

Tutorium

„Einführung in die Elektrotechnik 1“

Lösungen



Inhalt:

Aufgabe 1	Elektronenbewegung in einem Leiter	3
Aufgabe 2	Ohmscher Widerstand	3
Aufgabe 3	Temperaturabhängigkeit von R	4
Aufgabe 4	Temperaturabhängigkeit von R	5
Aufgabe 5	Temperaturabhängigkeit von R	5
Aufgabe 6	Leistung	6
Aufgabe 7	Leistung	7
Aufgabe 8	Energie	7
Aufgabe 9	Energie und Wirkungsgrad.....	8
Aufgabe 10	Widerstandsberechnung	9
Aufgabe 11	Widerstandsberechnung	9
Aufgabe 12	Parallelschaltung.....	10
Aufgabe 13	Parallelschaltung – Stromteiler-Regel	12
Aufgabe 14	Ersatzwiderstände, Netzwerkvereinfachung.....	14
Aufgabe 15	Ersatzspannungsquelle.....	16
Aufgabe 16	Erwärmung von Wasser und Hubarbeit.....	18
Aufgabe 17	Ersatzstromquelle	20
Aufgabe 18	Spannungsteiler.....	21
Aufgabe 19	Leistungsanpassung	22
Aufgabe 20	Leistung	24
Aufgabe 21	Leitungsdimensionierung	25
Aufgabe 22	Überlagerungssatz	27
Aufgabe 23	Überlagerungssatz	28
Aufgabe 24	Überlagerungssatz	31
Aufgabe 25	Zeitabhängige Ströme und Spannungen	33
Aufgabe 26	Wechselstrom – Zeitfunktion.....	34
Aufgabe 27	Wechselstrom – Zeitfunktion und Zeigerdarstellung	35
Aufgabe 28	Wechselstrom – Spule und Kondensator	36
Aufgabe 29	Wechselstrom – Zeigerdiagramm	38
Aufgabe 30	Wechselstrom – Zeigerdiagramm	40
Aufgabe 31	Wechselstrom – Komplexe Rechnung	41
Aufgabe 32	Wechselstrom – Komplexe Rechnung	43
Aufgabe 33	Wechselstrom – Komplexe Rechnung	45
Aufgabe 34	Wechselstrom – Komplexe Rechnung	47
Aufgabe 35	Wechselstrom – Komplexe Rechnung	48

Aufgabe 1 Elektronenbewegung in einem Leiter

In einem Kupferleiter mit dem Leiterquerschnitt $A_{\text{Cu}} = 2 \text{ mm}^2$ fließt ein Strom $I = 10 \text{ A}$. Die Dichte der im Kupfer vorhandenen freien Elektronen beträgt $n = 8,5 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3}$. Die Elementarladung beträgt $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

a) Mit welcher mittleren Geschwindigkeit bewegen sich die Elektronen durch den Leiter?

Lösung:

Während der Zeit t bewegt sich ein Elektron um die Strecke $\Delta s = v \cdot t$

Über den gesamten Querschnitt A verschiebt sich somit das Volumen c

– Im Volumen befindet sich damit die Ladungsmenge $Q = n \cdot e \cdot V = n \cdot e \cdot A \cdot v \cdot t$

Strom ist definiert als Ladung pro Zeit $I = \frac{Q}{t} = n \cdot e \cdot A \cdot v$

Nach v aufgelöst:
$$v = \frac{I}{n \cdot e \cdot A} = \frac{10 \text{ A}}{8,5 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 2 \text{ mm}^2} = 0,37 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Die mittlere Geschwindigkeit der gerichteten Elektronenbewegung ist recht gering.

Aufgabe 2 Ohmscher Widerstand

Ein Leiterseil besteht aus 50 einzelnen zusammen verflochtenen Leitern mit einem Durchmesser von jeweils $d = 2 \text{ mm}$. Der spezifische Widerstand des verwendeten

Leitermaterials beträgt $\rho = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$.

a) Berechnen Sie den ohmschen Widerstand R für eine 10 km lange Leitung.

Lösung:

Es gilt:
$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Drahtquerschnitt:
$$A_{\text{ges}} = n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 50 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (2 \text{ mm})^2 = 157,08 \text{ mm}^2$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{10.000 \text{ m}}{157,08 \text{ mm}^2} = 1,082 \Omega$$

Merke:

$$1 \text{ km} = 1.000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^2 = 1.000 \text{ mm} \cdot 1.000 \text{ mm} = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Aufgabe 3 Temperaturabhängigkeit von R

Ein Drahtwiderstand besitzt bei der Temperatur $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ einen Widerstand von $R_1 = 0,4 \, \Omega$. Bei der Temperatur ϑ_2 beträgt der Widerstandswert $R_2 = 0,42 \, \Omega$. Der Temperaturbeiwert beträgt $\alpha_{20} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

a) Ist die Temperatur ϑ_2 größer oder niedriger als die Temperatur ϑ_1 ?

Lösung:

$$\text{Es gilt } R(\vartheta_2) = R(\vartheta_{\text{Bezug}}) \cdot \left[1 + \alpha_{\text{Bezug}} \cdot (\vartheta - \vartheta_{\text{Bezug}}) \right].$$

Da $\alpha_{20} > 0$ ist und $R(\vartheta_2) > R(\vartheta_1)$ ist muss $\vartheta_2 > \vartheta_1$ sein.

b) Berechnen Sie die Temperatur ϑ_2 .

Lösung:

$$\frac{R(\vartheta_2)}{R(\vartheta_{\text{Bezug}})} = \left[1 + \alpha_{\text{Bezug}} \cdot (\vartheta - \vartheta_{\text{Bezug}}) \right]$$

$$\vartheta = \frac{\frac{R(\vartheta_2)}{R(\vartheta_{\text{Bezug}})} - 1}{\alpha_{\text{Bezug}}} + \vartheta_{\text{Bezug}} = \frac{\frac{0,42 \, \Omega}{0,40 \, \Omega} - 1}{3,9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}} + 20^\circ\text{C} = 12,82^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} \approx 33^\circ\text{C}$$

Aufgabe 4 Temperaturabhängigkeit von R

Ein Präzisions-Widerstand darf sich ausgehend von seinem Widerstandswert bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ nur um $p = \pm 0,015\%$ ändern. Der Temperaturbeiwert des verwendeten Materials beträgt bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ $\alpha_{20} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

a) Berechnen Sie die niedrigste und die höchste zulässige Temperaturabweichung.

Lösung:

Es gilt: $\Delta R = p \cdot R_0$ und damit $R_0 + p \cdot R_0 = R_0 \cdot [1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta]$

$$1 + p = [1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta]$$

$$\Delta\vartheta = \frac{p}{\alpha} = \frac{\pm 0,015 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}} = \pm 3,75 \text{ K}$$

$$\Delta\vartheta_{\min} = 20^\circ\text{C} - 3,75^\circ\text{C} = 16,26^\circ\text{C} \quad \Delta\vartheta_{\max} = 20^\circ\text{C} + 3,75^\circ\text{C} = 23,75^\circ\text{C}$$

Aufgabe 5 Temperaturabhängigkeit von R

Zwei Widerstand R_1 und R_2 sind in Reihe geschaltet und besitzen bei der Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ einen Gesamtwiderstand von $R_{12} = 100 \Omega$. Für R_1 beträgt $\alpha_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ und für R_2 beträgt $\alpha_2 = -2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

a) Welcher der beiden Widerstände ist ein Heißleiter und welcher ein Kaltleiter?

Lösung:

Heißleiter: $\vartheta \uparrow \Rightarrow R \downarrow$ und $\vartheta \downarrow \Rightarrow R \uparrow$, d.h. $\alpha < 0$ Somit Material mit $\alpha_2 = -2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

Kaltleiter: $\vartheta \uparrow \Rightarrow R \uparrow$ und $\vartheta \downarrow \Rightarrow R \downarrow$, d.h. $\alpha > 0$ Somit Material mit $\alpha_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

b) Berechnen Sie die Widerstandswerte R_1 und R_2 bei der Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, sodass der Gesamtwiderstand aus R_1 und R_2 temperaturunabhängig, d.h. konstant $R_{12} = 100 \Omega$ bleibt.

Lösung:

$$R_1 + R_2 = R_1 \cdot [1 + \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta] + R_2 \cdot [1 + \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta]$$

$$0 = R_1 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta + R_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta$$

$$R_1 \cdot \alpha_1 = -R_2 \cdot \alpha_2$$

$$R_1 = -R_2 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Einsetzen in: $R_1 + R_2 = 90 \, \Omega = R_2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$

$$R_2 = \frac{90 \, \Omega}{\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)} = \frac{90 \, \Omega}{\left(1 + \frac{2}{4}\right)} = 60 \, \Omega \quad \text{und damit} \quad R_1 = 90 \, \Omega - 60 \, \Omega = 30 \, \Omega$$

Aufgabe 6 Leistung

Ein Ofen (entspricht näherungsweise einem ohmschen Widerstand R) wird zunächst an einer Spannung $U = 230 \, \text{V}$ betrieben. Die Spannung sinkt auf $U = 225 \, \text{V}$ ab.

- a) Berechnen Sie, um wieviel Prozent sich die Heizleistung durch den Spannungsabfall erniedrigt (Annahme: Der Widerstand R des Ofens bleibt konstant).

Lösung:

Allgemein gilt: $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R} \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R} \quad \text{und damit} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = \left(\frac{225 \, \text{V}}{230 \, \text{V}}\right)^2 = 95,7 \, \%$$

Die umgesetzte Leistung bei der kleineren Spannung beträgt nur noch 95,7 %, d.h. die umgesetzte Wärmeleistung ging um $100 \, \% - 95,7 \, \% = 4,3 \, \%$ zurück.

Beispiel: Spannung steigt von 220 V auf 230 V.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = \left(\frac{230 \text{ V}}{220 \text{ V}} \right)^2 = 1,14 \quad \text{Die Leistung nimmt dann um 14 \% zu.}$$

Aufgabe 7 Leistung

Ein ohmscher Widerstand setzt bei der Spannung U die Leistung P in Wärme um.

- a) Um wieviel Prozent muss die Spannung U abgesenkt werden, damit die Leistungsaufnahme um 20 % gesenkt wird?

Lösung:

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R}$$

Bei U_2 soll die Leistung um $p = 20 \%$ geringer sein, d.h.: $P_2 = \frac{U_2^2}{R} = (1-p) \cdot \frac{U_1^2}{R}$

$$U_2^2 = (1-p) \cdot U_1^2$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{(1-p)} = \sqrt{1-0,2} = 0,894$$

Die Spannung U_2 muss auf 89,4 % des Wertes von U_1 eingestellt werden, d.h. sie muss um $100 \% - 89,4 \% = 10,6 \%$ gesenkt werden.

Aufgabe 8 Energie

Ein elektrischer Verbraucher wird über einen Energiezähler angeschlossen. Die Beobachtung des Zählers ergibt, dass sich die Zählerscheibe in 2 Minuten 5 Mal vollständig gedreht hat. Auf dem Zähler steht, dass 80 Umdrehungen der Zählerscheibe einer entnommenen Energie von 1 kWh entsprechen.

- a) Welche Energie W nimmt der Verbraucher in diesen 2 Minuten auf?

Lösung:

80 Umdrehungen der Zählerscheibe entsprechen 1 kWh.

$$5 \text{ Umdrehungen der Zählerscheibe entsprechen } W = \frac{5}{80} \cdot 1 \text{ kWh} = 0,0625 \text{ kWh}$$

b) Wie groß ist die Leistungsaufnahme P des angeschlossenen Verbrauchers?

Lösung:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{0,0625 \text{ kWh}}{2 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}} = 1,875 \text{ kW} = 1.875 \text{ W}$$

Aufgabe 9 Energie und Wirkungsgrad

Auf eine elektrische Heizplatte (entspricht einem ohmschen Widerstand R) mit der Leistung $P = 1.750 \text{ W}$ wird ein Topf mit einem kg Wasser der Temperatur $\vartheta = 15^\circ\text{C}$ gestellt und 5 Minuten lang bis zum Sieden des Wassers auf $\vartheta_1 = 100^\circ\text{C}$ erhitzt. Die spezifische

Wärmekapazität von Wasser beträgt $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) Berechnen Sie die von der Heizplatte aufgenommene elektrische Energie.

Lösung:

$$W_{\text{el}} = P \cdot t = 1.750 \text{ W} \cdot 5 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} = 525 \text{ kJ}$$

b) Berechnen Sie die dem Wasser zugeführte Wärmeenergie.

Lösung:

$$W_{\text{Wasser}} = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta = 1 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (100 - 15) \text{ K} = 375 \text{ kJ}$$

c) Wie groß ist der Wirkungsgrad beim Erhitzen des Wassers?

