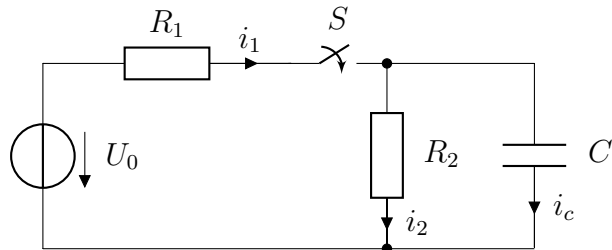


Aufgabe 7: *Einschalt- und Ausschaltvorgang C*



Gegeben ist die links dargestellte Schaltung mit den Zahlenwerten: $C = 30 \mu\text{F}$, $R_1 = 600 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ und $U_0 = 12 \text{ V}$.

Verwenden Sie das eingezeichnete Zählpeilsystem

Der Schalter ist offen

7.1 Geben Sie alle Spannungen und Ströme für den stationären Zustand an.

$$(U_1 = U_2 = U_c = 0, \quad I_1 = I_2 = I_c = 0)$$

Der Schalter wird nun geschlossen (bei $t = 0$)

7.2 Geben Sie alle Ströme und Spannung unmittelbar nach dem Schließen an (bei $t = 0$).

$$(u_2 = u_c = 0, \quad u_1 = 12 \text{ V}, \quad i_1 = i_c = 20 \text{ mA}, \quad i_2 = 0)$$

7.3 Stellen Sie die Differentialgleichung für die Spannung $u_c(t)$ auf und lösen Sie diese. Geben Sie die Zeitkonstante τ_e an.

$$(\tau_e = 4.5 \text{ ms})$$

7.4 Skizzieren Sie den Verlauf von $u_c(t)$ und $i_c(t)$ für den Einschaltvorgang.

Es hat sich nun ein stationärer Zustand bei geschlossenem Schalter eingestellt

7.5 Geben Sie alle Spannungen und Ströme für diesen stationären Zustand an.

$$(U_1 = 3 \text{ V}, \quad U_2 = U_c = 9 \text{ V}, \quad I_1 = I_2 = 15 \text{ mA}, \quad I_c = 0)$$

Jetzt wird der Schalter geöffnet

7.6 Geben Sie alle Ströme und Spannung unmittelbar nach dem Öffnen an (bei $t = 0$).

$$(u_1 = 0, \quad u_2 = u_c = 3 \text{ V}, \quad i_2 = 15 \text{ mA}, \quad i_c = -15 \text{ mA}, \quad i_1 = 0)$$

7.7 Führen Sie für diesen Fall die Aufgabenteile **3** und **4** für den Ausschaltvorgang durch und geben Sie die Zeitkonstante τ_a an.

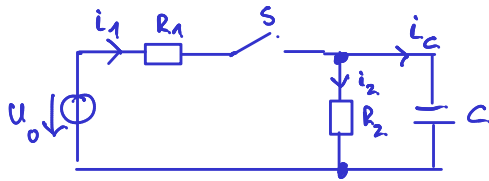
$$(\tau_a = 6 \text{ ms})$$

Der Schalter ist nun wieder offen und das System im stationären Zustand

7.8 Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird er geschlossen, Zum Zeitpunkt $t_o = 4.5 \text{ ms}$ wird er wieder geöffnet. Skizzieren Sie den Zeitverlauf von $u_c(t)$ und $i_c(t)$.

7.9 Skizzieren Sie auch die Verläufe von $i_1(t)$ und $i_2(t)$.

Lösung



① Schalter offen / stationärer Zustand

Kein Strom: $I_1 = I_2 = I_C = 0 \Rightarrow U_1 = U_2 = U_C = 0$

(Kondensator komplett entladen, U_0 fällt an Schalter ab)

② S wird bei $t=0$ geschlossen

Bei $t=0$ fließt gesamter Strom über C , also

$$i_C(0) = i_1(0) = \frac{U_0}{R_1} = 20 \text{ mA} \quad i_2 = 0$$

Spannung $u_2(0) = u_C(0) = 0$ (diese baut sich erst langsam auf)

$u_1(0) = U_0 = 12 \text{ V}$ Spannung U_0 fällt an R_1 ab)

③ Differentialgleichung Für Kapazität: DGL im u_C !

