach Satz 6.6.1 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = W(-x)h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & -xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit durch Integrieren

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2/2 \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) + c_3(x) f_3(x) \\ &= c_1(e^x, 0, 0)^\top + c_2(xe^x, e^x, 0)^\top + c_3(0, 0, e^{2x})^\top + e^x(x + x^2/2, x, xe^x)^\top \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = |\sin(\pi x)|, \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1, \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) (8 Punkte) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
 (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.
-

(a) Die Funktion f ist gerade, folglich ist die Fourierreihe von f eine reine Kosinusreihe, d.h. es ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad b_n = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \cos(\pi n x) dx \\ &= 2 \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \cos(\pi n x) \Big|_0^1 - n \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(\pi n x) dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1 + (-1)^n}{\pi} - n \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \sin(\pi n x) \Big|_0^1 \right)}_{=0} - n \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi x) \cos(\pi n x) dx}_{=\frac{1}{2}a_n} \right). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$(1 - n^2)a_n = \frac{2}{\pi}(1 + (-1)^n).$$

Diese Gleichung bestimmt alle Fourierkoeffizienten bis auf a_1 zu

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2},$$

denn die Gleichung

$$0 \cdot a_1 = 0$$

liefert **nicht** $a_1 = 0$ (das heißt, diese Folgerung ist an dieser Stelle noch unzulässig). Diesen Koeffizienten muss man separat berechnen:

$$a_1 = 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \cos(\pi x) dx = \int_0^1 \sin(2\pi x) dx = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \Big|_0^1 = 0.$$

Damit erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos(\pi n x).$$

- (b) Die Fourierreihe der Funktion f konvergiert punktweise überall gegen den Funktionswert von f .

Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig**!
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen**.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 23.10.2017 über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 23.10.2017 bis 27.10.2017 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben.

(<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1617/>)

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **06.11.2017** bis **07.11.2017** jeweils zwischen 11:00 und 13:00 Uhr mit Matthias Ohst (Raum V 57.7.351) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy + 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D .

(b) (4 Punkte) Sei ferner

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + xy + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie den Ausfluss des Vektorfeldes $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ x^2 + y^2 + z \end{pmatrix}$$

durch die geschlossene Fläche $D \cup B$.

Aufgabe 2 (12 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x) + 120x + 8.$$

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen, welche die Bedingung

$$f(0) = \frac{11}{13}$$

erfüllen. Von wie vielen Parametern hängen sie ab?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} 4e^x \\ -8e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A .

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay.$$

(c) (5 Punkte) Bestimmen Sie *alle* Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ x^2 & \text{für } x \in [0, \pi), \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy + 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D .

(b) (4 Punkte) Sei ferner

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + xy + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie den Ausfluss des Vektorfeldes $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ x^2 + y^2 + z \end{pmatrix}$$

durch die geschlossene Fläche $D \cup B$.

(a) Eine Parametrisierung von D ist gegeben durch

$$\Phi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2r \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Normale

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2r \cos \theta \sin \theta \cdot r \cos \theta \\ 2r \cos \theta \sin \theta \cdot (-r \sin \theta) - \cos \theta \cdot r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \cos \theta \cdot r \cos \theta - \sin \theta \cdot (-r \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 \sin \theta \\ -r^2 \cos \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta + r^4 \cos^2 \theta + r^2} = r\sqrt{r^2 + 1}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |S| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Phi_r \times \Phi_\theta| \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (u + 1)^{\frac{1}{2}} \, du = \left[\frac{2}{3} \pi (u + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \pi \end{aligned}$$

mit der Substitution $u := r^2$.

(b) Die geschlossene Fläche $D \cup B$ berandet den Normalbereich

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \leq z \leq r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 \end{array} \right\}.$$

Hierbei wurden Polarkoordinaten in der xy -Ebene benutzt. Insbesondere ist $dx dy = r d\theta dr$.
Wir berechnen

$$\operatorname{div} f = 3.$$

Mit dem Satz von Gauß folgt somit

$$\begin{aligned} A(f, D \cup B) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2}^{r^2 \cos \theta \sin \theta + 1} (\operatorname{div} f) \cdot r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2}^{r^2 \cos \theta \sin \theta + 1} 3r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) \cdot 3r \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 (3r - 3r^3) \, dr = \left[\pi \left(3r^2 - \frac{3}{2}r^4 \right) \right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x) + 120x + 8.$$

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen, welche die Bedingung

$$f(0) = \frac{11}{13}$$

erfüllen. Von wie vielen Parametern hängen sie ab?