Lösung:

$$\eta = \frac{W_{\text{Wasser}}}{W_{\text{el}}} = \frac{375 \text{ kJ}}{525 \text{ kJ}} = 68 \%$$

Aufgabe 10 Widerstandsberechnung

Ein 20 m langer Kupferdraht ($\rho_{\text{Cu}} = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$) wird zu einem Drahtwiderstand aufgewickelt. Der Widerstand wird anschließend mit einem Messgerät zu $R = 1 \Omega$ gemessen.

a) Berechnen Sie den Durchmesser des Drahtes.

Lösung:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad \text{umgeformt nach } A \quad A = \rho \cdot \frac{l}{R} = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{20 \text{ m}}{1 \Omega} = 0,34 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,34 \text{ mm}^2}{\pi}} = 0,658 \text{ mm}$$

b) Wie groß wird der Widerstand, wenn man anstelle von Kupfer den Werkstoff Aluminium

($\rho_{\text{Al}} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$) verwendet?

Lösung:

$$R_{\text{Al}} = \rho_{\text{Al}} \cdot \frac{l}{A} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{20 \text{ m}}{0,34 \text{ mm}^2} = 1,641 \Omega$$

Aufgabe 11 Widerstandsberechnung

Eine 2 km lange Energieübertragungsstrecke besteht aus Aluminiumleitungen (Hin- und Rückleitung!) ($\rho_{\text{Al}} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$). Die Querschnittsfläche beträgt 300 mm^2 .

a) Berechnen Sie den ohmschen Widerstand der Leitung (Hin- und Rückleitung!).

Lösung:

$$R_{\text{Al}} = \rho_{\text{Al}} \cdot \frac{2 \cdot l}{A} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{2 \cdot 2.000 \text{ m}}{300 \text{ mm}^2} = 0,372 \Omega$$

- b) Wie groß ist der Spannungsabfall entlang der Leitung, wenn durch die Leitung ein Strom von 400 A fließt?

Lösung:

$$\Delta U = R_{Al} \cdot I = 0,372 \, \Omega \cdot 400 \, \text{A} = 148,8 \, \text{V}$$

- c) Wie groß darf der Strom maximal sein, damit die zulässige Stromdichte $S = 3 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$ nicht überschritten wird?

Lösung:

$$I_{\text{max}} = S \cdot A = 3 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \cdot 300 \, \text{mm}^2 = 900 \, \text{A}$$

- d) Wie groß sind die Leitungsverluste bei maximalem Strom?

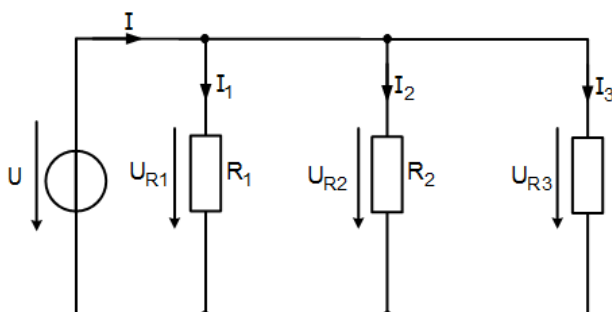
Lösung:

$$P_V = R \cdot I_{\text{max}}^2 = 0,372 \, \Omega \cdot 900 \, \text{A} = 301,32 \, \text{kW}$$

Aufgabe 12 Parallelschaltung

- a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) einer Parallelschaltung aus drei Widerständen, die an eine ideale Spannungsquelle angeschlossen werden.

Lösung:



- b) Ergänzen Sie das ESB durch eindeutige Bezeichner und Zählpfeile.

Lösung: siehe a)

c) Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen.

Lösung:

Aus MR: $U_{R1} = U_{R2} = U_{R3} = U$

Mit OG: $I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$

d) Wie verhalten sich die Ströme zueinander?

Lösung:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1} \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}$$

Die Ströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände.

e) Geben Sie den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung an.

Lösung:

KR: $I = I_1 + I_2 + I_3 = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$

Ersatzwiderstand: $\frac{1}{R_{\text{ers}}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$ bzw. $R_{\text{ers}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

f) Führen Sie die Schaltungsanalyse erneut mit Leitwerten durch.

Lösung:

Aus MR: $U_{R1} = U_{R2} = U_{R3} = U$

Leitwerte: $G_1 = \frac{1}{R_1} \quad G_2 = \frac{1}{R_2} \quad G_3 = \frac{1}{R_3}$

Mit OG: $I_1 = G_1 \cdot U \quad I_2 = G_2 \cdot U \quad I_3 = G_3 \cdot U$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \quad \frac{I_1}{I_3} = \frac{G_1}{G_3} \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{G_2}{G_3}$$

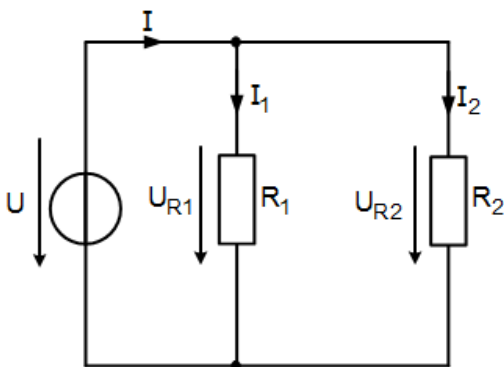
Die Ströme verhalten sich wie die Leitwerte.

Aufgabe 13 Parallelschaltung – Stromteiler-Regel

In der Elektrotechnik tritt häufig der Sonderfall einer Parallelschaltung aus zwei Widerständen auf. Im Folgenden soll die Schaltung nun genauer untersucht und hilfreiche Beziehungen abgeleitet werden.

- a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) der Parallelschaltung aus zwei Widerständen, die an eine ideale Spannungsquelle angeschlossen werden.

Lösung:



- b) Ergänzen Sie das ESB durch eindeutige Bezeichner und Zählpfeile.

Lösung: siehe a)

- c) Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen.

Lösung:

Aus MR: $U_{R1} = U_{R2} = U$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad I = I_1 + I_2 = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

d) Wie verhalten sich die Teil-Ströme zum Gesamtstrom?

Lösung:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \frac{I_1}{I} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \frac{I_2}{I} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

e) Geben Sie den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung an.

Lösung:

$$I = I_1 + I_2 = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad R_{\text{ers}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

f) Führen Sie die Schaltungsanalyse erneut mit Leitwerten durch.

Lösung:

Aus MR: $U_{R1} = U_{R2} = U$

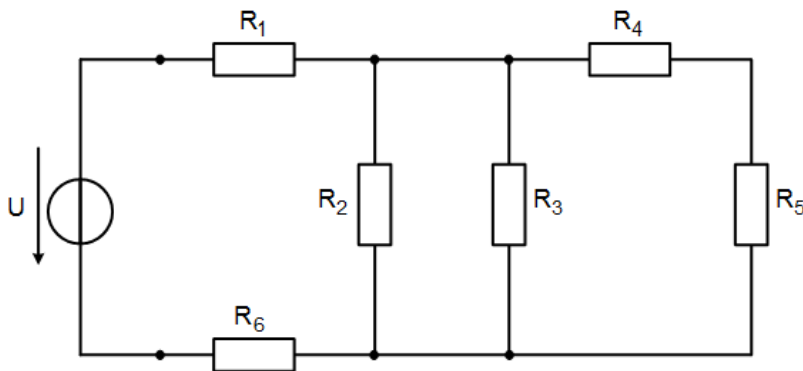
Leitwerte: $G_1 = \frac{1}{R_1} \quad G_2 = \frac{1}{R_2} \quad G_3 = \frac{1}{R_3}$

Mit OG: $I_1 = G_1 \cdot U \quad I_2 = G_2 \cdot U \quad I = I_1 + I_2 = U \cdot (G_1 + G_2) = U \cdot G_{\text{ers}}$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \quad \frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_{\text{ers}}} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad \frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_{\text{ers}}} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Aufgabe 14 Ersatzwiderstände, Netzwerkvereinfachung

Gegeben ist die im folgenden Bild dargestellte Schaltung:



Gegeben:

$$U = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \, \Omega$$

$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$R_3 = 6 \, \Omega$$

$$R_4 = 12 \, \Omega$$

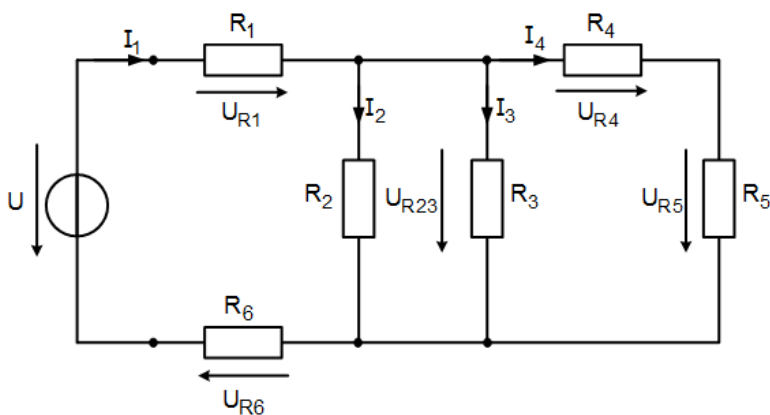
$$R_5 = 6 \, \Omega$$

$$R_6 = 2,2 \, \Omega$$

– Einfaches Widerstandsnetzwerk

- a) Ergänzen Sie das ESB durch eindeutige Bezeichner und Zählpfeile für alle Ströme und Spannungen.

Lösung:



- b) Fassen Sie die Widerstände sukzessive zusammen und berechnen Sie den Strom, den die Spannungsquelle liefern muss. Welche Leistung wird der Quelle entnommen?

Lösung:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 12 \, \Omega + 6 \, \Omega = 18 \, \Omega$$

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \, \Omega \cdot 6 \, \Omega}{3 \, \Omega + 6 \, \Omega} = 2 \, \Omega$$

$$R_{2345} = \frac{R_{23} \cdot R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = \frac{2 \, \Omega \cdot 18 \, \Omega}{2 \, \Omega + 18 \, \Omega} = 1,8 \, \Omega$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_{2345} + R_6 = 2 \, \Omega + 1,8 \, \Omega + 2,2 \, \Omega = 6 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{12 \, \text{V}}{6 \, \Omega} = 2 \, \text{A}$$

$$P_{\text{Quelle}} = U \cdot I = 12 \, \text{V} \cdot 2 \, \text{A} = 24 \, \text{W}$$

- c) Berechnen Sie, ausgehend vom bekannten Gesamtstrom alle anderen Ströme und die Teilspannungen an den einzelnen Widerständen.

Lösung:

$$U_{R1} = R_1 \cdot I_1 = 2 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} = 4 \, \text{V}$$

$$U_{R6} = R_6 \cdot I_1 = 2,2 \, \Omega \cdot 2 \, \text{A} = 4,4 \, \text{V}$$

$$U_{R2345} = U - U_{R1} - U_{R6} = 12 \, \text{V} - 4 \, \text{V} - 4,4 \, \text{V} = 3,6 \, \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_{R2345}}{R_2} = \frac{3,6 \, \text{V}}{3 \, \Omega} = 1,2 \, \text{A} \quad I_3 = \frac{U_{R2345}}{R_3} = \frac{3,6 \, \text{V}}{6 \, \Omega} = 0,6 \, \text{A}$$

$$I_4 = \frac{U_{R2345}}{R_{45}} = \frac{3,6 \, \text{V}}{18 \, \Omega} = 0,2 \, \text{A}$$

Probe: $I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = 1,2 \, \text{A} + 0,6 \, \text{A} + 0,2 \, \text{A} = 2 \, \text{A}$ Knotenregel erfüllt!

$$U_{R4} = R_4 \cdot I_4 = 12 \, \Omega \cdot 0,2 \, \text{A} = 2,4 \, \text{V}$$

$$U_{R5} = R_5 \cdot I_4 = 6 \, \Omega \cdot 0,2 \, \text{A} = 1,2 \, \text{V}$$

Probe: $U_{R4} + U_{R5} = 2,4 \, \text{V} + 1,2 \, \text{V} = 3,6 \, \text{V}$

- d) Berechnen Sie die in den einzelnen Widerständen in Wärme umgesetzten Leistungen.

Lösung:

$$P_{R1} = U_{R1} \cdot I_1 = 4 \, \text{V} \cdot 2 \, \text{A} = 8 \, \text{W}$$

$$P_{R2} = U_{R2345} \cdot I_2 = 3,6 \, \text{V} \cdot 1,2 \, \text{A} = 4,32 \, \text{W}$$

$$P_{R3} = U_{R2345} \cdot I_3 = 3,6 \text{ V} \cdot 0,6 \cdot \text{A} = 2,16 \text{ W}$$

$$P_{R4} = U_{R4} \cdot I_4 = 2,4 \text{ V} \cdot 0,2 \cdot \text{A} = 0,48 \text{ W}$$

$$P_{R5} = U_{R5} \cdot I_4 = 1,2 \text{ V} \cdot 0,2 \cdot \text{A} = 0,24 \text{ W}$$

$$P_{R6} = U_{R6} \cdot I_1 = 4,4 \text{ V} \cdot 2 \cdot \text{A} = 8,8 \text{ W}$$

e) Führen Sie eine Leistungsbilanz durch.