MR: $u_2 = u_C$ und $U_0 - u_1 - u_2 = 0$

KR: $i_1 = i_2 + i_C$

ersetzt mit

$$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

Grundgleichung von Kapazität

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_C}{R_2}$$

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} = \frac{U_0 - u_2}{R_1} = \frac{U_0 - u_C}{R_1}$$

alles in KR: $\frac{U_0 - u_C}{R_1} = \frac{u_C}{R_2} + C \frac{d}{dt} u_C$

$$U_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_C + R_1 C \frac{d}{dt} u_C$$

Lösung

Ansatz: $u_C(t) = a e^{-\frac{t}{\tau}} + b$ mit $u_C(0) = 0$

a) $u_c(0) = 0$: $b = -a$

b) $u_c = a e^{-\frac{t}{\tau}} - a$ in DGL

Ableitung: $\dot{u}_c = -\frac{a}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$U_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} (a e^{-\frac{t}{\tau}} - a) - R_1 C \frac{a}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Sortieren:

$$U_0 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} a = a \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} - \frac{R_1 C}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow a = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \quad \tau = C \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

also

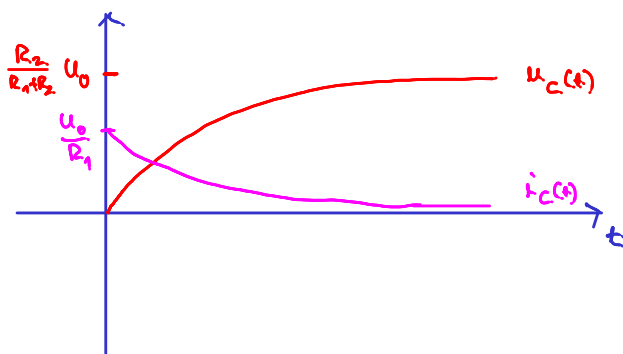
$$u_c(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{C R_1 R_2} t} \right)$$

mit Zeitkonstante: $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C = 150 \Omega \cdot 30 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
 $= 4,5 \text{ ms}$

④ Skizze

aus $u_c(t)$ folgt Strom $i_c = C \cdot \frac{d}{dt} u_c$

$$i_c(t) = \frac{1}{R_1} U_0 e^{-\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t}$$



⑤ Stationärer Zustand | Schalter geschlossen

Strom fließt komplett über R_2 Kondensator ist unterbrochen

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = 3V \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = 3V \quad (\text{Spannteiler})$$

$$U_C = U_2 = 3V$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = 15mA$$

⑥ Unmittelbar nach Öffnen

Kein Strom $i_1(t) = 0$, d.h. $U_1(t) = 0$

$$U_C(t) = U_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = \underline{\underline{3V}} \quad i_2(t) = -i_C(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \underline{\underline{15mA}}$$

⑦ Differentialgleichung

Achtung: Es gelten nicht die Startbedingungen von oben

$$MR: \quad U_2 = U_C \quad (U_0 - U_2 - U_{\text{Schalter}} = 0)$$

$$KR: \quad i_2 - i_C = 0 \quad (i_1 = 0)$$

$$\text{also:} \quad U_C = R_2 \cdot i_2 \quad \rightarrow \quad U_C = -R_2 i_C$$

$$U_C + R_2 C \frac{d}{dt} U_C = 0$$

Lösung:

$$U_C(t) = a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + b \quad \text{mit} \quad U_C(0) = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0}_{U_{C0}}$$

$$a) \quad U_C(0) = U_{C0}: \quad b = U_{C0} - a$$

b) 3m DGL:

$$a e^{-\frac{t}{\tau}} + \underbrace{\frac{R_2}{R_1+R_2} U_0 - a}_{u_{c0}} - R_2 C \frac{1}{\tau} a e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

Sortieren:

$$\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} U_0 - a \right) + a e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - R_2 C \frac{1}{\tau} \right) = 0$$