(a) **SCHRITT 1:** In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist

$$P(X) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 = X^2(X^2 - 6X + 10) = X^2(X - 3 + i)(X - 3 - i)$$

und hat die Nullstellen 0 , $3 - i$ und $3 + i$.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = a + bx + ce^{3x} \cos(x) + de^{3x} \sin(x)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – beispielsweise durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x) + 120x + 8$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 120x + 8$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 3\sin(x)$:

Weil $\pm i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = x^0(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x).$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_1}(x) = \beta \cos(x) - \alpha \sin(x),$$

$$f^{(2)}_{p_1}(x) = -\alpha \cos(x) - \beta \sin(x),$$

$$f^{(3)}_{p_1}(x) = -\beta \cos(x) + \alpha \sin(x),$$

$$f^{(4)}_{p_1}(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x).$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(6\beta - 9\alpha) \cos(x) + (-6\alpha - 9\beta) \sin(x) = 3 \sin(x)$$

und damit $6\beta - 9\alpha = 0$ und $-6\alpha - 9\beta = 3$, das heisst $\alpha = -\frac{2}{13}$ und $\beta = -\frac{3}{13}$. Also

$$f_{p_1}(x) = -\frac{2}{13} \cos(x) - \frac{3}{13} \sin(x).$$

- Jetzt zu $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 10y^{(2)} = 120x + 8$:

Weil 0 eine zweifache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = (\alpha x + \beta)x^2 = \alpha x^3 + \beta x^2.$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_2}(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x,$$

$$f^{(2)}_{p_2}(x) = 6\alpha x + 2\beta$$

$$f^{(3)}_{p_2}(x) = 6\alpha,$$

$$f^{(4)}_{p_2}(x) = 0.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$-36\alpha + 10(6\alpha x + 2\beta) = 120x + 8$$

$$60\alpha x + (-36\alpha + 20\beta) = 120x + 8$$

und damit $60\alpha = 120$ und $-36\alpha + 20\beta = 8$, das heisst $\alpha = 2$ und $\beta = 4$. Also $f_{p_2}(x) = x^2(2x + 4)$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = -\frac{2}{13} \cos(x) - \frac{3}{13} \sin(x) + x^2(2x + 4)$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= a + bx + ce^{3x} \cos(x) + de^{3x} \sin(x) - \frac{2}{13} \cos(x) - \frac{3}{13} \sin(x) + x^2(2x + 4) \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

(b) Die Lösungen, welche die Bedingung

$$f(0) = \frac{11}{13}$$

erfüllen, sind die Lösungen, deren Parametern erfüllen die folgende Gleichung:

$$a + c - \frac{2}{13} = \frac{11}{13},$$

das heisst $c = 1 - a$. Die gesuchte Lösungen sind dann

$$f(x) = a + bx + (1 - a)e^{3x} \cos(x) + de^{3x} \sin(x) - \frac{2}{13} \cos(x) - \frac{3}{13} \sin(x) + x^2(2x + 4) \quad \text{mit } a, b, d \in \mathbb{R},$$

und sie hängen von drei Parametern ab.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} 4e^x \\ -8e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A .

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay.$$

(c) (5 Punkte) Bestimmen Sie *alle* Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

(a) Dazu berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A : $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$.Als nächstes bestimmt man die Eigenvektoren indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k I_2)v = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{-3x}v_1, \quad f_2(x) = e^{5x}v_2.$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-3x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.(c) $f_1(x), f_2(x)$ ist ein Fundamentalsystem mit Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-3x} & 2e^{5x} \\ e^{-3x} & e^{5x} \end{pmatrix}$$

Das inverse der Wronski-Matrix ist

$$W(x)^{-1} = -1/4 \begin{pmatrix} e^{3x} & -2e^{3x} \\ -e^{-5x} & -2e^{-5x} \end{pmatrix}$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten nach Satz 6.6.1 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} -e^{4x} - 4e^x \\ e^{-4x} - 4e^{-7x} \end{pmatrix}$$

und damit durch Integrieren

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4e^{4x} - 4e^x \\ -1/4e^{-4x} + 4/7e^{-7x} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-3x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 64/7e^{-2x} \\ -1/2e^x - 24/7e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ x^2 & \text{für } x \in [0, \pi), \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