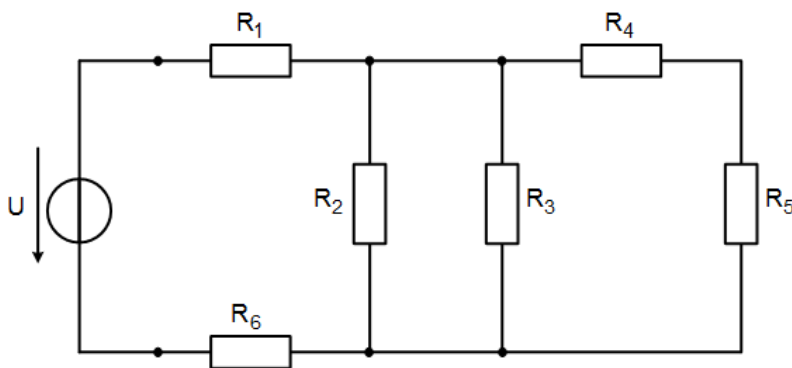
Lösung:

$$P_{\text{ges}} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} + P_{R5} + P_{R6} = \dots = 24 \text{ W} = P_{\text{Quelle}}$$

Die elektrische Leistung, die die Quelle liefert, wird in den ohmschen Widerständen in Wärme umgewandelt.

Aufgabe 15 Ersatzspannungsquelle

Gegeben ist die im folgenden Bild dargestellte Schaltung:



Gegeben:

$$U = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \, \Omega$$

$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$R_3 = 6 \, \Omega$$

$$R_4 = 12 \, \Omega$$

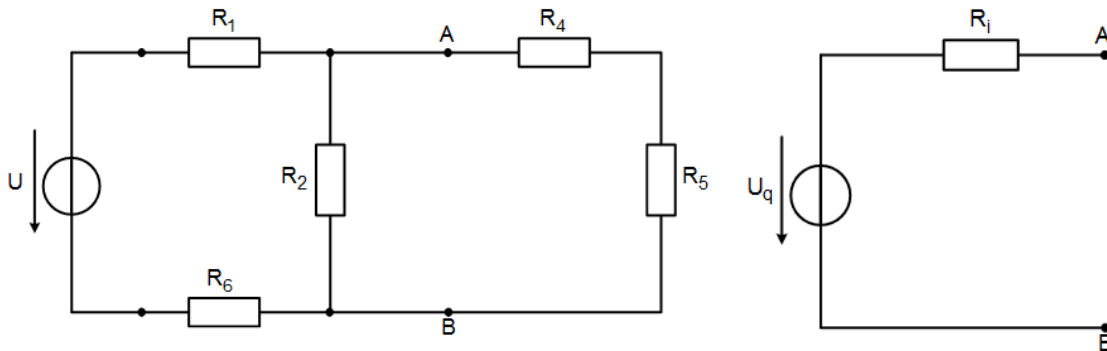
$$R_5 = 6 \, \Omega$$

$$R_6 = 2,2 \, \Omega$$

Einfaches Widerstandsnetzwerk

a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der Ersatzspannungsquelle bezüglich des Zweiges in dem sich R_3 befindet.

Lösung:



- b) Berechnen Sie die Quellenspannung U_q und den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle.

Lösung:

Die Quellenspannung U_q entspricht der Leerlaufspannung zwischen den Klemmen A-B. Dies ist die Spannung, die an den parallelen Widerständen $R_2 \parallel (R_4 + R_5)$ abfällt.

$$R_{245} = \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{3 \, \Omega \cdot (12 \, \Omega + 6 \, \Omega)}{3 \, \Omega + 12 \, \Omega + 6 \, \Omega} = 2,57 \, \Omega$$

Anwendung der Maschenregel liefert:

$$U_q = U_{AB,LL} = U \cdot \frac{R_{245}}{R_1 + R_{245} + R_6} = 12 \, \text{V} \cdot \frac{2,57 \, \Omega}{2 \, \Omega + 2,57 \, \Omega + 2,2 \, \Omega} = 4,557 \, \text{V}$$

Der Innenwiderstand ist der Ersatzwiderstand bezüglich der Klemmen A-B. Die Spannungsquelle U muss wirkungslos, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt werden.

R_1 und R_6 sind in Reihe und dann parallel zu R_{245} :

$$R_{16} = R_1 + R_6 = 2 \, \Omega + 2,2 \, \Omega = 4,2 \, \Omega$$

$$R_i = \frac{R_{16} \cdot R_{245}}{R_{16} + R_{245}} = \frac{4,2 \, \Omega \cdot 2,57 \, \Omega}{4,2 \, \Omega + 2,57 \, \Omega} = 1,56 \, \Omega$$

- c) Berechnen Sie den Strom durch R_3 , die Spannung an R_3 und die Leistung, die in R_3 in Wärme umgesetzt wird.

Lösung:

$$I_{R3} = \frac{U_q}{R_i + R_3} = \frac{4,557 \text{ V}}{1,56 \Omega + 6 \Omega} = 0,06 \text{ A}$$

$$U_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = 6 \Omega \cdot 0,6 \text{ A} = 3,6 \text{ V}$$

$$P_{R3} = U_{R3} \cdot I_{R3} = 3,6 \text{ V} \cdot 0,6 \text{ A} = 2,16 \text{ W}$$

d) Berechnen Sie die Leistung P_q , die die Ersatzspannungsquelle liefert.

Lösung:

– $P_q = U_q \cdot I_{R3} = 4,557 \text{ V} \cdot 0,6 \text{ A} = 2,73 \text{ W}$

e) Vergleichen Sie die Werte aus den Aufgabenteilen c) und d) mit den Ergebnissen aus Aufgabe 14. Welche Folgerungen können Sie daraus ziehen?

Lösung:

Der Strom, die Spannung und die Leistung an R_3 entsprechen genau den Werten in Aufgabe 14. Die Leistungen der Quellen stimmen nicht überein.

Schlussfolgerung:

Beim Verfahren der Ersatzspannungsquelle werden lediglich die Verhältnisse bezüglich des betrachteten Zweiges richtig abgebildet.

Aufgabe 16 Erwärmung von Wasser und Hubarbeit

In einem elektrisch betriebenen Warmwasserboiler sollen 100 Liter Wasser von 12°C auf 60°C erwärmt werden. Die spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) Berechnen Sie die für die Erwärmung notwendige Wärmemenge (Energie) W in J und in kWh, unter der Annahme, dass der Erwärmungsprozess verlustlos abläuft.

Lösung:

$$m_{\text{Wasser}} = \rho \cdot V = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 100 \text{ l} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1.000 \text{ l}} = 100 \text{ kg}$$

$$W_{\text{Wasser}} = m_{\text{Wasser}} \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = 100 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (60 - 12) \text{ K} = 20.160 \text{ kJ}$$

$$1 \text{ kJ} = 1.000 \text{ J} = 1.000 \text{ Ws}$$

$$1 \text{ kJ} = 1.000 \text{ J} = 1.000 \text{ Ws}$$

$$W_{\text{Wasser}} = 20.160 \text{ kWs} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} = 5,6 \text{ kWh}$$

b) Wieviel Kostet die Warmwasseraufbereitung, wenn 1 kWh Energie 0,35 € kostet?

Lösung:

$$\text{Kosten} = 5,6 \text{ kWh} \cdot 0,35 \frac{\text{€}}{\text{kWh}} = 1,96 \text{ €}$$

c) Wie lange dauert der Erwärmungsvorgang, wenn die Heizspirale des Boilers eine elektrische Leistung von 3,5 kW besitzt?

Lösung:

$$W_{\text{Wasser}} = P \cdot t \quad t = \frac{W_{\text{Wasser}}}{P} = \frac{20.160 \cdot 10^3 \text{ Ws}}{3.500 \text{ W}} = 5.760 \text{ s} =$$

$$t = 5.760 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 96 \text{ min} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$$

d) Wieviel Säcke Zement zu je 50 kg könnten mit derselben Menge an Energie mit einem Aufzug um 100 m in die Höhe befördert werden, wenn die Hebeanlage einen Wirkungsgrad von 80 % aufweist?

Lösung:

$$W_{\text{Hub}} = 0,8 \cdot W_{\text{Wasser}} = 0,8 \cdot 20.160 \text{ kWs} = 16.128 \text{ kWs}$$

$$W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h$$

$$m = \frac{W_{\text{Hub}}}{g \cdot h} = \frac{16.128 \cdot 10^3 \text{ Ws}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m}} \approx 16.440 \text{ kg}$$

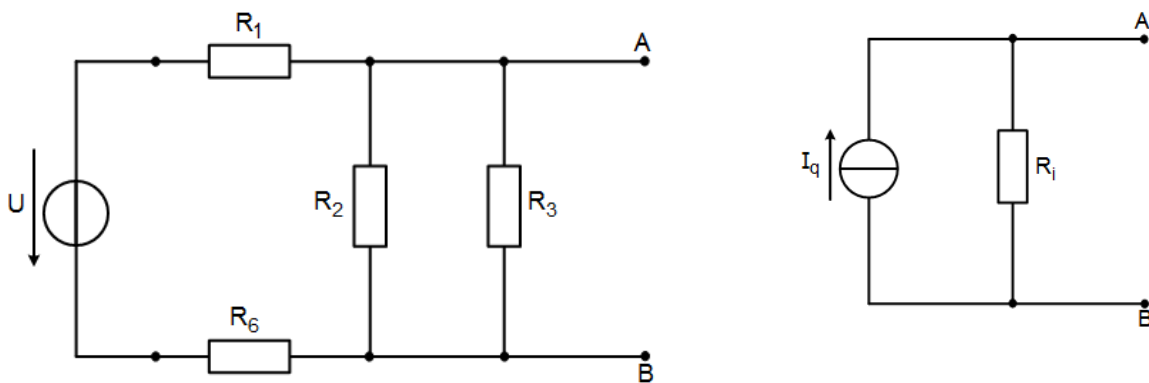
Einheiten: $\frac{Ws}{\frac{m}{s^2} \cdot m} = \frac{Ws^3}{m^2} = \frac{VAs^3}{m^2} = \frac{J \cdot A \cdot s^3}{As \cdot m^2} = \frac{J \cdot s^2}{m^2} = \frac{Nm \cdot s^2}{m^2} = \frac{N \cdot s^2}{m} = \frac{kg \cdot m \cdot s^2}{s^2 \cdot m} = kg$

$$n = \frac{m}{m_{\text{Sack}}} = \frac{16.440 \text{ kg}}{50 \text{ kg}} \approx 329$$

Aufgabe 17 Ersatzstromquelle

a) Zeichnen Sie für die in Aufgabe 14 gegebene Schaltung die Ersatzstromquellendarstellung bezüglich des Zweiges mit den Widerständen R_4 und R_5 .

Lösung:



b) Bestimmen Sie den Quellenstrom I_q und den Innenwiderstand R_i der Ersatzstromquelle.

Lösung:

Der Quellstrom entspricht dem Kurzschluss-Strom bei Kurzschluss der Klemmen A-B. Die Widerstände R_2 und R_3 liegen dann parallel zum Kurzschluss und sind somit wirkungslos.

$$I_q = \frac{U}{R_1 + R_6} = \frac{12 \text{ V}}{2 \Omega + 2,2 \Omega} = 2,857 \text{ A}$$

Der Innenwiderstand ergibt sich als Ersatzwiderstand bezüglich der Klammern A-B. Dazu muss die Spannungsquelle U wirkungslos gemacht werden, d.h. sie wird durch einen Kurzschluss ersetzt.

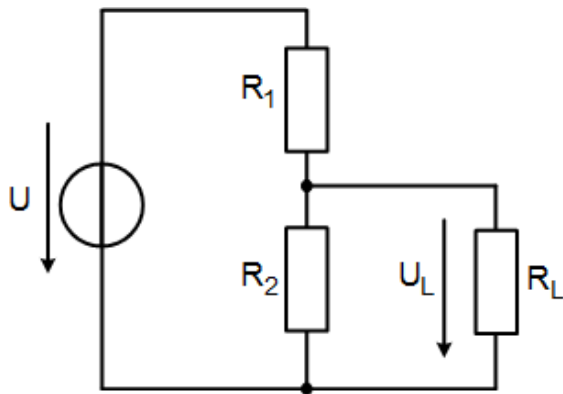
R_1 und R_6 sind in Reihe: $R_{16} = R_1 + R_6 = 2 \Omega + 2,2 \Omega = 4,2 \Omega$

R_{16} , R_2 und R_3 sind parallel:

$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_{16}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{4,2 \Omega} + \frac{1}{3 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega}} = 1,355 \Omega$$

Aufgabe 18 Spannungsteiler

Im folgenden Bild ist die Schaltung eines belasteten Spannungsteilers abgebildet.