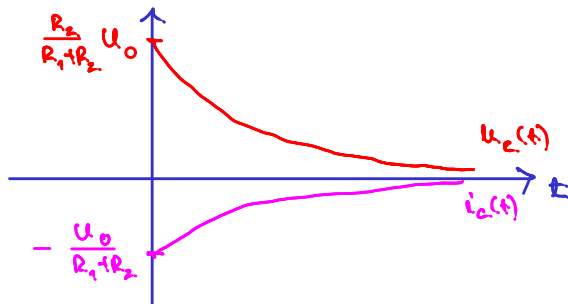
$$\leadsto a = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_0 \quad \leadsto b=0 \quad (\text{das weiß man eigentlich schon vorher})$$

$$\leadsto \tau = R_2 C \quad \text{also} \quad \tau_a = 6 \text{ ms}$$

$$u_c(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_0 e^{-\frac{1}{R_2 C} t}$$

Skizze Ausschaltvorgang

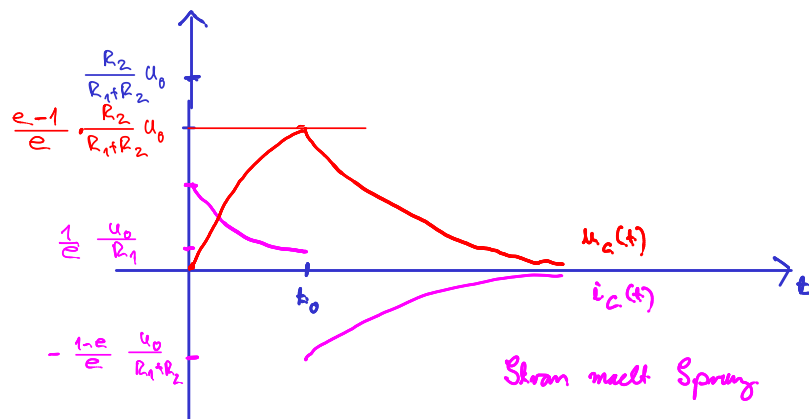
Brauchst $i_c(t)$ $i_c(t) = - \frac{U_0}{R_1+R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C} t}$



⑧ Skizzen für gemeinsamen Ein- und Ausschaltvorgang

Einschaltvorgang wie oben.

Beim Ausschaltvorgang ändert sich nur u_{c0} (auf $\frac{1-e}{e} \frac{R_2}{R_1+R_2} U_0$)
und damit $i_c(t=0)$ (auf $-\frac{1-e}{e} \frac{1}{R_1+R_2} U_0$)



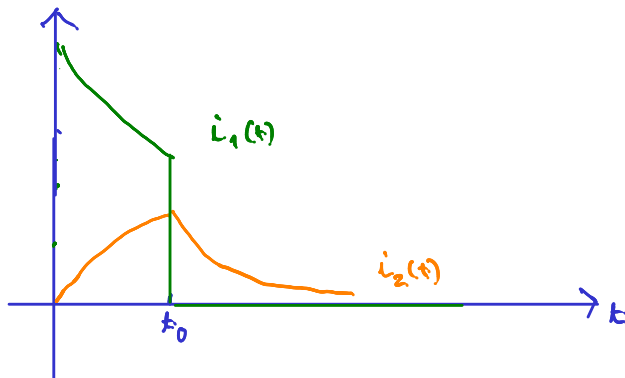
③ Andere Ströme

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{1}{R_2} u_2(t)$$

$$i_1(t) : \text{Einschaltvorgang: } i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) + \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$= \frac{U_0}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 \cdot U_0}{R_1 (R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

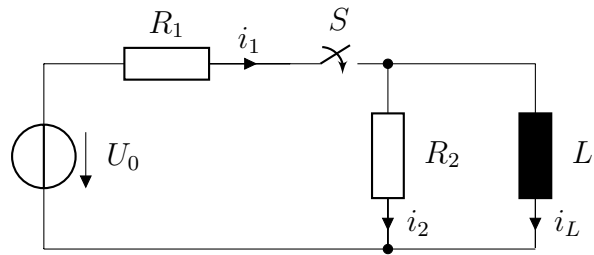
$$\text{Auschaltvorgang: } i_1(t) = 0$$



Aufgabe 8: *Einschalt- und Ausschaltvorgang L*

Gegeben ist die rechts dargestellte Schaltung mit den Zahlenwerten:
 $L = 0.6 \text{ H}$, $R_1 = 600 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ und $U_0 = 12 \text{ V}$.