- (a) (6 Punkte) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

- (a) Die Funktion $f(x) \cos(nx)$ ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ ungerade, daher ist ihre Integral auf diesem Intervall gleich null und die Fourierreihe von f ist eine reine Sinusreihe:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad a_n = 0.$$

Man kann das natürlich auch berechnen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(x) \cdot x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^0 -x^2 \cos(nx) dx}_{x=-y, dx \mapsto -dy, 0 \mapsto 0, -\pi \mapsto \pi} + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^0 y^2 \cos(ny) dy + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} y^2 \cos(ny) dy + \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{x^2}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right) \\ &= -2\pi \cdot \frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi n} \left(\frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^2} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \left(1 - (-1)^n \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \left(1 - (-1)^n \right) \right] \sin(nx).$$

- (b) Die Funktion f ist stetig differenzierbar auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ und die Fourierreihe konvergiert hier daher gegen den Funktionswert von f . An der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \pi$ (bzw $x_0 = -\pi$) gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f'(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f'(x_0 - h) = 2\pi.$$

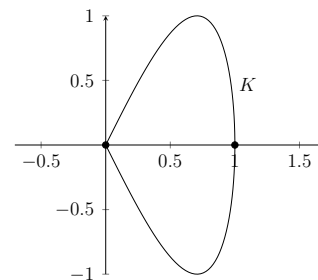
Also konvergiert die Fourierreihe von f in $x \in \pi\mathbb{Z}$ gegen den Mittelwert

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x + h) + \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x - h) \right) = \frac{1}{2}(\pi^2 + (-(-\pi)^2)) = 0.$$

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien eine Kurve $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $C : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \quad g(x, y) := \begin{pmatrix} -4y \\ 2x \end{pmatrix}.$$



(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K)$ von g längs K .

Hinweis: $\sin(2x) \sin x + \cos(2x) \cos x = \cos x$

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$.

(c) (2 Punkte) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des von K berandeten Gebietes S .

Hinweis: Benutzen Sie a) und b)

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g, K)$ von g durch K .

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1 + 2e^{2x}.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (11 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ -1, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 2, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 0, & x \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

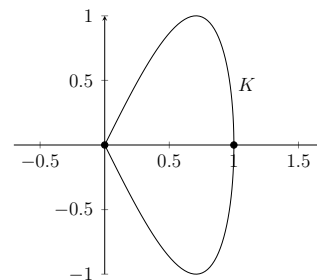
Hinweis: Terme der Form $\cos(n\frac{\pi}{2})$ und $\sin(n\frac{\pi}{2})$ müssen ausgerechnet werden.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien eine Kurve $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $C : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \quad g(x, y) := \begin{pmatrix} -4y \\ 2x \end{pmatrix}.$$



(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K)$ von g längs K .

Hinweis: $\sin(2x) \sin x + \cos(2x) \cos x = \cos x$

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$.

(c) (2 Punkte) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des von K berandeten Gebietes S .

Hinweis: Benutzen Sie a) und b)

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g, K)$ von g durch K .

(a)

$$\begin{aligned} Z(g, K) &= \int_K g \cdot ds \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(C(t)) \cdot C'(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -4 \sin 2t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix} dt \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \sin t + \cos(2t) \cos t dt \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \\ &= 4 [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

(b) $\operatorname{rot} g = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 2 - (-4) = 6$.

(c)

$$\begin{aligned} F(S) &= \iint_S 1 dx dy \\ &\stackrel{b)}{=} \frac{1}{6} \iint_S \operatorname{rot} g dx dy \\ &= \frac{1}{6} \int_K g \cdot ds \\ &\stackrel{a)}{=} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} A(g, K) &= \int_K g \cdot n \, ds \\ &= \int_S \operatorname{div} g \, dx \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1 + 2e^{2x}.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 2.

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + 4X - 8 = (X - 2)(X^2 + 4) = (X - 2)(X + 2i)(X - 2i)$$

und hat die übrigen Nullstellen $\pm 2i$.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^{2x} + b\cos(2x) + c\sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1 + 2e^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 2e^{2x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = x^2 + 1$:

Weil 0 keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = s_1x^2 + s_2x + s_3.$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_1}(x) = 2s_1x + s_2,$$

$$f^{(2)}_{p_1}(x) = 2s_1,$$

$$f^{(3)}_{p_1}(x) = 0.$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$-8s_1x^2 + (8s_1 - 8s_2)x + (-4s_1 + 4s_2 - 8s_3) = x^2 + 1.$$