Gegeben:

$$U = 60 \text{ V}$$

$$R_1 + R_2 = R = 200 \Omega$$

$$R_L = 750 \Omega$$

Belasteter Spannungsteiler

a) Bestimmen Sie die Widerstände R_1 und R_2 , sodass die Spannung $U_L = 35 \text{ V}$ beträgt.

Lösung:

Spannungsteiler:

$$U_L = U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}} = U \cdot \frac{R_2 \cdot R_L}{R_1 \cdot (R_2 + R_L) + R_2 \cdot R_L}$$

Für R_1 wird eingesetzt: $R_1 = R - R_2$

$$\frac{U_L}{U} = \frac{R_2 \cdot R_L}{(R - R_2) \cdot (R_2 + R_L) + R_2 \cdot R_L}$$

$$(R - R_2) \cdot (R_2 + R_L) + R_2 \cdot R_L = \frac{U}{U_L} \cdot R_2 \cdot R_L$$

$$R \cdot R_2 + R \cdot R_L - R_2^2 - R_2 \cdot R_L + R_2 \cdot R_L = \frac{U}{U_L} \cdot R_2 \cdot R_L$$

$$R \cdot R_2 + R \cdot R_L - R_2^2 - \frac{U}{U_L} \cdot R_2 \cdot R_L = 0$$

$$R_2^2 + \underbrace{\left(\frac{U}{U_L} \cdot R_L - R \right)}_p \cdot R_2 - \underbrace{R \cdot R_L}_q = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung für R_2 :

$$\text{Lösungsformel: } R_{2|1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\text{Zahlenwerte: } p = \frac{U}{U_L} \cdot R_L - R = \frac{60 \text{ V}}{35 \text{ V}} \cdot 750 \Omega - 200 \Omega = 1.085,71 \Omega$$

$$q = -R \cdot R_L = -200 \Omega \cdot 750 \Omega = -150.000 \Omega^2$$

$$R_{2|1,2} = -\frac{1.085,71 \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1.085,71 \Omega}{2}\right)^2 + 150.000 \Omega^2}$$

$$R_{2|1,2} = -542,885 \Omega \pm 666,85 \Omega$$

$$R_{2|1,2} = -542,885 \Omega + 666,85 \Omega = 123,965 \Omega \approx 124 \Omega$$

$$R_{2|2} = -542,885 \Omega - 666,85 \Omega < 0 \text{ daher physikalisch nicht sinnvoll!!!}$$

$$R_1 = R - R_2 = 200 \Omega - 124 \Omega = 76 \Omega$$

Aufgabe 19 Leistungsanpassung

Zeigen Sie, dass einer realen Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R_i die maximale Leistung entnommen wird, wenn der Lastwiderstand R_L gleich dem Innenwiderstand R_i ist.

Lösung:

$$\text{Es gilt: } I = \frac{U}{R_i + R_L} \quad P_L = R_L \cdot I^2 = \frac{R_L \cdot U^2}{(R_i + R_L)^2}$$

$$P_L = f(R_L) = \frac{u(R_L)}{v(R_L)} \quad \text{Maximum bei: } \frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

$$\text{Allgemein: } f = \frac{u}{v} \quad \text{Quotientenregel: } f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Hier:} \quad u(R_L) &= R_L \cdot U^2 & v(R_L) &= (R_i + R_L)^2 \\ u'(R_L) &= U^2 & v'(R_L) &= 2 \cdot (R_i + R_L) \end{aligned}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{U^2 \cdot (R_i + R_L)^2 - 2 \cdot U^2 \cdot R_L \cdot (R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(R_i + R_L)^2 - 2 \cdot R_L \cdot (R_i + R_L) \stackrel{!}{=} 0$$

$$(R_i + R_L) - 2 \cdot R_L \stackrel{!}{=} 0$$

$$R_i + R_L - 2 \cdot R_L = R_i - R_L = 0$$

$$R_i = R_L$$

An R_i und R_L fallen dieselben Spannungen ab und es werden dieselben Leistungen umgesetzt, sodass der Wirkungsgrad (lediglich) 50 % beträgt.

Für die Nachrichtentechnik ist dies tragbar.

Für die **Energietechnik** nicht → andere Fragestellung → **Maximaler Wirkungsgrad**.

$$I_L = \frac{U}{R_i + R_L}$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = \frac{R_L \cdot U^2}{(R_i + R_L)^2}$$

$$P_Q = U \cdot I_L = \frac{U^2}{(R_i + R_L)}$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_Q} = \frac{R_L}{(R_i + R_L)}$$

Wirkungsgrad wird maximal, wenn $R_i = 0 \, \Omega$ wird.

→ Energienetz Innenwiderstand sehr gering.

Aufgabe 20 Leistung

Die Leistungsaufnahme eines Fernsehgerätes beträgt im Betrieb 150 W und im Standby-Betrieb 3 W. Es wird täglich 4 Stunden ferngesehen. Den Rest der Zeit verbringt das Gerät im Standby.

a) Wie groß ist der monatliche (30 Tage) Energiebedarf des Fernsehgeräts in kWh?

Lösung:

$$W_{\text{Tag}} = t_B \cdot P_B + (24 \text{ h} - t_B) \cdot P_{\text{St}} = 4 \text{ h} \cdot 150 \text{ W} + 20 \text{ h} \cdot 3 \text{ W} = 0,66 \text{ kWh}$$

$$W_{\text{Monat}} = 30 \cdot W_{\text{Tag}} = 30 \cdot 0,66 \text{ kWh} = 19,8 \text{ kWh}$$

b) Wie groß ist der monatliche Energiebedarf für den Standby-Betrieb?

Lösung:

$$W_{\text{St,Monat}} = 30 \cdot W_{\text{St,Tag}} = 30 \cdot 20 \text{ h} \cdot 3 \text{ W} = 1,8 \text{ kWh}$$

$$\text{Vergleich: } \frac{W_{\text{St,Monat}}}{W_{\text{Monat}}} = \frac{1,8 \text{ kWh}}{19,8 \text{ kWh}} \approx 9,1 \%$$

c) Zu wie viel Prozent wäre ein 1.000 MW-Kraftwerk ausgelastet, um die Energie für den Standby-Betrieb von 60 Millionen Fernsehgeräten zu liefern?

Lösung:

$$W_{\text{Standby}} = 60 \cdot 10^6 \cdot W_{\text{St,Monat}} = 60 \cdot 10^6 \text{ h} \cdot 1,8 \text{ kWh} = 108 \cdot 10^6 \text{ kWh} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ MWh}$$

Das Kraftwerk liefert in einem Monat die Energiemenge:

$$W_{\text{KW}} = 1.000 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 30 \text{ d} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} = 7,2 \cdot 10^5 \text{ MWh}$$

$$\text{Auslastung durch den Standbybetrieb: } \frac{W_{\text{Standby}}}{W_{\text{KW}}} = \frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ MWh}}{7,2 \cdot 10^5 \text{ MWh}} = 15 \%$$

- d) Wie viel Tonnen Braunkohle werden benötigt, um die elektrische Energie aus Aufgabenteil c) zu erzeugen, wenn das Kraftwerk einen Wirkungsgrad von 38 % hat? (1 kg Braunkohle liefert 14,2 MJ Wärmeenergie).

Lösung:

Es gilt: $W_{\text{Standby}} = m_{\text{Kohle}} \cdot W_{\text{spez,Kohle}} \cdot \eta_{\text{KW}}$

$$m_{\text{Kohle}} = \frac{W_{\text{Standby}}}{W_{\text{spez,Kohle}} \cdot \eta_{\text{KW}}} = \frac{1,08 \cdot 10^{11} \text{ Wh} \cdot \frac{3.600 \text{ s}}{\text{h}}}{14,2 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 0,38} = 72.053,37 \text{ t}$$

Aufgabe 21 Leitungsdimensionierung

Ein Gleichstromverbraucher mit den Nenndaten $U_N = 500 \text{ V}$, $P_N = 25 \text{ kW}$ soll über eine 200 Meter lange Leitung an eine Spannungsquelle angeschlossen werden. Die Leitung besteht aus Kupferdraht (spezifischer Widerstand $\rho_{\text{Cu}} = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$).

- a) Wie groß muss der Leitungsquerschnitt (Hin- und Rückleitung werden gleich dimensioniert) mindestens gewählt werden, damit die Verlustleistung in der Leitung nicht größer als 7 % von P_N wird?

Lösung:

$$P_V = p \cdot P_N = R_L \cdot I_N^2 = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot 2 \cdot l}{A_{\text{Cu}}} \cdot I_N^2$$

$$P_N = U_N \cdot I_N \Rightarrow I_N = \frac{P_N}{U_N}$$

$$p \cdot P_N = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot 2 \cdot l}{A_{\text{Cu}}} \cdot \left(\frac{P_N}{U_N} \right)^2$$

Nach A_{Cu} aufgelöst und Werte eingesetzt:

$$A_{\text{Cu}} = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot 2 \cdot l}{p \cdot U_N^2} \cdot P_N = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 200 \text{ m} \cdot \frac{25.000 \text{ W}}{0,07 \cdot (500 \text{ V})^2} = 9,71 \text{ mm}^2$$

Probe: $R_L = \frac{\rho_{Cu} \cdot 2 \cdot l}{A_{Cu}} = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{2 \cdot 200 \text{ m}}{9,71 \text{ mm}^2} = 0,7 \Omega$

$$P_V = R_L \cdot I_N^2 = 0,7 \Omega \cdot (50 \text{ A})^2 = 1.750 \text{ W} \quad \text{mit} \quad I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{25 \text{ kW}}{500 \text{ V}} = 50 \text{ A}$$

$$P_V = p \cdot P_N = 0,07 \cdot 25 \text{ kW} = 1.750 \text{ W}$$

b) Was passiert, wenn anstatt der Kupferleitung eine Aluminiumleitung genommen wird

(selbe Geometriedaten wie in a) und $\rho_{Al} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$)?

Lösung:

Größerer spez. Widerstand $\rightarrow$ größerer Leitungswiderstand $\rightarrow$ größere Verluste bei gleichem Leiterquerschnitt!

$$R_{L,Al} = \frac{\rho_{Al} \cdot 2 \cdot l}{A_{Cu}} = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{2 \cdot 200 \text{ m}}{9,71 \text{ mm}^2} = 1,15 \Omega$$

$$P_{V,Al} = R_{L,Al} \cdot I_N^2 = 1,15 \Omega \cdot (50 \text{ A})^2 = 2.875 \text{ W}$$

$$\frac{P_{V,Al}}{P_{V,Cu}} = \frac{2.875 \text{ W}}{1.750 \text{ W}} = 1,64 \quad 64\% \text{ höhere Verluste.}$$

c) Was ist zu tun, wenn die Verluste ebenfalls nur maximal 7 % von P_N betragen sollen?

Lösung:

Der Leiterquerschnitt der Aluminiumleitung muss **größer** dimensioniert werden als der der Kupferleitung. Mit selber Formel wie oben:

$$A_{Al} = \frac{\rho_{Al} \cdot 2 \cdot l}{p \cdot U_N^2} \cdot P_N = 0,0279 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 200 \text{ m} \cdot \frac{25.000 \text{ W}}{0,07 \cdot (500 \text{ V})^2} = 15,94 \text{ mm}^2$$

Damit wird der Leitungswiderstand gleich wie bei der Kupferleitung und somit werden auch die zulässigen Verluste eingehalten.

Aufgabe 22 Überlagerungssatz

a) Beschreiben Sie kurz die Aussage des Überlagerungssatzes.

Lösung:

Bei einem linearen Netzwerk dürfen lineare Größen (Ströme, Spannungen) durch Überlagerung von Teilergebnissen erfolgen. Jede Quelle wird dabei getrennt betrachtet (die anderen werden jeweils wirkungslos gemacht). Jede Quelle liefert einen Teilbeitrag zur betrachteten Größe. Die Summe aller Teilbeiträge entspricht der gesuchten Größe bei Wirksamkeit aller Quellen.

– b) Erklären Sie, wie mit Spannungs- und Stromquellen umgegangen werden muss.

Lösung:

Beim Wirkungslos-Machen von Quellen gilt:

Spannungsquelle: Wird durch einen Kurzschluss (Verbindung mit null Ohm) ersetzt.

Stromquelle: Wird durch einen Leerlauf (Unterbrechung, unendlich großer Widerstand) ersetzt.

c) Warum darf die Leistung nicht aus Teilleistungen überlagert werden?