Verwenden Sie das eingezeichnete Zählfeilsystem



Der Schalter ist offen

8.1 Geben Sie alle Spannungen und Ströme für den stationären Zustand an.

$$(U_1 = U_2 = U_L = 0 , \quad I_1 = I_2 = I_L = 0)$$

Der Schalter wird nun geschlossen (bei $t = 0$)

8.2 Geben Sie alle Ströme und Spannung unmittelbar nach dem Schließen an (bei $t = 0$).

$$(u_1 = 9 \text{ V} , \quad u_2 = u_L = 3 \text{ V} , \quad i_1 = i_2 = 15 \text{ mA} , \quad i_L = 0)$$

8.3 Stellen Sie die Differentialgleichung für den Strom $i_L(t)$ auf und lösen Sie diese.
Gegeben Sie die Zeitkonstante τ_e an.

$$(\tau_e = 4 \text{ ms})$$

8.4 Skizzieren Sie den Verlauf von $i_L(t)$ und $u_L(t)$ für den Einschaltvorgang.

Es hat sich nun ein stationärer Zustand bei geschlossenem Schalter eingestellt

8.5 Geben Sie alle Spannungen und Ströme für diesen stationären Zustand an.

$$(U_1 = 12 \text{ V} , \quad U_2 = U_L = 0 , \quad I_1 = I_L = 20 \text{ mA} , \quad I_2 = 0)$$

Jetzt wird der Schalter geöffnet

8.6 Geben Sie alle Ströme und Spannung unmittelbar nach dem Öffnen an (bei $t = 0$).

$$(u_1 = 0 , \quad u_2 = u_L = -4 \text{ V} , \quad i_L = 20 \text{ mA} , \quad i_2 = -20 \text{ mA} , \quad i_1 = 0)$$

8.7 Führen Sie für diesen Fall die Aufgabenteile **3** und **4** für den Ausschaltvorgang durch und geben Sie die Zeitkonstante τ_a an.

$$(\tau_a = 3 \text{ ms})$$

Der Schalter ist nun wieder offen und das System im stationären Zustand

8.8 Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird er geschlossen, Zum Zeitpunkt $t_o = 4 \text{ ms}$ wird er wieder geöffnet. Skizzieren Sie den Zeitverlauf von $i_L(t)$ und $u_L(t)$.

8.9 Skizzieren Sie auch die Verläufe von $i_1(t)$ und $i_2(t)$.

Lösung

① Stationär Schalter offen

Kein Strom, keine Spannung (U_0 fällt komplett am Schalter ab)

$$U_1 = U_2 = U_L = 0$$

$$I_1 = I_2 = I_L = 0$$

② Unmittelbar nach Schließen

Strom über R_2 (L sperrt Strom)

$$U_1(0) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = 9V$$

$$U_2(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = U_L(0) = 3V$$

$$I_1(0) = I_2(0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = 15mA$$

$$I_L(0) = 0$$

③ Differentialgleichung

MR: $U_0 = U_1 + U_2$ und $U_2 = U_L$

KR: $I_1 = I_2 + I_L$

Mit

$$U_L = L \cdot \frac{d}{dt} I_L$$

Grundgleichung an Induktivität

Für L : Suche DGL im $I_L(t)$

aus KR: $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} + I_L$

mit MR: $\frac{U_0 - U_L}{R_1} = \frac{U_L}{R_2} + I_L$

$$\frac{U_0}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_L + I_L$$

$$0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot L \cdot \frac{d}{dt} I_L + R_1 I_L - U_0$$

Lösung: Mit Ansatz:

$$I_L(t) = a e^{-\frac{t}{\tau}} + b \quad \text{mit} \quad I_L(0) = 0$$

a) $I_L(0) = 0$: $b = -a$

also Strom: $i_L = a e^{-\frac{t}{\tau}} - a$

$$\frac{d}{dt} i_L = -\frac{a}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b) im DGL einsetzen

$$0 = -\frac{R_1 R_2}{R_2} \cdot \frac{a}{\tau} \cdot L e^{-\frac{t}{\tau}} + R_1 (a e^{-\frac{t}{\tau}} - a) - U_0$$

vereinfachen:

$$-U_0 - R_1 a = a \left(\frac{R_1 R_2}{R_2} \cdot \frac{L}{\tau} - R_1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