Damit ist $s_1 = s_2 = s_3 = -1/8$. Also

$$f_{p_1}(x) = -\frac{1}{8}(x^2 + x + 1).$$

- Jetzt zu $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 4y' - 8y = 2e^{2x}$:

Weil 2 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha x e^{2x}.$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x}, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= 4\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x}, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 12\alpha e^{2x} + 8\alpha x e^{2x}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$8\alpha e^{2x} = 2e^{2x}.$$

Damit ist $\alpha = 1/4$. Also

$$f_{p_2}(x) = \frac{1}{4}x e^{2x}.$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = -\frac{1}{8}(x^2 + x + 1) + \frac{1}{4}x e^{2x}$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = a e^{2x} + b \cos(2x) + c \sin(2x) - \frac{1}{8}(x^2 + x + 1) + \frac{1}{4}x e^{2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5^2}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{4}} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

d. h. es gilt

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert 2 zu finden, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\det(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

also $x_1 + 2y_1 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für den Eigenwert 3 gilt analog

$$\det(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

also $x_2 + y_2 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Wronski-Matrix ist somit gegeben durch

$$W(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{3x} \\ -e^{2x} & -e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det W(x) = -2e^{5x} + e^{5x} = -e^{5x}$$

und folglich

$$W(x)^{-1} = -e^{-5x} \begin{pmatrix} -e^{3x} & -e^{3x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ -e^{-3x} & -2e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$c'(x) = W(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ -e^{-3x} & -2e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{3x} \\ -e^{2x} & -e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (11 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ -1, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 2, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 0, & x \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\} \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

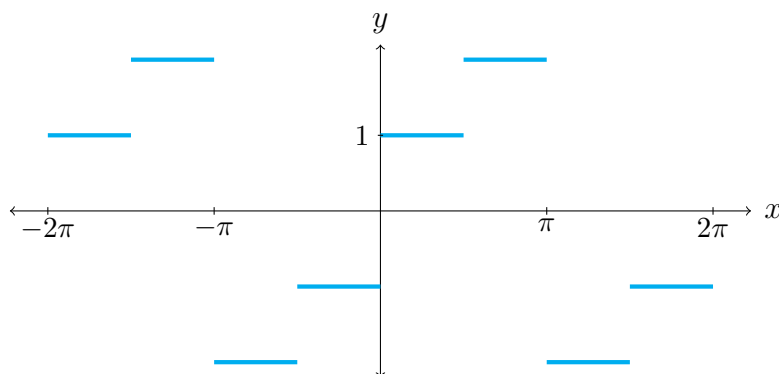
(a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

Hinweis: Terme der Form $\cos(n\frac{\pi}{2})$ und $\sin(n\frac{\pi}{2})$ müssen ausgerechnet werden.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

(a) Skizze:



(b) (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Die Koeffizienten b_n für f folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) dx + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} [-\cos(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{n\pi} [-\cos(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(\frac{n\pi}{2})) + \frac{4}{n\pi} (\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 + \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2(-1)^n) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} (-1 + (-1)^k), & n = 2k \\ \frac{6}{n\pi}, & n = 2k - 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2k\pi} (-1 + (-1)^k) \sin(2kx) + \frac{6}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x) \right).$$

Eine weitere Fallunterscheidung nach k gerade/ungerade ist möglich. Es folgt die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{l=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{(4l+2)\pi} \sin((4l+2)x) + \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sin((4l+1)x)}{4l+1} + \frac{\sin((4l+3)x)}{4l+3} \right) \right).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((n-1)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{n\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $((n-1)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

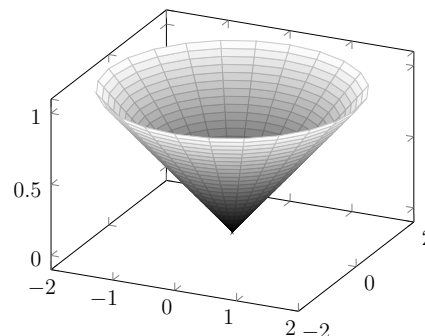
In den Punkten $x_0 \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 1, 2 oder 4, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right) = \begin{cases} 0, & x_0 = -\pi \\ -\frac{3}{2}, & x_0 = -\frac{\pi}{2} \\ 0, & x_0 = 0 \\ \frac{3}{2}, & x_0 = \frac{\pi}{2} \\ 0, & x_0 = \pi \end{cases}.$$

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Es sei die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z^2 = x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0 \right\}.$$