Lösung:

Die Leistung als Produkt zweier linearer Größen ist keine lineare Größe mehr:

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Oder:

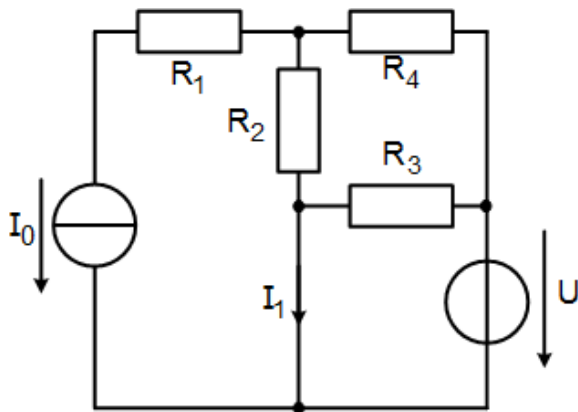
$$I = I_{11} + I_{12}$$

$$P = R \cdot I^2 = R \cdot (I_{11} + I_{12})^2 = R \cdot (I_{11}^2 + 2 \cdot I_{11} \cdot I_{12} + I_{12}^2) \neq \underbrace{R \cdot I_{11}^2}_{P_{11}} + \underbrace{R \cdot I_{12}^2}_{P_{12}}$$

P_{11} und P_{12} „vermeintliche“ Teilleistungen.

Aufgabe 23 Überlagerungssatz

Gegeben ist die im folgenden Bild dargestellte Schaltung.



$$I_0 = 2 \text{ A}$$

$$U = 120 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 60 \text{ } \Omega$$

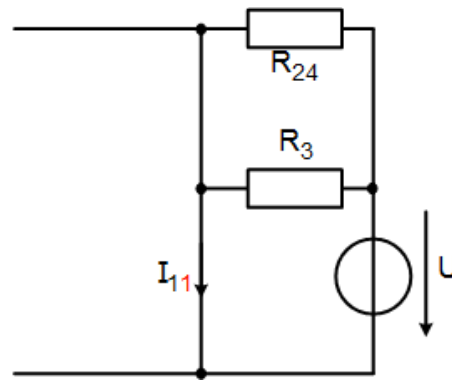
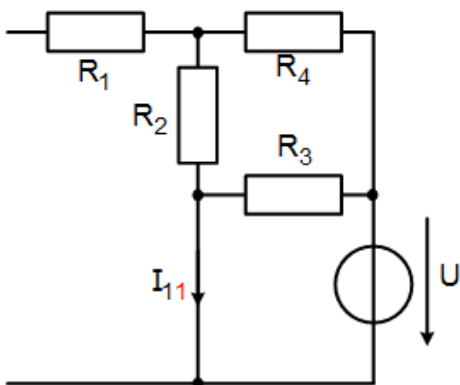
$$R_3 = 100 \text{ } \Omega$$

$$R_4 = 90 \text{ } \Omega$$

a) Berechnen Sie den Strom I_1 .

Lösung:

1. Stromquelle wirkungslos $\rightarrow$ durch Leerlauf ersetzen (Unterbrechung)



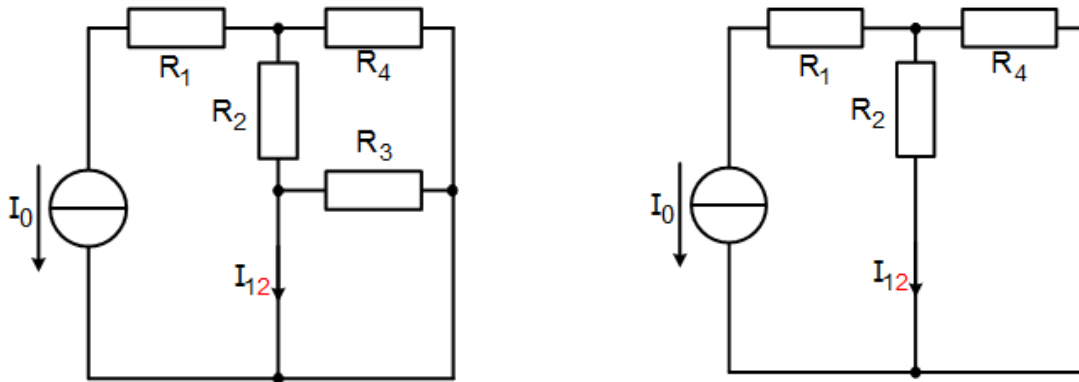
R_1 ist wirkungslos („hängt in der Luft“). R_2 und R_4 sind in Reihe und parallel zu R_3 :

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 60 \text{ } \Omega + 90 \text{ } \Omega = 150 \text{ } \Omega$$

$$R_{234} = \frac{R_{24} \cdot R_3}{R_{24} + R_3} = \frac{150 \text{ } \Omega \cdot 100 \text{ } \Omega}{150 \text{ } \Omega + 100 \text{ } \Omega} = 60 \text{ } \Omega$$

$$I_{11} = \frac{U}{R_{234}} = \frac{120 \text{ V}}{60 \text{ } \Omega} = 2 \text{ A}$$

2. Spannungsquelle wirkungslos → durch Kurzschluss ersetzen



R_3 liegt parallel zum Kurzschluss und ist daher wirkungslos. R_2 und R_4 sind parallel.

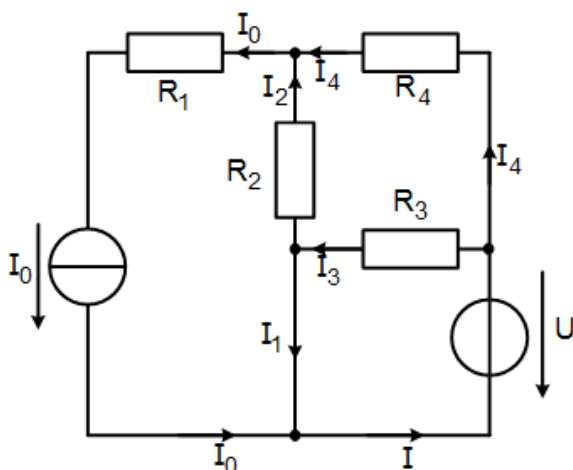
Es kann die Stromteiler-Regel angewendet werden:

$$I_{12} = -I_0 \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} = -2 \text{ A} \cdot \frac{90 \Omega}{60 \Omega + 90 \Omega} = -1,2 \text{ A}$$

3. Lineare Überlagerung der Teilströme:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = 2 \text{ A} - 1,2 \text{ A} = 0,8 \text{ A}$$

b) Berechnen Sie die in den Widerständen in Wärme umgesetzten Leistungen.

Lösung:


Durch R_1 fließt der Strom I_0 ,

Knotenregel: $I = I_0 + I_1 = 2 \text{ A} + 0,8 \text{ A} = 2,8 \text{ A}$

Ohmsches Gesetz: $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{120 \text{ V}}{100 \Omega} = 1,2 \text{ A}$

Knotenregel: $I_4 = I - I_3 = 2,8 \text{ A} - 1,2 \text{ A} = 1,6 \text{ A}$

Knotenregel: $I_2 = I_3 - I_1 = 1,2 \text{ A} - 0,8 \text{ A} = 0,4 \text{ A}$

Probe: $I_2 + I_4 = 0,4 \text{ A} + 1,6 \text{ A} = 2,0 \text{ A} = I_0$

$$P_{R1} = R_1 \cdot I_0^2 = 60 \Omega \cdot (2 \text{ A})^2 = 240 \text{ W}$$

$$P_{R2} = R_2 \cdot I_2^2 = 60 \Omega \cdot (0,4 \text{ A})^2 = 9,6 \text{ W}$$

$$P_{R3} = R_3 \cdot I_3^2 = 100 \Omega \cdot (1,2 \text{ A})^2 = 144 \text{ W}$$

$$P_{R4} = R_4 \cdot I_4^2 = 90 \Omega \cdot (1,6 \text{ A})^2 = 230,4 \text{ W}$$

$$P_{R, \text{ges}} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = \dots = 624 \text{ W}$$

c) Welche Quelle liefert die größere Leistung?

Lösung:

Die Spannungsquelle liefert die Leistung: $P_{\text{Spq}} = U \cdot I = 120 \text{ V} \cdot 2,8 \text{ A} = 336 \text{ W}$

Die Spannung an der Stromquelle beträgt:

$$U_{\text{Strq}} = R_1 \cdot I_0 + R_2 \cdot I_2 = 60 \Omega \cdot 2 \text{ A} + 60 \Omega \cdot 0,4 \text{ A} = 144 \text{ V}$$

Die Stromquelle liefert die Leistung: $P_{\text{Strq}} = U_{\text{Strq}} \cdot I_0 = 144 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 288 \text{ W}$

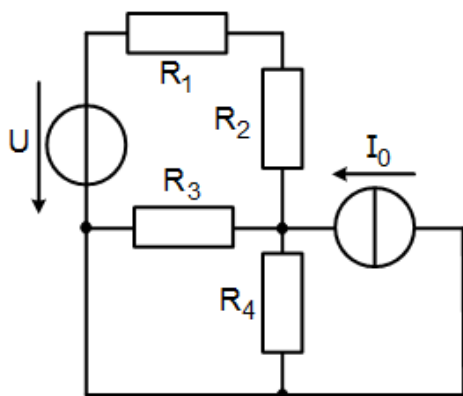
Die Spannungsquelle liefert die größere Leistung.

Leistungsbilanz: $P_{\text{Spq}} + P_{\text{Strq}} = 336 \text{ W} + 288 \text{ W} = 624 \text{ W} = P_{R, \text{ges}}$

Leistungsbilanz ist erfüllt.

Aufgabe 24 Überlagerungssatz

Gegeben ist die im folgenden Bild dargestellte Schaltung.



$$U = 24 \text{ V}$$

$$I_0 = 4 \text{ A}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

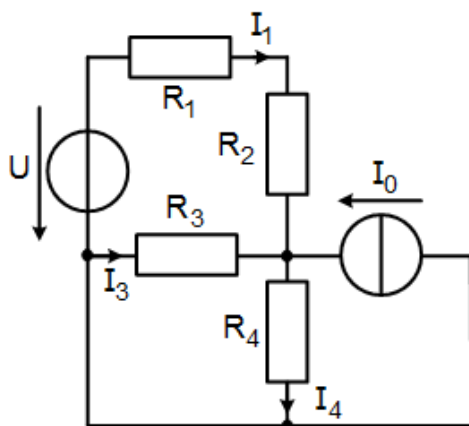
$$R_2 = 4 \Omega$$

$$R_3 = 3 \Omega$$

$$R_4 = 6 \Omega$$

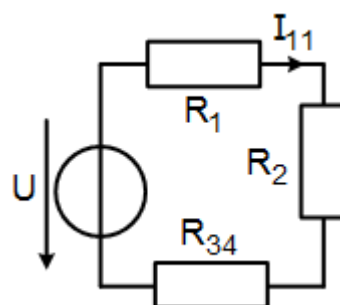
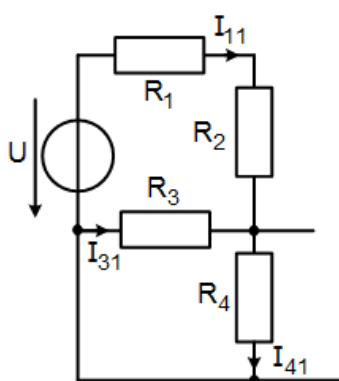
a) Berechnen Sie sämtliche Ströme.

Lösung:



Zählpfeile einführen.