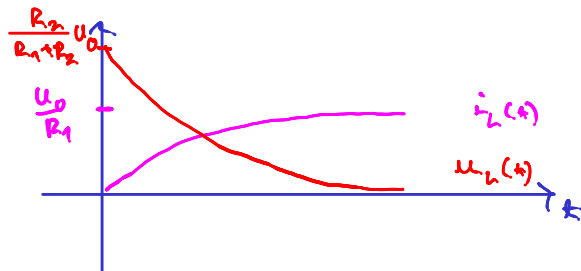
$$\rightarrow a = -\frac{U_0}{R_1} \quad \tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot L$$

also

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \cdot t} \right)$$

④ Spannung

Es folgt $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 e^{-\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \cdot t}$



⑤ Stationärer Zustand / Schalter geschlossen

Spule befindet sich Kurzschluss, d.h. aller Strom über L

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1} = I_L = 20 \text{ mA} \quad I_2 = 0$$

$$u_1 = U_0 = 12 \text{ V} \quad u_2 = u_L = 0$$

⑥ Unmittelbar nach Öffnen von Schalter

kein Strom $i_1(0) = 0 \rightarrow u_1(0) = 0$

$i_L(0) = -i_2(0)$ mit $i_L(0) = \frac{U_0}{R_1} = 20 \text{ mA}$ $i_2(0) = -\frac{U_0}{R_1} = -20 \text{ mA}$

$u_L(0) = u_2(0) = -\frac{R_2}{R_1} U_0 = -4 \text{ V}$

⑦ Differentialgleichung

MR: $u_L = u_2$

KR: $i_L = -i_2$ (Strom i_2 ändert Pol u_2) ($i_1 = 0$)

also: $i_L = -\frac{u_L}{R_2}$

$$i_L = -\frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} i_L$$

Lösung: Ansatz $i_L(t) = a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ (+b kann man weglassen)

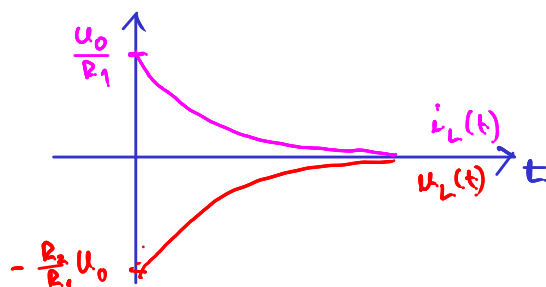
a) $i_L(0) = \frac{U_0}{R_1} : \rightarrow a = \frac{U_0}{R_1}$

b) im DGL: $a e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{L}{R_2} \frac{a}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

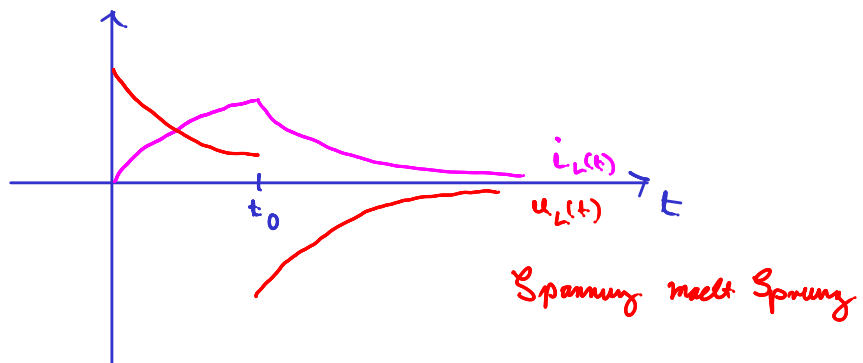
$\rightarrow \tau = \frac{L}{R_2}$ $\tau_L = 3 \text{ ms}$