- (a) (2 Punkte) Geben Sie eine Parametrisierung für S an.
 (b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .
 (c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, \partial S)$ des Vektorfelds $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ entlang ∂S , wobei

$$g(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x - 4\cos(2x).$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ |x|, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

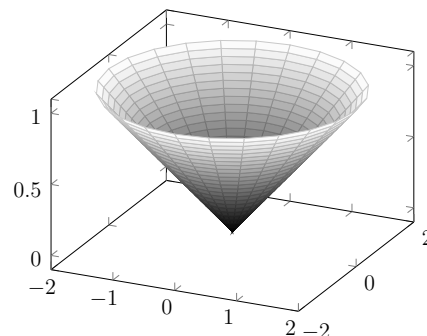
gegeben.

- (a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.
 (b) (7 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
Hinweis: Terme der Form $\sin(n\frac{\pi}{2})$ und $\cos(n\frac{\pi}{2})$ müssen ausgerechnet werden.
 (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Es sei die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z^2 = x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0 \right\}.$$



(a) (2 Punkte) Geben Sie eine Parametrisierung für S an.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, \partial S)$ des Vektorfelds $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ entlang ∂S , wobei

$$g(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \cos \varphi \\ -\frac{r}{2} \sin \varphi \\ r \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F(S) &= \int_S 1 \, dO = \int_0^2 \int_0^{2\pi} |\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{r^2}{4} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2} \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 2\pi r \, dr \\ &= 2\sqrt{5}\pi. \end{aligned}$$

(c) Mit dem Satz von Stokes gilt

$$\begin{aligned}
 Z(g, \partial S) &= \int_{\partial S} g \cdot ds \\
 &= \int_S \operatorname{rot} g \cdot n \, dO \qquad \operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 &= \int_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \cos \varphi \\ -\frac{r}{2} \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{r}{2} \cos \varphi - r \, d\varphi \, dr \\
 &= - \int_0^2 \frac{r}{2} [\sin \varphi + 2\varphi]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} dr \\
 &= -2\pi \int_0^2 r \, dr \\
 &= -4\pi.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x - 4\cos(2x) .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 + 3X^2 - 4$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 1.

$$P(X) = X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X^2 + 4X + 4) = (X - 1)(X + 2)(X + 2)$$

und hat die übrige zweifache Nullstelle -2 .

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{-2x} + cxe^{-2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x - 4\cos(2x)$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = -4\cos(2x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^x$:

Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = \alpha x e^x .$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_1}(x) = \alpha e^x + \alpha x e^x ,$$

$$f^{(2)}_{p_1}(x) = 2\alpha e^x + \alpha x e^x ,$$

$$f^{(3)}_{p_1}(x) = 3\alpha e^x + \alpha x e^x .$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$9\alpha e^x = 3e^x$$

und damit $\alpha = 1/3$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{1}{3} x e^x .$$

- Jetzt zu $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = -4\cos(2x)$:

Weil $\pm 2i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x).$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_2}(x) = -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x),$$

$$f^{(2)}_{p_2}(x) = -4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x),$$

$$f^{(3)}_{p_2}(x) = 8\alpha \sin(2x) - 8\beta \cos(2x).$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(8\alpha - 16\beta) \sin(2x) + (-16\alpha - 8\beta) \cos(2x) = -4\cos(2x).$$

Damit ist $\alpha = 1/5$ und $\beta = 1/10$. Also

$$f_{p_2}(x) = \frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{1}{10} \sin(2x).$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{-2x} + cxe^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 7\lambda + 12.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 - 48}{4}} = \frac{7 \pm 1}{2},$$

d. h. es gilt

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 zu finden, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\det(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

also $3y_1 - 2x_1 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für den Eigenwert 4 gilt analog

$$\det(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

also $y_2 - x_2 = 0$. Dies ist beispielsweise durch

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Wronski-Matrix ist somit gegeben durch

$$W(x) = \begin{pmatrix} 3e^{3x} & e^{4x} \\ 2e^{3x} & e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det W(x) = 3e^{7x} - 2e^{7x} = e^{7x}$$

und folglich

$$W(x)^{-1} = e^{-7x} \begin{pmatrix} e^{4x} & -e^{4x} \\ -2e^{3x} & 3e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -2e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$c'(x) = W(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -2e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} 3e^{3x} & e^{4x} \\ 2e^{3x} & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{4x} \\ xe^{4x} \end{pmatrix}.$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{4x} \\ xe^{4x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ |x|, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben.