Nur U wirksam:



$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{3 \Omega \cdot 6 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} = 2 \Omega$$

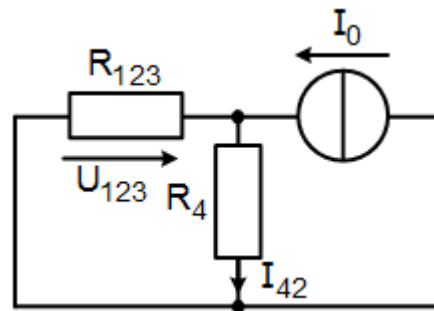
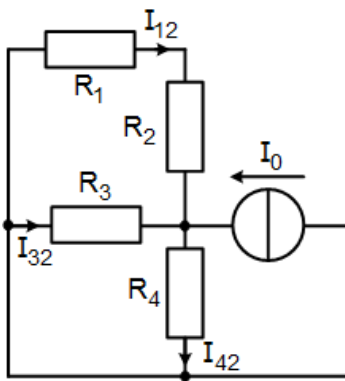
$$I_{11} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_{34}} = \frac{24 \text{ V}}{10 \Omega + 4 \Omega + 2 \Omega} = 1,5 \text{ A}$$

Mit der Stromteiler-Regel:

$$I_{41} = I_{11} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 1,5 \text{ A} \cdot \frac{3 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} = 0,5 \text{ A}$$

$$I_{31} = I_{11} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 1,5 \text{ A} \cdot \frac{6 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} = 1,0 \text{ A}$$

Nur I_0 wirksam:



$$R_{123} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(10 \Omega + 4 \Omega) \cdot 3 \Omega}{14 \Omega + 3 \Omega} = 2,47 \Omega$$

Mit der Stromteiler-Regel:

$$I_{42} = I_0 \cdot \frac{R_{123}}{R_{123} + R_4} = 4 \text{ A} \cdot \frac{2,47 \Omega}{2,47 \Omega + 6 \Omega} = 1,17 \text{ A}$$

$$U_{123} = -I_{42} \cdot R_4 = -1,17 \text{ A} \cdot 6 \Omega = -7 \text{ V}$$

$$I_{32} = \frac{U_{123}}{R_3} = \frac{-7 \text{ V}}{3 \Omega} = -2,33 \text{ A}$$

$$I_{12} = \frac{U_{123}}{R_1 + R_2} = \frac{-7 \text{ V}}{10 \Omega + 4 \Omega} = -0,5 \text{ A}$$

Probe, ob die Knotenregel erfüllt ist:

$$I_{42} - I_{12} - I_{32} = I_0$$

$$1,17 \text{ A} - (-0,5 \text{ A}) - (-2,33 \text{ A}) = 4 \text{ A} \quad \text{Knotenregel ist erfüllt.}$$

Überlagerung der Teilergebnisse:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = 1,5 \text{ A} - 0,5 \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = -1 \text{ A} - 2,33 \text{ A} = -3,33 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{41} + I_{42} = 0,5 \text{ A} + 1,17 \text{ A} = 1,67 \text{ A}$$

$$\text{Knotenregel erfüllt?} \quad I_0 + I_1 + I_3 - I_4 = 0 \text{ A}$$

$$4 \text{ A} + 1 \text{ A} - 3,33 \text{ A} - 1,67 \text{ A} = 0 \text{ A} \quad \text{Knotenregel ist erfüllt.}$$

Aufgabe 25 Zeitabhängige Ströme und Spannungen

a) Was versteht man unter einem periodischen Spannungsverlauf?

Lösung:

Bei einem zeitlich periodischen Spannungsverlauf wiederholen sich die Spannungswerte jeweils nach einer Periodendauer zyklisch wieder, d.h. es gilt:

$$u(t) = u(t + n \cdot T) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Erklären Sie die Begriffe Gleichgröße, Wechselgröße und Mischgröße.

Bei einer Gleichgröße ist der Wert zeitlich konstant (gleich), z.B. $u(t) = U$.

Bei einer Wechselgröße wiederholen sich die Werte jeweils nach einer Periode T wieder, wobei der arithmetische Mittelwert der Werte über eine Periode gleich null ist, d.h. es gilt:

$$u(t) = u(t + n \cdot T) \quad \text{und} \quad \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} u(\tau) \cdot d\tau = 0$$

Eine Mischgröße besteht aus Gleichanteil und überlagertem Wechselanteil.

Aufgabe 26 Wechselstrom – Zeitfunktion

a) Durch welche Größen wird eine sinusförmige Wechselgröße charakterisiert?

Lösung:

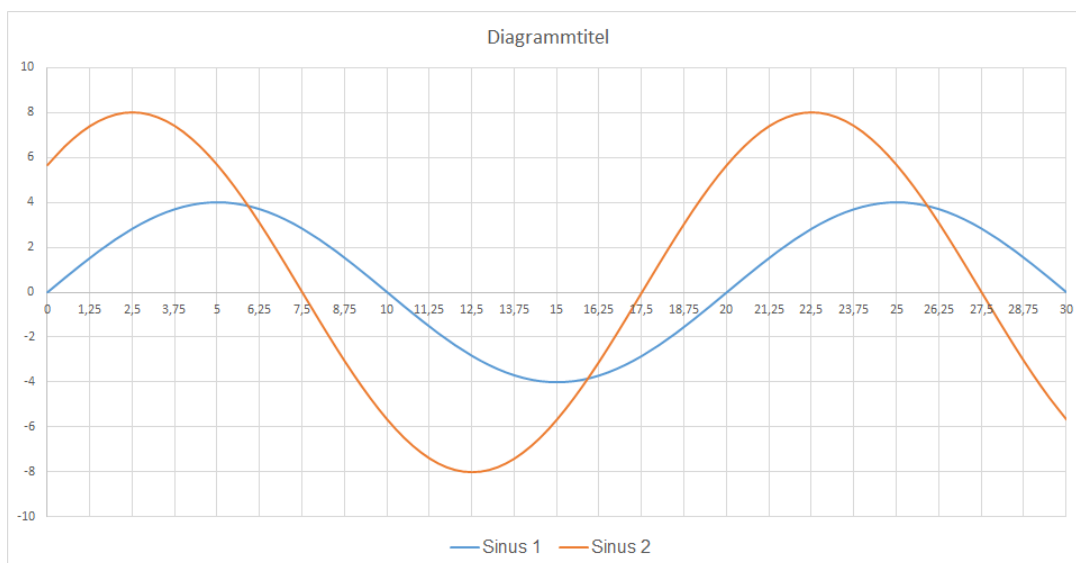
Zum Beispiel sinusförmige Spannung:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right) = \hat{u} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_0) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$u(t)$	Momentanwert, Augenblickswert	$[u(t)] = V$
$\hat{u}$	Amplitude, Dachwert	$[\hat{u}] = V$
T	Periodendauer	$[T] = s$
φ_0	Nullphasenwinkel	$[\varphi_0] = \text{grad oder rad}$
$f = \frac{1}{T}$	Frequenz	$[f] = \text{Hz (Hertz)}$
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$	Kreisfrequenz	$[\omega] = s^{-1}$

b) Stellen Sie zwei sinusförmige Größen mit Phasenverschiebung in einem Liniendiagramm dar.

Lösung:



Zu den obigen Liniendiagrammen:

	$\hat{u}$	T	φ_0	
Sinus 1	4	20	0°	Eilt Sinus 2 um 45° nach.
Sinus 2	8	20	45°	Eilt Sinus 1 um 45° vor.

Aufgabe 27 Wechselstrom – Zeitfunktion und Zeigerdarstellung

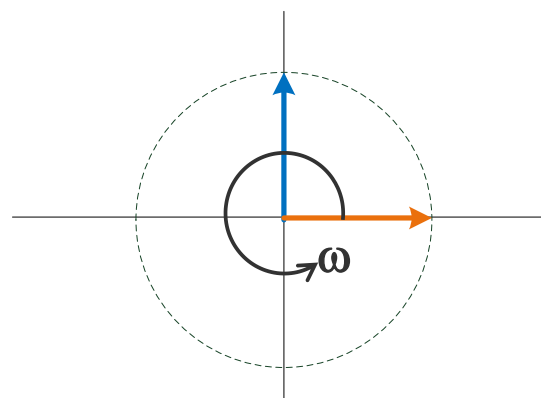
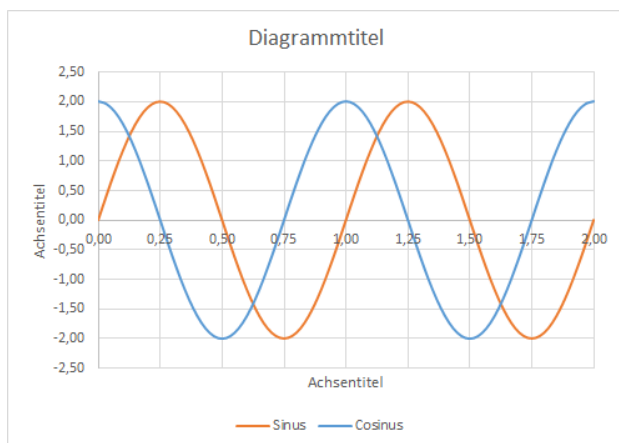
a) Was versteht man unter einem Zeiger?

Lösung:

Ein Zeiger ist ein sich um den Ursprung eines „Koordinatensystems“ mit der Winkelgeschwindigkeit drehender „ebener Vektor“. Die Projektion des Zeigers auf die Koordinatenachsen entspricht einer sinusförmigen Zeitfunktion, die im Liniendiagramm dargestellt werden kann.

b) Stellen Sie eine Sinus- und eine Kosinus-Funktion im Liniendiagramm und als rotierende Zeiger dar.

Lösung:



c) Weshalb ist die Zeigerdarstellung nur für sinusförmige Größen gleicher Frequenz sinnvoll?

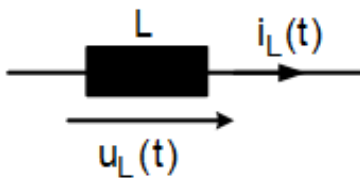
Lösung:

Die Zeiger drehen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit und behalten somit ihre Lage zueinander bei (die Winkel zwischen den Zeigern ändern sich nicht). Für die Beschreibung der Sachverhalte genügt daher eine „Momentaufnahme“ der rotierenden Zeiger.

Aufgabe 28 Wechselstrom – Spule und Kondensator

a) Geben Sie das Grundgesetz für die Spule L an.

Lösung:

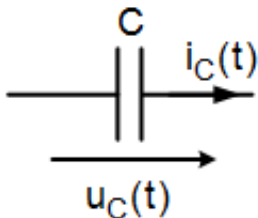


Für die angegebene Zählpfeilung gilt für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

b) Wie lautet das Grundgesetz für den Kondensator C?

Lösung:



Für die angegebene Zählpfeilung gilt für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

c) Wie verhalten sich L und C bei Gleichspannung (stationär)?

Lösung:

Spule

Gleichstrom $\rightarrow$ alles konstant $\rightarrow$ zeitliche Ableitung ist null $\rightarrow u_L(t) = 0 \text{ V}$, d.h. obwohl ein Gleichstrom durch die Spule fließt, fällt keine Spannung ab. Das „Verhalten“ entspricht einem Kurzschluss.

Kondensator

Gleichstrom $\rightarrow$ alles konstant $\rightarrow$ zeitliche Ableitung ist null $\rightarrow i_C(t) = 0$ A, d.h. obwohl eine Gleichspannung anliegt, fließt kein Strom. Das „Verhalten“ entspricht einem Leerlauf.

d) Wie verhält sich die Spule an einer sinusförmigen Wechselspannung (stationär)?

Lösung:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

Annahme: $i_L(t) = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} [\hat{i}_L \cdot \sin(\omega \cdot t)] = L \cdot \hat{i}_L \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = L \cdot \omega \cdot \hat{i}_L \cdot \cos(\omega \cdot t) = X_L \cdot \hat{i}_L \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$X_L = \omega \cdot L \quad \text{Blindwiderstand der Spule}$$

$$u_L(t) = X_L \cdot \hat{i}_L \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Spule verhält sich bei sinusförmigem Wechselstrom wie ein „Widerstand“ (Blindwiderstand) mit $X_L = \omega \cdot L$.

Außerdem bewirkt die Spule, dass die Spannung dem Strom um 90° voraus eilt (bzw. Strom eilt der Spannung um 90° nach). Die Spule bewirkt also eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von $+90^\circ$.

e) Wie verhält sich der Kondensator an einer sinusförmigen Wechselspannung (stationär)?

Lösung:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Annahme: $u_C(t) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} [\hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t)] = C \cdot \hat{u}_C \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = C \cdot \omega \cdot \hat{u}_C \cdot \cos(\omega \cdot t) = Y_C \cdot \hat{u}_C \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$Y_C = \omega \cdot C \quad \text{Blindleitwert des Kondensators}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{Blindwiderstand des Kondensators}$$

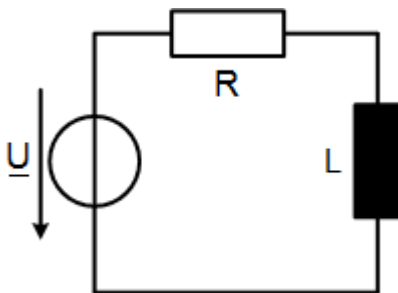
Der Kondensator verhält sich bei sinusförmigem Wechselstrom wie ein „Widerstand“ (Blindwiderstand) mit $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$.

$$i_C(t) = Y_C \cdot \hat{u}_C \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Außerdem bewirkt der Kondensator, dass der Strom der Spannung um 90° voraus eilt (bzw. die Spannung dem Strom um 90° nach). Der Kondensator bewirkt also eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von -90° .

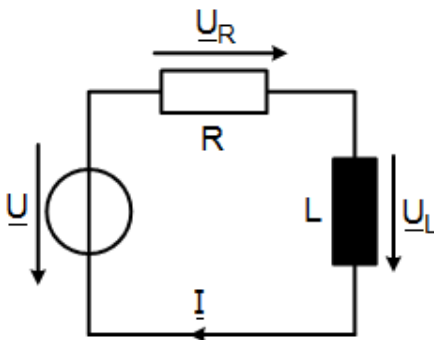
Aufgabe 29 Wechselstrom – Zeigerdiagramm

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Reihenschaltung aus R und L.



a) Führen Sie Zählpfeile und Bezeichner ein.