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$$

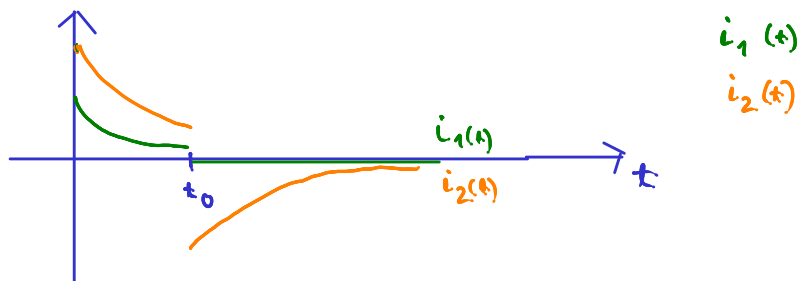
Spannen mit $u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_0 e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$



⑧

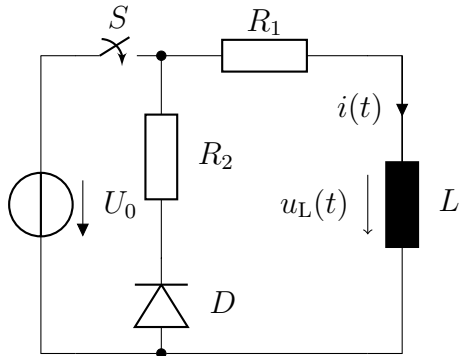


③



Aufgabe 9: *Einschalt- und Ausschaltvorgang*

Eine Schaltung aus Widerständen R_1 , R_2 und Induktivität L wird über einen Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Gleichspannungsquelle verbunden. Die Diode dient nur dazu den Einschaltstrom im entsprechenden Zweig zu sperren und wird in dieser Aufgabe nicht als Bauteil berücksichtigt.



9.1 Wie groß ist die Zeitkonstante τ des Einschwingvorgangs? ($\tau = 2 \text{ ms}$)

9.2 Bestimmen Sie die Zeitfunktion $i(t)$ (und $u_L(t)$).

9.3 Zum Zeitpunkt t_1 wird der Schalter wieder geöffnet. Geben Sie die Zeitkonstante für den Ausschaltvorgang an, sowie die Zeitfunktion $i(t)$ (und $u_L(t)$). ($\tau_A = 0.5 \text{ ms}$)

9.4 Skizzieren Sie $i(t)$ (und $u_L(t)$) für $0 \leq t \leq 2t_1$

Zahlenwerte: $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 150 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Lösung

Einschaltvorgang:

Wegen der Diode fließt kein Strom im Zweig mit R_2

① Zeitkonstante Einschaltvorgang:

$$\tau = \frac{L}{R_1} \quad \leadsto \quad \tau = \frac{0,1 \text{ H}}{50 \Omega} = \underline{\underline{20 \text{ ms}}}$$

② Zeitfunktionen

Maschenatz liefert: $U_0 - IR_1 - L \frac{d}{dt} I = 0$

also die Lösung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$U_L(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ausschaltvorgang:

Bei t_1 wird Schalter geöffnet. Mit $I_1 = I(t_1)$

③ $\leadsto$ also Strom im "reellen Masche" $U_1 = U(t_1)$

$$U_{R_1} + U_{R_2} + U_L = 0$$

$$I(R_1 + R_2) + L \frac{d}{dt} I = 0$$

also: $\frac{d}{dt} I = - \frac{R_1 + R_2}{L} \cdot I$

Lösung mit Trennung der Veränderlichen

$$\int_{I_1}^I \frac{1}{I} dI = \int_{t_1}^t - \frac{R_1 + R_2}{L} dt$$

$$\ln \frac{I}{I_1} = - \frac{R_1 + R_2}{L} (t - t_1)$$

$$I(t) = I_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} (t - t_1)}$$

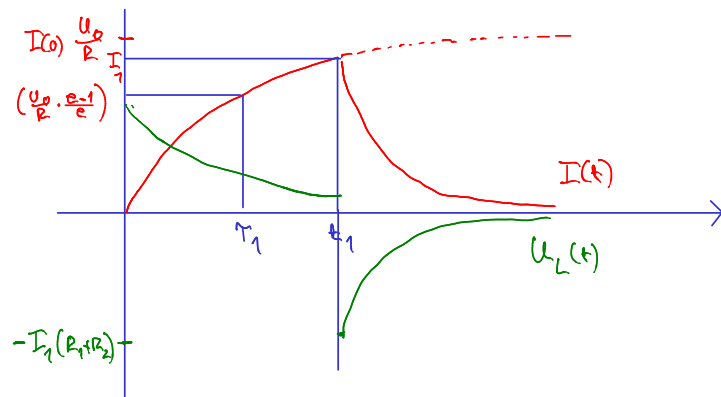
für $t > t_1$

$$\leadsto U_L(t) = -I_1 (R_1 + R_2) \cdot e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} (t - t_1)}$$

$$\tau_A = \frac{L}{R_1 + R_2} \approx 0,5 \text{ ms}$$

$$\tau_A = \frac{0,1 \text{ H}}{200 \, \Omega}$$

④ Skizze



Aufgabe 10: *Einschwingvorgang (Prüfungsaufgabe)*

Lösen Sie Aufgabe 3 der Prüfung 2016_F

Lösung

Gegeben: $U = 40V$ $R_1 = 10\Omega$ $R_2 = 15\Omega$ $R_3 = 30\Omega$ $L = 0,1H$

Ersetzt man sich bei geschlossenem Schalter:

$$R_{23} = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 10\Omega$$

- ① a) Strom an Induktivität kann nicht instantan von 0 auf I springen
also "schwingt das ein"

b) mit $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$

$$\rightarrow u = (R_1 + R_{23}) i - L \frac{d}{dt} i = 0$$

- c) Energie ist in Spule gespeichert mit $W = \frac{1}{2} L i^2$
d.h. Strom i ist energie kennzeichnende Größe

- ② a) Strom fließt im äußeren Masche

$$\rightarrow u_{L, \text{stat}1} = 0 \quad | \quad u_{R_2, \text{stat}1} = 0 \quad | \quad i_{2, \text{stat}1} = 0$$

$$\text{Somit } i_{\text{stat}1} = \frac{U}{R_1 + R_3} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{i_{\text{stat}1} = 1A}} = i_{L, \text{stat}1}$$

$$\text{b.) } i_{\text{stat}2} = \frac{U}{R_1 + R_{23}} \quad \rightarrow \quad i_{\text{stat}2} = \underline{\underline{2A}} = i_{L, \text{stat}2}$$

$$i_{2, \text{stat}2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot i_{\text{stat}2} = \frac{4}{3} A = \underline{\underline{1,33 A}}$$

$$i_{3, \text{stat}2} = i_{\text{stat}2} - i_{2, \text{stat}2} = \frac{2}{3} A = \underline{\underline{0,66 A}}$$

- ③ DGL aufstellen

Maschenregel: $U = U_{R_1} + U_{R_{23}} + U_L$

$$U = (R_1 + R_{23}) \cdot i_L + L \cdot \frac{d}{dt} i_L$$

$$\frac{U}{R_1 + R_{23}} = i_L + \frac{L}{R_1 + R_{23}} \cdot \frac{d}{dt} i_L$$

$$i_{\text{stat}2} = i_L + \tau_1 \cdot \frac{d}{dt} i_L \quad \text{mit} \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_{23}}$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{0,1 \text{ H}}{20 \Omega} = \underline{\underline{5 \text{ ms}}}$$

④ a) DGL

$$U = U_{R_1} + U_{R_3} + U_L$$

$$U = (R_1 + R_3) \cdot i_L + L \frac{d}{dt} i_L$$

$$\frac{U}{R_1 + R_3} = i_L + \frac{L}{R_1 + R_3} \frac{d}{dt} i_L$$

$$i_{\text{stat}1} = i_L + \tau_2 \frac{d}{dt} i_L \quad \text{mit} \quad \tau_2 = \frac{L}{R_1 + R_3} = \frac{0,1 \text{ H}}{40 \Omega} = \underline{\underline{2,5 \text{ ms}}}$$

b) Lösung der DGL hat die Form

$$i_L(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + 1 \text{ A}$$

$$\text{mit } i_L(0) = i_{\text{stat}2} = 2 \text{ A}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ A} = k + 1 \text{ A} \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = 1 \text{ A}}}$$