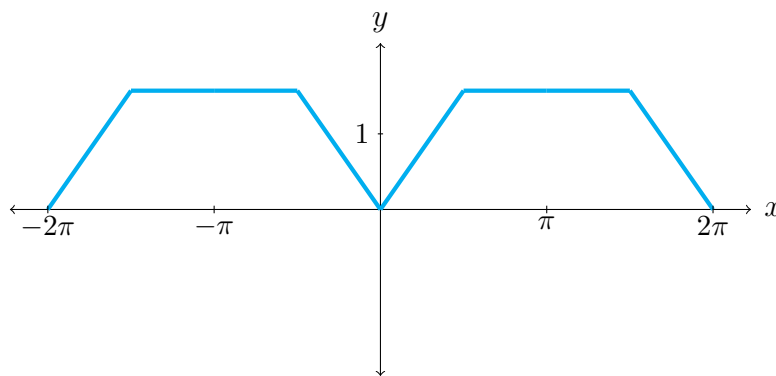
(a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) (7 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

Hinweis: Terme der Form $\sin(n\frac{\pi}{2})$ und $\cos(n\frac{\pi}{2})$ müssen ausgerechnet werden.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

(a) Skizze:



(b) (1) Weil $f(x)$ gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Für a_0 errechnet man:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Die Koeffizienten a_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) dx + \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n^2\pi} [-\cos(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) + \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) + \frac{1}{n} \left(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{(2k)^2\pi} ((-1)^k - 1), & n = 2k \\ -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2\pi} ((-1)^k - 1) \cos(2kx) - \frac{2}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x).$$

Eine weitere Fallunterscheidung nach k gerade/ungerade ist möglich und führt auf

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2\pi} \cos((4l+2)x) - \frac{2}{(4l+1)^2\pi} \cos((4l+1)x) - \frac{2}{(4l+3)^2\pi} \cos((4l+3)x).$$

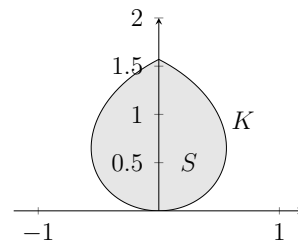
(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen

$(-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$, $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$, $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{-\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, \pi\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $[-\pi, \pi]$, konvergiert die Fourierreihe in $[-\pi, \pi]$ also gegen $f(x)$.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien ein Gebiet $S \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $\Phi : [0, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\varphi \cos \varphi \\ r\varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} -12y \\ 12x \end{pmatrix}.$$



- (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$ und $\operatorname{div} g$.
- (b) Geben Sie eine Parametrisierung des Randes $K = \partial S$ an.
- (c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K)$.
- (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

Aufgabe 2 (5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{1}{x}y = 6e^{x^2}, y(1) = 0, x > 0.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y = e^{-x} + e^x.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

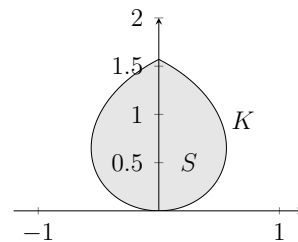
$$f(x) := x(x + \pi) \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi].$$

- (a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-3\pi, 3\pi)$.
- (b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in [-2\pi, 2\pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien ein Gebiet $S \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $\Phi : [0, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\varphi \cos \varphi \\ r\varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} -12y \\ 12x \end{pmatrix}.$$



- (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$ und $\operatorname{div} g$.
- (b) Geben Sie eine Parametrisierung des Randes $K = \partial S$ an.
- (c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K)$.
- (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .

Lösung

(a) $\operatorname{rot} g = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 12 - (-12) = 24$

$$\operatorname{div} g = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = 0 + 0 = 0$$

- (b) Man beobachtet, dass $\Phi(0, \varphi) = 0$ ein Punkt auf dem Rand und $\Phi(r, -\frac{\pi}{2}) = \Phi(r, \frac{\pi}{2})$ für $r \in [0, 1]$ eine Strecke im Inneren von S beschreiben, also nicht zum Rand von S beitragen. Damit ergibt sich eine Parametrisierung des Randes alleine durch Festhalten von $r = 1$:

$$\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \cos \varphi \\ \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