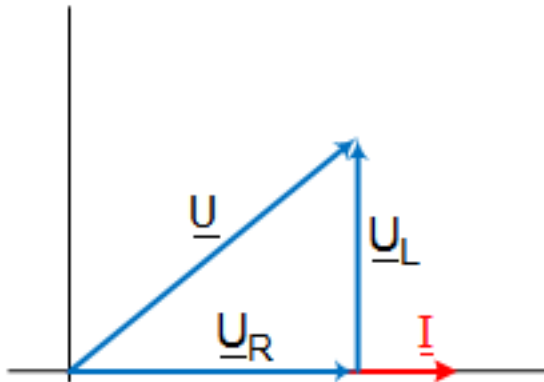
Lösung:



Unterstrichene Größen → Effektivwert-Zeiger

b) Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm, welches alle Ströme und Spannungen enthält.

Lösung:



$\underline{I} \rightarrow$ Bezugszeiger in die Horizontale

$\underline{U}_R \rightarrow$ in Phase mit $\underline{I}$

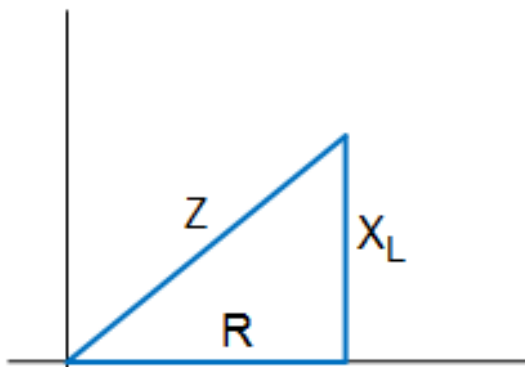
$\underline{U}_L \rightarrow 90^\circ$ voreilend zu $\underline{I}$

MR: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$

c) Wie groß ist der Scheinwiderstand der Reihenschaltung?

Lösung:

Aus dem Zeigerdiagramm für die Spannungen ergibt sich ein geometrisch ähnliches Dreieck, wenn die Spannungen durch den Strom dividiert werden:



Es gilt:

$$R = \frac{U_R}{I} \quad X_L = \frac{U_L}{I}$$

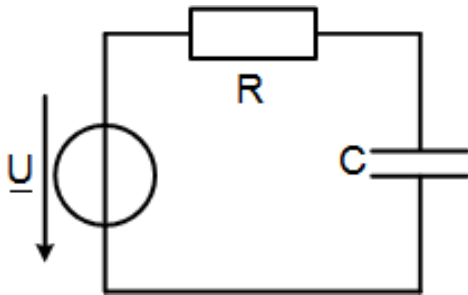
(Beträge = Effektivwerte)

Mit Pythagoras folgt: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

Z wird als Scheinwiderstand bezeichnet.

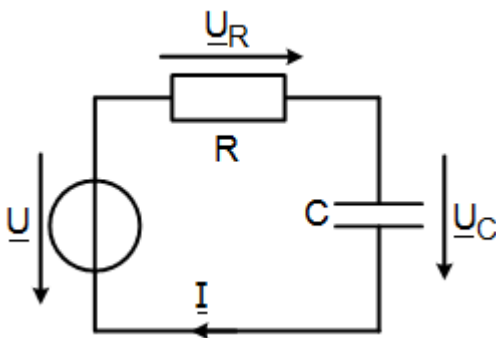
Aufgabe 30 Wechselstrom – Zeigerdiagramm

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Reihenschaltung aus R und C.



a) Führen Sie Zählpfeile und Bezeichner ein.

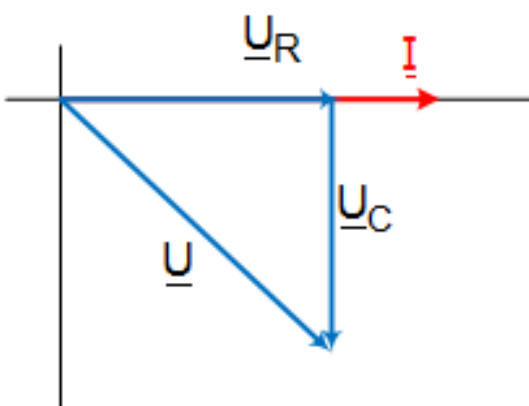
Lösung:



Unterstrichene Größen → Effektivwert-Zeiger

b) Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm, welches alle Ströme und Spannungen enthält.

Lösung:



$\underline{I} \rightarrow$ Bezugszeiger in die Horizontale

$\underline{U}_R \rightarrow$ in Phase mit $\underline{I}$

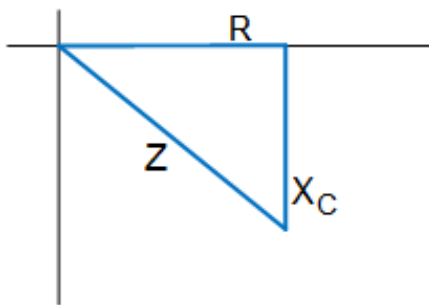
$\underline{U}_C \rightarrow 90^\circ$ nacheilend zu $\underline{I}$

MR: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$

c) Wie groß ist der Scheinwiderstand der Reihenschaltung?

Lösung:

Aus dem Zeigerdiagramm für die Spannungen ergibt sich ein geometrisch ähnliches Dreieck, wenn die Spannungen durch den Strom dividiert werden:



Es gilt:

$$R = \frac{U_R}{I} \quad X_C = \frac{U_C}{I}$$

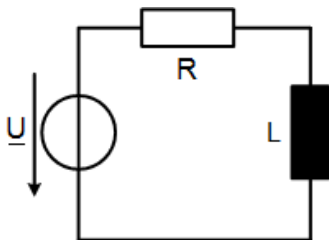
(Beträge = Effektivwerte)

Mit Pythagoras folgt: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

Z wird als Scheinwiderstand bezeichnet.

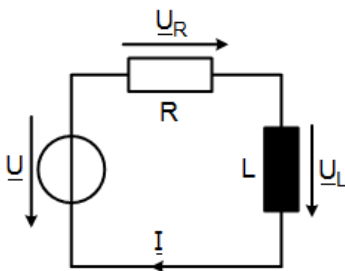
Aufgabe 31 Wechselstrom – Komplexe Rechnung

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Reihenschaltung aus R, L und C.



a) Führen Sie Zählpfeile und Bezeichner ein.

Lösung:



Unterstrichene Größen

→ Komplexe Größen

b) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}$.

Lösung:

Impedanz in kartesischer Form: $\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L$

Betrag der Impedanz: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

Winkel der Impedanz: $\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}\right) = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$

– Damit ist die Impedanz auch in Exponentialform darstellbar: $\underline{Z} = Z \cdot e^{j \cdot \varphi_Z}$

c) Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ und die Spannungen $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$.

Lösung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi_Z}} = \frac{U}{Z} \cdot e^{-j \cdot \varphi_Z} = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_Z} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_I}$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I} = R \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi_I} = U_R \cdot e^{j \cdot \varphi_I} = U_R \cdot e^{j \cdot \varphi_{UR}}$$

$$\underline{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I} = X_L \cdot I \cdot e^{j \left(\varphi_I + \frac{\pi}{2} \right)} = U_L \cdot e^{j \left(\varphi_I + \frac{\pi}{2} \right)} = U_L \cdot e^{j \cdot \varphi_{UL}}$$

d) Interpretieren Sie die komplexen Größen.

Lösung:

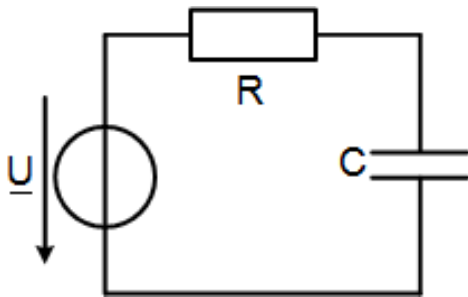
Strom: Effektivwert I , eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I = -\varphi_Z < 0$ nach.

Spannung $\underline{U}_R$: Effektivwert U_R , eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I = -\varphi_Z < 0$ nach und ist damit gleichphasig zu $\underline{I}$.

Spannung $\underline{U}_L$: Effektivwert U_L , eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi_Z > 0$ vor, dem Strom $\underline{I}$ eilt $\underline{U}_L$ um 90° vor ($\dots + \frac{\pi}{2}$).

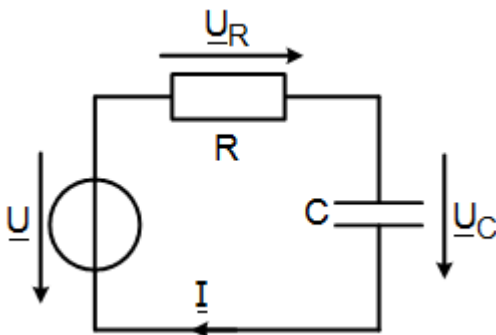
Aufgabe 32 Wechselstrom – Komplexe Rechnung

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Reihenschaltung aus R und C.



a) Führen Sie Zählpfeile und Bezeichner ein.

Lösung:



Unterstrichene Größen

→ Komplexe Größen

b) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}$.

Lösung:

Impedanz in kartesischer Form: $\underline{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = R - j \cdot X_C$

Betrag der Impedanz: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

Winkel der Impedanz: $\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\omega \cdot R \cdot C}\right) = -\arctan\left(\frac{X_C}{R}\right) < 0$

Damit ist die Impedanz auch in Exponentialform darstellbar: $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z}$

c) Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ und die Spannungen $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$.

Lösung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{Z} \cdot e^{-j\varphi_Z} = I \cdot e^{-j\varphi_Z} = I \cdot e^{j\varphi_I}$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I} = R \cdot I \cdot e^{j\varphi_I} = U_R \cdot e^{j\varphi_I} = U_R \cdot e^{j\varphi_{UR}}$$

$$\underline{U}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I} = X_C \cdot I \cdot e^{j\left(\varphi_I - \frac{\pi}{2}\right)} = U_C \cdot e^{j\left(\varphi_I - \frac{\pi}{2}\right)} = U_C \cdot e^{j\varphi_{UC}}$$

d) Interpretieren Sie die komplexen Größen.

Lösung:

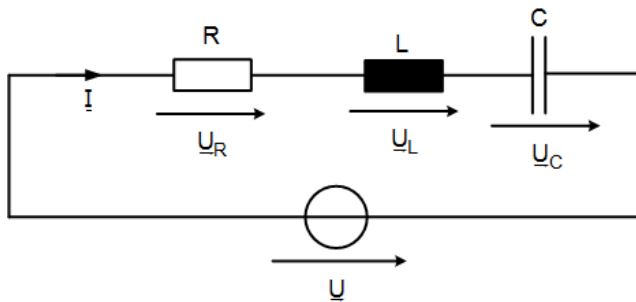
Strom: Effektivwert I , $\underline{I}$ eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I = -\varphi_Z > 0$ vor.

Spannung $\underline{U}_R$: Effektivwert U_R , eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I = -\varphi_Z > 0$ vor und ist damit gleichphasig zu $\underline{I}$.

Spannung $\underline{U}_C$: Effektivwert U_C , $\underline{U}_C$ eilt dem Strom $\underline{I}$ um den Winkel 90° nach, $\underline{U}_C$ eilt der Spannung $\underline{U}$ um den Winkel $\varphi_I - \frac{\pi}{2}$ nach.

Aufgabe 33 Wechselstrom – Komplexe Rechnung

Gegeben ist folgende Reihenschaltung aus R, L und C.



Gegebene Werte:

$$\underline{U} = 200 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz},$$

$$R = 20 \Omega, X_L = 60 \Omega \text{ und } X_C = 40 \Omega.$$

a) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung.

Lösung:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X_L - j \cdot X_C = R + j \cdot (X_L - X_C)$$

$$\underline{Z} = 20 \Omega + j \cdot (60 \Omega - 40 \Omega) = (20 + j \cdot 20) \Omega$$

$$Z = \sqrt{(20 \Omega)^2 + (20 \Omega)^2} = 28,28 \Omega$$

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}\right) = \arctan\left(\frac{20 \Omega}{20 \Omega}\right) = 45^\circ$$

$$\underline{Z} = 28,28 \Omega \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$$

b) Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ und die Spannungen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$.

Lösung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{200 \text{ V}}{28,28 \Omega \cdot e^{j \cdot 45^\circ}} = \frac{200 \text{ V}}{28,28 \Omega} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = 7,07 \text{ A} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}$$

$$\underline{I} = 7,07 \text{ A} \cdot [\cos(45^\circ) - j \cdot \sin(45^\circ)] = 5 \text{ A} - j \cdot 5 \text{ A}$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I} = 20 \Omega \cdot 7,07 \text{ A} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = 141,4 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}$$

$$\underline{U}_L = j \cdot X_L \cdot \underline{I} = 60 \Omega \cdot 7,07 \text{ A} \cdot e^{j(-45^\circ + 90^\circ)} = 424,2 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$$

$$\underline{U}_C = -j \cdot X_C \cdot \underline{I} = 40 \, \Omega \cdot 7,07 \, \text{A} \cdot e^{j(-45^\circ - 90^\circ)} = 282,8 \, \text{V} \cdot e^{-j135^\circ}$$

Probe: Maschenregel

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \\ &= 141,4 \, \text{V} \cdot [\cos(-45^\circ) + j \cdot \sin(-45^\circ)] + 424,2 \, \text{V} \cdot [\cos(45^\circ) + j \cdot \sin(45^\circ)] + \\ &\quad 282,8 \, \text{V} \cdot [\cos(-135^\circ) + j \cdot \sin(-135^\circ)] \end{aligned}$$

$$\underline{U} = (99,98 - j \cdot 99,98) \, \text{V} + (299,95 + j \cdot 299,95) \, \text{V} + (-199,97 - j \cdot 199,97) \, \text{V}$$

$$\underline{U} = (99,98 + 299,95 - 199,97) \, \text{V} + j \cdot (-99,98 + 299,95 - 199,97) \, \text{V}$$

$$\underline{U} = 199,96 \, \text{V} + j \cdot 0 \, \text{V} \approx 200 \, \text{V} \quad \text{rundungsbedingte kleine Abweichung!}$$

c) Berechnen Sie die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$ und geben Sie die Wirk- und Blindleistung an.

Lösung:

Komplexe Scheinleistung: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 200 \, \text{V} \cdot (5 + j \cdot 5) \, \text{A} = (1.000 + j \cdot 1.000) \, \text{VA}$

$$\underline{S} = \sqrt{2} \cdot 1.000 \, \text{VA} \cdot e^{j45^\circ} \approx 1.414 \, \text{VA} \cdot e^{j45^\circ}$$

Betrag: $S = 1.414 \, \text{VA} \quad S = U \cdot I = 200 \, \text{V} \cdot 7,07 \, \text{A} = 1.414 \, \text{VA}$

Wirkleistung: $P = \text{Re}(\underline{S}) = 1.000 \, \text{W}$

$$P = R \cdot I^2 = 20 \, \Omega \cdot (7,07 \, \text{A})^2 \approx 1.000 \, \text{W}$$

Blindleistung: $Q = \text{Im}(\underline{S}) = 1.000 \, \text{var}$

$$Q = X_L \cdot I^2 - X_C \cdot I^2 = (X_L - X_C) \cdot I^2 = 20 \, \Omega \cdot (7,07 \, \text{A})^2 \approx 1.000 \, \text{var}$$

d) Auf welchen Wert müsste X_C verändert werden, damit der Strom $\underline{I}$ reell wird? Zeichnen Sie für diesen Fall ein maßstäbliches Zeigerdiagramm.

Lösung:

Für $X_C = X_L = 60 \, \Omega$ verschwindet der Imaginärteil der Impedanz, d.h. die Impedanz wird rein reell und damit wird auch der Strom rein reell.

Ergänzung: Wie groß würde der Strom und die Spannungen U_R , U_L und U_C ?

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{200 \, \text{V}}{20 \, \Omega} = 10 \, \text{A}$$

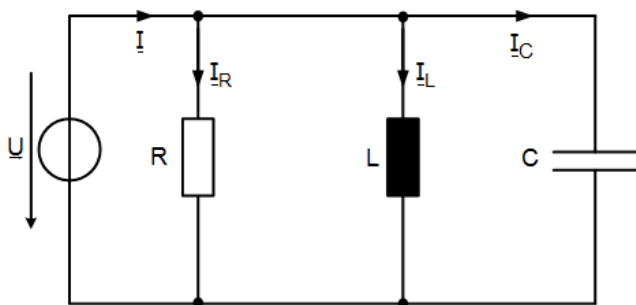
Beträge (Effektivwerte):

$$U_R = R \cdot I = 20 \, \Omega \cdot 10 \, \text{A} = 200 \, \text{V}$$

$$U_L = U_C = X_L \cdot I = 60 \, \Omega \cdot 10 \, \text{A} = 600 \, \text{V}$$

Aufgabe 34 Wechselstrom – Komplexe Rechnung

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Parallelschaltung aus R, L und C.



Gegebene Werte:

$$\underline{U} = 200 \, \text{V}, \quad f = 50 \, \text{Hz}$$

$$R = 20 \, \Omega, \quad X_L = 60 \, \Omega \quad \text{und} \quad X_C = 40 \, \Omega$$

a) Berechnen Sie sämtliche Ströme.

Lösung:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{200 \, \text{V}}{20 \, \Omega} = 10 \, \text{A}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j \cdot X_L} = -j \cdot \frac{200 \, \text{V}}{60 \, \Omega} = -j \cdot 3,33 \, \text{A} = 3,33 \, \text{A} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{-j \cdot X_C} = j \cdot \frac{200 \, \text{V}}{40 \, \Omega} = j \cdot 5 \, \text{A} = 5 \, \text{A} \cdot e^{j \cdot 90^\circ}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = 10 \, \text{A} - j \cdot 3,33 \, \text{A} + j \cdot 5 \, \text{A} = (10 + j \cdot 1,67) \, \text{A}$$

- b) Berechnen Sie die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$, die Wirkleistung P und die Blindleistung Q .

Lösung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 200 \text{ V} \cdot (10 - j \cdot 1,67) \text{ A} = (2.000 - j \cdot 334) \text{ VA}$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = 2.000 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = -334 \text{ var}$$

Oder aus Teilleistungen:

$$P = R \cdot I_R^2 = 20 \Omega \cdot (10 \text{ A})^2 = 2.000 \text{ W}$$

$$Q = X_L \cdot I_L^2 - X_C \cdot I^2 = 60 \Omega \cdot (7,07 \text{ A})^2 - 40 \Omega \cdot (7,07 \text{ A})^2 \approx 2.999 \text{ var} - 1.999 \text{ var} = 1.000 \text{ var}$$

- c) Interpretieren Sie die komplexen Größen.

Lösung:

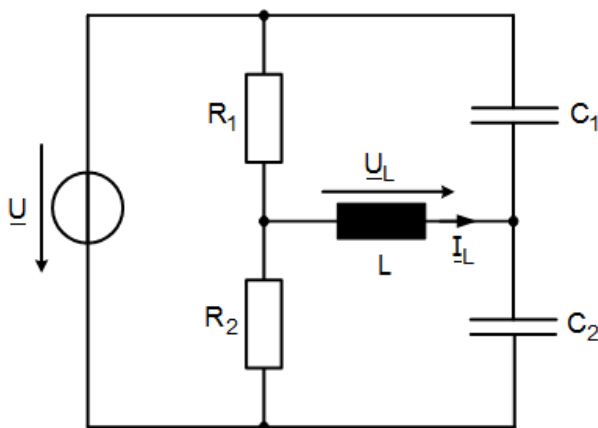
Strom ist gleichphasig zur Spannung.

Strom durch L eilt der Spannung um 90° nach.

Strom durch C eilt der Spannung um 90° vor.

Aufgabe 35 Wechselstrom – Komplexe Rechnung

Geben ist die im folgenden Bild dargestellte Schaltung.



Gegebene Werte:

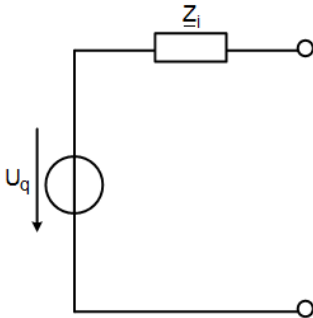
$$\underline{U} = 60 \text{ V}, f = 800 \text{ Hz}$$

$$R_1 = 30 \Omega, R_2 = 90 \Omega, C_1 = 2 \mu\text{F} \quad \text{und}$$

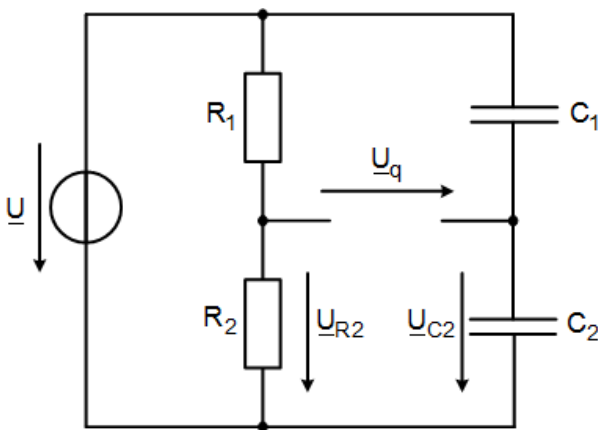
$$C_2 = 4 \mu\text{F}, L = 15 \text{ mH}$$

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Ersatzspannungsquelle den Strom durch die Spule L und die Spannung an der Spule L.

Lösung:



Bestimmung der Leerlaufspannung $\underline{U}_q$:



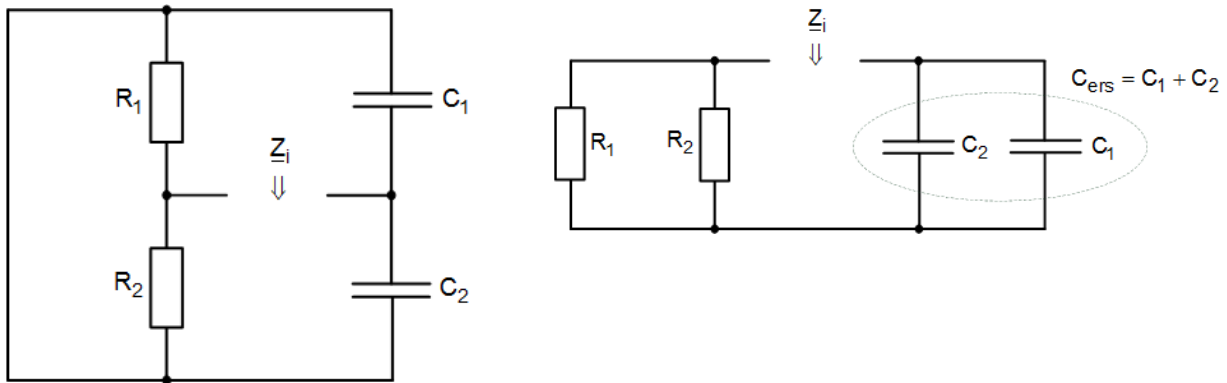
$$\underline{U}_q = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{C2}$$

$$\underline{U}_{R2} = \underline{U} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 60 \text{ V} \cdot \frac{90 \Omega}{30 \Omega + 90 \Omega} = 45 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{C2} = \underline{U} \cdot \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}} = \underline{U} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 60 \text{ V} \cdot \frac{2 \mu\text{F}}{2 \mu\text{F} + 4 \mu\text{F}} = 20 \text{ V}$$

$$\underline{U}_q = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{C2} = 45 \text{ V} - 20 \text{ V} = 25 \text{ V}$$

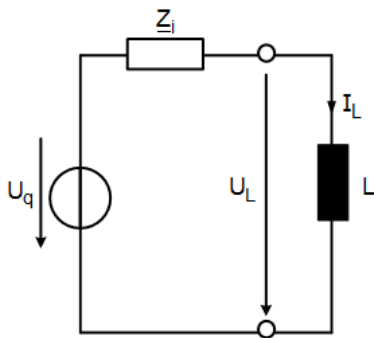
Bestimmung der Impedanz $\underline{Z}_i$:



$$- \quad \underline{Z}_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_{\text{ers}}} = \frac{30 \, \Omega \cdot 90 \, \Omega}{30 \, \Omega + 90 \, \Omega} - j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 800 \, \text{Hz} \cdot (2 + 4) \cdot 10^{-6} \, \text{F}}$$

$$\underline{Z}_i = (22,5 - j \cdot 33,2) \, \Omega$$

Berechnung von $\underline{I}_L$ und $\underline{U}_L$:



$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_i + j \cdot \omega \cdot L$$

$$\omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 800 \, \text{Hz} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \, \text{H} = 75,4 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = 22,5 \, \Omega - j \cdot 33,2 \, \Omega + j \cdot 75,4 \, \Omega = (22,5 + j \cdot 42,2) \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = 47,82 \, \Omega \cdot e^{j \cdot 62^\circ}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{25 \, \text{V}}{47,82 \, \Omega \cdot e^{j \cdot 62^\circ}} = 523 \, \text{mA} \cdot e^{-j \cdot 62^\circ}$$

$$\underline{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_L = j \cdot 75,4 \, \Omega \cdot 523 \, \text{mA} \cdot e^{-j \cdot 62^\circ} = 39,4 \, \text{V} \cdot e^{j \cdot 28^\circ}$$