- (c) Direkt ausrechnen mit der Parametrisierung aus (b):

$$\begin{aligned} Z(g, K) &= \int_K g \cdot ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -12\varphi \sin \varphi \\ 12\varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 12\varphi^2 d\varphi = 12 \left[\frac{1}{3} \varphi^3 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^3 \end{aligned} \quad \gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- (d) Mit dem Satz von Green und der Zirkulation $Z(g, K) = \pi^3$ aus (c):

$$F(S) = \int_S dx = \frac{1}{24} \int_S \operatorname{rot} g \, dx = \frac{1}{24} Z(g, K) = \frac{\pi^3}{24}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{1}{x}y = 6e^{x^2}, y(1) = 0, x > 0.$$

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir bestimmen zunächst die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Mit $g(x) = \frac{1}{x}$ erhalten wir $G(x) = \ln x$ und

$$y_h = ce^{-G(x)} = ce^{-\ln x} = \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten durch den Ansatz

$$y_p = c(x)e^{-G(x)}$$

Dies führt auf

$$c'(x) = 6e^{x^2} e^{G(x)} = 6xe^{x^2}$$

und damit

$$c(x) = \int 6xe^{x^2} = 3e^{x^2}.$$

Also gilt

$$y_p = c(x)e^{-G(x)} = \frac{3}{x}e^{x^2}$$

und

$$y = y_p + y_h = \frac{c}{x} + \frac{3}{x}e^{x^2}$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems setzen wir

$$0 = y(1) = \frac{c}{1} + \frac{3}{1}e^{1^2} = c + 3e$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y = \frac{-3e}{x} + \frac{3}{x}e^{x^2}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - y = e^{-x} + e^x.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1:(3 Punkte) In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(4)} - y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^4 - 1$. Zwei offensichtliche Nullstellen von P sind 1 und -1 .

$$P(X) = X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$$

und hat die übrigen Nullstelle $\pm i$.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{-x} + c\sin(x) + d\cos(x)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2:(5 Punkte) In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} - y = e^x + e^{-x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} - y = e^x$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} - y = e^{-x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} - y = e^x$:

Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = \alpha x e^x.$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_1}(x) = \alpha e^x + \alpha x e^x,$$

$$f^{(2)}_{p_1}(x) = 2\alpha e^x + \alpha x e^x,$$

$$f^{(3)}_{p_1}(x) = 3\alpha e^x + \alpha x e^x,$$

$$f^{(4)}_{p_1}(x) = 4\alpha e^x + \alpha x e^x.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$4\alpha e^x = e^x$$

und damit $\alpha = 1/4$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{1}{4}xe^x.$$

- Jetzt zu $y^{(4)} - y = e^{-x}$:

Weil -1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = \alpha x e^{-x}.$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x}, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= -2\alpha e^{-x} + \alpha x e^{-x}, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 3\alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x}, \\ f^{(4)}_{p_2}(x) &= -4\alpha e^{-x} + \alpha x e^{-x}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$-4\alpha e^{-x} = e^{-x}$$

und damit $\alpha = -1/4$. Also

$$f_{p_2}(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}.$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x}$.

Alternative:(5 Punkte) Da $e^x + e^{-x}$ beide einfache Resonanz haben und $e^x + e^{-x} = 2 \cosh(x)$, folgender Ansatz

$$f_p = \alpha x \cosh(x) + \beta x \sinh(x).$$

Viermaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_p(x) &= (\alpha + \beta x) \cosh(x) + (\beta + \alpha x) \sinh(x), \\ f^{(2)}_p(x) &= (2\beta + \alpha x) \cosh(x) + (2\alpha x + \beta x) \sinh(x), \\ f^{(3)}_p(x) &= (3\alpha + \beta x) \cosh(x) + (3\beta + \alpha x) \sinh(x), \\ f^{(4)}_p(x) &= (4\beta + \alpha x) \cosh(x) + (4\alpha + \beta x) \sinh(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$4\beta \cosh(x) + 4\alpha \sinh(x) = 2 \cosh(x).$$

Also folgt $\beta = 1/2$ und $\alpha = 0$. Wir erhalten wieder $f_p = \frac{1}{2}x \sinh(x) = \frac{1}{4}x(e^x - e^{-x})$.

SCHRITT 3:(1 Punkt) In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{-x} + c \sin(x) + d \cos(x) + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 9.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \pm 3i.$$

Das Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ wird folglich von den Funktionen $\cos 3x$ und $\sin 3x$ gebildet. Für die zugehörige Wronski-Matrix bedeutet dies

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3 \sin 3x & 3 \cos 3x \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und folglich} \quad M(0)^{-\top} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswert

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(v_1 \mid A v_1 \right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \cos 3x + 4 \sin 3x \\ -5 \sin 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog ist die Lösung zum Anfangswert

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(v_2 \mid Av_2 \right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ 3 \cos 3x - 4 \sin 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

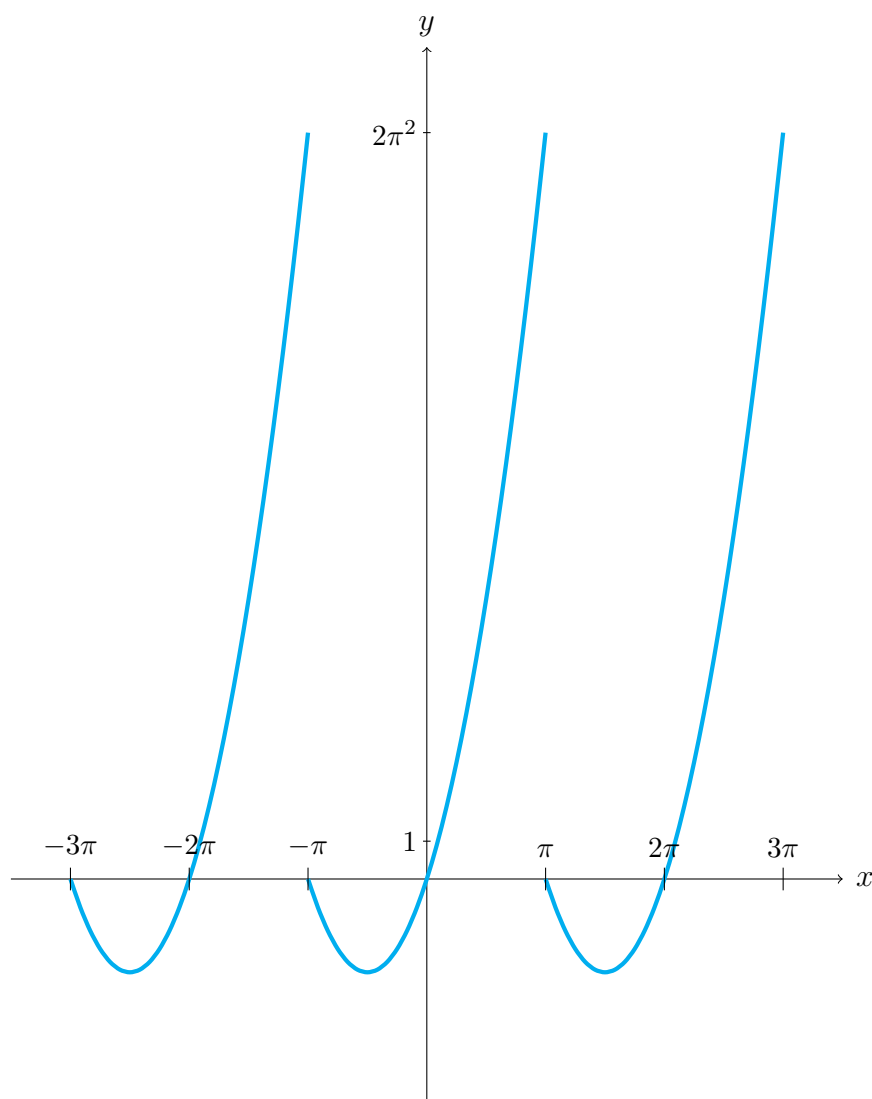
$$y_h(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos 3x + 4 \sin 3x \\ -5 \sin 3x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ 3 \cos 3x - 4 \sin 3x \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) := x(x + \pi) \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi).$$

- (a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-3\pi, 3\pi)$.
(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in [-2\pi, 2\pi]$ den Grenzwert der Fourierreihe.
-

(a) Skizze:



(b) (1) $f(x) = x^2 + \pi x$. Weil x^2 gerade ist und πx ungerade ist, gilt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

mit

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

und

$$\pi x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

(2) Der Koeffizient a_0 für x^2 folgt durch Integration:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

(3) Die Koeffizienten $a_n, n > 0$, für x^2 folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

(4) Die Koeffizienten b_n für πx folgen durch Integration:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x \sin(nx) dx \\
 &= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\
 &= 2 \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right) \\
 &= 2 \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n}.
 \end{aligned}$$

(5) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} \sin(nx).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{(2n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $x_0 \in \{-\pi, \pi\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe $2\pi^2$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right) = \frac{1}{2}(0 + 2\pi^2) = \pi^2.$$